Нелинейная динамика. 2017. Т. 13. № 4. С. 557–571.
Полнотекстовая версия в свободном доступе http://nd.ics.org.ru
DOI: 10.20537/nd1704008

УДК: 517.938
MSC 2010: 37D20

О гиперболических аттракторах и репеллерах эндоморфизмов

В. З. Гринес, Е. Д. Куренков

Хорошо известно, что топологическая классификация динамических систем с гиперболической динамикой существенным образом определяется динамикой на неблуждающем множестве. Ф. Пшитыцким было дано обобщение аксиомы A, ранее введенной С. Смейлом для диффеоморфизмов, на случай гладких эндоморфизмов, а также доказана теорема о спектральном разложении, утверждающая, что неблуждающее множество A-эндоморфизма представляется в виде объединения базисных множеств.

В настоящей работе приводится критерий того, что базисное множество является аттрактором. Кроме того, изучается динамика на базисных множествах коразмерности один. Показано, что если базисное множество типа $(n-1,1)$ является аттрактором и топологическим подмногообразием коразмерности один, то оно является гладко вложенным подмногообразием, а ограничение эндоморфизма на данное базисное множество является растягивающим эндоморфизмом. Если базисное множество типа $(n,0)$ является топологическим подмногообразием коразмерности один, то оно является репеллером, а ограничение эндоморфизма на данное базисное множество является растягивающим эндоморфизмом.

Ключевые слова: эндоморфизм, аксиома A, базисное множество, аттрактор, репеллер

Получено 20 сентября 2017 года
После доработки 14 ноября 2017 года

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 17-11-01041, за исключением теоремы 3, доказательство которой было выполнено при поддержке программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2017 году (проект Т-90).

Гринес Вячеслав Зигмундович
vgrines@hse.ru
Куренков Евгений Дмитриевич
ekurenkov@hse.ru
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12

1. Введение и формулировка результатов

Хорошо известно, что выполнение аксиомы A С. Смейла и строгое условие трансверсальности является необходимым и достаточным условием структурной устойчивости динамической системы (гладкого потока или каскада, порожденного диффеоморфизмом), заданной на гладком замкнутом многообразии. К настоящему времени для таких систем имеется ряд законченных классификационных результатов, в основе которых лежит теорема С. Смейла о спектральном разложении, утверждающая, что неблуждающее множество структурно устойчивой динамической системы представляется в виде объединения замкнутых инвариантных (базисных) множеств, каждое из которых обладает транзитивной орбитой динамической системы. В ряде важных случаев структура базисных множеств хорошо изучена, что и позволяет получить глобальные классификационные результаты (см., например, работы [2, 4, 5, 7] для информации и ссылок).

Что же касается дискретных динамических систем, порожденных гладкими, но не взаимно-однозначными отображениями (эндоморфизмами), то к настоящему времени имеется небольшое число классов систем, для которых выполняется обобщение аксиомы A С. Смейла и для которых удается описать структуру базисных множеств и получить законченные классификационные результаты. К таким классам относятся эндоморфизмы интервала и окружности [8, 23], эндоморфизмы, возникающие в комплексной динамике на римановой сфере [12, 15], и растягивающие эндоморфизмы многообразий большей размерности [21]. В то же время следует отметить, что структура базисных множеств эндоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A, до сих пор изучена далеко не столь исчерпывающим образом, как это было сделано для диффеоморфизмов. Настоящая работа является одним из шагов в этом направлении. Перейдем к строгим формулировкам.

Под C^r-эндоморфизмом гладкого замкнутого связного многообразия M^n понимается гладкое сюрьективное отображение класса C^r, $r \geqslant 1$. Если эндоморфизм f обладает обратным отображением класса C^r, то он называется C^r-диффеоморфизмом.

Пусть $f\colon M^n \to M^n$ — эндоморфизм класса C^r $(r \geqslant 1)$, заданный на замкнутом многообразии M^n, снабженном римановой метрикой. Положим $\widetilde{M} = \prod\limits_{i=-\infty}^{+\infty} M^n$ — счетное произведение копий многообразия M^n, наделенное тихоновской топологией, и $\widehat{M} = \Big\{\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \in \widetilde{M} \mid f(x_i) = x_{i+1}\Big\}$. Для любой точки $x \in M^n$ положим $\widehat{x} = \Big\{\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \in \widehat{M} \mid x_0 = x\Big\}$.

Если f является диффеоморфизмом, то для любой точки $x \in M^n$ множество $\widehat{x}$ состоит ровно из одной точки. Если же f не является взаимно-однозначным, то это, вообще говоря, не верно, и тогда через $\overline{x}$ будем обозначать некоторый фиксированный элемент из $\widehat{x}$, то есть $\overline{x} = \{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}, x_i \in M, f(x_i) = x_{i+1}, x_0 = x$. Для f-инвариантного множества Λ (т. е. $f(\Lambda) = \Lambda$) введем множество $\widehat{\Lambda} \subset \widehat{M}$ как $\widehat{\Lambda} = \Big\{\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \in \widehat{M} \mid x_i \in \Lambda, \forall i \in \mathbb{Z}\Big\}$. Для $\overline{x} \in \widehat{M}$ обозначим через $\widehat{f}(\overline{x})$ сдвиг $\overline{x}$ (т. е. $\widehat{f}(\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}) = \{x_{i+1}\}_{i\in\mathbb{Z}}$, $\widehat{f}^{-1}(\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}) = \{x_{i-1}\}_{i\in\mathbb{Z}}$).

Пусть $\Lambda \subset M^n$ — замкнутое f-инвариантное (инвариантное относительно эндоморфизма f) множество, то есть $f(\Lambda) = \Lambda$.

Следуя Ф. Пшитыцкому [18], дадим определение гиперболического множества, обобщающее определение для диффеоморфизмов, данное С. Смейлом [20].

Определение 1. Множество Λ эндоморфизма $f\colon M^n \to M^n$ называется гиперболическим, если существуют константы $C > 0$, $0 < \lambda < 1$, такие, что для любых $x \in \Lambda$ и $\overline{x} \in \widehat{x} \cap \widehat{\Lambda}$

($\overline{x} = \{x_i\}_{i\in Z}$) существует представление касательного подрасслоения $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} T_{x_i}M^n$ в виде объединения прямых сумм $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} T_{x_i}M^n = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} E^s_{x_i,\widehat{f}^i(\overline{x})} \oplus E^u_{x_i,\widehat{f}^i(\overline{x})}$ (где символ $\oplus$ означает прямую сумму линейных подпространств), такое, что

1) $Df\left(E^s_{x_i,\widehat{f}^i(\overline{x})}\right) = E^s_{x_{i+1},\widehat{f}^{i+1}(\overline{x})}$, $Df\left(E^u_{x_i,\widehat{f}^i(\overline{x})}\right) = E^u_{x_{i+1},\widehat{f}^{i+1}(\overline{x})}$, где $E^s_{x_i,\widehat{f}^i(\overline{x})}, E^u_{x_i,\widehat{f}^i(\overline{x})} \subset \subset T_{x_i}M^n$,
2) $\|Df^k(v)\| \leqslant C\lambda^k\|v\|$, для любого $k \geqslant 0$, $i \in \mathbb{Z}$, $v \in E^s_{x_i,\widehat{f}^i(\overline{x})}$,
3) $\|Df^k(v)\| \geqslant (1/C)\lambda^{-k}\|v\|$, для любого $k \geqslant 0$, $i \in \mathbb{Z}$, $v \in E^u_{x_i,\widehat{f}^i(\overline{x})}$.

Замечание 1. Можно показать, что устойчивое подпространство $E^s_{x_i,\widehat{f}^i(\overline{x})}$ в касательном пространстве $T_{x_i}M^n$ к точке x не зависит от выбора $\overline{x} \in \widehat{x}$, в то время как для $E^u_{x_i,\widehat{f}^i(\overline{x})}$ это, вообще говоря, не так (см., например, [18]). Кроме того, для дальнейшего заметим, что $E^s_{x_0,\overline{x}} = E^s_{x_0,\widehat{f}^0(\overline{x})}$, а $E^u_{x_0,\overline{x}} = E^u_{x_0,\widehat{f}^0(\overline{x})}$.

Для гладкого отображения $f\colon M^n \to M^n$ точка $x \in M^n$ называется *регулярной*, если ранг отображения $Df(x)\colon T_xM^n \to T_{f(x)}M^n$ в точности равен n. В противном случае точка x называется *критической*.

В работе [18] для эндоморфизмов было предложено обобщение аксиомы A, введенной С. Смейлом в [20] для диффеоморфизмов.

Определение 2. Говорят, что эндоморфизм $f\colon M^n \to M^n$ удовлетворяет аксиоме A (является A-эндоморфизмом), если выполнены следующие условия:

1) неблуждающее множество Ω_f гиперболично и не содержит критических точек эндоморфизма f,
2) множество периодических точек Per_f эндоморфизма f плотно в неблуждающем множестве Ω_f.

Для A-эндоморфизма имеет место теорема о спектральном разложении, доказанная в [18] и обобщающая соответствующий результат, полученный С. Смейлом в [20].

Предложение 1. *Пусть эндоморфизм f удовлетворяет аксиоме A. Тогда его неблуждающее множество Ω_f единственным образом представляется в виде объединения конечного числа непересекающихся замкнутых f-инвариантных подмножеств (называемых базисными множествами) $\Omega_f = \bigcup\limits_{i=1}^{l} \Omega_i$, таких, что ограничение f на каждое базисное множество является топологически транзитивным.*

Определение 3. Базисное множество Λ эндоморфизма f называется аттрактором, если существует его замкнутая окрестность[1] U, такая, что $f(U) \subset \operatorname{Int} U$ и $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} f^n(U) = \Lambda$.

Определение 4. Базисное множество Λ эндоморфизма f называется репеллером, если существует его открытая окрестность U такая, что $\operatorname{cl}(U) \subset f(U)$ и $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U) = \Lambda$[2].

[1] Множество U будем называть замкнутой окрестностью множества K, если U замкнуто и $K \subset \operatorname{int} U$.

[2] Под $f^{-1}(A)$ понимается полный прообраз множества A, а под $f^{-n}(A)$ понимается $(f^n)^{-1}(A)$.

Следующее определение принадлежит М. Шубу [21].

Определение 5. C^r-эндоморфизм $f\colon M^n \to M^n$ называется растягивающим, если существуют константы $C > 0$ и $\lambda > 1$, такие, что $\|Df^n(v)\| \geqslant C\lambda^n\|v\|$ для любого $v \in TM^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Наличие гладкой структуры на многообразии M^n не является обязательным условием для того, чтобы задать растягивающий эндоморфизм. Определение растягивающего эндоморфизма, заданного на произвольном метрическом пространстве, было предложено в книге [11].

Определение 6. Непрерывное отображение $f\colon X \to X$ метрического пространства X называется растягивающим, если существуют такие константы $\varepsilon > 0$ и $\mu > 1$, что для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, $\rho(x, y) < \varepsilon$ выполняется неравенство $\rho(f(x), f(y)) > \mu\rho(x, y)$.

В том случае, когда X является C^1-гладким компактным многообразием и f является C^1-гладким, выполнение условий определения 6 влечет за собой выполнение условий определения 5 (см. [11]).

Из определения 5 следует, что объемлющее многообразие M^n растягивающего эндоморфизма f является гиперболическим множеством. Более того, в работе [21] доказано, что если M^n компактно, то периодические точки растягивающего эндоморфизма f плотны в M^n. Таким образом, любой растягивающий эндоморфизм компактного многообразия автоматически удовлетворяет аксиоме A, а его неблуждающее множество совпадает со всем объемлющим многообразием. В той же работе было показано, что любое гладкое компактное многообразие, допускающее растягивающий эндоморфизм, имеет эйлерову характеристику, равную нулю, а его универсальное накрывающее пространство диффеоморфно $\mathbb{R}^n$. Если компактное многообразие M^n является плоским[3], то, как следует из работы [10], на нем существует растягивающий эндоморфизм.

В работе [21] показано, что если многообразие M^n диффеоморфно n-мерному тору $\mathbb{T}^n$, то растягивающий эндоморфизм f топологически сопряжен с алгебраическим растягивающим автоморфизмом этого тора.[4]

Определение 7. Эндоморфизм $f\colon M^n \to M^n$ называется эндоморфизмом Аносова, если все объемлющее многообразие M^n является гиперболическим множеством эндоморфизма f.

Из определения 7 следует, что растягивающий эндморфизм является частным случаем аносовского.

Наряду с растягивающими эндоморфизмами, примерами эндоморфизмов, для которых объемлющее многообразие является единственным базисным множеством, являются аносовские алгебраические эндоморфизмы n-мерного тора, такие, что задающие их матрицы $A_{n\times n}$ имеют собственные значения, по модулю большие или меньшие единицы, и не имеют собственных значений, модуль которых равен единице.

Как известно, произвольный диффеоморфизм Аносова, заданный на n-мерном торе, сопряжен с алгебраическим гиперболическим автоморфизмом [14, 16, 22]. Что же касается

[3]То есть таким, у которого кривизна всюду равна нулю.

[4]Под алгебраическим эндоморфизмом n-мерного тора $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ понимается эндоморфизм, заданный матрицей $A_{n\times n}$ с целочисленными коэффициентами по формуле $\overline{X} = A_{n\times n}X \mod 1$. Заметим, что алгебраический эндоморфизм является растягивающим тогда и только тогда, когда модули всех собственных значений матрицы $A_{n\times n}$ больше единицы.

аносовских эндоморфизмов, не являющихся диффеоморфизмами и растягивающими эндоморфизмами, то такой результат, вообще говоря, не имеет места, что следует из работ [13, 18]. Более того, в работе [24] показано, что во множестве эндоморфизмов Аносова на n-мерном торе множество эндоморфизмов, не сопряженных с алгебраическим, образуют массивное множество. Таким образом, вопрос о том, является ли объемлющее многообразие неблуждающим множеством любого аносовского эндоморфизма, остается открытым.

В силу [1] и [21], диффеоморфизмы Аносова и растягивающие эндоморфизмы структурно утойчивы. Однако Ф. Пшитыцким [18] (и независимо авторами работы [13]) было доказано, что аносовские эндоморфизмы, отличные от растягивающих эндоморфизмов и диффеоморфизмов, уже не являются структурно устойчивыми.

Для базисного множества Λ эндоморфизма $f\colon M^n \to M^n$, удовлетворяющего аксиоме A, пару чисел $(\dim E^u_{x_i\widehat{f}^i(\overline{x})}, \dim E^s_{x_i\widehat{f}^i(\overline{x})})$ будем называть *типом* базисного множества Λ. Из работы [18] следует, что данное определение корректно, поскольку $\dim E^u_{x_i\widehat{f}^i(\overline{x})}$ и $\dim E^s_{x_i\widehat{f}^i(\overline{x})}$ не зависят от $\overline{x} \in \widehat{\Lambda}$ и $x_i \in \overline{x}$.

В том случае, когда f является A-диффеоморфизмом, хорошо изучена структура базисных множеств коразмерности один. В силу результатов Р. В. Плыкина [17], любое базисное множество коразмерности один необходимо является либо аттрактором, либо репеллером. В случае, когда $n = 2$, оно локально устроено как прямое произведение канторовского множества на отрезок. В серии работ Х. Бонатти, В. З. Гринеса, Р. В. Плыкина, А. Ю. Жирова и Р. Ланжевена была получена топологическая классификация ограничений A-диффеоморфизмов на одномерные базисные множества и топологическая классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей с такими базисными множествами (см., например, [4] для информации и ссылок).

Если $f\colon M^3 \to M^3$ — A-диффеоморфизм замкнутого 3-многообразия, а Λ — двумерное базисное множество типа $(2, 1)$ $((1, 2))$, совпадающее с объединением неустойчивых (устойчивых) многообразий своих точек, то оно называется *растягивающимся аттрактором* (*сживающимся репеллером*) и оно локально гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{R}^2$ на канторовское множество. Если же Λ двумерно и не совпадает с объединением неустойчивых (устойчивых) многообразий его точек, то, как следует из [3, 17], Λ гомеоморфно 2-тору $\mathbb{T}^2$, а ограничение f_Λ топологически сопряжено алгебраическому диффеоморфизму Аносова. Более того, в работах [6, 7] получена топологическая классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов трехмерных многообразий, неблуждающее множество которых содержит двумерное базисное множество (состоит из двумерных базисных множеств).

В настоящей работе устанавливается критерий того, что базисное множество Λ является аттрактором эндоморфизма $f\colon M^n \to M^n$. Кроме того, изучается динамика ограничения A-эндоморфизма $f\colon M^n \to M^n$ на базисное множество Λ, являющееся подмногообразием коразмерности один. Выясняется также наличие гладкой структуры на таком базисном множестве.

Теорема 1. *Базисное множество Λ A-эндоморфизма $f\colon M^n \to M^n$ является аттрактором тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$, такое, что для любой точки $x \in \Lambda$ и любого $\overline{x} \in \widehat{x} \cap \widehat{\Lambda}$ имеет место включение $W^u_{x,\overline{x},\varepsilon} \subset \Lambda$.*[5]

[5] Определение $W^u_{x,\overline{x},\varepsilon}$ дано в разделе 2 (определение 8).

Теорема 2. *Пусть базисное множество Λ A-эндоморфизма $f\colon M^n \to M^n$ имеет тип $(n, 0)$ и является замкнутым топологическим подмногообразием коразмерности один многообразия M^n. Тогда*

1) *Λ является репеллером,*

2) *ограничение эндоморфизма f на Λ является растягивающим эндоморфизмом.*[6]

Замечание 2. Если в условиях теоремы 2 A-эндоморфизм $f\colon M^n \to M^n$ является A-диффеоморфизмом, то теорема справедлива лишь в случае, когда $n = 1$, в случае же $n > 1$ A-эндоморфизм $f\colon M^n \to M^n$ в условиях теоремы необходимо не является диффеоморфизмом, так как в противном случае базисное множество типа $(n, 0)$ является периодической источниковой орбитой и не является подмногообразием коразмерности один.

Замечание 3. Базисное множество Λ в теореме 2, являющееся топологическим многообразием, не обязательно гладко вложено в M^n. Примером может служить отображение римановой сферы, порожденное отображением вида $z \to z^2 + c$ (z принадлежит комплексной плоскости). При всех достаточно малых, отличных от нуля, значениях параметра c нетривиальное (отличное от неподвижной точки) базисное множество является репеллером, гомеоморфно окружности и не является гладким ни в одной точке (см., например, [12]).

Замечание 4. Существуют репеллеры типа $(n, 0)$, не являющиеся подмногообразиями. Известно, например, что эндоморфизмы поверхностей, возникающие в комплексной динамике, могут обладать одномерными репеллерами, имеющими фрактальную структуру [12, 15].

Теорема 3. *Пусть базисное множество Λ есть аттрактор A-эндоморфизма $f\colon M^n \to M^n$, имеет тип $(n-1, 1)$ и является замкнутым компактным топологическим подмногообразием коразмерности один многообразия M^n. Тогда*

1) *Λ является гладким подмногообразием,*

2) *ограничение эндоморфизма f на Λ является растягивающим эндоморфизмом.*[7]

Замечание 5. Существуют аттракторы типа $(n-1, 1)$, которые не являются топологическими подмногообразиями. В качестве примера можно рассмотреть эндоморфизм трехмерного тора $f\colon \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$, заданный как прямое произведения растягивающего эндоморфизма окружности и DA-диффеоморфизма двумерного тора с одномерным аттрактором (см., например, [20]). Тогда неблуждающее множество эндоморфизма f содержит аттрактор Λ типа $(2, 1)$, локально устроенный как прямое произведение канторовского множества на двумерный диск.

2. Вспомогательные сведения

Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — гладкая риманова метрика на TM^n, а ρ — метрика на M^n, индуцированная $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Пусть Λ — инвариантное гиперболическое множество эндоморфизма f. Тогда для точек гиперболического множества, как и в случае диффеоморфизмов, можно ввести понятия локального устойчивого и неустойчивого многообразий. При этом из замечания 1 следует, что существенное отличие эндоморфизмов от диффеоморфизмов состоит в том, что у эндоморфизмов, в силу отсутствия обратного отображения, локальное неустойчивое многообразие зависит, вообще говоря, от выбора $\overline{x} \in \widehat{x} \cap \widehat{\Lambda}$, тогда как локальное устойчивое многообразие определяется однозначно.

[6] В смысле определения 6 в метрике на M^n, индуцированной метрикой $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Lambda$, определенной в предложении 2.

[7] В смысле определения 5.

Определение 8. Пусть Λ — гиперболическое инвариантное множество эндоморфизма $f\colon M^n \to M^n$ и $x \in \Lambda$, $\overline{x} \in \widehat{x} \cap \widehat{\Lambda}$. Множество

$$W^s_{x,\varepsilon} = \{y \in M^n \mid \rho(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon, n = 0, 1, 2, \ldots\}$$

называется локальным устойчивым многообразием точки x, а множество

$$W^u_{x,\overline{x},\varepsilon} = \{y \in M^n \mid \exists\, \overline{y} \in \widehat{y}, \rho(x_n, y_n) < \varepsilon, n = 0, -1, -2, \ldots\}$$

называется локальным неустойчивым многообразием точки x.

Структура гиперболических множеств эндоморфизмов подробно изучалась в [18]. Приведем некоторые важные для данной работы результаты.

Предложение 2. *Для любого гиперболического множества Λ эндоморфизма f существует гладкая риманова метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Lambda$ на TM, эквивалентная метрике $\langle\cdot,\cdot\rangle$, ассоциированная с гиперболическим множеством Λ, и число λ, $0 < \lambda < 1$, такие, что для любых $x \in \Lambda$ и $\overline{x} \in \widehat{x} \cap \widehat{\Lambda}$ имеют место неравенства*

$$\|Df_{x_i}(v)\|_\Lambda \leqslant \lambda \|v\|_\Lambda, \qquad \text{где} \quad v \in E^s_{x_i, \widehat{f}^i(\overline{x})},$$

$$\|Df_{x_i}(v)\|_\Lambda \geqslant (1/\lambda) \|v\|_\Lambda, \qquad \text{где} \quad v \in E^u_{x_i, \widehat{f}^i(\overline{x})},$$

$i \in \mathbb{Z}$.

Предложение 3. *Пусть Λ — гиперболическое множество эндоморфизма f, тогда*

1) *существует $\varepsilon > 0$, такое, что для любых $x \in \Lambda$ и $\overline{x} \in \widehat{x} \cap \widehat{\Lambda}$, локальное устойчивое $W^s_{x,\varepsilon}$ и локальное неустойчивое $W^u_{x,\overline{x},\varepsilon}$ многообразия являются гладко вложенными дисками топологической размерности $\dim E^s_{x_0,\overline{x}}$ и $\dim E^u_{x_0,\overline{x}}$, касающимися $E^s_{x_0,\overline{x}}$ и $E^u_{x_0,\overline{x}}$ в точке x,*
2) *$W^s_{x,\varepsilon}$ непрерывно зависит от точки $x \in \Lambda$ в C^1-топологии, а $W^u_{x,\overline{x},\varepsilon}$ непрерывно зависит от $\overline{x} \in \widehat{\Lambda}$ в C^1-топологии,*
3) *существует такое $\mu > 1$, что в метрике ρ на M^n, индуцированной римановой метрикой $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Lambda$, верны следующие утверждения:*
   (a) *для любых $y, z \in W^s_{x,\varepsilon}$ выполнены неравенства $\rho(f^{n+1}(y), f^{n+1}(z)) \leqslant (1/\mu)\times$ $\times\rho(f^n(y), f^n(z))$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,*
   (b) *а для любых двух точек $y, z \in W^u_{x,\overline{x},\varepsilon}$ и $\overline{y} \in \widehat{y}$, $\overline{z} \in \widehat{z}$, удовлетворяющих системе неравенств, входящих в определение $W^u_{x,\overline{x},\varepsilon}$, выполнены неравенства $\rho(y_{-n-1}, z_{-n-1}) \leqslant (1/\mu)\rho(y_{-n}, z_{-n})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.*

Предложение 4. *Пусть $f\colon M^n \to M^n$ — эндоморфизм, удовлетворяющий аксиоме А, и $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{l} \Lambda_j$ — его спектральное разложение. Тогда*

1) *для любой точки $x \in M^n$ существует единственное базисное множество Λ_{j_1} ($j_1 = \overline{1, l}$), такое, что $f^k(x) \to \Lambda_{j_1}$ при $k \to +\infty$; более того, существует такая точка $y \in \Lambda_{j_1}$, что $\rho(f^k(x), f^k(y)) \to 0$ при $k \to +\infty$,*
2) *для любого $\overline{x} \in \widehat{M}$ существует единственное базисное множество Λ_{j_2} ($j_1 = \overline{1, l}$), такое что $x_i \to \Lambda_{j_2}$ при $i \to -\infty$; более того, существует такое $\overline{y} \in \widehat{\Lambda}_{j_2}$, что $\rho(x_i, y_i) \to 0$ при $i \to -\infty$.*

Обозначим через $B_\delta(x)$ открытый шар радиуса $\delta > 0$ с центром в точке $x \in M^n$ (т. е. $B_\delta(x) = \{y \in M^n \mid \rho(x, y) < \delta\}$), а через $\overline{B}_\delta(x)$ — замкнутый шар радиуса δ в центом точке x (т. е. $\overline{B}_\delta(x) = \{y \in M^n \mid \rho(x, y) \leqslant \delta\}$).

Следующие утверждения, доказательство которых мы приводим для полноты изложения, являются следствием компактности подмножества K многообразия M^n и определения регулярной точки гладкого эндоморфизма $f\colon M^n \to M^n$.

Лемма 1. *Пусть K — произвольное компактное множество некоторого метрического пространства X, и U — открытая окрестность K. Тогда существует $\delta > 0$, такое, что для любой точки $x \in K$ выполнено включение $B_\delta(x) \subset U$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда для любого $\delta > 0$ существует такая точка $x \in K$, что $B_\delta(x) \setminus U \neq \varnothing$. Рассмотрим последовательность положительных чисел $\{\delta_i\}_{i=1}^{\infty}$, такую, что $\delta_i \to 0$ при $i \to \infty$, и последовательность точек $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, такую, что $B_{\delta_i}(x_i) \setminus U \neq \varnothing$. Так как K компактно, то без ограничения общности последовательность x_i можно считать сходящейся к некоторой точке $x_0 \in K$. Так как U открыто, то найдется $\delta_0 > 0$, такое, что $B_{\delta_0}(x_0) \subset U$. Ввиду сходимости последовательностей $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\delta_i\}_{i=0}^{\infty}$ найдется такой номер $k \in \mathbb{N}$, что будут верны неравенства $\rho(x_0, x_k) < \delta_0/2$ и $\delta_k < \delta_0/2$.

Рассмотрим произвольную точку $y \in B_{\delta_k}(x_k)$. В силу цепочки неравенств $\rho(x_0, y) \leqslant \rho(x_0, x_k) + \rho(x_k, y) < \delta_0/2 + \delta_k < \delta_0$ имеем $y \in B_{\delta_0}(x_0) \subset U$. Таким образом, ввиду произвольности выбора $y \in B_{\delta_k}(x_k)$ получаем противоречие с тем что $B_{\delta_k}(x_k) \setminus U \neq \varnothing$. ∎

Лемма 2. *Пусть f — произвольный C^r-эндоморфизм ($r \geqslant 1$) и пусть $K \subset M^n$ — компактное подмножество, состоящее из регулярных точек эндоморфизма f. Тогда найдутся $\varepsilon > 0$ и открытая окрестность V множества K, такие, что если $x', x'' \in V$ и $\rho(x', x'') < \varepsilon$, то $f(x') \neq f(x'')$.*

Доказательство. Так как для любой точки $x \in K$ касательное отображение $Df_x\colon T_xM^n \to T_{f(x)}M^n$ невырожденно, то из теоремы о неявной функции следует существование окрестности $U(x)$ точки x, такой, что ограничение $f|_{U(x)}\colon U(x) \to f(U(x))$ является диффеоморфизмом. Рассмотрим открытое покрытие $U = \bigcup\limits_{x \in K} U(x)$ множества K такими окрестностями. Так как M^n — нормальное топологическое пространство, то существует открытая окрестность V множества K, такая, что $U \supset \mathrm{cl}\,(V) \supset V \supset K$ (см., например, [9]).

Так как многообразие M^n компактно, то множество $\mathrm{cl}\,(V)$ также компактно. Из леммы Лебега[8] найдется число $\lambda > 0$, такое, что для любой пары точек $x', x'' \in \mathrm{cl}\,(V)$, таких, что $\rho(x', x'') < \lambda$, найдется элемент покрытия $U(x)$, содержащий x' и x''. Если положить $\varepsilon = \lambda$, то V будет искомой окрестностью. ∎

[8]Пусть X — компактное метрическое пространство, а $\{U\}$ — его открытое покрытие. Тогда найдется такое число $\lambda > 0$ (называемое числом Лебега), что любое подмножество X диаметром меньше λ целиком принадлежит некоторому подмножеству $\{U\}$ (см., например, [9]). Данная лемма верна также и для любого компактного подмножества метрического пространства и его открытого покрытия данного подмножества.

3. Критерий существования аттрактора (доказательство теоремы 1)

Для базисного множества Λ эндоморфизма f, удовлетворяющего аксиоме A, будем предполагать использовать далее риманову метрику $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Lambda$, определенную на TM^n в предложении 2 и индуцирующую метрику ρ на M^n.

Доказательство теоремы 1 будет следовать из доказательства лемм 3, 4 и 5.

Лемма 3. *Пусть f — A-эндоморфизм, и пусть Λ — его базисное множество, являющееся аттрактором. Тогда существует $\varepsilon>0$, такое, что для любых $x\in\Lambda$ и $\overline{x}\in\widehat{x}\cap\widehat{\Lambda}$ имеет место включение $W^u_{x,\overline{x},\varepsilon}\subset\Lambda$.*

Доказательство. Пусть Λ имеет тип $(k,n-k)$. В случае $k=0$ лемма очевидна, поскольку $W^u_{x,\overline{x},\varepsilon}$ совпадает с точкой x. Таким образом, будем полагать, что $k\geqslant 1$. Предположим, что Λ не совпадает с объемлющим многообразием M^n (в противном случае утверждение очевидно). Пусть U — замкнутая окрестность из определения 3 аттрактора эндоморфизма f. Так как Ω не содержит критических точек, то касательное отображение $Df_x\colon T_xM^n\to T_xM^n$ невырожденно для любой точки $x\in\Lambda$. Из теоремы о неявной функции следует, что существует окрестность $V(x)$ точки x, такая, что ограничение $f_{V(x)}$ является диффеоморфизмом. Тогда для любого $\ell\geqslant 0$ множество $f^\ell(U)$ содержит открытую окрестность множества Λ. Действительно, при $\ell=0$ это непосредственно следует из определения аттрактора. Множество $V_1=\bigcup\limits_{x\in\Lambda}f(\operatorname{int}U\cap V(x))$ есть открытое множество, такое, что $\Lambda\subset V_1\subset f(U)$. Применяя такое же рассуждение к окрестности V_1, а далее к $V_2,V_3\ldots$, по индукции получаем требуемый факт для f^ℓ при $\ell\geqslant 1$.

Выберем ε, удовлетворяющее заключению утверждения 3, и предположим, что утверждение леммы неверно; тогда найдется точка $x\in\Lambda$ и $\overline{x}\in\widehat{x}\cap\widehat{\Lambda}$, такие, что $W^u_{x,\overline{x},\varepsilon}\not\subset\Lambda$. Из предложения 3 следует, что $W^u_{x,\overline{x},\varepsilon}$ гомеоморфно k-мерному диску. Тогда найдется точка $y\in(U\setminus\Lambda)\cap W^u_{x,\overline{x},\varepsilon}$. По определению аттрактора, $f^l(y)\to\Lambda$ при $l\to+\infty$. По определению аттрактора, $\bigcap\limits_{j=0}^{+\infty}f^j(U)=\Lambda$, следовательно, найдется $m\in\mathbb{N}$, такое, что $y\notin f^m(U)$. Из пункта 3 предложения 3 следует, что для точки y найдется $\overline{y}\in\widehat{y}$, такое, что $\rho(y_l,\Lambda)\to 0$ при $l\to-\infty$. Отсюда и из того, что $f^m(U)$ содержит открытую окрестность Λ, следует существование числа $t\in\mathbb{N}$, такого, что $y_{-t}\in f^m(U)$ и $f^t(y_{-t})=y$. Так как $f^t(f^m(U))\subset f^m(U)$, то $y=f^t(y_{-t})\in f^m(U)$, что противоречит выбору числа m. ■

Лемма 4. *Пусть Λ — базисное множество A-эндоморфизма типа $(n,0)$. Если существует $\varepsilon_1>0$, такое, что $W^u_{x,\overline{x},\varepsilon_1}\subset\Lambda$ для любой точки $x\in\Lambda$ и для некоторого $\overline{x}\in\widehat{x}\cap\widehat{\Lambda}$, то Λ совпадает с объемлющим многообразием M^n.*

Доказательство. Положим $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$, где ε_2 удовлетворяет заключению предложения 3. Так как Λ имеет тип $(n,0)$, то в силу предложения 3 локальное неустойчивое многообразие $W^u_{x,\overline{x},\varepsilon}$ содержит открытый n-мерный диск. Следовательно, Λ является открытым множеством. Таким образом, Λ одновременно является открытым и замкнутым, и поэтому совпадает с M^n. ■

Лемма 5. *Пусть Λ — базисное множество A-эндоморфизма типа $(k,n-k)$, $0\leqslant k\leqslant n-1$. Если существует $\varepsilon_1>0$, такое, что для любой точки $x\in\Lambda$ и для некоторого $\overline{x}\in\widehat{x}\cap\widehat{\Lambda}$ выполняется включение $W^u_{x,\overline{x},\varepsilon_1}\subset\Lambda$, то Λ является аттрактором.*

Доказательство. Положим $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, где ε_2 удовлетворяет заключению утверждения 3.

Пусть $x \in \Lambda$. Так как $W^s_{x,\varepsilon}$ — гладко вложенный $(n-k)$-мерный диск, то найдется $\delta(x) > 0$, такое, что для любого η, удовлетворяющего неравенству $0 < \eta \leqslant \delta(x)$, выполняются следующие свойства:

1) пересечение $\overline{B}_\eta(x) \cap W^s_\varepsilon$ состоит из одной компоненты связности,

2) пересечение $\partial\overline{B}_\eta(x) \cap W^s_{x,\varepsilon}$ гомеоморфно $(n-k-1)$-мерной сфере.

Покажем, что $\delta > 0$ можно выбрать независящим от точки x, то есть для любой точки $x \in \Lambda$ и для любого η, удовлетворяющего неравенствам $0 < \eta \leqslant \delta$, выполняются свойства 1 и 2.

Предположим противное. Тогда существует последовательность $\{\delta_i\}_{i=1}^{+\infty}$, $\delta_i > 0$ и $\delta_i \to 0$ при $i \to \infty$, такая, что для любого δ_i найдется по крайней мере одна точка $x_i \in \Lambda$, такая, что для δ_i не выполняется по крайней мере одно из свойств 1 или 2 в точке x_i. Так как Λ компактно, то без ограничения общности можно считать последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ сходящейся к некоторой точке $x_0 \in \Lambda$. Тогда для точки x_0 найдется $\delta_0 > 0$, удовлетворяющее условиям 1, 2. Из непрерывной зависимости $W^s_{x,\varepsilon}$ от точки $x \in \Lambda$ в C^1-топологии следует, что найдется такая окрестность V точки x_0, что $\delta_0/2$ удовлетворяет условиям 1, 2 в любой точке $x \in V \cap \Lambda$. Это противоречит тому, что $V \cap \Lambda$ содержит точки последовательности $\{x_i\}_{i=1}^{+\infty}$, такие, что $\delta_i < \delta_0/2$.

Пусть δ такое, что условия 1, 2 имеют место в любой точке $x \in \Lambda$ при $0 < \eta \leqslant \delta$. Положим $U = \bigcup\limits_{x\in\Lambda} \left(\overline{B}_\delta(x) \cap W^s_{x,\varepsilon}\right)$.

Покажем, что U является замкнутой окрестностью аттрактора. В силу выбора δ для любой точки $x \in \Lambda$ множество $\overline{B}_\delta(x) \cap W^s_{x,\varepsilon}$ гомеоморфно замкнутому $(n-k)$-мерному диску. Рассмотрим произвольную точку $x \in \Lambda$ и $\overline{x} \in \widehat{x} \cap \widehat{\Lambda}$, такие, что имеет место включение $W^u_{x,\overline{x},\varepsilon} \subset \Lambda$. Так как неустойчивое многообразие $W^u_{x,\overline{x},\varepsilon}$ является гладко вложенным k-мерным диском, а устойчивое многообразие $W^s_{x,\varepsilon}$ непрерывно зависит от точки x в C^1-топологии, то множество $\bigcup\limits_{x\in W^u_{x,\overline{x},\varepsilon}} \left(\overline{B}_\delta(x) \cap W^s_{x,\varepsilon}\right) \subset U$ гомеоморфно прямому произведению открытого k-мерного диска на $(n-k)$-мерный замкнутый диск, и $x \in \operatorname{int}\left(\bigcup\limits_{x\in W^u_{x,\overline{x},\varepsilon}} \left(\overline{B}_\delta(x) \cap W^s_{x,\varepsilon}\right)\right)$. Таким образом, $\Lambda \subset \operatorname{int} U$.

Покажем, что U — замкнутое множество. Рассмотрим произвольную точку $y \in \mathrm{cl}(U)$. Существует последовательность точек $\{y_i\}_{i=1}^{+\infty}$, $y_i \in U$, сходящаяся к y_0. По построению, для любого элемента последовательности $\{y_i\}_{i=1}^{+\infty}$ найдется точка $x_i \in \Lambda$, такая, что $y_i \in W^s_{x_i,\varepsilon}$ и $\rho(x_i, y_i) \leqslant \delta$. Так как Λ компактно, то без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{+\infty}$ сходится к некоторой точке $x_0 \in \Lambda$. Метрика ρ, как отображение из прямого произведения $M^n \times M^n$ в $\mathbb{R}$, является непрерывной функцией. Так как последовательность точек (x_i, y_i) сходится в $M^n \times M^n$ к точке (x_0, y) и $\rho(x_i, y_i) \leqslant \delta$ для любого $i \in \mathbb{N}$, то имеет место неравенство $\rho(x_0, y) \leqslant \delta$. В силу непрерывной зависимости $W^s_{x,\varepsilon}$ от точки $x \in \Lambda$ в C^1-топологии точка y принадлежит множеству $W^s_{x_0,\varepsilon}$. Таким образом, $y \in \overline{B}_\delta(x_0) \cap W^s_{x_0,\varepsilon}$, и поэтому $y \in U$.

Покажем, что $f(U) \subset \operatorname{int}(U)$. Рассмотрим произвольную точку $y \in U$. По построению, найдется точка $x \in \Lambda$, такая, что $x \in \overline{B}_\delta(x_0) \cap W^s_{x,\varepsilon}$. В силу пункта 3 предложения 3 имеет место неравенство $\rho(f(y), f(x)) \leqslant \delta/\mu$ для некоторого $\mu > 1$. Таким образом, $f(y)$ принадлежит внутренности $(n-k)$-мерного замкнутого диска $\overline{B}_\delta(f(x)) \cap W^s_{f(x),\varepsilon}$. В силу непрерывной зависимости локальных устойчивых многообразий от точки в C^1-топологии имеет место включение $y \in \operatorname{int} U$.

По построению, для любой точки $y \in U$ найдется точка $x \in \Lambda$, такая, что $y \in W^s_{x,\varepsilon}$. Тогда из пункта 3 предложения 3 следует равенство $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} f^n(U) = \Lambda$. Таким образом, U является искомой окрестностью из определения аттрактора. ■

3.1. Доказательство теоремы 2

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 2, докажем следующие леммы.

Лемма 6. *Пусть Λ — базисное множество типа $(n, 0)$ эндоморфизма f, и $\varepsilon > 0$ удовлетворяет заключению утверждения 3. Тогда существует $\delta > 0$, такое, что для любой точки $x \in \Lambda$ и $\overline{x} \in \widehat{x} \cap \widehat{\Lambda}$ имеет место включение $B_\delta(x) \subset (W^u_{x,\overline{x},\varepsilon})$.*

Доказательство. Из непрерывности f и компактности Λ следует, что множество $\widehat{\Lambda}$ является замкнутым подмножеством $\widetilde{M}$. В силу компактности M^n множество $\widetilde{M}$ также компактно. Так как $\widehat{\Lambda}$ — замкнутое множество, то оно компактно, как подмножество компактного пространства.

Предположим, что утверждение леммы неверно, тогда существует последовательность $\{\overline{x}^i\}_{i=1}^{\infty}$ точек в $\widehat{\Lambda}$ и последовательность чисел $\{\delta_i\}_{i=1}^{\infty}$, такие, что $B_{\delta_i}(x) \setminus W^u_{x^i_0,\overline{x}^i,\varepsilon} \neq \varnothing$ и $\delta_i \to 0$ при $i \to \infty$. Без ограничения общности будем считать, что исходная последовательность $\{\overline{x}^i\}_{i=0}^{\infty}$ является сходящейся к некоторой точке $\overline{x}^0 \in \Lambda$. Тогда в силу пункта 1 предложения 3 локальное неустойчивое многообразие $W^u_{x^0_0,\overline{x}^0,\varepsilon}$ содержит открытый диск $B_{\delta_0}(x^0_0)$. В силу пункта 2 того же предложения найдется целое число N, такое, что для любого $i > N$ имеет место равенство $B_{\delta_0/2}(x) \subset W^u_{x^i_0,\overline{x}^i,\varepsilon}$, что противоречит выбору последовательностей $\{\overline{x}^i\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{\delta_i\}_{i=0}^{\infty}$. ■

Лемма 7. *Пусть Λ — базисное множество A-эндоморфизма f, являющееся топологическим подмногообразием коразмерности один. Тогда существует открытая окрестность U базисного множества Λ, такая, что $f^{-1}(\Lambda) \cap U = \Lambda$.*

Доказательство. Предположим противное; тогда для любой окрестности U множества Λ найдется точка $x \in U \setminus \Lambda$, такая, что $f(x) \in \Lambda$. Следовательно, найдется последовательность $\{x_i\}_{i=0}^{+\infty}$, $x_i \in M^n \setminus \Lambda$, такая, что $\rho(x_i, \Lambda) \to 0$ при $i \to +\infty$ и $f(x_i) \in \Lambda$ для любого $i \in \mathbb{N}$. В силу компактности M^n последовательность $\{x_i\}_{i=0}^{+\infty}$ можно считать сходящейся к некоторой точке $x_0 \in \Lambda$. По теореме о неявной функции, найдется окрестность V_1 точки x_0, такая, что ограничение f на V_1 является локальным диффеоморфизмом. Так как Λ является топологическим $(n-1)$-мерным подмногообразием, то найдется окрестность V_2 точки x_0, такая, что $V_2 \cap \Lambda$ гомеоморфно $(n-1)$-мерному диску. Пусть V — открытый диск, такой, что $x \in V \subset V_1 \cap V_2$. Множество $V \cap \Lambda$ также гомеоморфно открытому $(n-1)$-мерному диску, диффеоморфный образ которого (ввиду инвариантности Λ) содержится в $f(V) \cap \Lambda$, причем $f(x_0) \in f(V) \cap \Lambda$. Так как $x_i \to x_0$ при $i \to +\infty$, $f(x_i) \in \Lambda$, то в силу непрерывности f для достаточно больших значений i имеет место включение $f(x_i) \in f(V) \cap \Lambda$. То есть ограничение эндоморфизма f на окрестность V оказывается неинъективным отображением, что противоречит тому, что ограничение $f|_V$ является диффеоморфизмом. ■

Лемма 8. *Пусть Λ — базисное множество А-эндоморфизма f имеет тип $(n, 0)$ и является топологическим подмногообразием коразмерности один. Тогда существует окрестность Q множества Λ, такая, что f является растягивающим на Q в смысле определения 6.*[9]

Доказательство. Пусть ε_1 удовлетворяет заключению предложения 3, и Π — окрестность Λ, удовлетворяющая заключению леммы 2 с некоторой константой $\varepsilon_2 > 0$. Так как Λ является базисным множеством A-эндоморфизма f, то найдется $x \in \Lambda$, такое, что множество $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} f^i(x)$ плотно в Λ. Зафиксируем некоторый элемент $\overline{x} \in \widehat{x} \cap \widehat{\Lambda}$. В силу леммы 1, найдется $\varepsilon_3 > 0$, такое, что верно включение $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} W^u_{x_i, \widehat{f}^i(\overline{x}), \varepsilon_3} \subset \Pi$.

Положим $\varepsilon = \min\left\{\varepsilon_1, \dfrac{\varepsilon_2}{2}, \varepsilon_3\right\}$ и $V = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} \left[W^u_{x_i, \widehat{f}^i(\overline{x}), \varepsilon} \cap f^{-1}\left(W^u_{x_{i+1}, \widehat{f}^{i+1}(\overline{x}), \varepsilon}\right)\right]$.

По построению, точки из множества V удовлетворяет следующим свойствам:

1) если $y \in W^u_{x_i, \widehat{f}^i(\overline{x}), \varepsilon} \cap V$, то $f(y) \in W^u_{x_{i+1}, \widehat{f}^{i+1}(\overline{x}), \varepsilon}$,
2) если $y_1, y_2 \in W^u_{x_i, \widehat{f}^i(\overline{x}), \varepsilon}$ и $y_1 \neq y_2$, то $f(y_1) \neq f(y_2)$.

Покажем, что V является открытой окрестностью базисного множества Λ. Так как $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} f^i(x)$ плотно в Λ, то достаточно показать, что найдется $\delta > 0$, такое, что для любого x_i имеет место включение $B_\delta(x_i) \subset W^u_{x_i, \widehat{f}^i(\overline{x}), \varepsilon} \cap f^{-1}\left(W^u_{x_{i+1}, \widehat{f}^{i+1}(\overline{x}), \varepsilon}\right)$. В силу леммы 6, найдется $\delta_1 > 0$, такое, что $B_{\delta_1}(x_i) \subset W^u_{x_i, \widehat{f}^i(\overline{x}), \varepsilon}$ для любого $i \in \mathbb{Z}$. Покажем, что найдется $\delta_2 > 0$, такое, что $f\left(B_{\delta_2}(x_i)\right) \subset W^u_{x_{i+1}, \widehat{f}^{i+1}(\overline{x}), \varepsilon}$ для любого $i \in \mathbb{Z}$. Предположим противное и выберем последовательность $\{\eta_j\}_{j=1}^{+\infty}$, такую, что $\eta_j \to 0$ при $j \to +\infty$. Тогда для любого $j \in \mathbb{N}$ найдутся точки x_{i_j}, y_j, такие, что $\rho(x_{i_j}, y_j) < \eta_j$ и $f(y_j) \notin W^u_{x_{i_j+1}, \widehat{f}^{i_j+1}(\overline{x}), \varepsilon}$. Так как $B_{\delta_1}(x_{i+1}) \subset W^u_{x_{i+1}, \widehat{f}^{i+1}(\overline{x}), \varepsilon}$, то $\rho(f(y_j), f(x_{i_j})) = \rho(f(y_j), x_{i_j+1}) > \delta_1$. В силу компактности M^n, не уменьшая общности, можно считать последовательности x_{i_j} и y_j сходящимися к некоторой точке x_0. Так как $\rho(f(x_0), f(x_0)) = 0$, получаем противоречие с непрерывностью отображения f. Полагая $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, получаем, что множество V является открытой окрестностью множества Λ.

Выберем открытое множество Q, такое, что $V \supset \mathrm{cl}\,(Q) \supset Q \supset \Lambda$[10], и покажем, что Q является искомой окрестностью.

Из леммы Лебега и компактности $\mathrm{cl}\,(Q)$ следует, что существует $\lambda > 0$, такое, что для любой пары точек $y, z \in Q$, таких, что $\rho(y, z) < \lambda$, найдется такое x_i, что $y, z \in W^u_{x_i, \widehat{f}^i(\overline{x}), \varepsilon}$. Более того, так как $Q \subset V$, то $f(y), f(z) \in W^u_{x_{i+1}, \widehat{f}^{i+1}(\overline{x}), \varepsilon}$. Положим $y^+ = f(y)$, $z^+ = f(z)$. В силу определения локального неустойчивого многообразия, существуют $\overline{y}^+ \in \widehat{y}^+$ и $\overline{z}^+ \in \widehat{z}^+$, такие, что $\rho({y^+}_i, x_{i+1}) < \varepsilon$, $\rho({z^+}_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ при $i \leqslant 0$.

Покажем, что $y = {y^+}_{-1}$ и $z = {z^+}_{-1}$. Пусть $y' = {y^+}_{-1}$ и $z' = {y^+}_{-1}$. Тогда $\rho(x_i, y') < \varepsilon$ и $\rho(x_i, z') < \varepsilon$. Покажем, что данные неравенства не могут выполняться ни для каких прообразов точек y^+ и z^+, отличных от y и z. В силу неравенства треугольника имеет

[9] То есть $\rho(f(x), f(y)) > \mu\rho(x, y)$ для любых $x, y \in Q$, $x \neq y$ и некоторого $\mu > 1$.

[10] Существование Q следует из того, что M^n является нормальным топологическим пространством [9].

место цепочка неравенств $\rho(y, y') \leqslant \rho(x_i, y) + \rho(x_i, y') < \varepsilon + \varepsilon \leqslant \varepsilon_2$. Тогда из леммы 2 следует равенство $y = y'$. Аналогично имеем равенство $z = z'$.

В силу пункта 3 предложения 3 существует $\mu > 1$, такое, что для любых точек $y, z \in Q$, таких, что $\rho(y, z) < \lambda$, имеет место неравенство $\rho(f(y), f(z)) > \mu\rho(y, z)$. Таким образом, ограничение f на Q является растягивающим эндоморфизмом в смысле определения 6. ∎

Доказательство теоремы 2.

Тот факт, что ограничение $f|_\Lambda$ является растягивающим эндоморфизмом, следует из леммы 8. Покажем, что Λ имеет окрестность U из определения 4.

Рассмотрим точку $x \in \Lambda$, такую, что множество $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} f^i(x)$ плотно в Λ. Выберем ε, удовлетворяющее заключению предложения 3, и элемент $\overline{x} \in \widehat{x} \cap \widehat{\Lambda}$. Из леммы 6 следует, что объединение $V_1 = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} W^u_{x_i, \widehat{f}^i(\overline{x}), \varepsilon}$ является открытым покрытием множества Λ. Пусть V_2 — открытая окрестность Λ, удовлетворяющая заключению леммы 7. Так как M^n — нормальное топологическое пространство, а базисные множества $\Lambda_1, \ldots \Lambda_l$ замкнуты, то найдутся их непересекающиеся открытые окрестности $Q_1, \ldots, Q_l$. Положим $V_3 = Q_s$, где Q_s — окрестность рассматриваемого базисного множества Λ. Так как Λ компактно, то из леммы 1 следует, что найдутся $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ и $\delta_3 > 0$, такие, что верны включения $B_{\delta_1}(x_i) \subset V_1$, $B_{\delta_2}(x_i) \subset V_2$ и $B_{\delta_3}(x_i) \subset V_3$ для любого $i \in \mathbb{Z}$. Положим $\delta = \min\{\delta_1/\mu, \delta_2, \delta_3\}$, где $\mu > 1$ удовлетворяет заключению пункта 3 предложения 3. Положим $U = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} B_\delta(x_i)$. По построению, U также является открытым покрытием Λ и $U \subset V_1 \cap V_2 \cap V_3$. Покажем, что U является искомой окрестностью репеллера Λ, то есть что выполнены следующие условия:

1) $f(U) \supset \mathrm{cl}\,(U)$ и

2) $\bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} f^{-k}(U) = \Lambda$.

1) Положим $W = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} B_{\mu\delta}(x_i)$, тогда $\mathrm{cl}\,(U) \subset W \subset V_1$. Покажем, что имеет место включение $W \subset f(U)$. Действительно, по определению W, для любой точки $y \in W$ найдется такое $i \in \mathbb{Z}$, что $\rho(y, x_i) < \mu\delta$, и, следовательно, $y \in W^u_{x_i, \widehat{f}^i(\overline{x}), \varepsilon}$. В силу пункта 3 предложения 3 найдется точка $y' \in f^{-1}(y)$, такая, что $\rho(y', x_{i-1}) \leqslant (1/\mu)\rho(y, x_i) < (1/\mu)(\mu\delta) = \delta$. Таким образом, $y' \in B_\delta(x_{i-1}) \subset U$ и $y = f(y') \in f(U)$.

2) Предположим противное, то есть $\bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} f^{-k}(U) \neq \Lambda$, что равносильно тому, что $\bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} f^{-k}(U) \setminus \Lambda \neq \varnothing$. Пусть $x \in \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} f^{-k}(U) \setminus \Lambda$ — произвольная точка, тогда имеет место включение $f^k(x) \in U$ для любого $k \geqslant 0$. В силу предложения 4, существует базисное множество Λ_j, такое, что $\rho(f^i(x), \Lambda_j) \to 0$ при $i \to +\infty$, и $y \in \Lambda_j$, такое, что $\rho(f^i(x), f^i(y)) \to 0$ при $i \to +\infty$. Так как окрестность U отделена от базисных множеств, отличных от Λ, то $\Lambda_j = \Lambda$. Так как $f^i(x) \neq f^i(y)$ в силу леммы 7, то получаем противоречие с заключением леммы 8. ∎

3.2. Доказательство теоремы 3

Покажем, что Λ является гладким подмногообразием многообразия M^n. Так как Λ является топологическим подмногообразием, то для любой достаточно малой окрестности $U(x)$ точки $x \in \Lambda$ множество $\Lambda \cap U(x)$ гомеоморфно $(n-1)$-мерному диску. Выберем $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее заключению предложения 3. Так как базисное множество Λ является аттрактором типа $(n-1, 1)$, то в силу леммы 3 для любой точки $x \in \Lambda$ многообразие $W^u_{x,\overline{x},\varepsilon}$ принадлежит Λ и является гладко вложенным $(n-1)$-мерным диском, являющимся окрестностью точки x в Λ. Отсюда следует, что базисное множество Λ является гладким подмногообразием.

Покажем, что ограничение f_Λ является растягивающим отображением. Так как подпространство $E^u_{x_0,\overline{x}}$ является касательным к $W^u_{x,\overline{x},\varepsilon}$, то оно не зависит от выбора $\overline{x} \in \widehat{x} \cap \widehat{\Lambda}$. Следовательно, $T\Lambda = \bigcup\limits_{x\in\Lambda} E^u_{x_0,\overline{x}}$. Тогда из гиперболичности множества Λ следует выполнение условий определения 5. Таким образом, ограничение $f|_\Lambda$ является растягивающим эндоморфизмом. ■

Список литературы

[1] Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Тр. МИАН СССР, 1967, т. 90, с. 3–210.

[2] Аносов Д. В. Грубые системы // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы: Сб. обзорных ст.: 2. К 50-летию института / С. М. Никольский, Е. Ф. Мищенко, С. П. Новиков, Л. С. Понтрягин (ред.). (Тр. МИАН СССР, т. 169.) Москва: МИАН СССР, 1985. С. 59–93.

[3] Brown A. Nonexpanding attractors: Conjugacy to algebraic models and classification in 3-manifolds // J. Mod. Dyn., 2010, vol. 3, no. 4, pp. 517–548.

[4] Гринес В. З., Починка О. В. Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. 424 с.

[5] Гринес В. З., Жужома Е. В. Структурно устойчивые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один // Изв. РАН. Сер. матем., 2002, т. 66, № 2, с. 3–66.

[6] Grines V. Z., Zhuzhoma E. V. On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors // Trans. Amer. Math. Soc., 2005, vol. 357, no. 2, pp. 617–667.

[7] Grines V. Z., Pochinka O. V., Medvedev V. S., Levchenko Yu. A. The topological classification of structurally stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets // Nonlinearity, 2015, vol. 28, no. 11, pp. 4081–4102.

[8] de Melo W., van Strien S. One-dimensional dynamics. (Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 25.) Berlin: Springer, 1993. 606 pp.

[9] Engelking R. General topology. 2nd ed. (Sigma Ser. Pure Math., vol. 6.) Berlin: Heldermann, 1989. 529 pp.

[10] Epstein D., Shub M. Expanding endomorphisms of flat manifolds // Topology, 1968, vol. 7, no. 2, pp. 139–141.

[11] Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. Москва: МЦНМО, 2005. 464 с.

[12] Любич М. Ю. Динамика рациональных преобразований: Топологическая картина // УМН, 1986, т. 41, № 4(250), с. 35–95.

[13] Mañé R., Pugh Ch. Stability of endomorphisms // Dynamical systems: Proc. Sympos. Appl. Topology and Dynamical Systems (Univ. Warwick, Coventry, 1973/1974). (Lecture Notes in Math., vol. 468.) Berlin: Springer, 1975. P. 175–184.

[14] Manning A. There are no new Anosov diffeomorphisms on tori // Amer. J. Math., 1974, vol. 96, no. 3, pp. 422–429.

[15] Милнор Дж. Голоморфная динамика: Вводные лекции. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 320 с.

[16] Newhouse S. On codimension one Anosov diffeomorphisms // Amer. J. Math., 1970, vol. 92, no. 3, pp. 761–770.

[17] Плыкин Р. В. О топологии базисных множеств диффеоморфизмов Смейла // Матем. сб., 1971, т. 13, № 2, с. 297–307.

[18] Przytycki F. Anosov endomorphisms // Studia Math., 1976, vol. 58, no. 3, pp. 249–285.

[19] Przytycki F. On Ω-stability and structural stability of endomorphisms satisfying Axiom A // Studia Math., 1977, vol. 60, no. 1, pp. 61–77.

[20] Smale S. Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc., 1967, vol. 73, no. 6, pp. 747–817.

[21] Shub M. Endomorphisms of compact differentiable manifolds // Amer. J. Math, 1969, vol. 91, pp. 175–199.

[22] Franks J. Anosov diffeomorphisms // Global Analysis: Proc. Sympos. Pure Math. (Berkeley, Calif., 1968): Vol. 14. Providence, R.I.: AMS, 1970. P. 61–93.

[23] Якобсон М. В. О гладких отображениях окружности в себя // Матем. сб., 1971, т. 85(127), № 2(6), с. 163–188.

[24] Zhang M. R. On the topologically conjugate classes of Anosov endomorphisms on tori // Chinese Ann. Math. Ser. B, 1989, vol. 10, no. 3, pp. 416–425.

On hyperbolic attractors and repellers of endomorphisms

Vyacheslav Z. Grines[1], Evgeny D. Kurenkov[2]

[1,2]National Research University Higher School of Economics
ul. Bolshaya Pecherskaya 25/12, Nizhnii Novgorod, 603155, Russia
[1]vgrines@hse.ru, [2]ekurenkov@hse.ru

It is well known that the topological classification of dynamical systems with hyperbolic dynamics is significantly defined by dynamics on a nonwandering set. F. Przytycki generalized axiom A for smooth endomorphisms that was previously introduced by S. Smale for diffeomorphisms, and proved the spectral decomposition theorem which claims that the nonwandering set of an A-endomorphism is a union of a finite number of basic sets.
In the present paper the criterion for a basic set of an A-endomorphism to be an attractor is given. Moreover, dynamics on basic sets of codimension one is studied. It is shown that if an attractor is a topological submanifold of codimension one of type $(n-1, 1)$, then it is smoothly embedded in the ambient manifold, and the restriction of the endomorphism to this basic set is an expanding endomorphism. If a basic set of type $(n, 0)$ is a topological submanifold of codimension one, then it is a repeller, and the restriction of the endomorphism to this basic set is also an expanding endomorphism.

MSC 2010: 37D20
Keywords: endomorphism, axiom A, basic set, attractor, repeller

Received September 20, 2017, accepted November 14, 2017
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 4, pp. 557–571 (Russian)