Математическая Теория Игр и её Приложения, т.9, в.3, с. 64–92

УДК 519.83, 519.86
ББК 22.18

ТИПОЛОГИЯ СЕТЕЙ И РАВНОВЕСИЯ В СЕТЕВОЙ ИГРЕ С ПРОИЗВОДСТВОМ И ЭКСТЕРНАЛИЯМИ ЗНАНИЙ*

Владимир Д. Матвеенко
Алексей В. Королев
Санкт-Петербургский филиал
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»
190121, Санкт-Петербург, ул. Союза Печатников, 16
e-mail: vmatveenko@hse.ru, danitschi@gmail.com

Рассматривается игра на сети, в каждом узле которой экономика описывается простой двухпериодной моделью Ромера эндогенного роста с производством и экстерналиями знаний. Сумма уровней знаний в соседних узлах вызывает внешний эффект в производстве каждого узла сети. Вводится понятие типа вершины сети; дается типология сетей в зависимости от типов вершин; показано, что внутренние игровые равновесия определяются указанной типологией. Для различных типологий сетей найдены в явном виде равновесные значения знаний для узлов, которые имеют разное положение в сети.

Ключевые слова: сеть, структура сети, игра на сети, равновесие Нэша, экстерналия, формирование сети.

---

* Исследование проводилось при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-06-00618).

1. Введение

Игры на сетях – в настоящее время один из наиболее динамично развивающихся разделов теории игр (см. [3, 6–8]). Игры на сетях применяются для анализа сложных экономических, социальных, технических, логистических, экологических и т.п. систем. Как и в других играх, суть стратегического взаимодействия в сети состоит в том, что решения, принимаемые агентами, зависят от их ожидания действий других агентов. В сетевых играх агентов интересуют, прежде всего, действия «соседей» по сети; это соответствует многочисленным приложениям теории применительно к анализу социальных сетей, технологических цепочек, международных связей и т.д.

Исследование игр на сетях в мировой литературе началось с изучения вопросов сложности вычислений и аппроксимации решений (см. [10]); позднее основным стал вопрос о том, каким образом структура (конфигурация, архитектура, топология) сети влияет на поведение игроков при формировании, функционировании и развитии сети и, в частности, как связаны структура сети и структура игрового равновесия (см. [6–8]). Важное направление представляет собой анализ игр на сетях с учетом положительных экстерналий, т.е. неценового влияния, которое соседи по сети оказывают на состояние игрока (см. [5]).

Данная статья продолжает исследование, начатое в работе [2], в которой рассматриваются равновесия в игре с инвестициями в знания и положительными производственными экстерналиями.

В [2] доказана единственность внутреннего равновесия (если оно существует), рассматривается поведение агента в равновесии в зависимости от размера получаемой им экстерналии. Изучается роль пассивных агентов (т.е. таких, которые делают нулевые инвестиции) в структуре игрового равновесия, в частности, возможности присоединения вершины с пассивным агентом к регулярной (эквистепенной) сети так, чтобы в равновесии поведение агентов не изменилось, а также возможности соединения регулярных сетей, находящихся во внутреннем равновесии, через вершины с пассивными агентами.

В настоящей статье вводится понятие типа вершины и на его основе дается типология сетей; доказывается, что в сетях одного класса, независимо от их размера и архитектуры, внутренние угловые равновесия совпадают в том смысле, что игроки, находящиеся в вершинах одного типа, ведут себя одинаково в любых сетях одного класса. Описан алгоритм разбиения множества вершин сети на типы. В частности, изучаются внутренние и угловые равновесия в сетях с двумя и тремя типами вершин.

Структура статьи такова. В разделе 2 дается описание модели и доказывается теорема, которая служит нашим основным рабочим инструментом при сравнении полезностей (выигрышей) игроков. В разделе 3 рассматриваются игровые равновесия в диаде (цепи из двух вершин). В разделе 4 вводится понятие типа вершины и описывается алгоритм разбиения множества вершин на типы. В разделах 5 и 6 изучаются равновесия в сети с двумя типами вершин. Раздел 7 – заключение.

2. Модель

Рассматривается сеть (неориентированный граф) [1] с n вершинами $i = 1, 2, \ldots, n$. Она описывается матрицей инциденций $\mathbf{M}$, в которой $M_{ij} = M_{ji} = 1$, если в сети имеется ребро, соединяющее вершины i и j, и $M_{ij} = M_{ji} = 0$ в противном случае; полагается $M_{ii} = 0$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. В вершинах сети находятся агенты. В период 1 каждый агент i наделен начальным запасом e блага. Этот запас он может использовать частично для потребления в первом периоде, c_1^i, частично для инвестиций в знания, k_i, которые используются при производстве блага для потребления во втором периоде, c_2^i. Предпочтения каждого из агентов описываются квадратичной функцией полезности:

$$U(c_1^i, c_2^i) = c_1^i(e - ac_1^i) + bc_2^i,$$

где a – коэффициент насыщения, $0 < a < 1/2$, $b > 0$. Производство в вершине описывается производственной функцией

$$F(k_i, K_i) = Bk_iK_i, B > 0$$

зависящей от знаний k_i в данной вершине и от среды K_i, т.е. от суммы инвестиций в знания самого агента и его ближайших соседей. Произведение bB для удобства мы обозначаем A и всегда предполагаем, что $a < A$.

---

[1] Аналогичную модель первоначально построил П. Ромер [11] для частного случая полного графа

Каждый агент i максимизирует свою полезность, т.е. решает следующую оптимизационную задачу $P(K_i)$:

$$U(c_1^i, c_2^i) \xrightarrow[c_1^i, c_2^i, k_i]{} \max$$

$$\begin{cases} c_1^i \le e - k_i, \\ c_2^i \le F(k_i, K_i), \\ c_1^i \ge 0, c_2^i \ge 0, k_i \ge 0. \end{cases}$$

При этом в момент принятия решения агент считает среду K_i экзогенно заданной, т.е. не учитывает ее изменения за счет выбора им k_i.

Первые два ограничения задачи $P(K_i)$ в точке оптимума, очевидно, выполняются как равенства. Подставляя эти ограничения в целевую функцию, определим новую функцию (платежную функцию)

$$V(k_i, K_i) = U(e - k_i, F(k_i, K_i)).$$

Решение задачи $P(K_i)$ однозначно определяется значением k_i^*, максимизирующим функцию $V(k_i, K_i)$ при условии $k_i \in [0, e]$ при заданном K_i. Таким образом, каждый агент i выбирает то значение k_i^*, которое максимизирует значение его функции полезности при данной среде $K_i = k_i^* + \tilde{K}_i$, где $\tilde{K}_i$ – сумма инвестиций в знания соседей, она называется чистой экстерналией.

Агент называется пассивным, если он делает нулевые инвестиции в знания, $k = 0$; активным – если $0 < k < e$; гиперактивным – если он делает максимально возможные инвестиции в знания, $k = e$ (т.е. не потребляет в первом периоде).

Игра в нормальной форме (см. [1, 4]) – это: множество игроков, множество стратегий в игре и множество функций выигрышей игроков.

Рассмотрим следующую игру. Игроками являются агенты, $i = 1, 2, \ldots, n$, находящиеся в вершинах сети. Стратегиями игрока i являются значения инвестиций k_i из промежутка $[0, e]$. Выигрышем игрока i является значение его платежной функции при данных значениях инвестиций игрока i и его соседей.

Равновесием Нэша с экстерналиями называется набор уровней знаний (инвестиций) $(k_1^*, k_2^*, \ldots, k_n^*)$, такой, что каждый игрок i выбирает то значение k_i, которое максимизирует значение его функции полезности при данной среде K_i.

Если все решения игроков являются внутренними ($0 < k_i^* < e$), т.е. все игроки являются активными, то равновесие будем также называть внутренним. В противном случае будем называть равновесие угловым. Угловое равновесие, в котором уровень знаний в каждой вершине равен 0 или e, т.е. все игроки пассивны или гиперактивны, будем называть чисто угловым равновесием.

Нетрудно показать (это сделано в [2]), что внутреннее равновесие Нэша с экстерналиями (если оно существует при заданных значениях параметров) определяется системой уравнений

$$(A - 2a)\mathbf{k} + A\mathbf{M}\mathbf{k} = \overline{\mathbf{e}}, \tag{2.1}$$

где

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} e(1-2a) \\ e(1-2a) \\ \dots \\ e(1-2a) \end{pmatrix}.$$

Система уравнений (2.1) имеет единственное решение $\mathbf{k}^s$:

$$k_i^s = \frac{e(2a-1) + A\tilde{K}_i}{2a - A}, \tag{2.2}$$

где $\tilde{K}_i$ – чистая экстерналия i-го агента. Во внутреннем равновесии, $k_i^* = k_i^s$; $i = 1, \dots, n$.

Замечание 2.1. В теории сетевых игр используются понятия стратегической заменяемости и стратегической дополняемости (см. обсуждение в статье [9]). Если увеличение активности (в нашем случае, инвестиций) соседей игрока приводит к увеличению активности самого игрока, то говорят, что имеет место стратегическая дополняемость. Если же увеличение активности соседями приводит к уменьшению активности игрока, то говорят, что имеет место стратегическая заменяемость. Для внутреннего равновесия, из формулы (2.2) непосредственно видно, что если $A < 2a$, то имеет место стратегическая дополняемость, а если $A > 2a$, то имеет место стратегическая заменяемость. В нашей модели с производством, поскольку увеличение величины $A = bB$ способствует увеличению инвестиций, эти неравенства показывают, относительно мала или велика продуктивность системы.

Определение 2.1. *Если $A > 2a$, будем говорить, что выполнено условие продуктивности. Если $A < 2a$, будем говорить, что продуктивность отсутствует.*

Докажем одну общую теорему, которая будет в дальнейшем служить инструментом при сравнении полезностей. Смысл ее в том, что при сравнении сетей, находящихся во внутреннем равновесии, полезность монотонно зависит от среды.

Теорема 2.1. *Пусть W^* и W^{**} – пара сетей, находящихся в равновесии, i – некоторая вершина сети W^*, а j – некоторая вершина сети W^{**}; k_i^*, K_i^*, U_i^* – равновесные значения уровня знаний, среды и полезности в вершине i, причем $k_i^* \in (0, e]$; k_j^{**}, K_j^{**}, U_j^{**} – равновесные уровень знаний, среда и полезность в вершине j, причем $k_j^{**} \in (0, e]$. Тогда:*

1) если $K_i^* < K_j^{**}$, то $U_i^* < U_j^{**}$;

2) если $K_i^* \leq K_j^{**}$, то $U_i^* \leq U_j^{**}$;

3) если $K_i^* = K_j^{**}$, то $U_i^* = U_j^{**}$.

Если же $k_i^* = 0$, $k_j^{**} > 0$, то

$$U_i^* = U(e, 0) < U_j^{**}.$$

Доказательство. Пусть $K_i^* < K_j^{**}$ $(K_i^* \leq K_j^{**})$. Так как платежная функция $V(k_j, K_j^{**}) = (e - k_j)(e - a(e - k_j)) + Ak_jK_j^{**}$ достигает в точке k_j^{**} своего максимума, имеем $V(k_i^*, K_j^{**}) \leq V(k_j^{**}, K_j^{**})$. Так как $\partial V(k, K)/\partial K > 0$ для любых $k \neq 0$ и K, мы получаем, что $V(k_i^*, K_i^*) < V(k_i^*, K_j^{**})$ (соответственно, $V(k_i^*, K_i^*) \leq V(k_i^*, K_j^{**})$). Таким образом, $V(k_i^*, K_i^*) < V(k_i^*, K_j^{**}) \leq V(k_j^{**}, K_j^{**})$ (соответственно, $V(k_i^*, K_i^*) \leq V(k_i^*, K_j^{**}) \leq V(k_j^{**}, K_j^{**})$). Следовательно, $U_i^* < U_j^{**}$ (соответственно, $U_i^* \leq U_j^{**}$).

из 2), примененного дважды, следует 3).

Последнее утверждение теоремы очевидно:

$$U_j^{**} = V(k_j^{**}, K_j^{**}) > V(0, K_j^{**}) = V(0, K_i^*) = U_i^*.$$

□

Замечание 2.2. Если $k_i^* \neq k_j^{**}$, то даже в случае 2) имеем $U_i^* < U_j^{**}$, как видно из доказательства теоремы (ввиду строгой вогнутости функции V по первому аргументу).

Лемма 2.1 (2). *При отсутствии продуктивности необходимые и достаточные условия различных типов поведения агента следующие.*

1) Агент пассивен, если и только если

$$\tilde{K} \leq \frac{e(1-2a)}{A}.$$

2) Агент активен, если и только если

$$\frac{e(1-2a)}{A} < \tilde{K} < \frac{e(1-A)}{A}.$$

3) Агент гиперактивен, если и только если

$$\tilde{K} \geq \frac{e(1-A)}{A}.$$

При наличии продуктивности необходимые условия различных типов поведения агента следующие.

1) Агент может быть пассивен, если

$$\tilde{K} \leq \frac{e(1-2a)}{A}.$$

2) Агент может быть активен, если

$$\frac{e(1-A)}{A} < \tilde{K} < \frac{e(1-2a)}{A}.$$

3) Агент может быть гиперактивен, если

$$\tilde{K} \geq \frac{e(1-A)}{A}.$$

Следствие 2.1. *В любой сети при любых значениях параметров существует равновесие, при котором все агенты пассивны.*

Доказательство. Следует из леммы 2.1. □

3. Равновесия в диаде

Определение 3.1. *Диадой будем называть цепь из двух вершин.*

Очевидно, что, с учетом симметрии, возможно не более 6 типов равновесий в диаде: А – А, А – П, А – Г, П – П, П – Г, Г – Г, где А обозначает вершину с активным агентом, П – вершину с пассивным агентом, а Г – вершину с гиперактивным агентом.

Теорема 3.1. *Равновесия в диаде существуют при следующих условиях:*

1. *А – А, если* $A > 1/2$*;*
2. *А – П невозможно;*
3. *А – Г невозможно;*
4. *П – П возможно всегда;*
5. *П – Г невозможно;*
6. *Г – Г, если* $A \geq 1/2$.

Доказательство. 1. Для каждого агента уравнение (2.2) имеет вид

$$k^s = \frac{e(2a-1) + Ak^s}{2a - A},$$

откуда

$$k^s = \frac{e(1-2a)}{2A-2a}.$$

Ясно, что $0 < k^s < e$ тогда и только тогда, когда $A > 1/2$.

2. Для активного агента (2.2) имеет вид

$$k_a^s = \frac{e(1-2a)}{A-2a}.$$

Очевидно, $0 < k_a^s < e$ тогда и только тогда, когда $A > 1$.

Для пассивного агента, согласно лемме 2.1:

$$\frac{e(1-2a)}{A-2a} \leq \frac{e(1-2a)}{A},$$

что равносильно условию $A < 2a$, которое несовместно с условием $A > 1$.

3. Для активного агента (2.2) дает

$$k_a^s = \frac{e(1-2a-A)}{A-2a}.$$

Ясно, что $0 < k_a^s < e$ тогда и только тогда, когда $A > 2a$, $A + 2a < 1$, $A > 1/2$ или $A < 2a$, $A + 2a > 1$, $A < 1/2$.

Для гиперактивного агента из леммы 2.1 имеем условие:

$$\frac{1 - 2a - A}{A - 2a} \geq \frac{1 - A}{A},$$

которое, наоборот, выполняется при $A \leq 1/2$, если $A > 2a$, и при $A \geq 1/2$, если $A < 2a$. Таким образом ситуация А – Г невозможна.

4. Следует из следствия 2.1.

5. Для пассивного агента согласно лемме 2.1 имеем условие:

$$e \leq \frac{e(1 - 2a)}{A},$$

которое эквивалентно $A + 2a \leq 1$.

Для гиперактивного агента из леммы 2.1 получаем условие:

$$0 \geq \frac{e(1 - A)}{A},$$

которое выполнено при $A \geq 1$.

Поскольку условия $A \geq 1$ и $A + 2a \leq 1$ несовместны, ситуация П – Г невозможна.

6. Для каждого из гиперактивных агентов согласно лемме 2.1, имеем необходимое и достаточное условие:

$$e \geq \frac{e(1 - A)}{A},$$

которое эквивалентно $A \geq 1/2$. □

Следствие 3.1. *В различных областях значений параметра А существуют одно, два или три равновесия в диаде.*

1. При $A > 1/2$ существуют равновесия типа А – А, Г – Г и П – П.

2. При $A = 1/2$ существуют равновесия типа Г – Г и П – П.

2. При $A \leq 1/2$ существует только равновесие типа П – П.

Замечание 3.1. При $A > 1/2$, когда в диаде возможны все три типа равновесия, сравнивая среды и применяя теорему 2.1, видим, что самые большие полезности у агентов в равновесии Г – Г, а самые маленькие – в равновесии П – П.

На основе теоремы 3.1 можно получить условия существования некоторых типов равновесия в сетях, существенно более сложных, чем диада. В дальнейшем мы будем использовать эту возможность.

Замечание 3.2. Рассматривая более сложные сети, мы часто будем пользоваться следующим фактом, который легко следует из доказательства теоремы 3.1: равновесие, в котором пассивный агент имеет хотя бы одного активного или гиперактивного соседа, невозможно.

4. Типы вершин

Определение 4.1. *Пусть множество вершин сети* $1, 2, \ldots, n$ *разбито на непересекающиеся* k *классов таким образом, что любые две вершины, принадлежащие одному и тому же классу, имеют одинаковое для обеих вершин число соседей из каждого класса. В этом случае классы разбиения будем называть типами вершин. Тип* j *характеризуется вектором* $\mathbf{l}(j) = (l_1(j), l_2(j), \ldots, l_k(j))$, *где* $l_i(j)$ *– число соседей типа* i *у каждой вершины типа* j.

Опишем алгоритм разбиения множества вершин сети на типы.

Пусть s – число подмножеств, на которые разбито множество вершин. Изначально $s = 1$.

Шаг 1. Рассматриваем вершины из первого подмножества. Если все они имеют одинаковое число соседей из каждого подмножества, то первое подмножество не меняется. В противном случае разбиваем первое подмножество на подмножества так, чтобы у вершин каждого нового подмножества было одинаковое число соседей в каждом из s *старых* (т.е. существовавших до начала данной итерации) подмножеств.

Шаг 2. Точно так же поступаем с вершинами из второго, третьего, и т.д., s-го подмножеств, т.е. каждое из s старых подмножеств мы разбиваем на новые подмножества так, чтобы у вершин каждого нового подмножества было одинаковое число вершин в каждом из s *старых*, т.е. полученных в результате предыдущей итерации, подмножеств. Если в результате этой процедуры число подмножеств s не изменилось, то алгоритм свою работу заканчивает, мы нашли разбиение множества вершин на типы. Если же s увеличилось, то переходим к шагу 1.

Число подмножеств s в процессе выполнения алгоритма не убывает, в то же время s ограничено сверху числом вершин в сети, поэтому алгоритм сходится.

Ясно, что описанный алгоритм разбивает множество вершин на минимально возможное число классов.

Пример

Применим алгоритм к сети, изображенной на рис. 1. Сначала все вершины принадлежат одному подмножеству.

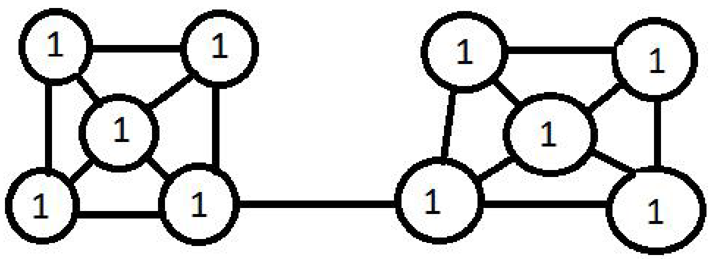

Рисунок 1. Первичная нумерация: $s = 1$

После первой итерации мы получили разбиение, показанное на рис. 2.

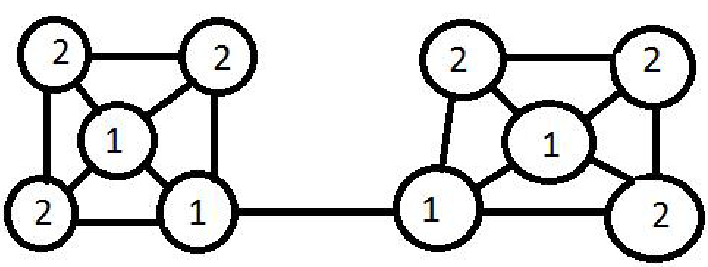

Рисунок 2. Результат первой итерации

Затем, на первом шаге второй итерации, мы получаем разбиение, изображенное на рис. 3.

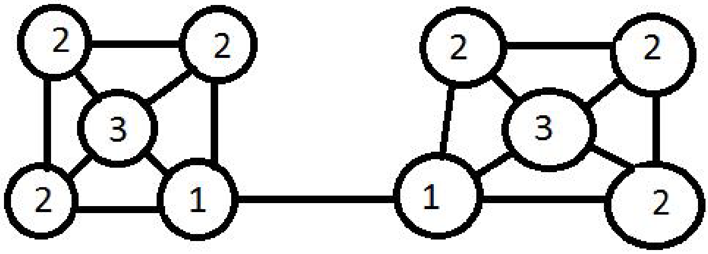

Рисунок 3. Первый шаг второй итерации

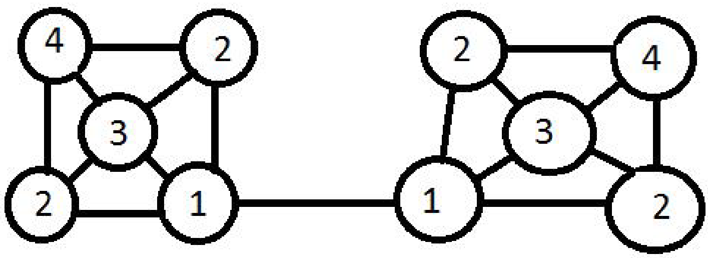

Рисунок 4. Второй шаг второй итерации

На втором шаге второй итерации мы получаем разбиение, изображенное на рис. 4.

На третьей итерации уже ничто не меняется. Мы получили разбиение вершин сети на четыре типа, которые характеризуются векторами $\mathbf{l}(1) = (1,2,1,0)$, $\mathbf{l}(2) = (1,0,1,1)$, $\mathbf{l}(3) = (1,2,0,1)$, $\mathbf{l}(4) = (0,2,1,0)$.

Определение 4.2. *Регулярной сетью степени m назовем сеть, в которой каждая вершина имеет степень (число соседей) m, где $m \geq 1$.*

Замечание 4.1. Из рассмотрения алгоритма видно, что в регулярной сети все вершины имеют один тип.

Определение 4.3. *Назовем симметричным такое равновесие, в котором агенты в вершинах одного типа делают одинаковые инвестиции.*

Замечание 4.2. Внутреннее равновесие всегда симметрично. Это следует из единственности решения системы уравнений (2.1) и симметричности этой системы относительно типов.

В дальнейшем через k_i будем обозначать инвестиции в любой вершине типа i.

Замечание 4.3. Если две сети имеют одинаковое число типов вершин, S, и типы характеризуются одинаковым набором векторов $\mathbf{l}(1)$, $\mathbf{l}(2), \ldots, \mathbf{l}(S)$, то симметричные равновесия в этих сетях совпадают, в том смысле, что агенты в вершинах одинакового типа ведут себя одинаково.

Примером могут служить сети, показанные на рис. 5 [2]. Таким образом, в сетях разного размера и разной архитектуры, но с одинаковым набором типов вершин, агенты в симметричных равновесиях ведут себя одинаково. Это дает частичный ответ на вопрос, почему многие социально-экономические системы похожи по своему функционированию, независимо от их размера.

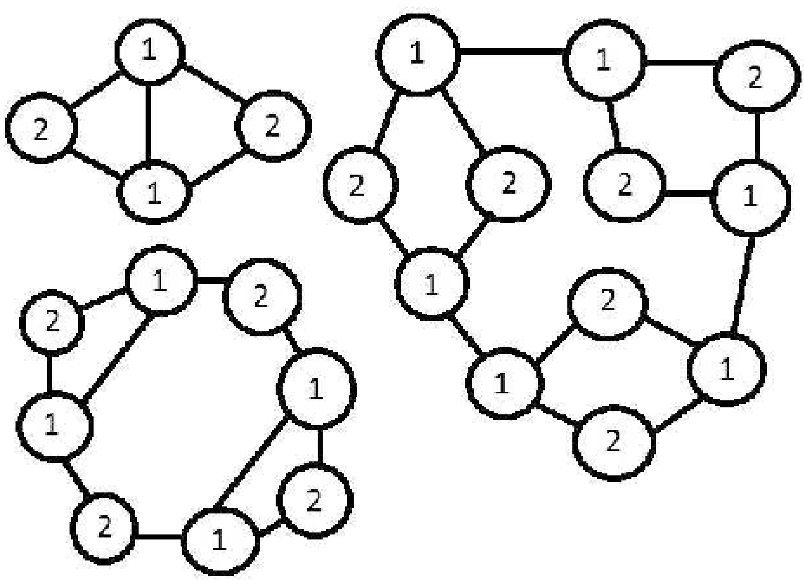

Рисунок 5. Сети с «совпадающими» симметричными равновесиями

[2]Другим примером являются сети, изображенные на рис. 11 и 12.

5. Внутреннее равновесие при наличии двух типов вершин

Пусть имеется два типа вершин, которые характеризуются векторами $\mathbf{l}(1) = (s_1, s_2)$ и $\mathbf{l}(2) = (t_1, t_2)$. Здесь s_1 – число ребер, соединяющих вершину типа 1 с вершинами типа 1, s_2 – число ребер, соединяющих ее с вершинами типа 2; t_1 – число ребер, соединяющих вершину типа 2 с вершинами типа 1, t_2 – число ребер, соединяющих ее с вершинами типа 2. Тогда из (2.1) следует система уравнений:

$$\begin{cases} (A - 2a + s_1 A)k_1 + s_2 A k_2 = e(1 - 2a), \\ t_1 A k_1 + (A - 2a + t_2 A)k_2 = e(1 - 2a). \end{cases} \tag{5.1}$$

Ее решением является пара

$$k_1^s = \frac{e(1-2a)[A - 2a + (t_2 - s_2)A]}{(A-2a)^2 + (s_1 + t_2)(A - 2a)A + (s_1 t_2 - t_1 s_2)A^2}. \tag{5.2}$$

$$k_2^s = \frac{e(1-2a)[A - 2a + (s_1 - t_1)A]}{(A-2a)^2 + (s_1 + t_2)(A - 2a)A + (s_1 t_2 - t_1 s_2)A^2}. \tag{5.3}$$

Если $0 < k_1^s < e$, $0 < k_2^s < e$, то стационарные значения k_1^s, k_2^s определяют внутреннее равновесие в сети.

Частные случаи сети с двумя типами вершин

1. Цепь с тремя вершинами (см. рис. 6) имеет два типа вершин: к типу 1 относится средняя вершина, а к типу 2 крайние. Эти типы характеризуются векторами $\mathbf{l}(1) = (0, 2)$ и $\mathbf{l}(2) = (1, 0)$. Тогда формулы (5.2)–(5.3) принимают вид:

$$k_1 = \frac{e(1-2a)(A+2a)}{A^2 + 4aA - 4a^2}, \tag{5.4}$$

$$k_2 = \frac{2ae(1-2a)}{A^2 + 4aA - 4a^2}. \tag{5.5}$$

Выражения (5.4)–(5.5) всегда положительны, они меньше e при условии

$$A > \frac{\sqrt{36a^2 - 4a + 1} - 6a + 1}{2}.$$

2. Цепь с четырьмя вершинами (см. рис. 7) имеет два типа вершин: к типу 1 относятся средние вершины, а к типу 2 крайние. Эти типы характеризуются векторами $\mathbf{l}(1) = (1, 1)$ и $\mathbf{l}(2) = (1, 0)$. Тогда формулы

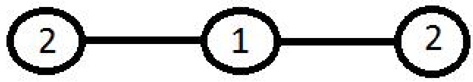

Рисунок 6. Цепь из трех вершин

(5.2)–(5.3) принимают вид:

$$k_1 = \frac{2ae(1-2a)}{6aA - 4a^2 - A^2}, \tag{5.6}$$

$$k_2 = \frac{e(1-2a)(2a-A)}{6aA - 4a^2 - A^2}. \tag{5.7}$$

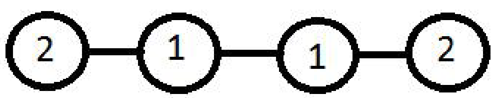

Рисунок 7. Цепь из четырех вершин

Выражения (5.6)–(5.7) положительны при условии отсутствия продуктивности ($A < 2a$) и меньше e при условии

$$3a - \sqrt{9a^2 - 2a} < A < 3a + \sqrt{9a^2 - 2a}.$$

Таким образом, мы имеем внутреннее равновесие при $3a - \sqrt{9a^2 - 2a} < A < 2a$, $a > 2/9$. (Неравенство $3a - \sqrt{9a^2 - 2a} < 2a$ эквивалентно неравенству $a > 1/4$).

Кроме найденного внутреннего равновесия в данной цепи возможны угловые равновесия, условия для многих из которых мы можем получить автоматически, комбинируя диады, рассмотренные в разделе 3. Однако остаются еще равновесия, содержащие подряд три или четыре вершины, ни в одной из которых не находится пассивный агент. Условия для таких равновесий не сводятся непосредственно к условиям для диад.

3. Обобщением предыдущего случая является веер – сеть, которая представляет собой цепь из двух вершин (рис. 8), к каждой из которых примыкает ν листьев. Напомним, что листом называется концевая вершина, т.е такая вершина, в которую идет только одно ребро (вершина степени 1). Типы характеризуются векторами $\mathbf{l}(1) = (1, \nu)$ и $\mathbf{l}(2) = (1, 0)$.

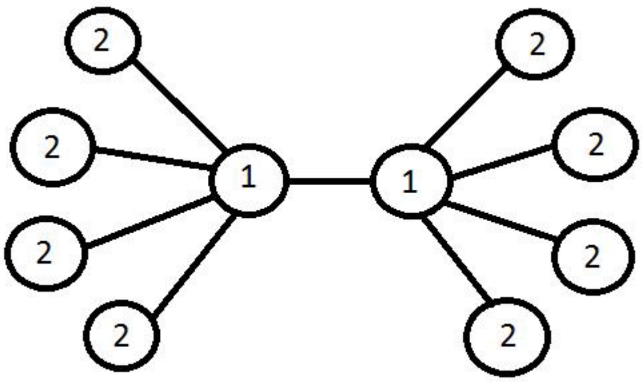

Рисунок 8. Веер

Предложение 5.1. *При условии отсутствия продуктивности и* $A > 1/2$, *в веере равновесные уровни знаний равны:*

$$k_1 = \frac{e(1-2a)(\nu A + 2a - A)}{(\nu - 2)A^2 + 6Aa - 4a^2}, \tag{5.8}$$

$$k_2 = \frac{e(1-2a)(2a - A)}{(\nu - 2)A^2 + 6Aa - 4a^2}. \tag{5.9}$$

С ростом ν *уровни знаний и полезность в вершинах обоих типов убывают* [3].

Доказательство. Из (5.2)–(5.3) получаем выражения (5.8)–(5.9). Проверим, что $k_1, k_2 \in (0, e)$. Знаменатель обоих выражений $(\nu - 2)A^2 + 6aA - 4a^2$ в случае $\nu = 0$ имеет корни $A_1 = a$, $A_2 = 2a$; поэтому

[3] Для вершин первого типа это верно начиная не с $\nu = 1$, а уже с $\nu = 0$, т.е. и для диады. Таким образом, в диаде агенты имеют полезность выше, чем в других веерах. Это вполне соответствует высокой распространенности диад во многих реальных социальных и экономических системах.

знаменатель положителен для любого A (так как $a < A < 2a$); тем более это верно и при любом $\nu \geq 1$. Числители в (5.8)–(5.9) также положительны. Непосредственно проверяется, что $k_1(\nu) > k_1(\nu+1)$ для $\nu \geq 0$ и $k_1(\nu) > k_2(\nu)$ для $\nu \geq 1$. То, что k_2 убывает по ν для $\nu \geq 1$, также видно непосредственно. Также проверяется, что величина $k_1^s < e$ тогда и только тогда, когда $A > 1/2$.

Посмотрим, как меняются с ростом ν среды и полезности в вершинах обоих типов. Среда для вершины первого типа равна

$$K_1(\nu) = \frac{e(1-2a)[2(A-2a-\nu A) + \nu(A-2a)]}{2A^2 - 6aA + 4a^2 - \nu A^2},$$

а для вершины второго типа

$$K_2(\nu) = \frac{e(1-2a)(2A-4a-\nu A)}{2A^2 - 6aA + 4a^2 - \nu A^2}.$$

Непосредственно проверяется, что $K_1(\nu) > K_1(\nu+1)$ для $\nu \geq 0$ и что $K_2(\nu) > K_2(\nu+1)$ для $\nu \geq 1$. Тогда по теореме 2.1 полезность в вершинах обоих типов убывает с ростом ν. □

4. Звезда порядка m (где $m \geq 2$), т.е. сеть (рис. 9), у которой центральная вершина типа 1 имеет m периферийных соседей типа 2. Типы характеризуются векторами $\mathbf{l}(1) = (0, m)$ и $\mathbf{l}(2) = (1, 0)$, поэтому из формул (5.2)–(5.3) получаем:

$$k_1 = \frac{e(1-2a)[(m-1)A + 2a]}{mA^2 - (A-2a)^2}, \tag{5.10}$$

$$k_2 = \frac{2ea(1-2a)}{mA^2 - (A-2a)^2}, \tag{5.11}$$

Пара k_1, k_2 определяет внутреннее равновесие, т.е. $k_1, k_2 \in (0, e)$, если

$$\begin{cases} mA^2 - (A-2a)^2 > 0, \\ mA^2 - (A-2a)^2 > (1-2a)[(m-1)A + 2a], \\ mA^2 - (A-2a)^2 > 2a(1-2a). \end{cases}$$

Очевидно, эта система неравенств эквивалентна второму из этих неравенств, т.е.

$$(m-1)A^2 + [2a(m+1) - (m-1)]A - 2a > 0. \tag{5.12}$$

Это неравенство выполняется в том и только в том случае, если

$$A > \frac{-2a(m+1)+m-1+\sqrt{[2a(m+1)-(m-1)]^2+8a(m-1)}}{2(m-1)}.$$

Заметим, что при больших m неравенство (5.12) справедливо, если $A^2+2aA-A>0$, что эквивалентно $A+2a>1$. Нетрудно заметить, что при этом условии левая часть неравенства (5.12) возрастает по m, т.е. если (5.12) выполняется при $m=2$, то выполняется и при всех m. Отсюда следует, что если $A+2a>1$ и

$$A > \frac{-6a+1+\sqrt{36a^2-4a+1}}{2},$$

то формулы (5.10), (5.11) при всех $m \geq 2$ определяют внутреннее равновесие.

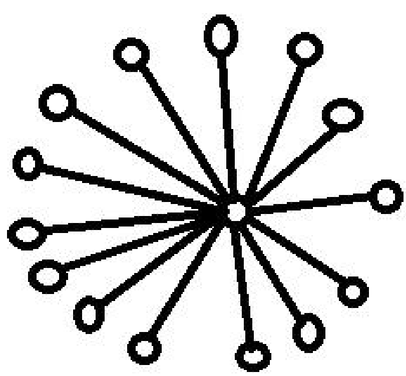

Рисунок 9. Звезда

Звезда как организационная структура очень часто встречается в социально-экономических системах. Анализ полезностей (выигрышей игроков) в равновесии позволяет судить о том, какие агенты (центр или периферия звезды) и при каких обстоятельствах будут заинтересованы в увеличении или уменьшении числа периферийных вершин.

Предложение 5.2. *В звезде (рис. 9) с ростом числа периферийных вершин, m, уровни знаний k_1 и полезности в центральной вершине убывают при отсутствии продуктивности и возрастают при наличии продуктивности. В периферийных вершинах с ростом m уровни знаний k_2 и полезности убывают, независимо от величины A.*

Доказательство. Производная k_1 по m (считаем m непрерывным параметром) равна

$$\frac{2Aae(1-2a)(A-2a)}{[(A-2a)^2-mA^2]^2}.$$

Таким образом, уровень знаний в центральной вершине убывает по m, если $A < 2a$, и возрастает, если $A > 2a$. То, что k_2 убывает по m, видно непосредственно из (5.11).

Среда для центральной вершины:

$$K_1 = \frac{e(1-2a)[m(A+2a)-(A-2a)]}{mA^2-(A-2a)^2}.$$

Производная K_1 по m равна

$$\frac{4a^2e(1-2a)(A-2a)}{[mA^2-(A-2a)^2]^2}.$$

По теореме 2.1, полезность в центральной вершине с ростом m убывает, если $A < 2a$, и возрастает, если $A > 2a$. Среда для периферийной вершины:

$$K_2 = \frac{e(1-2a)[(m-1)A+4a]}{mA^2-(A-2a)^2}.$$

Производная K_2 по m равна

$$\frac{-4a^2Ae(1-2a)}{[mA^2-(A-2a)^2]^2} < 0.$$

По теореме 2.1, полезность в периферийных вершинах убывает с ростом m. □

Замечание 5.1. При увеличении порядка звезды m суммарный уровень знаний в периферийных вершинах уменьшается и при $m \to \infty$ стремится к $2ae(1-2a)/A^2$, тогда как уровень знаний каждой отдельной периферийной вершины стремится к 0. Уровень знаний в центральной вершине при $m \to \infty$ стремится к величине $e(1-2a)/A$.

Замечание 5.2. При $m = 2$ звезда превращается в цепь из трех вершин (рис. 6).

5. Сеть, которая представляет собой цикл из n вершин ($n \geq 3$), к каждой вершине которого примыкает ν листьев (концевых вершин) (рис. 10). Типы характеризуются векторами $\mathbf{l}(1) = (2, \nu)$ и $\mathbf{l}(2) = (1, 0)$ (вершины исходного цикла принадлежат к первому типу, а добавленные листья – ко второму типу). Обобщением является регулярная сеть со степенью m ($m \geq 2$), к каждой вершине которой примыкает ν листьев. Равновесия в этой сети исследуются далее в разделе 6.

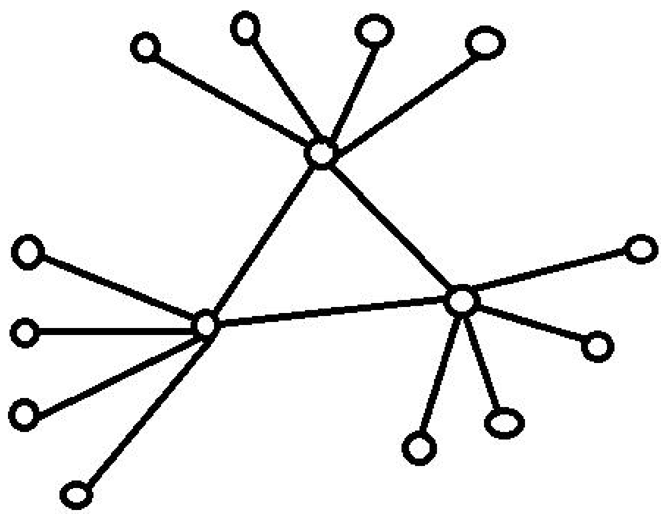

Рисунок 10. Добавление пучков листьев к вершинам цикла

6. Сеть, которая представляет собой объединение цикла вершин типа 1 и одного или нескольких циклов с чередованием вершин типов 1 и 2 (рис. 11 и 12; числа в вершинах указывают тип). Типы характеризуются векторами $\mathbf{l}(1) = (2, 2)$ и $\mathbf{l}(2) = (2, 0)$, поэтому из формул (5.2)–(5.3) получаем:

$$k_1 = \frac{e(1-2a)(A+2a)}{4A^2 - (A-2a)(3A-2a)}, \tag{5.13}$$

$$k_2 = \frac{e(1-2a)(2a-A)}{4A^2 - (A-2a)(3A-2a)}. \tag{5.14}$$

Положительность $k_i > 0$, $i = 1, 2$ эквивалентна отсутствию продуктивности ($A < 2a$) и выполнению неравенства

$$4A^2 - (A - 2a)(3A - 2a) > 0.$$

При этом, условия $k_i < e$, $i = 1, 2$ эквивалентны неравенствам

$$4A^2 - (A - 2a)(3A - 2a) > (1 - 2a)(A + 2a),$$

$$4A^2 - (A - 2a)(3A - 2a) > (1 - 2a)(2a - A).$$

Система трех последних неравенств эквивалентна второму из них; его можно записать в виде

$$A^2 + 10aA - A - 2a > 0.$$

В итоге получаем условие существования внутреннего равновесия:

$$\frac{-10a + 1 + \sqrt{(10a - 1)^2 + 8a}}{2} < A < 2a. \tag{5.15}$$

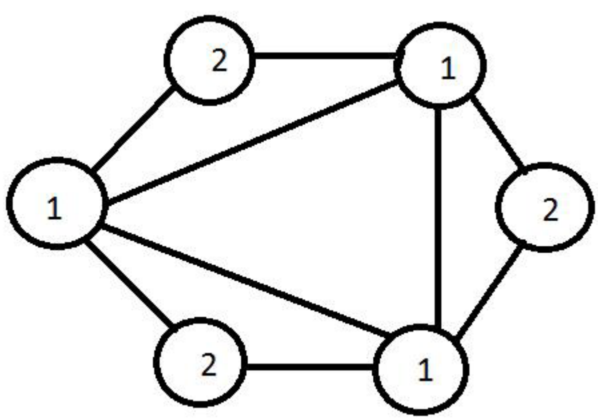

Рисунок 11. Объединение цикла вершин типа 1 и цикла с чередованием вершин типов 1 и 2

Приведем еще один пример того, как наша модель позволяет выявлять агентов, которым, по их положению в сети, выгодна та или иная реконструкция сети. Сравним равновесные уровни знаний и полезности для сети вида рис. 11 и полной сети (рис. 13).

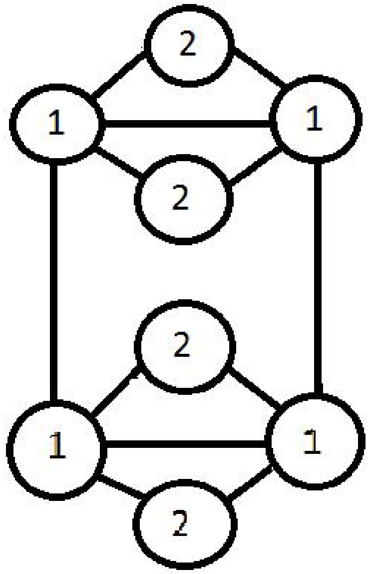

Рисунок 12. Объединение цикла вершин типа 1 и двух циклов с чередованием вершин типов 1 и 2

Предложение 5.3. *При переходе от сети на рис. 11 к полной сети, при выполнении условия (5.15), объемы знаний и полезности в вершинах типа 1 понижаются, а в вершинах типа 2 – увеличиваются.*

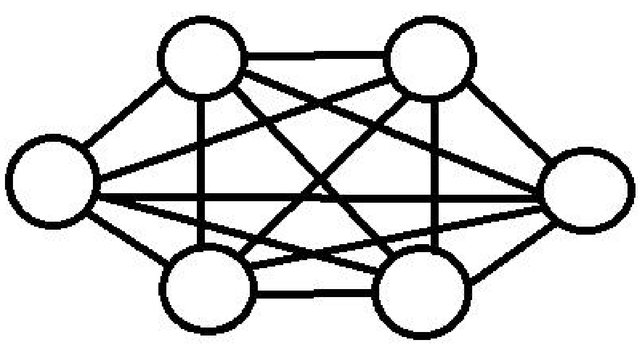

Рисунок 13. Полный граф

Доказательство. Пусть n – порядок обеих сетей. Сравнивая значения k_1 и k_2 для сети вида рис. 11 с величиной инвестиций $k = e(1-2a)/((n-1)A-2a)$ для полной сети (рис. 13), видим, что $k_1 > k$, $k_2 < k$. Сравнивая среды

$$K_1 = \frac{e(1-2a)(A+10a)}{A^2+8aA-4a^2}, \quad K_2 = \frac{e(1-2a)(A+6a)}{A^2+8aA-4a^2}$$

для типов вершин в сети вида рис. 11 со средой

$$K = \frac{(n-1)e(1-2a)}{(n-1)A-2a}$$

для вершин полной сети, видим, что $K_1 > K$, $K_2 < K$. Затем применяем теорему 2.1. □

6. Симметричные угловые равновесия в сетях с двумя типами вершин

Полученные условия для равновесий в диадах можно применять при анализе разнообразных сетей, как видно из доказательства следующего предложения.

Предложение 6.1. *В сети, которая представляет собой регулярную сеть степени m ($m \geq 2$), к каждой вершине которой (тип 1) примыкает ν ($\nu \geq 1$) листьев (тип 2), невозможно внутреннее равновесие. При соответствующих значениях параметров, возможны 6 из 8 симметричных угловых равновесий:*

a) Угловое равновесие

$$k_1 = \frac{e(1-2a)}{(m+1)A-2a}, \quad k_2 = 0$$

возможно, если $A > 1/(m+1)$.

b) Чисто угловое равновесие

$$k_1 = e, \quad k_2 = 0$$

возможно, если $A \geq 1/(m+1)$, $A + 2a \leq 1$,

c) При любых значениях параметров возможно чисто угловое равновесие

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0.$$

d) Угловое равновесие

$$k_1 = 0, \quad 0 < k_2 < e$$

невозможно ни при каких значениях параметров.

e) Чисто угловое равновесие

$$k_1 = 0, \quad k_2 = e$$

невозможно ни при каких значениях параметров.

f) Угловое равновесие

$$k_1 = e, \quad k_2 = \frac{e(1-2a-A)}{A-2a}$$

возможно, если $1-2a < A < 1/2$, $(m+1-\nu)A^2 - 2(m+1+\nu)aA \leq (1-\nu)A - 2a$ *или* $1/2 < A < 1-2a$.

g) Чисто угловое равновесие $k_1 = k_2 = e$ *возможно, если* $A \geq 1/2$.

В каждом из перечисленных случаев с ростом ν *ни* k_1, *ни* k_2, *ни полезности в вершинах обоих типов не меняются.*

h) Угловое равновесие

$$k_1 = \frac{e(1-2a-\nu A)}{(m+1)A-2a}, \quad k_2 = e$$

возможно, если $2a+\nu A < 1$, $A > 1/(\nu+m+1)$, $(m+1-\nu)A^2 - 4aA \geq (m)A - 2a$.

В этом случае с ростом числа «висячих» вершин ν *знания в вершинах первого типа уменьшаются, а в вершинах второго типа не изменяются. Полезность в вершинах обоих типов уменьшается.*

Доказательство. Типы характеризуются векторами $\mathbf{l}(1) = (m, \nu)$, $\mathbf{l}(2) = (1, 0)$, поэтому из (5.2)–(5.3) получаем стационарные значения k_1 и k_2:

$$k_1^s = \frac{e(1-2a)[(1-\nu)A-2a]}{(m+1-\nu)A^2 - 2(m+2)aA + 4a^2},$$

$$k_2^s = \frac{e(1-2a)[mA-2a]}{(m+1-\nu)A^2 - 2(m+2)aA + 4a^2}.$$

Мы видим, что числитель выражения для k_1^s отрицателен, а числитель выражения для k_2^s положителен, поэтому, независимо от знака знаменателя, k_1^s и k_2^s будут иметь разные знаки. Значит, внутреннее равновесие невозможно. Перейдем к рассмотрению угловых равновесий.

a) Если $k_2 = 0$, то $k_1^s = e(1-2a)/[(m+1)A-2a]$, причем $0 < k_1^s < e$, а следовательно, $k_1 = k_1^s$ при $A > 1/(m+1)$. Согласно лемме 2.1, необходимым и достаточным условием пассивности агентов в вершинах второго типа является условие

$$\frac{e(1-2a)}{(m+1)A-2a} \leq \frac{e(1-2a)}{A},$$

которое очевидным образом выполняется.

b) Согласно лемме 2.1, необходимое и достаточное условие гиперактивности агентов в вершинах первого типа при условии пассивности агентов в вершинах второго типа имеет вид:

$$me \geq \frac{e(1-A)}{A},$$

что равносильно $A \geq 1/(m+1)$, в то время как необходимое и достаточное условие пассивности агентов в вершинах второго типа при условии гиперактивности агентов в вершинах первого типа имеет вид:

$$e \leq \frac{e(1-2a)}{A},$$

что равносильно условию $A + 2a \leq 1$.

c) Следует из предложения 2.1.

d) Следует из замечания 3.1.

e) Следует из замечания 3.1.

f) Если $k_1 = e$, то $k_2^s = e(1-2a-A)/(A-2a)$, причем $0 < k_2^s < e$, а следовательно, $k_2 = k_2^s$, если $1 - 2a < A < 1/2$ (в этом случае продуктивность отсутствует) или $1/2 < A < 1 - 2a$ (в этом случае имеет место продуктивность). Тогда, согласно лемме 2.1, необходимое и достаточное условие гиперактивности агента в вершине первого типа имеет вид:

$$me + \frac{\nu e(1-2a-A)}{A-2a} \geq \frac{e(1-A)}{A},$$

что равносильно условию $(m+1-\nu)A^2 - 2(m+1+\nu)aA \leq (1-\nu)A - 2a$ при отсутствии продуктивности и условию

$$(m+1-\nu)A^2 - 2(m+1+\nu)aA \geq (1-\nu)A - 2a \qquad (6.1)$$

при наличии продуктивности. Покажем, что выполнение условия (6.1) следует из условия $1/2 < A < 1-2a$.

Условие (6.1), очевидно, равносильно условию:

$$(m+1-\nu)A^2 + (\nu-1)A \geq 2a[(m+1+\nu)A - 1]. \qquad (6.2)$$

Заменим в правой части неравенства (6.2) величину $2a$ ее верхней границей $(1-A)$ и получим неравенство:

$$2(m+1)A^2 - (m+3)A + 1 \geq 0. \qquad (6.3)$$

Из выполнения неравенства (6.3) будет следовать выполнение неравенства (6.2). Трехчлен в левой части неравенства (6.3) имеет корни $A_1 = 1/(m+1)$ и $A_2 = 1/2$, поэтому неравенство (6.3) при $A > 1/2$ выполняется.

g) Для существования данного равновесия, очевидно, необходимо и достаточно выполнения условия равновесия $\Gamma - \Gamma$ в диаде (теорема 3.1).

h) Если $k_2 = e$, то $k_1^s = e(1-2a-\nu A)/[(m+1)A-2a]$, причем $0 < k_1^s < e$ тогда и только тогда, когда $2a+\nu A < 1$ и $A > 1/(\nu+m+1)$. В этом случае $k_1 = k_1^s$ и согласно лемме 2.1 необходимое и достаточное условие гиперактивности агентов в вершинах типа 2 имеет вид:

$$\frac{e(1-2a-\nu A)}{(m+1)A-2a} \geq \frac{e(1-A)}{A},$$

что равносильно $(m+1-\nu)A^2 - 4aA \geq mA - 2a$. Затем применяем теорему 2.1. □

Из предложения 6.1 при $m = n-1$ следуют условия существования симметричных угловых равновесий в полной сети порядка n.

Мы можем рассматривать возникновение сети, изображенной на рис. 10, следующим образом: к каждой вершине цикла из n вершин добавили ν вершин, которые до этого были изолированными. Нас интересует, в частности, изменение в равновесии уровней знаний и полезностей с ростом ν. Условия существования симметричных угловых равновесий следуют из предложения 6.1 при $m = 2$.

В сети вида рис. 10 в каждом из случаев a) – g) с ростом ν (начиная с $\nu = 0$) ни k_1, ни k_2, ни полезности в вершинах обоих типов не меняются. В случае h) с ростом числа «висячих» вершин ν знания в вершинах первого типа уменьшаются, а в вершинах второго типа не изменяются. Полезность в вершинах обоих типов уменьшается.

Замечание 6.1. В условиях предложения 6.1, если $A > 1/2$ и $A + 2a < 1$, то возможны 5 симметричных угловых равновесий, а именно, случаи a), b), c), f), g). Применяя теорему 2.1, мы можем сравнить полезности агентов обоих типов во всех этих равновесиях, сравнивая их среды:

a)

$$K_1 = \frac{(m+1)e(1-2a)}{3A-2a}, \quad K_2 = \frac{e(1-2a)}{3A-2a}.$$

b)

$$K_1 = (m+1)e, \quad K_2 = e.$$

c)

$$K_1 = 0, \quad K_2 = 0.$$

f)

$$K_1 = (m+1)e + \frac{\nu e(1-2a-A)}{A-2a}, \quad K_2 = e + \frac{e(1-2a-A)}{A-2a}.$$

g)

$$K_1 = (m+1+\nu)e, \quad K_2 = 2e.$$

В результате, мы имеем следующее соотношение полезностей:

$$U_i^g > U_i^f > U_i^b > U_i^a > U_i^c,$$

$$i = 1, 2.$$

7. Заключение

Статья является продолжением исследования, начатого в [2], где рассматривается игра, в которой агенты в сети делают инвестиции некоторого ресурса (такого, как деньги или время) на первой стадии (период 1 в модели) и получают выигрыш на второй стадии (период 2). Исследуются игровые равновесия при наличии положительных экстерналий. Такие ситуации типичны для семей, сообществ, отраслей, стран, международных организаций и т. д.

В настоящей статье введено понятие типа вершины сети; дана типология сетей в зависимости от типов вершин; показано, что внутреннее игровое равновесие определяется указанной типологией сети. Рассмотрены все возможные равновесия в диаде – структуре, наиболее часто встречающейся в различных социальных и экономических системах. Подробно изучаются внутренние и симметричные угловые равновесия в сетях с двумя типами вершин, сравниваются полезности агентов обоих типов в рассматриваемых равновесиях. Это дает возможность судить о том, агенты какого типа и при каких условиях заинтересованы в изменении структуры сети, например, в добавлении новых периферийных вершин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мазалов В.В. *Математическая теория игр и приложения.* М. Лань. 2017.

2. Матвеенко В.Д., Королев А.В. *Равновесия Нэша в сетевой игре с производством и экстерналиями знаний* // Математическая теория игр и приложения. 2016. Т. 8. Вып. 1. С. 106–137.

3. Новиков Д.Н. *Игры и сети* // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2. Вып. 1. С. 107–124.

4. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. *Теория игр.* СПб.: БХВ-Петербург, 2012.

5. Bramoullé Y., Kranton R. *Public goods in networks* // Journal of Economic Theory. 2007. V. 135. P. 478–494.

6. Galeotti A., Goyal S., Jackson M.O., Vega-Redondo F., Yariv L. *Network games* // Review of Economic Studies. 2010. V. 77. P. 218–244.

7. Jackson M.O. *Social and Economic Networks.* Princeton University Press. 2008.
8. Jackson M.O., Zenou Y. *Games on networks* // Young P., Zamir S. eds. / Handbook of game theory with economic applications. V. 4.: Elsevier Science. Amsterdam. 2015. P. 95–164.
9. Martemyanov Y.P., Matveenko V.D. *On the dependence of the growth rate on the elasticity of substitution in a network* // International Journal of Process Management and Benchmarking. 2014. V. 4. No. 4. P. 475–492.
10. Nisan N., Roughgarden T., Tardos E., Vazirani V.V., Eds. *Algorithmic game theory.* New York: Cambridge University Press, 2007.
11. Romer P.M. *Increasing returns and long-run growth* // The Journal of Political Economy. 1986. V. 94. P. 1002–1037.

TYPOLOGY OF NETWORKS AND EQUILIBRIA IN NETWORK GAVE WITH PRODUCTION AND EXTERNALITIES OF KNOWLEDGES

Vladimir D. Matveenko, St. Petersburg filial of High Scool of Economics, Dr.Sc., professor (vmatveenko@hse.ru),
Alexei V. Korolev, St. Petersburg filial of High Scool of Economics, Cand.Sc. (danitschi@gmail.com).

Abstract: The game equilibrium in network is under consideration, in each node of this network economy is described by the simple two-periods Romer model of endogenius growth with production and knowledge exernalities. The sum of knowledge levels in the neighbour nodes causes an externality in the production of each node of network. The notion of type of node enters; one gives a tipology of networks in depending on nodes' types; is shown, that the inner game equilibria are defined by mentioned tipology. For various types of networks are found explicitly the equilibrium values of knowledges for nodes, which have a different position in the network.

Keywords: network, network structure, game in the network, Nash equilibrium, externality, forming of network.