ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2017, т. 297, с. 201–210

УДК 517.938

О структуре несущего многообразия для систем Морса–Смейла без гетероклинических пересечений[1]

В. З. Гринес[2,3], Е. В. Жужома[2,4], В. С. Медведев[2,5]

Поступило 3 апреля 2017 г.

Светлой памяти Д.В. Аносова

Показано, что если замкнутое гладкое ориентируемое многообразие M^n, $n \geq 3$, допускает систему Морса–Смейла без гетероклинических пересечений (для потока Морса–Смейла дополнительно требуется отсутствие периодических траекторий), то такое многообразие гомеоморфно связной сумме многообразий, структура которых взаимосвязана с типом и числом точек, принадлежащих неблуждающему множеству системы.

DOI: 10.1134/S0371968517020108

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Одним из основных аспектов научной деятельности Дмитрия Викторовича Аносова было исследование структурно устойчивых динамических систем. Хорошо известна его роль в "гиперболической революции", которая открыла миру существование хаоса в таких системах. Понимая важность математических моделей, описывающих хаотические явления, Д.В. Аносов не умалял и роль моделей для описания процессов с регулярной динамикой. Так, он писал в своей книге, посвященной доступному изложению основ динамики [6]: "Если отсчитывать возраст хаотической динамики с 1961 г., то сейчас ей под 50 лет. Для человека это зрелый возраст, но в науке такой возраст — это обычно еще молодость, хотя и не первая. Хаотическая динамика переживает период свойственного молодости роста. Но и регулярная динамика в свои 2000 (если считать от древних греков — система Птолемея!) или 300 (если считать от Ньютона) лет не теряет темпов. Все-таки человеку почти всегда нужны регулярные движения, да и в природе царит не один только хаос . . . ".

Следует сразу отметить, что изучение структурно устойчивых динамических систем на замкнутых многообразиях имеет принципиальные различия для систем с хаотической и регулярной динамикой. Важнейшим классом структурно устойчивых динамических систем с хаотической динамикой являются системы Аносова, введенные в [2–4] (основные понятия и факты теории динамических систем см. в [5]). Структурно устойчивые динамические системы с регулярной динамикой образуют класс систем Морса–Смейла, введенных в [29] (информацию по системам Морса–Смейла см., например, в книгах [15, 13] и обзоре [31]). Как для систем

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 15-01-03689-а, 16-51-10005-Ко_а) и Российского научного фонда (проект № 14-41-00044). Исследование осуществлено в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ (проект 90) в 2017 г.

[2]Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва, Россия.

[3]E-mail: vgrines@yandex.ru

[4]E-mail: zhuzhoma@mail.ru

[5]E-mail: medvedev@unn.ac.ru

Аносова, так и для систем Морса–Смейла имеется тесная взаимосвязь между динамическими свойствами и топологией несущего многообразия. Например, диффеоморфизмы Аносова коразмерности 1 существуют только на (многомерном) торе [9, 23], а фундаментальная группа многообразия, допускающего поток Аносова, с необходимостью имеет экспоненциальный рост [19, 28]. Для систем Морса–Смейла в пионерской работе [29] были получены неравенства Морса, связывающие число и индексы периодических орбит с числами Бетти несущего многообразия.

Под динамической системой с непрерывным временем мы понимаем поток, а динамическая система с дискретным временем отождествляется с порождающим ее диффеоморфизмом. Известно, что неблуждающее множество $\mathrm{NW}(\mathcal{F})$ системы Морса–Смейла $\mathcal{F}$ на замкнутом многообразии M^n гиперболично и состоит из конечного числа орбит. Поэтому все неблуждающие орбиты являются периодическими, если $\mathcal{F}$ — диффеоморфизм, и состояниями равновесия или замкнутыми траекториями, если $\mathcal{F}$ — поток. При этом инвариантные многообразия неблуждающих орбит либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально.

Напомним, что *индексом Морса* периодической точки (состояния равновесия) p диффеоморфизма f (потока f^t) называется размерность ее (его) неустойчивого многообразия. При этом если ее (его) индекс Морса равен 0, то периодическая точка (состояние равновесия) p диффеоморфизма (потока) называется *притягивающей* (*притягивающим*), а если ее (его) индекс Морса равен n, то она (оно) называется *отталкивающей* (*отталкивающим*). Если же индекс Морса точки p отличен от 0 и n, то периодическая точка (состояние равновесия) p называется *седловой* (*седловым*). Для краткости притягивающую и отталкивающую точки будем называть узловыми. Из конечности числа неблуждающих орбит вытекает, что инвариантные многообразия фиксированной неблуждающей орбиты пересекаются только вдоль самой орбиты.

Определение 1. Будем говорить, что диффеоморфизм (поток) Морса–Смейла *не имеет гетероклинических пересечений*, если инвариантные многообразия любых различных седловых периодических точек (различных седловых состояний равновесия и замкнутых траекторий) диффеоморфизма (потока) не пересекаются.

В настоящей работе мы изучаем топологическую структуру ориентируемого замкнутого многообразия M^n, $n \geq 3$, допускающего диффеоморфизм или поток Морса–Смейла $\mathcal{F}$ без гетероклинических пересечений и в случае потока без замкнутых траекторий. Полученные результаты являются развитием исследований, проведенных в работах [7, 12], в которых рассматривались диффеоморфизмы Морса–Смейла, все седловые периодические точки которых имели индекс Морса 1 или $n-1$.

Для формулировки основного результата нам понадобятся несколько определений.

Система Морса–Смейла $\mathcal{F}$ называется *полярной*, если ее неблуждающее множество содержит ровно одну притягивающую и ровно одну отталкивающую неподвижные точки и в случае потока не содержит замкнутых траекторий.

Пусть M^n — топологическое замкнутое n-мерное многообразие, $n \geq 2$. Напомним, что топологически вложенная в M^n сфера Σ^k размерности k, $1 \leq k \leq n-1$, называется *локально плоской*, если для любой точки $z \in \Sigma^k$ существуют окрестность $U(z) = U \subset M^n$ и гомеоморфизм $\varphi_z\colon U \to \mathbb{R}^n$ такие, что $\varphi_z(\Sigma^k \cap U) = \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$. Обоснованием следующего определения служит то, что проективную плоскость $\mathbb{P}^2$ можно представить в виде дизъюнктного объединения[6] окружности S^1 и двумерного открытого диска B^2, $\mathbb{P}^2 = S^1 \cup B^2$. Известно, что топологически вложенная в двумерное многообразие окружность всегда локально плоско вложена (см., например, [18, 8]).

[6]Объединение называется дизъюнктным, если объединяемые множества попарно не пересекаются.

Многообразие M^n называется *проективно-подобным*, если

1) $n \in \{2,4,8,16\}$;
2) M^n есть дизъюнктное объединение $(n/2)$-мерной сферы $S^{n/2}$, локально плоско вложенной в M^n, и открытого n-мерного шара B^n ($M^n = S^{n/2} \cup B^n$, $S^{n/2} \cap B^n = \varnothing$).

Хорошо известно, что неблуждающее множество любой системы Морса–Смейла $\mathcal{F}$ на замкнутом многообразии M^n имеет по крайней мере одну притягивающую и одну отталкивающую точки. Обозначим через $\mu \geq 2$ число всех узловых точек и через $\nu \geq 0$ число всех седловых точек, имеющих индекс Морса, равный 1 или $n-1$. Отметим, что неблуждающее множество системы $\mathcal{F}$ может содержать седловые точки, индекс Морса которых отличен от 1 и $n-1$. Положим $g_{\mathcal{F}} = (\nu - \mu + 2)/2$ и $k_{\mathcal{F}} = (\mu + \nu)/2$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{F}$ — система Морса–Смейла, заданная на замкнутом ориентируемом многообразии M^n, $n \geq 3$, не имеющая гетероклинических пересечений и в случае, когда $\mathcal{F}$ — поток, не имеющая замкнутых траекторий. Тогда $g_{\mathcal{F}} \geq 0$ и $k_{\mathcal{F}} \geq 1$ являются целыми числами и*

1) *если $g_{\mathcal{F}} = 0$, то либо M^n гомеоморфно S^n, либо существует число $1 \leq l^0_{\mathcal{F}} \leq k_{\mathcal{F}}$ такое, что M^n можно представить в виде связной суммы*
$$M^n = N^n_1 \sharp \ldots \sharp N^n_{l^0_{\mathcal{F}}},$$
где каждое слагаемое N^n_i, $i = 1, \ldots, l^0_{\mathcal{F}}$, допускает полярную систему, все седловые точки которой имеют индекс Морса, отличный от 1 и $n-1$;
2) *если $g_{\mathcal{F}} \neq 0$, то либо M^n можно представить в виде связной суммы*
$$M^n = (S^{n-1} \times S^1) \sharp \ldots \sharp (S^{n-1} \times S^1)$$
$g_{\mathcal{F}}$ слагаемых, либо существует число $1 \leq l^1_{\mathcal{F}} \leq k_{\mathcal{F}}$ такое, что M^n можно представить в виде связной суммы
$$M^n = (S^{n-1} \times S^1) \sharp \ldots \sharp (S^{n-1} \times S^1) \sharp N^n_1 \sharp \ldots \sharp N^n_{l^1_{\mathcal{F}}},$$
где число слагаемых вида $S^{n-1} \times S^1$ равно $g_{\mathcal{F}}$ и каждое слагаемое N^n_i, $i = 1, \ldots, l^1_{\mathcal{F}}$, допускает полярный поток, все седловые точки которого имеют индекс Морса, отличный от 1 и $n-1$.

Более того, если в случае 1) (*случае* 2)) *существует номер $i_* \in \{1, \ldots, l^0_{\mathcal{F}}\}$ ($i_* \in \{1, \ldots, l^1_{\mathcal{F}}\}$) такой, что неблуждающее множество полярной системы на $N^n_{i_*}$ содержит в точности одну седловую точку, то*

(а) $n \in \{4,8,16\}$;
(б) *если $\mathcal{F}$ — поток, то $N^n_{i_*}$ — проективно-подобное многообразие*;
(в) *если $\mathcal{F}$ — диффеоморфизм, то $N^n_{i_*}$ — проективно-подобное многообразие при $n \in \{8,16\}$. При $n = 4$ многообразие $N^4_{i_*}$ является дизъюнктным объединением топологически вложенной двумерной сферы и открытого четырехмерного шара* (*см. замечание* 2 *ниже*).

Замечание 1. При $n = 3$ все седловые точки системы $\mathcal{F}$ имеют индекс Морса 1 или $n-1$. Учитывая, что несущее многообразие полярной системы Морса–Смейла без седловых точек гомеоморфно 3-мерной сфере S^3 (см., например, [13, 15, 16]), получаем, что в утверждении 1) многообразие M^3 гомеоморфно сфере S^3, а в утверждении 2) связная сумма имеет вид
$$M^3 = (S^2 \times S^1) \sharp \ldots \sharp (S^2 \times S^1).$$
Кроме того, необходимо отметить, что в работе [7] был доказан более сильный результат, так как для рассматриваемого диффеоморфизма Морса–Смейла допускалось наличие гетероклинических пересечений одномерных и двумерных инвариантных многообразий седловых

периодических точек (по нульмерному множеству, состоящему из гетероклинических орбит) и запрещалось лишь пересечение двумерных инвариантных многообразий.

Замечание 2. В случае диффеоморфизма $\mathcal{F}$ при $n=4$ можно показать, что, несмотря на то, что $N^4_{i_*}$ является дизъюнктным объединением топологически вложенной двумерной сферы S^2 и открытого четырехмерного шара, $N^4_{i_*}$ не обязательно является проективно-подобным многообразием, поскольку S^2 не обязательно локально плоско вложена в $N^4_{i_*}$ (см. [21]).

Замечание 3. При $n \geq 4$ проективно-подобное многообразие ориентируемо (см. [22]).

Далее мы предполагаем, что $g=(\nu-\mu+2)/2 \geq 1$.

Результаты о топологической структуре несущих многообразий могут быть использованы для описания динамических свойств систем Морса–Смейла. Например, имеет место следующий результат о существовании периодических траекторий.

Следствие 1. *Пусть f^t — поток Морса–Смейла без гетероклинических пересечений на замкнутом ориентируемом многообразии M^n размерности $n \geq 3$, и предположим, что неблуждающее множество $\mathrm{NW}(f^t)$ содержит в точности μ узловых и $\nu \neq 0$ седловых состояний равновесия, индекс Морса каждого из которых равен 1 или $n-1$. Тогда если фундаментальная группа $\pi_1(M^n)$ не содержит подгруппы, изоморфной свободному произведению $g=(\nu-\mu+2)/2$ экземпляров группы целых чисел $\mathbb{Z}$ $(\mathbb{Z} * \ldots * \mathbb{Z})$, то поток f^t имеет по крайней мере одну периодическую траекторию.*

Следствие 2. *Пусть $f\colon M^n \to M^n$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса–Смейла замкнутого ориентируемого n-многообразия, и предположим, что неблуждающее множество $\mathrm{NW}(f)$ содержит в точности μ узловых и ν седловых периодических точек, индекс Морса каждой из которых равен 1 или $n-1$. Тогда если фундаментальная группа $\pi_1(M^n)$ не содержит подгруппы, изоморфной свободному произведению $g=(\nu-\mu+2)/2$ экземпляров группы целых чисел $\mathbb{Z}$, то существует по крайней мере одна пара p,q седловых периодических точек диффеоморфизма f таких, что индекс Морса точки p равен 1, индекс Морса точки q равен $n-1$ и $W^{\mathrm{s}}(p)\cap W^{\mathrm{u}}(q)\neq\varnothing$.*

Сравнительно недавно выяснилось, что вопрос о существовании гетероклинических пересечений имеет отношение к вопросу о существовании так называемых сепараторов в магнитных полях хорошо проводящих сред [14]. Мы выделим следующее утверждение для диффеоморфизмов и потоков Морса–Смейла трехмерных многообразий, поскольку такие результаты важны для приложений. Если размерность несущего многообразия для диффеоморфизма f (потока f^t) Морса–Смейла равна 3 и для седловых периодических точек (состояний равновесия) p, q с индексами Морса 1, 2 соответственно выполняется условие $W^{\mathrm{s}}(p)\cap W^{\mathrm{u}}(q)\neq\varnothing$, то компоненты связности пересечения $W^{\mathrm{s}}(p)\cap W^{\mathrm{u}}(q)$ называются *гетероклиническими кривыми* (*гетероклиническими траекториями*).

Следствие 3. *Пусть f (f^t) — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм (поток без замкнутых траекторий) Морса–Смейла, заданный на замкнутом ориентируемом 3-многообразии M^3, такой, что $\mathrm{NW}(f)$ $(\mathrm{NW}(f^t))$ состоит в точности из μ узловых и $\nu\neq 0$ седловых периодических точек (состояний равновесия). Тогда если фундаментальная группа $\pi_1(M^3)$ не равна свободному произведению $g=(\nu-\mu+2)/2$ экземпляров группы целых чисел $\mathbb{Z}$, то блуждающее множество диффеоморфизма f (потока f^t) содержит по крайней мере одну гетероклиническую кривую (траекторию).*

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для краткости мы в основном даем определения только для диффеоморфизмов, поскольку соответствующие определения для потоков (порождаемых векторными полями) аналогичны. Пространство C^r-диффеоморфизмов, наделенное равномерной C^r-топологией, обозначим через $\mathrm{Diff}^r(M^n)$. Для $r=1$ будем обычно писать $\mathrm{Diff}(M^n)$.

Зафиксируем $f \in \mathrm{Diff}(M^n)$. Напомним, что точка $x \in M^n$ называется *неблуждающей*, если для любой ее окрестности U и любого натурального числа N найдется $n_0 \in \mathbb{Z}$ такое, что $|n_0| \geq N$ и $f^{n_0}(U) \cap U \neq \varnothing$. Точка, не являющаяся неблуждающей, называется *блуждающей точкой*. Множество всех неблуждающих точек диффеоморфизма f обозначается через $\mathrm{NW}(f)$ и называется *неблуждающим множеством* диффеоморфизма f. Дополнение к множеству $\mathrm{NW}(f)$ называется *блуждающим множеством*.

Очевидно, что любая периодическая точка p периода $m \geq 1$ ($f^m(p) = p$) диффеоморфизма f является неблуждающей. При этом точка p называется *гиперболической*, если производная $Df^m(p)\colon T_pM^n \to T_pM^n$ (рассматриваемая как линейное отображение касательного пространства в себя) не имеет собственных чисел, равных по модулю единице. Согласно теореме Гробмана–Хартмана в некоторой окрестности гиперболической неподвижной точки p диффеоморфизм f сопряжен линейному диффеоморфизму, определяемому матрицей Якоби $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\big|_p$. Отсюда следует, что для гиперболической точки p существуют так называемые устойчивое $W^{\mathrm{s}}(p)$ и неустойчивое $W^{\mathrm{u}}(p)$ многообразия, которые можно определить как множества точек $y \in M^n$ таких, что $\varrho_M(f^{mk}p, f^{mk}y) \to 0$ при $k \to +\infty$ и $k \to -\infty$ соответственно, где ϱ_M — метрика на M^n. Заметим, что неустойчивое многообразие $W^{\mathrm{u}}(p)$ есть устойчивое многообразие относительно f^{-1}. Известно, что $W^{\mathrm{s}}(p)$ и $W^{\mathrm{u}}(p)$ гомеоморфны (во внутренней топологии) евклидовым пространствам $\mathbb{R}^{\dim W^{\mathrm{s}}(p)}$ и $\mathbb{R}^{\dim W^{\mathrm{u}}(p)}$ соответственно и являются гладкими инъективными иммерсиями последних в M^n. При этом периодическая гиперболическая точка $p \in \mathrm{NW}(f)$ называется *узловой*, если либо $\dim W^{\mathrm{s}}(p) = n$ (в этом случае p называется *притягивающей* или *стоковой точкой*), либо $\dim W^{\mathrm{u}}(p) = n$ (в этом случае p называется *отталкивающей* или *источниковой точкой*). В частном случае, когда точка p неподвижная, она называется *узлом* (соответственно *стоком* или *источником*). Гиперболическая периодическая точка $\sigma \in \mathrm{NW}(f)$ называется *седловой*, если ее устойчивое и неустойчивое многообразия имеют ненулевую топологическую размерность.

Диффеоморфизм f называется *диффеоморфизмом Морса–Смейла*, если $\mathrm{NW}(f)$ состоит из конечного числа периодических точек (следовательно, неблуждающее множество $\mathrm{NW}(f)$ совпадает с множеством периодических точек), все периодические точки гиперболические и инвариантные многообразия $W^{\mathrm{s}}(p)$, $W^{\mathrm{u}}(q)$ пересекаются трансверсально (если пересечение непусто) для любых точек $p, q \in \mathrm{NW}(f)$. Будем говорить, что f не имеет седловых гетероклинических пересечений, если $W^{\mathrm{s}}(x) \cap W^{\mathrm{u}}(y) = \varnothing$ для любых различных седловых периодических точек $x, y \in \mathrm{NW}(f)$.

Лемма 1. *Пусть σ — седловая неподвижная точка диффеоморфизма Морса–Смейла $f\colon M^n \to M^n$, $n \geq 3$, такая, что ее индекс Морса равен $n-1$ и $W^{\mathrm{u}}(\sigma)$ не имеет пересечений с устойчивыми многообразиями других седловых точек. Тогда существует стоковая неподвижная точка ω диффеоморфизма f такая, что*

1) *множество $\Sigma^{n-1} = \operatorname{clos} W^{\mathrm{u}}(\sigma)$ совпадает с $W^{\mathrm{u}}(\sigma) \cup \omega$ и является топологическим вложением $(n-1)$-мерной сферы S^{n-1};*
2) *существует окрестность U множества Σ^{n-1} такая, что $f(\operatorname{clos} U) \subset U$ и замыкание $\operatorname{clos} U$ гомеоморфно $S^{n-1} \times [-1, 1]$.*

Доказательство. Предположим для определенности, что $\dim W^{\mathrm{s}}(\sigma) = 1$, $\dim W^{\mathrm{u}}(\sigma) = n - 1$. Из неравенства $n \geq 3$ вытекает, что $\dim W^{\mathrm{u}}(\sigma) \geq 2$. Отсюда и из отсутствия пересечений $W^{\mathrm{u}}(\sigma)$ с устойчивыми многообразиями других седловых точек следует существование стоковой неподвижной точки ω такой, что замыкание $\operatorname{clos} W^{\mathrm{u}}(\sigma)$ состоит из $W^{\mathrm{u}}(\sigma)$ и точки ω (доказательства см., например, в [16, предложение 2.1]). Поэтому множество $\Sigma = \operatorname{clos} W^{\mathrm{u}}(\sigma) = W^{\mathrm{u}}(\sigma) \cup \omega$ является топологически вложенной $(n-1)$-мерной сферой.

Существование требуемой окрестности U множества Σ^{n-1} в случае $n = 3$ доказано в [7, Proposition 0.1], а для $n \geq 4$ — в [11]. $\square$

В том случае, когда индекс Морса седловой точки σ равен 1, утверждение, аналогичное лемме 1, имеет место для устойчивого многообразия точки σ с заменой стоковой точки ω на источниковую точку α.

Как уже упоминалось, если неблуждающее множество диффеоморфизма Морса–Смейла f, заданного на замкнутом трехмерном многообразии M^3, не содержит седловых периодических точек, то f является полярным (а многообразие M^3 в этом случае гомеоморфно сфере S^3).

Следующее предложение вытекает из [16, следствие 1.1].

Предложение 1. *Пусть $f\colon M^n\to M^n$, $n\geq 4$, — диффеоморфизм Морса–Смейла такой, что индекс Морса любой седловой периодической точки диффеоморфизма f принадлежит интервалу $[2,n-2]$. Тогда диффеоморфизм f является полярным.*

Следующее предложение является непосредственным следствием леммы 7 работы [20].

Предложение 2. *Пусть M^n — замкнутое ориентируемое топологическое многообразие и Σ^{n-1} — топологически вложенное в M^n подмногообразие, гомеоморфное сфере S^{n-1} и принадлежащее открытой окрестности U, замыкание которой гомеоморфно прямому произведению $S^{n-1}\times[-1,1]$. Тогда если многообразие с краем $M^n\setminus U$ связно, то существует топологическое замкнутое многообразие M_1^n такое, что многообразие M^n гомеоморфно связной сумме $M^n=M_1^n\,\sharp\,(S^{n-1}\times S^1)$.*

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕСУЩЕГО МНОГООБРАЗИЯ В ВИДЕ СВЯЗНОЙ СУММЫ. СТРУКТУРА СЛАГАЕМЫХ

Доказательство теоремы 1. Если поток Морса–Смейла не имеет периодических траекторий, то сдвиг вдоль всех траекторий на фиксированное время является диффеоморфизмом Морса–Смейла. Поэтому достаточно доказать теорему для случая, когда система $\mathcal{F}=f\colon M^n\to M^n$ является диффеоморфизмом. Не уменьшая общности, также можно считать, что все периодические точки диффеоморфизма f являются неподвижными, поскольку в противном случае можно перейти к достаточно большой итерации f.

Седловые неподвижные точки диффеоморфизма f, индекс Морса которых равен 1 или $n-1$, будем называть седловыми точками коразмерности 1.

Докажем вначале утверждения 1) и 2) теоремы 1. Пусть σ — седловая неподвижная точка коразмерности 1. Предположим для определенности, что $\dim W^{\mathrm{s}}(\sigma)=1$, $\dim W^{\mathrm{u}}(\sigma)=n-1$. Так как у диффеоморфизма f нет седловых гетероклинических пересечений, то в силу утверждения 1) леммы 1 замыкание $\Sigma^{n-1}=\operatorname{clos}W^{\mathrm{u}}(\sigma)$ является топологическим вложением $(n-1)$-мерной сферы S^{n-1} и состоит из $W^{\mathrm{u}}(\sigma)$ и некоторого стока ω, $\Sigma^{n-1}=W^{\mathrm{u}}(\sigma)\cup\omega$. В силу утверждения 2) леммы 1 существует окрестность U множества Σ^{n-1} такая, что $f(\operatorname{clos}U)\subset U$ и замыкание $\operatorname{clos}U$ гомеоморфно $S^{n-1}\times[-1,1]$. Удалим из многообразия M^n окрестность U. Тогда получим многообразие (возможно, несвязное) с двумя граничными компонентами Σ_1^{n-1} и Σ_2^{n-1}, гомеоморфными S^{n-1}. Подклеим к компоненте Σ_1^{n-1} диск B_1^n, а к компоненте Σ_2^{n-1} диск B_2^n так, что получим гладкое ориентируемое многообразие M_1^n. Используя включение $f(\operatorname{clos}U)\subset U$, продолжим диффеоморфизм f на многообразие M_1^n так, что внутри каждого диска B_1^n, B_2^n полученный диффеоморфизм $f_1\colon M_1^n\to M_1^n$ имеет ровно один гиперболический сток, в то время как все точки этих дисков, отличные от стоков, являются блуждающими. Таким образом, неблуждающее множество построенного диффеоморфизма Морса–Смейла f_1 по сравнению с неблуждающим множеством f имеет на одно седло коразмерности 1 меньше и на один узел (в данном случае сток) больше. Будем называть описанную процедуру разрезанием вдоль неустойчивой сепаратрисы седловой точки. В случае, когда индекс Морса седловой точки σ равен 1, аналогичная операция разрезания делается вдоль устойчивой сепаратрисы с добавлением источников.

Проделав ν разрезаний вдоль сепаратрис коразмерности 1 для всех седловых неподвижных точек с индексом Морса $n-1$ или 1, мы получим диффеоморфизм Морса–Смейла $f_\nu\colon M^n_\nu \to M^n_\nu$, заданный на замкнутом гладком многообразии M^n_ν, которое состоит из конечного числа компонент связности. Неблуждающее множество диффеоморфизма f_ν содержит в точности $\mu+\nu$ узловых неподвижных точек и не содержит седловых периодических точек коразмерности 1. Из отсутствия таких точек следует, что на каждой компоненте связности многообразия M^n_ν имеется ровно один источник и ровно один сток. Но тогда число компонент связности многообразия M^n_ν равно $k_{\mathcal F}=(\mu+\nu)/2$. Поэтому число $\mu+\nu$ четное и на каждой компоненте связности определен полярный диффеоморфизм.

Описанная конструкция позволяет построить многообразие $\widetilde M^n$, гомеоморфное исходному многообразию M^n, из полученных компонент связности. Действительно, если после разрезания вдоль сепаратрисы коразмерности 1 седловой точки в результате возникает связное многообразие, то в силу предложения 2 исходное многообразие гомеоморфно связной сумме некоторого замкнутого ориентируемого многообразия и $S^2\times S^1$. Если же после разрезания вдоль сепаратрисы коразмерности 1 седловой точки в результате возникает многообразие, состоящее из двух компонент связности, то это означает, что исходное многообразие гомеоморфно связной сумме двух замкнутых ориентируемых многообразий.

Обозначим через $N^n_1,\dots,N^n_{k_{\mathcal F}}$ компоненты связности многообразия M^n_ν. Число разрезаний исходного многообразия, которые не приводят к увеличению числа компонент связности, равно $g_{\mathcal F}=\nu-(\mu+\nu)/2+1=(\nu-\mu+2)/2$. Каждое такое разрезание означает наличие в связной сумме слагаемого $S^{n-1}\times S^1$. Таким образом, взяв связную сумму $k_{\mathcal F}$ многообразий $N^n_1,\dots,N^n_{k_{\mathcal F}}$ и $g_{\mathcal F}$ копий $S^{n-1}\times S^1$, мы получим многообразие $\widetilde M^n$, гомеоморфное M^n.

При этом могут быть две возможности:

1) $g_{\mathcal F}=0$;
2) $g_{\mathcal F}\ne 0$.

В случае 1) могут быть два подслучая:

а) все многообразия $N^n_1,\dots,N^n_{k_{\mathcal F}}$ гомеоморфны сфере, тогда исходное многообразие M^n гомеоморфно сфере;

б) среди многообразий $N^n_1,\dots,N^n_{k_{\mathcal F}}$ существует в точности $1\le l^0_{\mathcal F}\le k_{\mathcal F}$ многообразий, не гомеоморфных сфере (это такие многообразия, которые допускают полярные диффеоморфизмы с седловыми неподвижными точками, индекс Морса которых отличен от 1 и $n-1$). Не уменьшая общности, можно предположить, что нумерация выбрана таким образом, что первые $l^0_{\mathcal F}$ многообразий в наборе $N^n_1,\dots,N^n_{k_{\mathcal F}}$ являются такими многообразиями. Таким образом, получаем, что многообразие M^n гомеоморфно связной сумме $N^n_1\,\sharp\dots\sharp\,N^n_{l^0_{\mathcal F}}$.

Если $g_{\mathcal F}\ne 0$, то, рассуждая аналогично, получим, что либо многообразие M^n гомеоморфно связной сумме $g_{\mathcal F}$ слагаемых $(S^{n-1}\times S^1)\,\sharp\dots\sharp\,(S^{n-1}\times S^1)$, либо существует число $1\le l^1_{\mathcal F}\le k_{\mathcal F}$ такое, что M^n можно представить в виде связной суммы $(S^{n-1}\times S^1)\,\sharp\dots\sharp\,(S^{n-1}\times S^1)\,\sharp$ $\sharp\,N^n_1\,\sharp\dots\sharp\,N^n_{l^1_{\mathcal F}}$, где число слагаемых вида $S^{n-1}\times S^1$ равно $g_{\mathcal F}$ и каждое слагаемое N^n_i, $i=1,\dots,l^1_{\mathcal F}$, допускает полярный поток, все седловые точки которого имеют индекс Морса, отличный от 1 и $n-1$.

Для завершения доказательства теоремы предположим, что в случае 1) (случае 2)) существует номер $i_*\in\{1,\dots,l^0_{\mathcal F}\}$ ($i_*\in\{1,\dots,l^1_{\mathcal F}\}$) такой, что неблуждающее множество полярного диффеоморфизма $f_{i_*}\colon N^n_{i_*}\to N^n_{i_*}$ состоит из источника α, стока ω и седловой неподвижной точки σ, индекс Морса которой равен k, где $1<k<n-1$. Тогда многообразие M^n является дизъюнктным объединением множества $\Sigma^k=W^{\mathrm u}(\sigma)\cup\omega$, гомеоморфного топологически вложенной k-мерной сфере, и n-мерного диска $B^n=W^{\mathrm u}(\alpha)$, $M^n=\Sigma^k\cup B^n$, $\Sigma^k\cap B^n=\varnothing$.

Из [32] (см. также [22]) следует, что если f_{i_*} — сдвиг на единицу времени потока, то множество Σ^k локально плоско вложено. Более того, при $n \geq 5$ в [21] показано, что Σ^k также локально плоско вложено без дополнительных ограничений на диффеоморфизм f_{i_*}. Поэтому далее мы предполагаем, что Σ^k локально плоско вложено для $n \geq 4$. Тогда Σ^k обладает открытой трубчатой окрестностью $T(\Sigma^k)$ такой, что ее граница $\partial T(\Sigma^k)$ является подмногообразием коразмерности 1, причем $T(\Sigma^k)$ есть тотальное пространство локально тривиального расслоения над базой Σ^k со слоем B^{n-k} (см. [17]). Для удобства можно считать, что каждый слой B^{n-k} является единичным диском, граница которого $\partial B^{n-k} = S^{n-k-1}$ принадлежит $\partial T(\Sigma^k)$, а центр B^{n-k} принадлежит Σ^k.

Покажем, что если $\partial T(\Sigma^k)$ гомеоморфна сфере S^{n-1}, то это приводит к справедливости последнего утверждения доказываемой теоремы. Тогда нам останется лишь установить справедливость этого предположения.

Пусть $\partial T(\Sigma^k)$ гомеоморфна сфере S^{n-1}. Тогда расслоение $\pi\colon T(\Sigma^k) \to \Sigma^k$ является нетривиальным и, более того, индуцирует локально тривиальное расслоение $\partial T(\Sigma^k) \to \Sigma^k$, т.е. расслоение с базой Σ^k и слоем $S^{n-k-1} = \partial B^{n-k}$. Известно [1] (см. также [25]), что имеются только следующие такие расслоения:

$$S^3 \to S^2 \quad \text{со слоем } S^1, \qquad S^7 \to S^4 \quad \text{со слоем } S^3, \qquad S^{15} \to S^8 \quad \text{со слоем } S^7.$$

Нетрудно видеть, что указанным расслоениям соответствуют следующие пары (n,k): $(4,2)$, $(8,4)$, $(16,8)$. Таким образом, из условий теоремы и сказанного выше получаем следующее:

а) $n \in \{4,8,16\}$;

б) если $\mathcal{F} = f^t$ — поток, то $N^n_{i_*}$ — проективно-подобное многообразие;

в) если $\mathcal{F} = f$ — диффеоморфизм, то $N^n_{i_*}$ — проективно-подобное многообразие при $n \in \{8,16\}$. При $n = 4$ многообразие $N^4_{i_*}$ является дизъюнктным объединением топологически вложенной двумерной сферы и открытого четырехмерного шара.

Это завершает доказательство теоремы.

Покажем теперь, что $\partial T(\Sigma^k)$ гомеоморфна сфере S^{n-1}. Построим на множествах B^n и $\operatorname{clos} T(\Sigma^k) = T(\Sigma^k) \cup \partial T(\Sigma^k)$ потоки f^t_0 и f^t_1 соответственно, обладающие свойствами, описанными ниже.

Возьмем произвольную точку $x_0 \in B^n$, не принадлежащую $\operatorname{clos} T(\Sigma^k)$. Так как B^n — открытый диск, то на B^n существует поток f^t_0 такой, что x_0 является отталкивающим состоянием равновесия, а все остальные траектории покидают любую компактную часть диска B^n и потом в нее не возвращаются.

Поток f^t_1 устроен таким образом:

а) каждый диск $\widetilde{B}^{n-k}$ — слой локально тривиального расслоения $(T(\Sigma^k), \Sigma^k, B^{n-k})$ инвариантен относительно потока f^t_1;

б) ограничение потока f^t_1 на $\widetilde{B}^{n-k}$ обладает притягивающим состоянием равновесия, расположенным в точке на Σ^k, соответствующей центру диска B^{n-k}, и множеством состояний равновесия, заполняющих целиком границу диска $\widetilde{B}^{n-k}$;

в) траектории всех точек множества $(T(\Sigma^k) \setminus \Sigma^k) \cap \widetilde{B}^{n-k}$ движутся при увеличении (уменьшении) времени к притягивающему состоянию равновесия (границе) диска $\widetilde{B}^{n-k}$.

Пусть $\widetilde{\Sigma}^{n-1}$ — плоское вложение в M^n сферы размерности $n-1$ такое, что $\widetilde{\Sigma}^{n-1}$ ограничивает n-диск b^n_0 с точкой x_0 внутри и является трансверсальным (в топологическом смысле) траекториям потока f^t_0. Из свойств этого потока, равенства $M^n = \Sigma^k \cup B^n$ и того, что $\partial T(S^k)$ является компактным подмножеством открытого диска B^n, вытекает, что существует число $\tau > 0$ такое, что множество $\widetilde{\Sigma}^{n-1}_\tau = f^\tau_0(\widetilde{\Sigma}^{n-1})$ (гомеоморфное $(n-1)$-мерной сфере и плоско вложенное в M^n) принадлежит $T(\Sigma^k)$, а множество $\partial T(\Sigma^k)$ принадлежит внутренности диска $f_0^\tau(b_0^n)$. Из свойств потока f_1^t следует, что сфера $\widetilde{\Sigma}_\tau^{n-1}$ лежит в множестве его блуждающих точек.

Пересечение $T(\Sigma^k) \cap f_0^\tau(b_0^n)$ есть открытое множество, граница которого содержит $\partial T(\Sigma^k)$. Поскольку $\partial T(\Sigma^k)$ есть подмногообразие коразмерности 1, в множестве $\operatorname{clos}(T(\Sigma^k) \cap f_0^\tau(b_0^n))$ у $\partial T(\Sigma^k)$ есть полуокрестность $\mathfrak{U} \subset (T(\Sigma^k) \cup \partial T(\Sigma^k)) \cap f_0^\tau(b_0^n)$, гомеоморфная $(0,1] \times \partial T(\Sigma^k)$. Возьмем открытое подмножество $\operatorname{int}\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}$, гомеоморфное $(0,1) \times \partial T(\Sigma^k)$. Из свойств гомотопических групп вытекают следующие равенства:

$$\pi_i(\operatorname{int}\mathfrak{U}) = \pi_i\bigl((0,1) \times \partial T(\Sigma^k)\bigr) = \pi_i\bigl(\partial T(\Sigma^k)\bigr), \qquad i = 0,\dots,n-2. \tag{3.1}$$

Множество $A_0 = B^n \setminus \operatorname{clos} f_0^\tau(b_0^n)$ является открытым n-мерным кольцом, гомеоморфным $(0,1) \times \mathbb{S}^{n-1}$. Поэтому его гомотопические группы $\pi_i(A_0)$ равны нулю для всех $i = 0,\dots,n-2$. Рассмотрим представителя $\gamma\colon S^i \to \operatorname{int}\mathfrak{U}$ группы $\pi_i(\operatorname{int}\mathfrak{U})$, где S^i есть i-мерная сфера. Так как $\gamma(S^i) \cap \partial T(\Sigma^k) = \varnothing$, существует число $\tau_1 > 0$ такое, что $f^{\tau_1}(\gamma(S^i)) \subset A_0$. Отсюда и из (3.1) следует, что $\pi_i(\partial T(\Sigma^k)) = 0$ для всех $i = 0,\dots,n-2$. Из справедливости гипотезы Пуанкаре для всех размерностей $n \geq 3$ (см. [10, 24, 26, 27, 30]) вытекает, что множество $\partial T(\Sigma^k)$ гомеоморфно $(n-1)$-мерной сфере. $\square$

Доказательство следствий 1–3. Схема доказательства первых двух следствий одна и та же: если предположить противное, то имеет место разложение несущего многообразия M^n в силу теоремы 1. Отсюда и из теоремы ван Кампена следует, что $\pi_1(M^n)$ содержит подгруппу $\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$. Полученное противоречие доказывает требуемые утверждения. Для доказательства следствия 3 достаточно заметить, что в трехмерном случае любая седловая точка имеет индекс Морса, равный 1 или 2. $\square$

Благодарности. Авторы благодарят О.В. Починку и Е.Я. Гуревич, а также участников семинара “Топологические методы в динамике” в Национальном исследовательском университете “Высшая школа экономики” за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Adams J.F.* On the non-existence of elements of Hopf invariant one // Ann. Math. Ser. 2. 1960. V. 72, N 1. P. 20–104.
2. *Аносов Д.В.* Грубость геодезических потоков на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны // ДАН. 1962. Т. 145, №4. С. 707–709.
3. *Аносов Д.В.* Эргодические свойства геодезических потоков на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // ДАН. 1963. Т. 151, №6. С. 1250–1252.
4. *Аносов Д.В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. М.: Наука, 1967. (Тр. МИАН; Т. 90).
5. *Аносов Д.В.* Гладкие динамические системы. Гл. 1: Исходные понятия; гл. 2: Элементарная теория // Динамические системы–1. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 156–178; 178–204. (Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фунд. напр.; Т. 1).
6. *Аносов Д.В.* Дифференциальные уравнения: то решаем, то рисуем. М.: МЦНМО, 2010.
7. *Bonatti C., Grines V., Medvedev V., Pécou E.* Three-manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves // Topology Appl. 2002. V. 117, N 3. P. 335–344.
8. *Daverman R.J., Venema G.A.* Embeddings in manifolds. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2009. (Grad. Stud. Math.; V. 106).
9. *Franks J.* Anosov diffeomorphisms // Global analysis: Proc. Symp. Pure Math. Univ Calif., 1968. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1970. P. 61–93. (Proc. Symp. Pure Math.; V. 14).
10. *Freedman M.H.* The topology of four-dimensional manifolds // J. Diff. Geom. 1982. V. 17. P. 357–453.
11. *Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С.* Граф Пейкшото диффеоморфизмов Морса–Смейла на многообразиях размерности, большей трех // Тр. МИАН. 2008. Т. 261. С. 61–86.
12. *Grines V.Z., Gurevich E.Ya., Pochinka O.V.* Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections // J. Math. Sci. 2015. V. 208, N 1. P. 81–90.

13. *Grines V.Z., Medvedev T.V., Pochinka O.V.* Dynamical systems on 2- and 3-manifolds. Cham: Springer, 2016. (Dev. Math.; V. 46).
14. *Grines V., Medvedev T., Pochinka O., Zhuzhoma E.* On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids // Physica D. 2015. V. 294. P. 1–5.
15. *Гринес В.З., Починка О.В.* Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три. М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2011.
16. *Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С., Починка О.В.* Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла // Тр. МИАН. 2010. Т. 271. С. 111–133.
17. *Hirsch M.W.* Differential topology. New York: Springer, 1976. (Grad. Texts Math.; V. 33). Рус. пер.: *Хирш М.* Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979.
18. *Келдыш Л.В.* Топологические вложения в евклидово пространство. М.: Наука, 1966. (Тр. МИАН; Т. 81).
19. *Маргулис Г.А.* “У”-потоки на трехмерных многообразиях // *Аносов Д.В., Синай Я.Г.* Некоторые гладкие эргодические системы. УМН. 1967. Т. 22, №5. С. 107–172. Приложение. С. 169–171.
20. *Медведев В.С., Уманский Я.Л.* О разложении n-мерных многообразий на простые многообразия // Изв. вузов. Математика. 1979. №1. С. 46–50.
21. *Medvedev V.S., Zhuzhoma E.V.* Locally flat and wildly embedded separatrices in simplest Morse–Smale systems // J. Dyn. Control Syst. 2012. V. 18, N 3. P. 433–448.
22. *Medvedev V.S., Zhuzhoma E.V.* Morse–Smale systems with few non-wandering points // Topology Appl. 2013. V. 160, N 3. P. 498–507.
23. *Newhouse S.E.* On codimension one Anosov diffeomorphisms // Amer. J. Math. 1970. V. 92, N 3. P. 761–770. Рус. пер.: *Ньюхаус Ш.Е.* Об У-диффеоморфизмах коразмерности один // Гладкие динамические системы. М.: Мир, 1977. С. 87–98.
24. *Newman M.H.A.* The engulfing theorem for topological manifolds // Ann. Math. Ser. 2. 1966. V. 84. P. 555–571.
25. *Новиков С.П.* Топология. М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2002.
26. *Perelman G.* Ricci flow with surgery on three-manifolds: E-print, 2003. arXiv: math/0303109 [math.DG].
27. *Perelman G.* Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds: E-print, 2003. arXiv: math.DG/0307245 [math.DG].
28. *Plante J.F., Thurston W.P.* Anosov flows and the fundamental group // Topology. 1972. V. 11. P. 147–150.
29. *Smale S.* Morse inequalities for a dynamical system // Bull. Amer. Math. Soc. 1960. V. 66. P. 43–49.
30. *Smale S.* Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four // Ann. Math. Ser. 2. 1961. V. 74. P. 391–406.
31. *Жужома Е.В., Медведев В.С.* Глобальная динамика систем Морса–Смейла // Тр. МИАН. 2008. Т. 261. С. 115–139.
32. *Жужома Е.В., Медведев В.С.* Системы Морса–Смейла с тремя неблуждающими точками // ДАН. 2011. Т. 440, №1. С. 11–14.