

УДК 004.942

О ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ТИПА ФЕРХЮЛЬСТА, ОПИСЫВАЕМЫХ ЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Михеев А.В.

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»,

Санкт-Петербург

В данной работе рассматривается вопрос расчета динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка, в котором фундаментальная система решений, состоящая из функций экспоненциального типа, заменена на ограниченные функции модели Ферхюльста. Проанализирована временная зависимость сил, воздействующих на динамическую систему, и проведено сравнение полученной зависимости с экспоненциальным случаем.

Ключевые слова: Дифференциальные уравнения, динамические системы, численное моделирование

ON DYNAMIC MODELS OF THE VERHULST TYPE DESCRIBED BY THE SECOND ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Mikheev A.V.

In this paper we consider the calculation of a dynamical system described by a second-order differential equation in which a fundamental system of solutions consisting of functions of exponential type is replaced by bounded functions of the Verhulst model. The time dependence of the forces acting on the dynamical system is analyzed, and the obtained dependence is compared with the exponential case.

Ключевые слова: Differential equations, dynamical systems, numerical simulation

Введение. При рассмотрении динамики процессов различной природы, таких как рост финансовых накоплений, увеличение численности колоний микроорганизмов, и т.д. часто используется модель, в которой скорость изменения количественной характеристики системы $y'(t)$ пропорциональна самой характеристике $y(t)$. Таким образом мы получаем линейное дифференциальное уравнение (ЛДУ) первого порядка $y'(t) = m \cdot y(t)$ с решением экспоненциального типа $y(t) = Ce^{mt}$. Данное решение является строго возрастающим при $m > 0$, $C > 0$. Однако из-за большой скорости возрастания экспоненциальной функции данная модель применима к описанию реальных процессов только на начальном промежутке времени. В качестве выхода из положения бельгийским математиком Пьером Ферхюльстом в работе [1] была предложена модель, близкая к экспоненциальной при $t \rightarrow 0$, вводящая «порог насыщения» -

горизонтальную асимптоту $y = k$ при $t \rightarrow +\infty$. Функция (1) данной модели является решением дифференциального уравнения (2):

$$y(t) = \frac{ky_0 e^{mt}}{k - y_0 + y_0 e^{mt}} \quad (1) \quad y'(t) = my(t) \cdot \left(1 - \frac{y(t)}{k}\right), \quad y(0) = y_0 \quad (2)$$

Цель данной работы – исследовать поведение динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка, в котором фундаментальная система решений, состоящая из функций экспоненциального типа, заменена на ограниченные функции модели Ферхюльста, получить явное выражение для сил, действующих на систему, и провести аналитическое и графическое сравнение с экспоненциальным случаем. Для проведения расчетов и построения графических зависимостей использовался программный пакет Mathcad 15 ([2]).

Динамическая система с экспоненциальной моделью. В рассматриваемой модели будем полагать, что отклонение динамической системы от ее начального состояния обусловлено наличием двух сил: «силы тяготения» $F_1 = -sy(t)$ и «силы сохранения» $F_2 = -ry'(t)$. Используя аналог закона Ньютона $ma = F_1 + F_2$ и полагая $m = 1$, получаем ЛДУ второго порядка с двумя начальными условиями (3), описывающее поведение системы:

$$y''(t) + ry'(t) + sy(t) = 0, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b \quad (3)$$

В данном случае коэффициенты r, s являются постоянными. Из общей теории ЛДУ второго порядка [3] следует, что при $r^2 - 4s > 0$ фундаментальная система решений (ФСР) состоит из двух функций экспоненциального типа $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$, где λ_1, λ_2 – корни характеристического уравнения. Далее при рассмотрении будем предполагать, что $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Тогда общее решение уравнения будет иметь вид

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (4)$$

Подставляя (4) в начальные условия (3), получаем:

$$C_1 = \frac{a\lambda_2 - b}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad C_2 = \frac{b - a\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (5)$$

Динамическая система с моделью Ферхюльста. Теперь рассмотрим динамическую систему, описываемую ЛДУ 2-го порядка

$$Y''(t) + R(t)Y'(t) + S(t)Y(t) = 0 \quad (6)$$

ФСР которой имеет вид функций Ферхюльста (1) с показателями $\lambda_1, \lambda_2, k > 1$ и $y_0 = 1$.

Тогда

$$Y(t) = C_1 Y_1(t) + C_2 Y_2(t), \quad \text{где } Y_i(t) = \frac{ke^{\lambda_i t}}{k - 1 + e^{\lambda_i t}}, \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

Отметим следующие свойства функций $Y_i(t)$ ($i=1, 2$):

1. Как и для экспоненциальных ФСР, $Y_i(0) = 1$
2. $0 \leq Y_i(t) \leq k$
3. $\lim_{t \rightarrow +\infty} Y_i(t) = k$ (т.е. $Y = k$ - горизонтальная асимптота графиков каждой из функций).
4. $Y_i(t)$ - монотонно возрастающая функции.
5. $Y_i(t) = 1 + \left(1 - \frac{1}{k}\right)\lambda t + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2k} + \frac{1}{k^2}\right)\lambda^2 t^2 + o(t^2)$. Значит, $Y_i(t) \approx e^{\lambda_i t}$ при $k \gg 1$, $t \rightarrow 0$.
6. Если выполнены начальные условия $Y(0) = \tilde{a}$, $Y'(0) = \tilde{b}$, то коэффициенты C_1, C_2 в

решении (7) находятся по формулам (5) при помощи подстановки $a = \tilde{a}$, $b = \tilde{b} \cdot \frac{k}{k-1}$.

В данном случае силы F_1, F_2 должны оказывать на систему воздействие с переменными коэффициентами $R(t), S(t)$. Из рассмотрения определителя Вронского [4] следует, что

$$S(t) = \frac{\Delta_0(t)}{\Delta_2(t)}, \quad R(t) = \frac{\Delta_1(t)}{\Delta_2(t)} \quad (8)$$

где

$$\Delta_0(t) = \begin{vmatrix} Y_1'(t) & Y_2'(t) \\ Y_1''(t) & Y_2''(t) \end{vmatrix}, \quad \Delta_1(t) = - \begin{vmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) \\ Y_1''(t) & Y_2''(t) \end{vmatrix}, \quad \Delta_2(t) = \begin{vmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) \\ Y_1'(t) & Y_2'(t) \end{vmatrix} \quad (9)$$

Вычислим первую и вторую производную функций из ФСР:

$$Y_i'(t) = \frac{\lambda_i k (k-1) e^{\lambda_i t}}{(e^{\lambda_i t} + k - 1)^2}, \quad Y_i''(t) = \frac{\lambda_i^2 k (k-1) (e^{\lambda_i t} - k + 1) e^{\lambda_i t}}{(e^{\lambda_i t} + k - 1)^3} \quad i = 1, 2 \quad (10)$$

Подставляя функции (10) в (8), (9), находим непосредственные выражения для $R(t), S(t)$, которые в силу их громоздкости здесь опускаются.

При помощи порядкового анализа слагаемых можно показать, что при $k > 1$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ справедливы утверждения:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = \lambda_1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = 0 \quad (11)$$

Это означает, что прямые $R = \lambda_1$, $S = 0$ являются горизонтальными асимптотами графиков соответствующих функций. Чтобы найти уравнение вертикальной асимптоты графиков обеих функций, необходимо решить уравнение (12):

$$\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t} = (k-1)(\lambda_2 - \lambda_1) \quad (12)$$

Применяя замену переменных

$$u = e^{\lambda_1 t}, \lambda_2 = p\lambda_1, \alpha = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \beta = (1-k)(\alpha+1),$$

получаем полиномиальное уравнение

$$u^p + \alpha u + \beta = 0$$

решаемое в общем случае применением численных методов (например, см. [5]).

Численное моделирование. Рассмотрим тестовый пример задачи со следующими параметрами: $r = -3, s = 2, k = 100, a = 1, b = 3/2$. Тогда из (1) – (7) следует, что

$$y(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{2t}), \quad Y(t) = \frac{16}{33}Y_1(t) + \frac{17}{33}Y_2(t)$$

где

$$Y_1(t) = \frac{100e^t}{99 + e^t}, \quad Y_2(t) = \frac{100e^{2t}}{99 + e^{2t}}$$

Чтобы получить наглядное представление об отличии экспоненциальной модели от модели Ферхюльста с теми же начальными условиями, на рисунках 1, 2 представлены графики зависимостей $y(t), Y(t)$ для $0 < t < 2.8$, на рисунке 3, 4 – эти же зависимости для $0 < t < 8$.

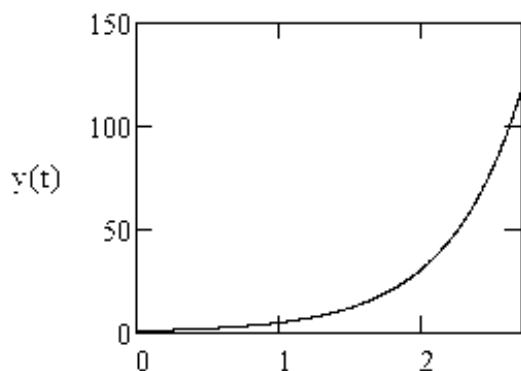


Рисунок 1. Зависимость $y(t), 0 < t < 2.8$

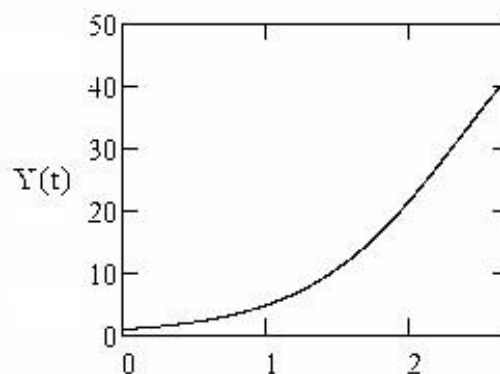


Рисунок 2. Зависимость $Y(t), 0 < t < 2.8$

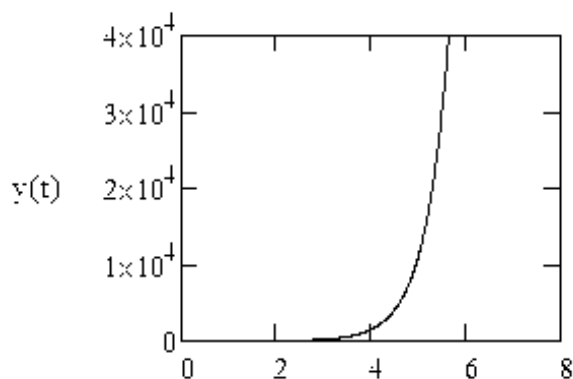


Рисунок 3. Зависимость $y(t), 0 < t < 8$

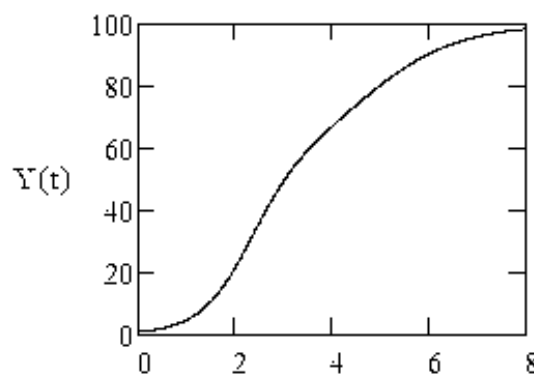


Рисунок 4. Зависимость $Y(t), 0 < t < 8$

Зависимости $R(t)$, $S(t)$ получаются из выражений (8) – (10). Из (11) следует, что график функции $R(t)$ имеет горизонтальную асимптоту $R = 1$, а $S(t)$ – горизонтальную асимптоту $S = 0$. Решая уравнение (12), определяем, что вертикальная асимптота обоих графиков имеет уравнение $t = \ln(11) (\approx 2.398)$. Графики зависимостей $R(t)$, $S(t)$ представлены на рисунках 5 и 6 соответственно.

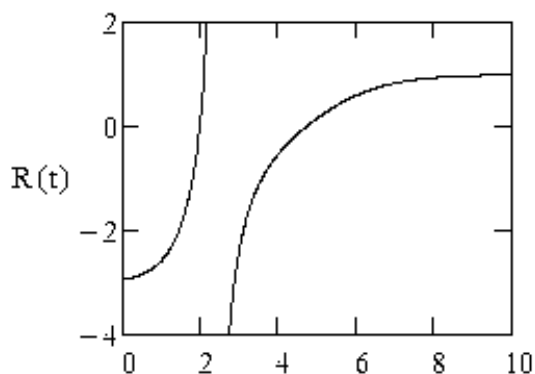


Рисунок 5. Зависимость $R(t)$, $0 < t < 10$

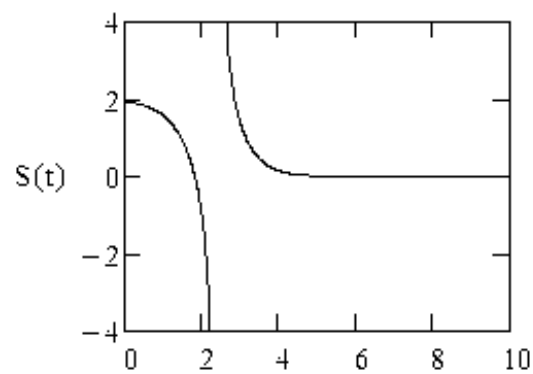


Рисунок 6. Зависимость $S(t)$, $0 < t < 10$

Выводы. Результаты, приведенные выше, демонстрируют возможность замены экспоненциальной динамики поведения системы на динамику типа Ферхюльста при модификации исходных воздействий силы тяготения и силы сохранения (заменой постоянных коэффициентов на коэффициенты, зависящие от времени). При этом необходимо учесть наличие бесконечных односторонних пределов при одном из значений $t = t_0 > 0$, не воспроизводимых в реальной физической ситуации. Данного затруднения возможно избежать при помощи введения конечной аппроксимации.

Список литературы

1. Vferhulst P.F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement //Corresp. Math et Phys. – 1838. – №10 – P. 113-121.
 2. Кирьянов Д.В. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 432 с.
 3. Панюкова Т.А. Основы теории дифференциальных уравнений для экономистов. – М.: Кнжный дом «Либроком», 2011. – 256 с.
 4. Романко В. К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – 2-е изд. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 344 с.
 5. Данилина Н.И., Дубровская Н.С., Кваша О.П., Смирнов Г.Л. Вычислительная математика. – М.: Высшая школа, 1985. – 472 с.
-