ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2017, т. 297, с. 46–61

УДК 517.938

Реализация диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразиях[1]

Х. Бонатти[2], В. З. Гринес[3,4], О. В. Починка[3,5]

Поступило 3 апреля 2017 г.

В каждом классе топологической сопряженности по абстрактной схеме реализуется трехмерный сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса–Смейла.

DOI: 10.1134/S0371968517020030

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Напомним, что диффеоморфизм, заданный на n-многообразии M^n, $n \geq 1$, называется *диффеоморфизмом Морса–Смейла*, если

1) его неблуждающее множество состоит из конечного числа неподвижных точек и периодических орбит, каждая из которых является гиперболической;
2) устойчивые и неустойчивые многообразия W^{s}_p, W^{u}_q пересекаются трансверсально для любых неблуждающих точек p, q.

Ключевым вопросом в изучении динамических систем является нахождение полного множества топологических инвариантов — свойств системы, однозначно определяющих разбиение фазового пространства на траектории с точностью до топологической сопряженности. Напомним, что два диффеоморфизма f, f' на n-многообразии M^n называются *топологически сопряженными*, если существует гомеоморфизм $h\colon M^n \to M^n$ такой, что $f'h = hf$.

Для диффеоморфизмов Морса–Смейла на окружности полный топологический инвариант, определяющий класс топологически сопряженных диффеоморфизмов (сопряженных посредством сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов), был найден А. Майером [15] в 1939 г. Он представляет собой тройку параметров: число периодических орбит, их период и число вращения. Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла на поверхностях потребовала привлечения новых топологических инвариантов в связи с существованием гетероклинических орбит, принадлежащих пересечению инвариантных многообразий седловых периодических точек. В случае, когда число гетероклинических орбит конечно, полный топологический инвариант был получен В.З. Гринесом [9] с помощью инварианта, аналогичного графу Пейшото [16], с использованием гетероклинических подстановок, описывающих топологический тип пересечений инвариантных многообразий седловых периодических точек. В случае же бесконечного

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-11-01041), за исключением доказательства хаусдорфовости пространства блуждающих орбит, которое получено в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2017 г. (проект 90).

[2]Institut de Mathématiques de Bourgogne, UMR 5584 du CNRS, Dijon Cedex, France.
E-mail: bonatti@u-bourgogne.fr

[3]Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия.

[4]E-mail: vgrines@yandex.ru

[5]E-mail: olga-pochinka@yandex.ru

множества гетероклинических орбит топологическая классификация была получена в работе Х. Бонатти и Р. Ланжевена [6] с использованием аппарата топологических цепей Маркова.

Топологическая классификация даже простейших систем Морса–Смейла на 3-многообразиях не укладывается в рамки выделения особых траекторий системы. Причиной тому является возможность “дикого” вложения замыкания сепаратрис седловых периодических точек. Так, замыкание гладкой сепаратрисы седловой неподвижной точки, отличающееся от самой сепаратрисы лишь одной точкой, может не быть даже топологическим подмногообразием объемлющего пространства. Д. Пикстон [17] в 1977 г. впервые сконструировал диффеоморфизм Морса–Смейла на трехмерной сфере, у которого одномерная сепаратриса вместе с некоторой факторизацией двумерной сепаратрисы седловой неподвижной точки образуют дикую дугу Артина–Фокса [8]. Проблема топологической классификации различных классов диффеоморфизмов Морса–Смейла была решена в серии статей Х. Бонатти, В. Гринеса, Ф. Лауденбаха, В. Медведева, Э. Пеку, О. Починки [1–5] (см. также обзоры [11, 13] и книгу [10]). К настоящему моменту Бонатти, Гринес и Починка получили полную топологическую классификацию в классе $\mathrm{MS}(M^3)$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса–Смейла, заданных на гладком замкнутом ориентируемом многообразии M^3 (полный текст появится в ближайшее время). Опишем полный топологический инвариант диффеоморфизмов из указанного класса.

Пусть $f\in\mathrm{MS}(M^3)$. Для $q=0,1,2,3$ обозначим через Ω_q множество всех периодических точек диффеоморфизма f, для которых неустойчивое многообразие имеет размерность q. Представим динамику диффеоморфизма f в виде “источник–сток” следующим образом.

Положим $A_f=W^{\mathrm{u}}_{\Omega_0\cup\Omega_1}$, $R_f=W^{\mathrm{s}}_{\Omega_2\cup\Omega_3}$ и $V_f=M^3\setminus(A_f\cup R_f)$. Тогда множество A_f (R_f) является связным аттрактором (репеллером)[6], топологическая размерность которого меньше или равна 1, множество V_f есть связное 3-многообразие и $V_f=W^{\mathrm{s}}_{A_f\cap\Omega_f}\setminus A_f=W^{\mathrm{u}}_{R_f\cap\Omega_f}\setminus R_f$. Более того, пространство орбит (фактор-пространство) $\widehat{V}_f=V_f/f$ есть связное замкнутое ориентируемое 3-многообразие и естественная проекция $p_f\colon V_f\to\widehat{V}_f$ индуцирует эпиморфизм $\eta_f\colon\pi_1(\widehat{V}_f)\to\mathbb{Z}$, приписывающий каждому гомотопическому классу $[c]\in\pi_1(\widehat{V}_f)$ замкнутой кривой $c\subset\widehat{V}_f$ целое число n такое, что поднятие кривой c на V_f соединяет некоторую точку $x\in V_f$ с точкой $f^n(x)$. Положим $\widehat{L}^{\mathrm{s}}_f=p_f(W^{\mathrm{s}}_{\Omega_1}\setminus A_f)$ и $\widehat{L}^{\mathrm{u}}_f=p_f(W^{\mathrm{u}}_{\Omega_2}\setminus R_f)$.

Набор $S_f=\big(\widehat{V}_f,\eta_f,\widehat{L}^{\mathrm{s}}_f,\widehat{L}^{\mathrm{u}}_f\big)$ называется *схемой* диффеоморфизма $f\in\mathrm{MS}(M^3)$. Для диффеоморфизмов Морса–Смейла в предположениях различной общности было доказано, что класс эквивалентности (с точностью до гомеоморфизма, сохраняющего компоненты схемы) схемы S_f есть полный топологический инвариант.

Решение проблемы реализации (которой и посвящена настоящая работа) основано на трех свойствах схемы S_f.

Первое свойство состоит в том, что согласно [7] (см. также [12]) фактор-пространство $\widehat{V}_f$ есть *простое многообразие*, т.е. оно либо гомеоморфно $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$, либо неприводимо (любая гладкая сфера ограничивает 3-шар).

Второе свойство состоит в том, что множества $\widehat{L}^{\mathrm{s}}_f$ и $\widehat{L}^{\mathrm{u}}_f$ являются окрестностно трансверсальными s-ламинацией и u-ламинацией (см. определения 6, 8) соответственно на $\widehat{V}_f$, каждый слой которых есть либо тор, либо бутылка Клейна с пустым, конечным или счетным множеством выколотых точек.

Третье свойство связано с понятием разрезания многообразия вдоль ламинации (см. разд. 3) и состоит в том, что результат такой операции есть многообразие, каждая компонента связности которого есть $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$.

[6]Компактное множество $A\subset M^n$ называется *аттрактором* диффеоморфизма $f\colon M^n\to M^n$, если существует замкнутая окрестность U множества A такая, что $f(U)\subset\operatorname{int}U$ и $A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}f^n(U)$. Множество $R\subset M^n$ называется *репеллером* диффеоморфизма f, если R — аттрактор для f^{-1}.

В свою очередь, выполнение этих трех необходимых свойств является достаточным для определения множества всех абстрактных схем, допускающих реализацию (т.е. допускающих построение диффеоморфизма Морса–Смейла, схема которого эквивалентна данной абстрактной схеме).

Определение 1. Набор $S=(\widehat{V},\eta_{\widehat{V}},\widehat{L}^{\mathrm{s}},\widehat{L}^{\mathrm{u}})$ называется *абстрактной схемой*, если

1) $\widehat{V}$ есть простое многообразие, фундаментальная группа которого допускает эпиморфизм $\eta_{\widehat{V}}\colon\pi_1(\widehat{V})\to\mathbb{Z}$;
2) $\widehat{L}^{\mathrm{s}}$ и $\widehat{L}^{\mathrm{u}}$ являются окрестностно трансверсальными гладкими s-ламинацией и u-ламинацией соответственно на многообразии $\widehat{V}$;
3) каждая компонента связности многообразия, полученного разрезанием многообразия $\widehat{V}$ вдоль s-ламинации $\widehat{L}^{\mathrm{s}}$ (u-ламинации $\widehat{L}^{\mathrm{u}}$), гомеоморфна $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$.

Обозначим через $\mathcal{S}$ множество абстрактных схем.

Теорема 1. *Для любой абстрактной схемы $S\in\mathcal{S}$ существует диффеоморфизм $f\in\in\mathrm{MS}(M^3)$, схема которого эквивалентна схеме S.*

2. КАНОНИЧЕСКИЕ ДИФФЕОМОРФИЗМЫ И ПРОСТРАНСТВА ОРБИТ

Более подробную информацию о рассматриваемых ниже объектах можно найти, например, в [11, 10].

2.1. Канонические диффеоморфизмы. Для $q\in\{0,\dots,n\}$ и $\nu\in\{-1,+1\}$ обозначим через $a_{q,\nu}\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ линейный диффеоморфизм, заданный формулой

$$a_{q,\nu}(x_1,\dots,x_n)=\Bigl(\nu\cdot 2x_1,2x_2,\dots,2x_q,\nu\frac{x_{q+1}}{2},\frac{x_{q+2}}{2},\dots,\frac{x_n}{2}\Bigr).$$

Назовем $a_{q,\nu}\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *каноническим диффеоморфизмом.* Кроме того, обозначим через $a^{\mathrm{u}}_{q,\nu}$ и $a^{\mathrm{s}}_{q,\nu}$ ограничения канонического диффеоморфизма на $Ox_1\dots x_q$ и $Ox_{q+1}\dots x_n$ соответственно и назовем диффеоморфизмы $a^{\mathrm{u}}_{q,\nu}$ и $a^{\mathrm{s}}_{q,\nu}$ *каноническим растяжением* и *каноническим сжатием* соответственно.

Для $q\in\{1,\dots,n-1\}$ и $t\in(0,1]$ положим

$$\mathcal{N}^t_q=\bigl\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\colon\ (x_1^2+\dots+x_q^2)(x_{q+1}^2+\dots+x_n^2)<t\bigr\}$$

и $\mathcal{N}^1_q=\mathcal{N}_q$. Заметим, что множество $\mathcal{N}^t_q$ инвариантно относительно канонического диффеоморфизма $a_{q,\nu}$, который имеет в точности одну неподвижную седловую точку, совпадающую с началом координат O. При этом неустойчивое многообразие этой точки есть $W^{\mathrm{u}}_O=Ox_1\dots x_q$, а устойчивое многообразие есть $W^{\mathrm{s}}_O=Ox_{q+1}\dots x_n$.

Определим в окрестности $\mathcal{N}_q$ пару трансверсальных слоений $\mathcal{F}^{\mathrm{u}}_q$, $\mathcal{F}^{\mathrm{s}}_q$ следующим образом:

$$\mathcal{F}^{\mathrm{u}}_q=\bigcup_{(c_{q+1},\dots,c_n)\in Ox_{q+1}\dots x_n}\bigl\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathcal{N}_q\colon\ (x_{q+1},\dots,x_n)=(c_{q+1},\dots,c_n)\bigr\},$$

$$\mathcal{F}^{\mathrm{s}}_q=\bigcup_{(c_1,\dots,c_q)\in Ox_1\dots x_q}\bigl\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathcal{N}_q\colon\ (x_1,\dots,x_q)=(c_1,\dots,c_q)\bigr\}.$$

Заметим, что канонический диффеоморфизм $a_{q,\nu}$ переводит слои слоения $\mathcal{F}^{\mathrm{u}}_q$ ($\mathcal{F}^{\mathrm{s}}_q$) в слои того же слоения.

2.2. Пространства орбит. В этом пункте мы рассматриваем топологию пространства орбит для некоторого диффеоморфизма $g\colon X\to X$ на многообразии X. Мы используем обозначение X/g для *g-орбит на X* и $p_{X/g}\colon X\to X/g$ для естественной проекции. Напомним, что

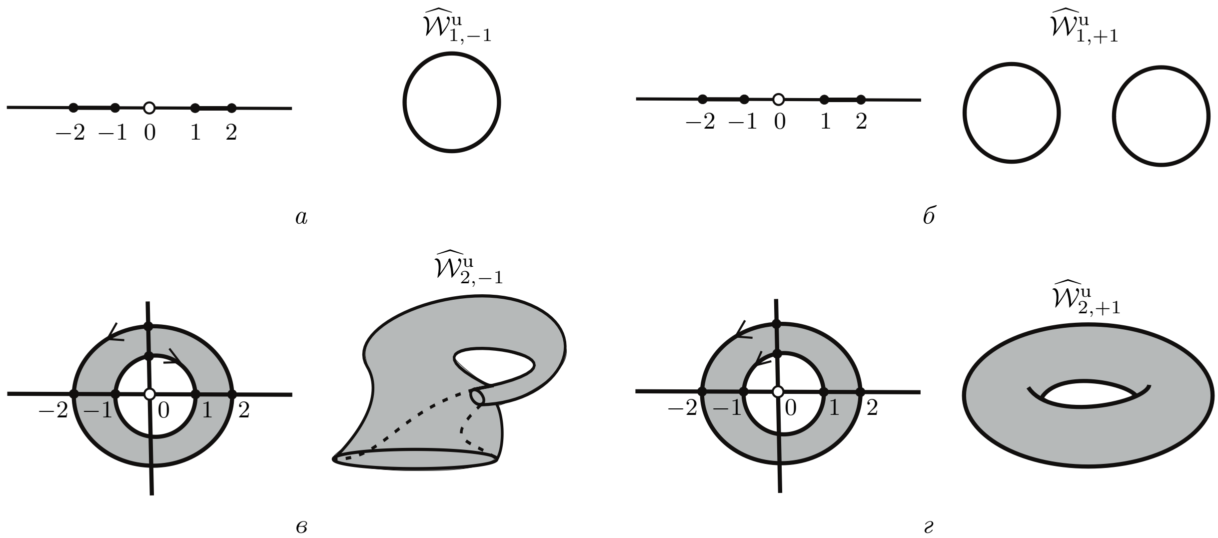

Рис. 1. Пространства орбит канонического растяжения при $q=1$, $\nu=-1$ (*а*); $q=1$, $\nu=+1$ (*б*); $q=2$, $\nu=-1$ (*в*); $q=2$, $\nu=+1$ (*г*)

фундаментальная область действия g *на* X есть замкнутое множество $D_g \subset X$ такое, что существует множество $\widetilde{D}_g$ со следующими свойствами:

1) $\operatorname{cl}\widetilde{D}_g = D_g$;
2) $g^k(\widetilde{D}_g)\cap\widetilde{D}_g=\varnothing$ для всех $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$;
3) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} g^k(\widetilde{D}_g)=X$.

Будем говорить, что g действует *разрывно* на X, если для любого компакта $K\subset X$ множество чисел $k\in\mathbb{Z}$ таких, что $g^k(K)\cap K\ne\varnothing$, конечно. В случае такого действия проекция $p_{X/g}$ является накрытием (см. утверждение 1 ниже), и тогда мы можем провести следующее построение. Предположим, что пространство X/g связно. Обозначим через n_X число компонент связности многообразия X и через $p^{-1}_{X/g}(\widehat{x})$ прообраз точки $\widehat{x}\in X/g$ относительно накрытия $p_{X/g}\colon X\to X/g$ (это есть орбита некоторой точки $x\in p^{-1}_{X/g}(\widehat{x})$). Пусть $\widehat{c}$ — петля в X/g такая, что $\widehat{c}(0)=\widehat{c}(1)=\widehat{x}$. В силу теоремы о монодромии (см., например, [14, следствие 16.6]) существует единственный путь c в X с началом в точке x ($c(0)=x$), который является поднятием петли $\widehat{c}$. Следовательно, существует элемент[7] $k\in n_X\mathbb{Z}$ такой, что $c(1)=g^k(x)$. Пусть $\eta_{X/g}\colon \pi_1(X/g)\to n_X\mathbb{Z}$ — отображение, переводящее $[\widehat{c}]$ в k.

Утверждение 1. *Пусть диффеоморфизм* g *действует разрывно на* n*-многообразии* X. *Тогда*

1) *естественная проекция* $p_{X/g}\colon X\to X/g$ *есть накрытие*;
2) *фактор-пространство* X/g *есть* n*-многообразие*;
3) *для фундаментальной области* D_g *действия* g *на* X *пространства орбит* D_g/g *и* X/g *гомеоморфны*;
4) *отображение* $\eta_{X/g}\colon\pi_1(X/g)\to n_X\mathbb{Z}$ *есть эпиморфизм.*

Утверждение 2. *Пусть диффеоморфизмы* g, g' *действуют разрывно на многообразиях* X, X' *соответственно и* X/g, X'/g' *связны. Тогда*

1) *если* $h\colon X\to X'$ *— гомеоморфизм такой, что* $hg=g'h$, *то отображение* $\widehat{h}\colon X/g\to X'/g'$, *заданное формулой* $\widehat{h}=p_{X'/g'}hp^{-1}_{X/g}$, *есть гомеоморфизм и* $\eta_{X/g}=\eta_{X'/g'}\widehat{h}_*$;

[7] Здесь $n_X\mathbb{Z}$ обозначает множество целых чисел, кратных n_X.

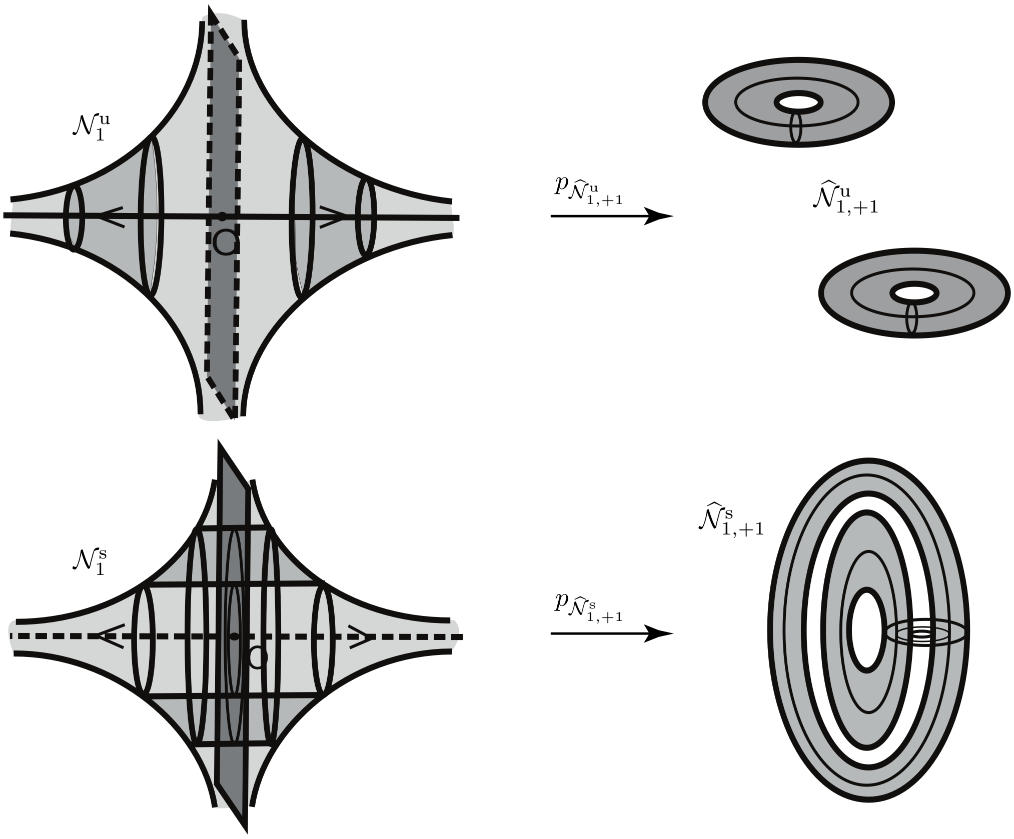

Рис. 2. Окрестности пространств орбит канонического сжатия и канонического растяжения для $n=3$

2) *если* $\widehat{h}\colon X/g\to X'/g'$ *— гомеоморфизм такой, что* $\eta_{X/g}=\eta_{X'/g'}\widehat{h}_*$*, то для некоторых* $x\in X$ *и* $x'\in p^{-1}_{X'/g'}(\widehat{h}(p_{X/g}(x)))$ *существует единственный гомеоморфизм* $h\colon X\to X'$*, являющийся поднятием* $\widehat{h}$ *и такой, что* $hg=g'h$*,* $h(x)=x'$*.*

Рассмотрим для примера пространство орбит $\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{u}}_{q,\nu}=(\mathbb{R}^q\setminus O)/a^{\mathrm{u}}_{q,\nu}$ действия канонического растяжения $a^{\mathrm{u}}_{q,\nu}$ на $\mathbb{R}^q\setminus O$ для $q\in\{1,2,3\}$, $\nu\in\{+1,-1\}$. Очевидно, что это действие разрывно и его фундаментальная область есть кольцо $\{(x_1,\dots,x_q)\in\mathbb{R}^q\colon 1\le x_1^2+\dots+x_q^2\le 4\}$ (рис. 1), откуда вытекает следующий набор возможностей:

- пространство $\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{u}}_{1,-1}$ гомеоморфно окружности;
- пространство $\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{u}}_{1,+1}$ гомеоморфно паре окружностей;
- пространство $\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{u}}_{2,-1}$ гомеоморфно бутылке Клейна;
- пространство $\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{u}}_{2,+1}$ гомеоморфно тору $\mathbb{T}^2$;
- пространство $\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{u}}_{3,+1}$ гомеоморфно произведению $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$.

Аналогично определяется пространство орбит $\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{s}}_{q,\nu}=(\mathbb{R}^{n-q}\setminus O)/a^{\mathrm{s}}_{q,\nu}$ действия канонического сжатия для $q\in\{0,\dots,n-1\}$, $\nu\in\{+1,-1\}$.

На множестве $\mathcal{N}^{\mathrm{u}}_q=\mathcal{N}_q\setminus W^{\mathrm{s}}_O$ действие группы $A_{q,\nu}=\{a^k_{q,\nu},\,k\in\mathbb{Z}\}$ является разрывным. Тогда пространство орбит $\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{u}}_{q,\nu}=\mathcal{N}^{\mathrm{u}}_q/a_{q,\nu}$ есть гладкое n-многообразие. Так как $a_{q,\nu}|_{W^{\mathrm{u}}_O\setminus O}=$ $=a^{\mathrm{u}}_{q,\nu}|_{W^{\mathrm{u}}_O\setminus O}$, то $\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{u}}_{q,\nu}$ есть трубчатая окрестность пространства $\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{u}}_{q,\nu}$. Кроме того, $\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{u}}_{q,+1}$ гомеоморфно многообразию $\mathbb{S}^{q-1}\times\mathbb{S}^1\times\{0\}$ и его трубчатая окрестность $\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{u}}_{q,+1}$ гомеоморфна $\mathbb{S}^{q-1}\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{D}^{n-q}$. Так как $a^2_{q,-1}=a^2_{q,+1}$ и диффеоморфизмы $a^2_{q,+1}$ и $a_{q,+1}$ топологически сопряжены, многообразие $\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{u}}_{q,+1}$ есть двулистное накрытие для многообразия $\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{u}}_{q,-1}$ и многообразие $\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{u}}_{q,+1}$ есть двулистное накрытие для окрестности $\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{u}}_{q,-1}$.

Аналогично определяются пространство орбит $\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{s}}_{q,\nu} = \mathcal{N}^{\mathrm{s}}_q / a^{\mathrm{s}}_{q,\nu}$ (где $\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_q = \mathcal{N}_q \setminus W^{\mathrm{u}}_O$), накрытие $p_{\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{s}}_{q,\nu}} : \mathcal{N}^{\mathrm{s}}_q \to \widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{s}}_{q,\nu}$ и отображение $\eta_{\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{s}}_{q,\nu}}$ из объединения фундаментальных групп компонент связности многообразия $\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{s}}_{q,\nu}$ в группу $\mathbb{Z}$.

На рис. 2 изображены эти объекты для $n = 3$, $q = 1$, $\nu = +1$. Для того чтобы прояснить структуру пространств орбит $\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{s}}_{q,\nu}$, $\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{u}}_{q,\nu}$, мы отмечаем фундаментальные области действия канонического диффеоморфизма $a_{q,\nu}$ на множествах $\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_q$, $\mathcal{N}^{\mathrm{u}}_q$.

3. ПЕРЕСТРОЙКИ

В этом разделе $\widehat{V}$ — простое связное 3-многообразие, допускающее гомоморфизм $\eta_{\widehat{V}}\colon \pi_1(\widehat{V}) \to \mathbb{Z}$. Запись $(\widehat{V}, \eta_{\widehat{V}})$ означает, что многообразие $\widehat{V}$ оснащено гомоморфизмом $\eta_{\widehat{V}}$.

Определение 2. Многообразия $(\widehat{V}, \eta_{\widehat{V}})$ и $(\widehat{V}', \eta_{\widehat{V}'})$ называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\widehat{\varphi}\colon \widehat{V} \to \widehat{V}'$ такой, что $\eta_{\widehat{V}'}\widehat{\varphi}_* = \eta_{\widehat{V}}$.

Определение 3. Подмножества $\widehat{a} \subset (\widehat{V}, \eta_{\widehat{V}})$ и $\widehat{a}' \subset (\widehat{V}', \eta_{\widehat{V}'})$ называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\widehat{\varphi}\colon \widehat{V} \to \widehat{V}'$, реализующий эквивалентность многообразий $(\widehat{V}, \eta_{\widehat{V}})$, $(\widehat{V}', \eta_{\widehat{V}'})$ и переводящий $\widehat{a}$ в $\widehat{a}'$.

Определение 4. Подмножество $\widehat{a} \subset (\widehat{V}, \eta_{\widehat{V}})$ будем называть *$\eta_{\widehat{V}}$-существенным*, если $\eta_{\widehat{V}}(e_{\widehat{a}*}(\pi_1(\widehat{a}))) \neq 0$, где $e_{\widehat{a}}\colon \widehat{a} \to \widehat{V}$ — отображение включения.

3.1. Перестройка вдоль тора и бутылки Клейна. Пусть $\widehat{\mathcal{W}}_{+1} \subset (\widehat{V}, \eta_{\widehat{V}})$ есть $\eta_{\widehat{V}}$-существенный ручной тор и $N(\widehat{\mathcal{W}}_{+1}) \subset \widehat{V}$ — его трубчатая окрестность. Тогда многообразие $N(\widehat{\mathcal{W}}_{+1}) \setminus \widehat{\mathcal{W}}_{+1}$ состоит из двух компонент связности, каждая из которых гомеоморфна многообразию $\operatorname{int}\widehat{Y} \setminus \widehat{\gamma}_{\widehat{Y}}$, где $\widehat{Y} = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ и $\widehat{\gamma}_{\widehat{Y}} = (\{O\} \times \mathbb{S}^1) \subset \widehat{Y}$. Пусть $\widehat{\beta}$ — меридиан заполненного тора $\widehat{Y}$ и

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{W}}_{+1}}\colon\ \operatorname{cl} N(\widehat{\mathcal{W}}_{+1}) \setminus \widehat{\mathcal{W}}_{+1} \to (\widehat{Y} \setminus \widehat{\gamma}) \times \mathbb{S}^0$$

— гомеоморфизм такой, что $\eta_{\widehat{V}}\big([\zeta^{-1}_{\widehat{\mathcal{W}}_{+1}}(\widehat{\beta} \times \{\pm 1\})]\big) = 0$.

Определение 5. Будем говорить, что пространство $\widehat{V}_{\widehat{\mathcal{W}}_{+1}} = (\widehat{V} \setminus \widehat{\mathcal{W}}_{+1}) \cup_{\zeta_{\widehat{\mathcal{W}}_{+1}}} (\operatorname{int}\widehat{Y} \times \mathbb{S}^0)$ получено из многообразия $\widehat{V}$ *перестройкой вдоль тора* $\widehat{\mathcal{W}}_{+1}$.

Аналогично определяется перестройка многообразия $(\widehat{V}, \eta_{\widehat{V}})$ вдоль $\eta_{\widehat{V}}$-существенной ручной бутылки Клейна $\widehat{\mathcal{W}}_{-1}$, основанная на том факте, что трубчатая окрестность $N(\widehat{\mathcal{W}}_{-1})$ бутылки Клейна $\widehat{\mathcal{W}}_{-1}$ без самой бутылки Клейна гомеоморфна многообразию $\operatorname{int}\widehat{Y} \setminus \widehat{\gamma}_{\widehat{Y}}$.

Структура 3-многообразий на $\widehat{V} \setminus \widehat{\mathcal{W}}_\nu$, $\nu \in \{+1, -1\}$, и $\widehat{Y}$ индуцирует посредством естественной проекции $p_{\widehat{\mathcal{W}}_\nu} : (\widehat{V} \setminus \widehat{\mathcal{W}}_\nu) \cup (\operatorname{int}\widehat{Y} \times \mathbb{S}^0) \to \widehat{V}_{\widehat{\mathcal{W}}_\nu}$ структуру замкнутого ориентируемого 3-многообразия на пространстве $\widehat{V}_{\widehat{\mathcal{W}}_\nu}$. Описанная перестройка корректно определена, т.е. не зависит (с точностью до гомеоморфизма) от выбора трубчатой окрестности $N(\widehat{\mathcal{W}}_\nu)$ поверхности $\widehat{\mathcal{W}}_\nu$ и гомеоморфизма $\zeta_{\widehat{\mathcal{W}}_\nu}$. Эпиморфизм $\eta_{\widehat{V}}$ индуцирует единственное отображение $\eta_{\widehat{V}_{\widehat{\mathcal{W}}_\nu}}$, составленное из нетривиальных гомоморфизмов в группу $\mathbb{Z}$ из фундаментальных групп компонент связности многообразия $\widehat{V}_{\widehat{\mathcal{W}}_\nu}$, такое, что $\eta_{\widehat{V}_{\widehat{\mathcal{W}}_\nu}}([p_{\widehat{\mathcal{W}}_\nu}(c)]) = \eta_{\widehat{V}}([c])$ для любой замкнутой кривой $c \subset \widehat{V} \setminus \widehat{\mathcal{W}}_\nu$.

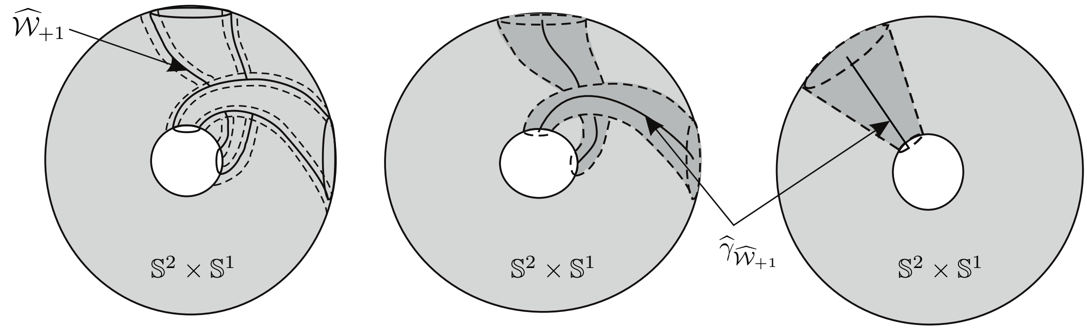

Рис. 3. Перестройка многообразия $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ вдоль тора

Пусть $(\widehat{V}, \eta_{\widehat{V}})_{\widehat{\mathcal{W}}_\nu} = \big(\widehat{V}_{\widehat{\mathcal{W}}_\nu}, \eta_{\widehat{V}_{\widehat{\mathcal{W}}_\nu}}\big)$. Назовем множество $\widehat{\gamma}_{\widehat{\mathcal{W}}_\nu} = p_{\widehat{\mathcal{W}}_\nu}(\widehat{\gamma}_{\widehat{Y}} \times \mathbb{S}^0)$ *следом перестройки вдоль поверхности* $\widehat{\mathcal{W}}_\nu$. Тогда каждая компонента связности следа $\widehat{\gamma}_{\widehat{\mathcal{W}}_\nu}$ является $\eta_{\widehat{V}_{\widehat{\mathcal{W}}_\nu}}$-существенным узлом.

Представим многообразие $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ как пространство орбит действия канонического сжатия $a^{\mathrm{s}}_{3,+1}$ на $\mathbb{R}^3 \setminus O$. На рис. 3 показана перестройка 3-многообразия $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ вдоль $\eta_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1}$-существенного тора $\widehat{\mathcal{W}}_{+1}$, для которого $\eta_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1}\big(i_{\widehat{\mathcal{W}}_{+1}*}(\pi_1(\widehat{\mathcal{W}}_{+1}))\big) = 2\mathbb{Z}$.

Операция перестройки естественно обобщается на случай, когда многообразие $\widehat{V}$ состоит из конечного числа компонент связности $\widehat{V}^1, \ldots, \widehat{V}^r$ и отображение $\eta_{\widehat{V}}$ составлено из нетривиальных гомоморфизмов $\eta_{\widehat{V}^1}\colon \pi_1(\widehat{V}^1) \to \mathbb{Z}, \ldots, \eta_{\widehat{V}^r}\colon \pi_1(\widehat{V}^r) \to \mathbb{Z}$. Результат такой перестройки также будем обозначать через $(\widehat{V}, \eta_{\widehat{V}})_{\widehat{\mathcal{W}}_\nu} = \big(\widehat{V}_{\widehat{\mathcal{W}}_\nu}, \eta_{\widehat{V}_{\widehat{\mathcal{W}}_\nu}}\big)$.

3.2. Перестройка вдоль ламинации. Обобщим операцию перестройки следующим образом. Напомним, что $a_{2,\nu}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ — канонический диффеоморфизм, заданный формулой $a_{2,\nu}(x_1, x_2, x_3) = (\nu \cdot 2x_1, 2x_2, \nu x_3/2)$, и $a^{\mathrm{u}}_{2,\nu} = a_{2,\nu}|_{W^{\mathrm{u}}_O}$. Пространство орбит канонического растяжения $\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu} = (W^{\mathrm{u}}_O \setminus O)/a^{\mathrm{u}}_{2,\nu}$ есть 2-тор для $\nu = +1$ и бутылка Клейна для $\nu = -1$. Множество

$$\mathcal{N}_2 = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\colon\ (x_1^2 + x_2^2)x_3^2 < 1\big\}$$

является $a_{2,\nu}$-инвариантным, $\mathcal{N}^{\mathrm{u}}_2 = \mathcal{N}_2 \setminus W^{\mathrm{s}}_O$ и $\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu} = \mathcal{N}^{\mathrm{u}}_2/a_{2,\nu}$ — трубчатая окрестность поверхности $\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu}$. Естественная проекция $p_{\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu}}\colon \mathcal{N}^{\mathrm{u}}_2 \to \widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu}$ является накрытием, которое индуцирует эпиморфизм $\eta_{\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu}}\colon \pi_1(\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu}) \to \mathbb{Z}$.

Обозначим через $\widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{s}}_{2,\nu}$, $\widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu}$ пару трансверсальных слоений на $\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu}$, слои которых являются проекциями в силу $p_{\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu}}$ слоев слоений $\mathcal{F}^{\mathrm{s}}_2$, $\mathcal{F}^{\mathrm{u}}_2$ соответственно (рис. 4).

Пусть $X \subset \widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu}$ — не более чем счетное множество точек и Z — объединение всех слоев слоения $\widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{s}}_{2,\nu}$, проходящих через точки множества X. Пусть

$$\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu,X} = \widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu} \setminus X, \qquad \widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu,X} = \widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu} \setminus Z, \qquad \widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu,X} = \widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu} \setminus Z, \qquad \widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{s}}_{2,\nu,X} = \widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{s}}_{2,\nu} \setminus Z.$$

Определение 6. Компактное множество $\widehat{L}^{\mathrm{u}} \subset (\widehat{V}, \eta_{\widehat{V}})$ называется u-*ламинацией*, если оно состоит из попарно не пересекающихся множеств $\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_0, \ldots, \widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_n$ таких, что каждая компонента связности $\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0$ множества $\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_0$ является тором или бутылкой Клейна и каждая компонента связности $\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i$ множества $\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_i$ для $i > 0$ является проколотым тором или проколотой бутылкой Клейна, причем $\operatorname{cl}\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_i \setminus \widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_i \subset \bigcup_{j=0}^{i-1} \widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_j$. Более того, для каждого $i = 0, \ldots, n$ и каждой компоненты $\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i$ множества $\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_i$ существуют трубчатая окрестность $N(\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i)$ множества $\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i$, число $m_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i} \in \mathbb{N}$,

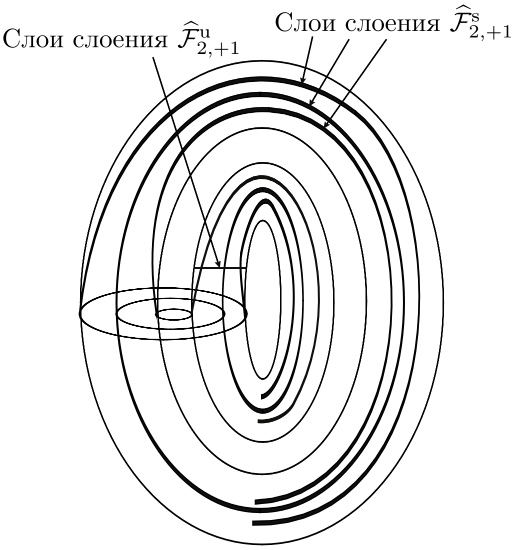

Рис. 4. Слои слоений $\widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{s}}_{2,+1}$, $\widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{u}}_{2,+1}$

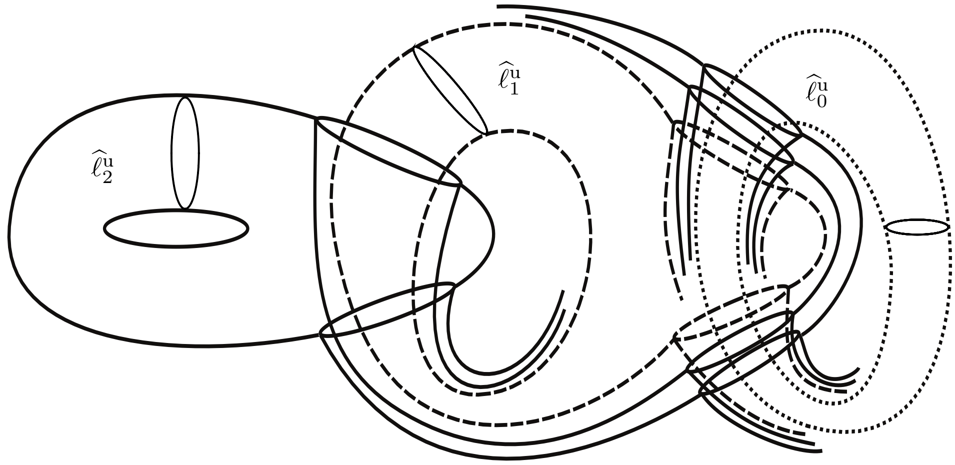

Рис. 5. u-Ламинация из трех торов

$\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i} \in \{-1,+1\}$, множество $X_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i} \subset \widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i}}$ и гомеоморфизм $\widehat{\mu}_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i} \colon N(\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i) \to \widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i},X_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i}}$ со следующими свойствами:

1) $\widehat{\mu}_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i}(\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i) = \widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i},X_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i}}$ и каждый слой слоений $\widehat{\mu}^{-1}_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i}\bigl(\widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i},X_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i}}\bigr)$, $\widehat{\mu}^{-1}_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i}\bigl(\widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{s}}_{2,\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i},X_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i}}\bigr)$ является C^1-гладким;
2) $\eta_{\widehat{V}}([c]) = m_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i}\eta_{\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i}}}\bigl(\widehat{\mu}_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i}([c])\bigr)$ для каждой замкнутой кривой $c \subset N(\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i)$;
3) для $j < i$ и для каждого слоя $\mathcal{D}$ слоения $\widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i},X_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i}}$ пересечение $\widehat{\mu}_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_j}\bigl(N(\widehat{l}^{\mathrm{u}}_j) \cap \widehat{\mu}^{-1}_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i}(\mathcal{D})\bigr)$ либо пусто, либо является объединением слоев слоения $\widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_j},X_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_j}}$.

На рис. 5 показана u-ламинация, каждая компонента линейной связности которой является тором.

Рассмотрим каноническое сжатие $a^{\mathrm{s}}_{2,\nu} = a_{2,\nu}|_{W^{\mathrm{s}}_O}$. Пространство орбит $\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{s}}_{2,\nu} = (W^{\mathrm{s}}_O \setminus O)/a^{\mathrm{s}}_{2,\nu}$ есть пара узлов для $\nu = +1$ и один узел для $\nu = -1$. Множество $\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{s}}_{2,\nu} = \mathcal{N}^{\mathrm{s}}_2/a_{2,\nu}$ является трубчатой окрестностью многообразия $\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{s}}_{2,\nu}$, где $\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_2 = \mathcal{N}_2 \setminus W^{\mathrm{u}}_O$. Естественная проекция

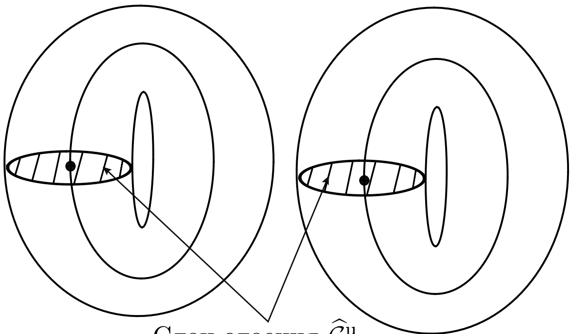

Рис. 6. Слои слоения $\widehat{\mathcal{G}}^{\mathrm{u}}_{2,+1}$

$p_{\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{s}}_{2,\nu}}\colon \mathcal{N}^{\mathrm{s}}_2 \to \widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{s}}_{2,\nu}$ является накрытием, которое индуцирует отображение $\eta_{\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{s}}_{2,\nu}}$, составленное из нетривиальных гомоморфизмов в группу $\mathbb{Z}$ на фундаментальной группе каждой компоненты связности многообразия $\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{s}}_{2,\nu}$. Обозначим через $\widehat{\mathcal{G}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu}$ слоение на $\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu}$, слои которого являются проекциями в силу $p_{\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu}}$ слоев слоения $\mathcal{F}^{\mathrm{u}}_2$ (рис. 6). Определим диффеоморфизм $\zeta_{2,\nu}\colon \widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu} \setminus \widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu} \to \widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{s}}_{2,\nu} \setminus \widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{s}}_{2,\nu}$ формулой $\zeta_{2,\nu} = p_{\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{s}}_{2,\nu}}\big(p_{\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu}}\big|_{\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu}\setminus\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu}}\big)^{-1}$.

Пусть $\widehat{L}^{\mathrm{u}} = \bigcup_{i=0}^{n} \widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_i$ есть u-ламинация на многообразии $(\widehat{V}, \eta_{\widehat{V}})$. Каждая компонента связности $\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0$ множества $\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_0$ является замкнутой поверхностью, и отображение $\zeta_{\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_0} = \zeta_{2,\nu}\mu_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}\big|_{N(\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0)\setminus\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}$ является гомеоморфизмом. Перестройка многообразия $(\widehat{V}, \eta_{\widehat{V}})$ вдоль поверхности $\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0$ посредством гомеоморфизма $\zeta_{\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_0}$ называется *перестройкой вдоль компактной поверхности* u-*ламинации.* Обозначим через $G_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}$ объединение слоев d слоения $\widehat{\mathcal{G}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}}$ таких, что $p_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}(\widehat{L}^{\mathrm{u}}) \cap p_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}(d) \neq \varnothing$. Сделаем перестройку вдоль всех поверхностей множества $\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_0$ и обозначим через $p_{\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_0}$ соответствующую проекцию. Положим $G_{\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_0} = \bigcup_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0\subset\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_0} G_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}$. Для $j = 1, \dots, n$ положим $\check{\ell}^{\mathrm{u}}_j = p_{\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_0}\big(\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_{j+1} \cup G_{\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_0}\big)$. Положим $\check{L}^{\mathrm{u}} = \bigcup_{j=0}^{n} \check{\ell}^{\mathrm{u}}_j$. Тогда множество $\check{L}^{\mathrm{u}}$ вновь является u-ламинацией на многообразии $(\widehat{V}, \eta_{\widehat{V}})_{\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_0}$.

Определение 7. Пусть $\widehat{L}^{\mathrm{u}} = \bigcup_{i=0}^{n} \widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_i$ есть u-ламинация на многообразии $(\widehat{V}, \eta_{\widehat{V}})$. Будем говорить, что многообразие $\widehat{V}_{\widehat{L}^{\mathrm{u}}}$ получено из многообразия $\widehat{V}$ *перестройкой вдоль* u-*ламинации* $\widehat{L}^{\mathrm{u}}$, если оно получено из $\widehat{V}$ в результате последовательности n перестроек вдоль компактных поверхностей ламинаций.

Обозначим через $\eta_{\widehat{V}_{\widehat{L}^{\mathrm{u}}}}$ отображение, которое индуцируется этой операцией и состоит из нетривиальных гомоморфизмов в группу $\mathbb{Z}$ из фундаментальной группы каждой компоненты связности многообразия $(\widehat{V}, \eta_{\widehat{V}})_{\widehat{L}^{\mathrm{u}}}$. Положим $(\widehat{V}, \eta_{\widehat{V}})_{\widehat{L}^{\mathrm{u}}} = \big(\widehat{V}_{\widehat{L}^{\mathrm{u}}}, \eta_{\widehat{V}_{\widehat{L}^{\mathrm{u}}}}\big)$.

Аналогично определяется s-ламинация $\widehat{L}^{\mathrm{s}} \subset (\widehat{V}, \eta_{\widehat{V}})$ с использованием канонического диффеоморфизма $a_{1,\nu}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданного формулой $a_{1,\nu}(x_1, x_2, x_3) = (\nu \cdot 2x_1, \nu x_2/2, x_3/2)$, канонического сжатия $a^{\mathrm{s}}_{1,\nu} = a_{1,\nu}|_{W^{\mathrm{s}}_O}$, пространства орбит канонического сжатия $\widehat{\mathcal{W}}^{\mathrm{s}}_{1,\nu} = (W^{\mathrm{s}}_O \setminus O)/a^{\mathrm{s}}_{1,\nu}$ и его трубчатой окрестности $\widehat{\mathcal{N}}^{\mathrm{s}}_{1,\nu} = \mathcal{N}^{\mathrm{s}}_1/a_{1,\nu}$, где

$$\mathcal{N}_1 = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\colon\ x_1^2(x_2^2 + x_3^2) < 1\big\}$$

и $\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_1 = \mathcal{N}_1 \setminus W^{\mathrm{u}}_O$. Более того, аналогично определяется перестройка многообразия $(\widehat{V}, \eta_{\widehat{V}})$ вдоль s-ламинации $\widehat{L}^{\mathrm{s}}$.

Определение 8. Назовем ламинации $\widehat{L}^{\mathrm{s}}, \widehat{L}^{\mathrm{u}} \subset (\widehat{V}, \eta_{\widehat{V}})$ *окрестностно трансверсальными*, если

$$\widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{s}}_{2,\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_j},X_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i},x} \cap N(\widehat{l}^{\mathrm{s}}_j) \subset \widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{s}}_{1,\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{s}}_j},X_{\widehat{l}^{\mathrm{s}}_j},x} \qquad \text{и} \qquad \widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{u}}_{1,\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{s}}_j},X_{\widehat{l}^{\mathrm{s}}_j},x} \cap N(\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i) \subset \widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i},X_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i},x}$$

для слоев

$$\widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{s}}_{2,\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_j},X_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i},x}, \quad \widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{s}}_{1,\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{s}}_j},X_{\widehat{l}^{\mathrm{s}}_j},x}, \quad \widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{u}}_{1,\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{s}}_j},X_{\widehat{l}^{\mathrm{s}}_j},x}, \quad \widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i},X_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i},x}$$

слоений

$$\widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{s}}_{2,\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_j},X_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i}}, \quad \widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{s}}_{1,\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{s}}_j},X_{\widehat{l}^{\mathrm{s}}_j}}, \quad \widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{u}}_{1,\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{s}}_j},X_{\widehat{l}^{\mathrm{s}}_j}}, \quad \widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{u}}_{2,\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i},X_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i}}$$

соответственно, проходящих через точку $x \in N(\widehat{l}^{\mathrm{u}}_i) \cap N(\widehat{l}^{\mathrm{s}}_j)$.

4. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЬНОГО ДИФФЕОМОРФИЗМА

В этом разделе мы докажем теорему 1, построив по каждой абстрактной схеме $S \in \mathcal{S}$ диффеоморфизм $f \in \mathrm{MS}(M^3)$, схема которого эквивалентна схеме S.

Доказательство теоремы 1. Пусть $S = (\widehat{V}, \eta_{\widehat{V}}, \widehat{L}^{\mathrm{u}}, \widehat{L}^{\mathrm{s}})$ — абстрактная схема. Построим по шагам диффеоморфизм $f \in \mathrm{MS}(M^3)$ такой, что схемы S_f и S эквивалентны.

Шаг 1. Обозначим через K ядро эпиморфизма $\eta_{\widehat{V}}\colon \pi_1(\widehat{V}) \to \mathbb{Z}$. Тогда K — нормальная подгруппа фундаментальной группы $\pi_1(\widehat{V})$ и группа $\pi_1(\widehat{V})/K$ изоморфна $\mathbb{Z}$. Поскольку $\widehat{V}$ — связное 3-многообразие, существуют связное 3-многообразие V и поднятие $p_{\widehat{V}}\colon V \to \widehat{V}$ такие, что $p_{\widehat{V}*}(\pi_1(V)) = K$. Более того, группа скольжений $G(V, p_{\widehat{V}}, \widehat{V})$ изоморфна группе $\mathbb{Z}$. Обозначим через $f_V\colon V \to V$ диффеоморфизм, который является положительной образующей группы $G(V, p_{\widehat{V}}, \widehat{V})$, т.е. для f_V выполняется следующее условие: любая петля $c \subset V$ с началом в точке x и концом в точке $f_V(x)$ проектируется в петлю $\widehat{c} = p_{\widehat{V}}(c) \subset \widehat{V}$ такую, что $\eta_{\widehat{V}}([\widehat{c}]) = 1$.

Шаг 2. Из определения абстрактной схемы следует, что $\widehat{L}^{\mathrm{u}} = \widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_0 \cup \ldots \cup \widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_n$ — гладкая u-ламинация. Согласно определению 6 каждая компонента связности $\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0 \subset \widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_0$ является тором или бутылкой Клейна и обладает гладкой трубчатой окрестностью $N(\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0)$, которая трансверсально пересекается с множеством $\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_1 \cup \ldots \cup \widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_n$ вдоль $\eta_{\widehat{V}}$-тривиальных замкнутых кривых. Кроме того, каждой компоненте связности $\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0 \subset \widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_0$ соответствуют числа $m_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0} \in \mathbb{N}$, $\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0} \in \{-1, +1\}$. Тогда множество $W_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0} = p^{-1}_{\widehat{V}}(\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0)$ состоит из $m_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}$ цилиндров, которые мы обозначим через $W_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0,0}, \ldots, W_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0,m_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}}$ (множество $N\bigl(W_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}\bigr) = p^{-1}_{\widehat{V}}(N(\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0))$ является их трубчатой окрестностью).

Согласно утверждению 2 существует диффеоморфизм $g_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}\colon \partial N\bigl(W_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}\bigr) \to \partial\mathcal{N}_2$, сопрягающий диффеоморфизм $f_V^{m_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}}\big|_{\partial N(W_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0})}$ с диффеоморфизмом $a_{2,\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}}\big|_{\partial\mathcal{N}_2}$. Определим диффеоморфизм $a_{2,\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0},m_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}}\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{m_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{m_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}}$ формулой

$$a_{2,\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0},m_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}}(x_1, x_2, x_3, j) = \Bigl(\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0} \cdot 2^{1/m_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}} x_1, \nu_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0} \cdot 2^{-1/m_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}} x_2, 2^{-1/m_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}} x_3, j + 1\Bigr).$$

Тогда диффеоморфизм $G_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}\colon \partial N\bigl(W_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}\bigr) \to \partial\mathcal{N}_2 \times \mathbb{Z}_{m_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}}$, заданный для $x \in f_V^j\bigl(\partial N\bigl(W_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}\bigr)\bigr)$ формулой

$$G_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}(x) = a_{2,\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0},m_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}}\bigl(g_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}(f_V^{-j}(x))\bigr),$$

сопрягает $f_V|_{\partial N(W_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0})}$ с $a_{2,\nu_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0},m_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}}\big|_{\partial\mathcal{N}_2 \times \mathbb{Z}_{m_{\widehat{l}^{\mathrm{u}}_0}}}$.

Положим

$$A_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}} = V \setminus N\big(W_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}\big), \qquad B_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}} = \mathrm{cl}\,\mathcal{N}_2 \times \mathbb{Z}_{m_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}, \qquad A'_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}} = \partial N\big(W_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}\big), \qquad B'_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}} = \partial \mathcal{N}_2 \times \mathbb{Z}_{m_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}},$$
$$Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}} = A_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}} \cup_{G_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}} B_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}, \qquad \overline{Q}_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}} = A_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}} \cup B_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}.$$

Обозначим через $p_{Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}\colon \overline{Q}_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}} \to Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}$ естественную проекцию. Тогда проекции $p_{A_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}} = p_{Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}|_{A_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}$ и $p_{B_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}} = p_{Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}|_{B_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}$ индуцируют структуру гладкого связного ориентируемого сепарабельного 3-многообразия без края. Покажем, что пространство $Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}$ хаусдорфово.

Для этого достаточно доказать, что множество

$$E_{Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}} = \Big\{(x,y) \in \overline{Q}_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}} \times \overline{Q}_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}\colon\ p_{Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}(x) = p_{Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}(y)\Big\}$$

замкнуто в $\overline{Q}_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}} \times \overline{Q}_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}$ (см., например, [14]), а это эквивалентно тому, что $(x,y) \in E_{Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}$ для любой последовательности $(x_m, y_m) \in E_{Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}$, сходящейся в пространстве $\overline{Q}_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}} \times \overline{Q}_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}$ к точке (x,y).

Не уменьшая общности, предположим, что все точки последовательности x_m принадлежат той же компоненте связности множества $\overline{Q}_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}$, что и точка x (в противном случае можно выбрать подпоследовательность с таким свойством). Аналогичное предположение сделаем относительно последовательности y_m и точки y. Имеются четыре возможности:

1) $x_m, y_m \in A_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}$;

2) $x_m, y_m \in B_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}$;

3) $x_m \in A_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}$, $y_m \in B_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}$;

4) $x_m \in B_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}$, $y_m \in A_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}$.

В случаях 1) и 2) имеем $x_m = y_m$. Тогда $x = y$ и, следовательно, $(x,y) \in E_{Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}$. В случае 3) имеем $x_m \in A_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}$, $y_m \in B_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}$, $y_m = G_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}(x_m)$ и существуют две возможности:

3а) $x \in \partial N\big(W_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}\big)$;

3б) $x \notin \partial N\big(W_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}\big)$.

В подслучае 3а), используя непрерывность отображения $G_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}$, мы получим следующую последовательность равенств:

$$y = \lim_{m\to\infty} y_m = \lim_{m\to\infty} G_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}(x_m) = G_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}\Big(\lim_{m\to\infty} x_m\Big) = G_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}(x).$$

Таким образом, $(x,y) \in E_{Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}$. Покажем, что подслучай 3б) невозможен. Действительно, если $x \notin \partial N\big(W_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}\big)$, то $y = \lim_{m\to\infty} y_m = \lim_{m\to\infty} G_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}(x_m) \in \partial\mathcal{N}_2$. Это противоречит тому факту, что последовательность $\{G(x_m)\}$ сходится в $B_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}$.

В случае 4) имеем $x_m \in B_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}$, $y_m \in A_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}$ и $y_m = G^{-1}_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}(x_m)$. Так как замыкание $B'_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}$ в $\overline{Q}_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}$ совпадает с $B'_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}$, то $x \in B'_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}$ и, как и в подслучае 3а), имеем $y = G^{-1}_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}(x)$ и, следовательно, $(x,y) \in E_{Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}$.

Таким образом, $Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}$ — гладкое связное ориентируемое 3-многообразие без края. Положим

$$f_{A_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}} = p_{A_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}} f_V p^{-1}_{A_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}\colon\ p_{A_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}\big(A_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}\big) \to p_{A_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}\big(A_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}\big), \qquad f_{B_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}} = p_{B_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}} a_{2,\nu\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}, m_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}} p^{-1}_{B_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}\colon\ p_{B_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}\big(B_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}\big) \to p_{B_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}\big(B_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}\big).$$

По построению диффеоморфизмы $f_{A_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}$ и $f_{B_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}$ совпадают на множестве $p_{A_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}\big(A'_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}\big)=p_{B_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}\big(B'_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}\big)$. Тогда отображение $f_{Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}\colon Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}\to Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}$, заданное формулой

$$f_{Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}(x)=\begin{cases} f_{A_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}(x), & x\in p_{A_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}\big(A_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}\big),\\ f_{B_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}(x), & x\in p_{B_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}\big(B_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}\big),\end{cases}$$

является диффеоморфизмом на многообразии $Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}$. По построению неблуждающее множество диффеоморфизма $f_{Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}$ состоит из единственной седловой периодической орбиты с индексом Морса 2.

Через $L^{\mathrm{u}}_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}$ обозначим $f_{Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}$-инвариантную u-ламинацию на многообразии $Q_{\widehat{\ell}_0^{\mathrm{u}}}$, которая совпадает с ламинацией $p_{Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}\big(p_{\widehat{V}}^{-1}(\widehat{\ell}_1^{\mathrm{u}}\cup\ldots\cup\widehat{\ell}_n^{\mathrm{u}})\big)$ вне $p_{Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}\big(N\big(W_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}\big)\big)$ и каждая компонента связности которой в $p_{Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}\big(N\big(W_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}\big)\big)$ является гладким 2-диском, трансверсальным слоям слоения $p_{Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}\big(p_{\widehat{V}}^{-1}\big(\widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{s}}_{2,\nu_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}\big)\big)$ и совпадающим со слоем слоения $p_{Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}(\mathcal{F}_2^{\mathrm{u}})$ в некоторой окрестности $p_{Q_{\widehat{l}_0^{\mathrm{u}}}}(W^{\mathrm{s}}_O)$. Условие трансверсальности новой ламинации старому одномерному слоению обеспечивает гомеоморфность ламинаций.

Сделав аналогичные построения для всех компонент связности множества $\widehat{\ell}_0^{\mathrm{u}}$, мы получим гладкое связное замкнутое ориентируемое 3-многообразие $Q_{\widehat{\ell}_0^{\mathrm{u}}}$ и диффеоморфизм $f_{Q_{\widehat{\ell}_0^{\mathrm{u}}}}\colon Q_{\widehat{\ell}_0^{\mathrm{u}}}\to Q_{\widehat{\ell}_0^{\mathrm{u}}}$ с конечным неблуждающим множеством Σ_0, состоящим из седловых периодических орбит с индексом Морса 2 и $f_{Q_{\widehat{\ell}_0^{\mathrm{u}}}}$-инвариантной u-ламинацией $L^{\mathrm{u}}_{\widehat{\ell}_0^{\mathrm{u}}}$. Продолжая процесс, мы получим гладкое связное ориентируемое некомпактное 3-многообразие Q_{u} без края и диффеоморфизм $f_{Q_{\mathrm{u}}}\colon Q_{\mathrm{u}}\to Q_{\mathrm{u}}$, неблуждающее множество которого Ω_2 состоит из седловых периодических гиперболических точек с индексом Морса 2.

Шаг 3. По построению многообразие $Q_{\mathrm{u}}\setminus W^{\mathrm{s}}_{\Sigma^2_{f_{Q_{\mathrm{u}}}}}$ диффеоморфно многообразию V, диффеоморфизм $f_{Q_{\mathrm{u}}}|_{Q_{\mathrm{u}}\setminus W^{\mathrm{s}}_{\Sigma^2_{f_{Q_{\mathrm{u}}}}}}$ топологически сопряжен с диффеоморфизмом f_V и, следовательно, в силу утверждения 2 пространства орбит $\widehat{V}$ и $\big(Q_{\mathrm{u}}\setminus W^{\mathrm{s}}_{\Sigma^2_{f_{Q_{\mathrm{u}}}}}\big)/f_{Q_{\mathrm{u}}}$ диффеоморфны. Поэтому мы будем отождествлять описанные объекты. Повторив всю процедуру шага 2 для s-ламинации $\widehat{L}^{\mathrm{s}}\subset Q_{\mathrm{u}}$, мы получим гладкое связное ориентируемое некомпактное 3-многообразие Q_{s} без края и диффеоморфизм $f_{Q_{\mathrm{s}}}\colon Q_{\mathrm{s}}\to Q_{\mathrm{s}}$ с неблуждающим множеством, состоящим из конечного множества Ω_1 седловых гиперболических точек с индексом Морса 1 и конечного множества Ω_2 седловых гиперболических точек с индексом Морса 2.

Шаг 4. Положим $C_{\mathrm{s}}=Q_{\mathrm{s}}$, $C'_{\mathrm{s}}=Q_{\mathrm{s}}\setminus W^{\mathrm{s}}_{\Omega_{f_{Q_{\mathrm{s}}}}}$. Обозначим через $\widehat{C}'_{\mathrm{s}}$ пространство орбит действия $f_{Q_{\mathrm{s}}}$ на C'_{s} и через $p_{\widehat{C}'_{\mathrm{s}}}\colon C'_{\mathrm{s}}\to\widehat{C}'_{\mathrm{s}}$ естественную проекцию. Тогда пространство $\widehat{C}'_{\mathrm{s}}$ гомеоморфно многообразию, которое получается из многообразия $\widehat{V}$ перестройкой вдоль s-ламинации $\widehat{L}^{\mathrm{s}}$, и, следовательно, оно гомеоморфно конечному числу (обозначим его через l_{s}) копий $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$. Такая перестройка индуцирует на каждой компоненте связности $\widehat{C}'_{\mathrm{s},i}$, $i=1,\ldots,l_{\mathrm{s}}$, пространства $\widehat{C}'_{\mathrm{s}}$ эпиморфизм из фундаментальной группы в группу $r_i^{\mathrm{s}}\mathbb{Z}$, $r_i^{\mathrm{s}}\in\mathbb{N}$. Тогда множество $C'_{\mathrm{s},i}=p^{-1}_{\widehat{C}'_{\mathrm{s},i}}(\widehat{C}'_{\mathrm{s},i})$ состоит из r_i^{s} компонент связности $C'_{\mathrm{s},i,0},\ldots,C'_{\mathrm{s},i,r_i^{\mathrm{s}}-1}$. В силу утверждения 2 существует диффеоморфизм $\rho_{\mathrm{s},i,0}\colon C'_{\mathrm{s},i,0}\to\mathbb{R}^3\setminus O$, сопрягающий $f^{r_i^{\mathrm{s}}}_{Q_{\mathrm{s}}}\big|_{C'_{\mathrm{s},i,0}}$ с $a^{\mathrm{s}}_{0,+1}|_{\mathbb{R}^3\setminus O}$.

Определим диффеоморфизм $a^{\mathrm{s}}_{0,+1,r_i^{\mathrm{s}}}\colon\mathbb{R}^3\times\mathbb{Z}_{r_i^{\mathrm{s}}}\to\mathbb{R}^3\times\mathbb{Z}_{r_i^{\mathrm{s}}}$ формулой

$$a^{\mathrm{s}}_{0,+1,r_i^{\mathrm{s}}}(x_1,x_2,x_3,j)=\big(2^{-1/r_i^{\mathrm{s}}}x_1,2^{-1/r_i^{\mathrm{s}}}x_2,2^{-1/r_i^{\mathrm{s}}}x_3,j+1\big).$$

Тогда диффеоморфизм $\rho_{\mathrm{s},i}\colon C'_{\mathrm{s},i}\to(\mathbb{R}^3\setminus O)\times\mathbb{Z}_{r_i^{\mathrm{s}}}$, заданный для $x\in f^j(C'_{\mathrm{s},i,0})$ формулой

$$\rho_{\mathrm{s},i}(x)=a^{\mathrm{s}}_{0,+1,r_i^{\mathrm{s}}}\bigl(\rho_{\mathrm{s},i,0}\bigl(f_{Q_{\mathrm{s}}}^{-j}(x)\bigr)\bigr),$$

сопрягает диффеоморфизм $f_{Q_{\mathrm{s}}}|_{C'_{\mathrm{s},i}}$ с диффеоморфизмом $a^{\mathrm{s}}_{0,+1,r_i^{\mathrm{s}}}\big|_{(\mathbb{R}^3\setminus O)\times\mathbb{Z}_{r_i^{\mathrm{s}}}}$.

Положим

$$D_{\mathrm{s}}=\coprod_{i=1}^{l_{\mathrm{s}}}(\mathbb{R}^3\times\mathbb{Z}_{r_i^{\mathrm{s}}}),\qquad D'_{\mathrm{s}}=\coprod_{i=1}^{l_{\mathrm{s}}}\bigl((\mathbb{R}^3\setminus O)\times\mathbb{Z}_{r_i^{\mathrm{s}}}\bigr)$$

и обозначим отображение, составленное из диффеоморфизмов $a^{\mathrm{s}}_{0,+1,r_1^{\mathrm{s}}},\dots,a^{\mathrm{s}}_{0,+1,r_{l_{\mathrm{s}}}^{\mathrm{s}}}$, через $d_{\mathrm{s}}\colon D_{\mathrm{s}}\to D_{\mathrm{s}}$, а отображение, составленное из диффеоморфизмов $\rho_{\mathrm{s},1},\dots,\rho_{\mathrm{s},l_{\mathrm{s}}}$, через $\rho_{\mathrm{s}}\colon C'_{\mathrm{s}}\to D'_{\mathrm{s}}$. Положим $R_{\mathrm{s}}=C_{\mathrm{s}}\cup_{\rho_{\mathrm{s}}}D_{\mathrm{s}}$, $\overline{R}_{\mathrm{s}}=C_{\mathrm{s}}\cup D_{\mathrm{s}}$ и обозначим через $p_{R_{\mathrm{s}}}\colon\overline{R}_{\mathrm{s}}\to R_{\mathrm{s}}$ естественную проекцию. Доказательство того, что R_{s} — гладкое связное ориентируемое 3-многообразие без края, как и выше, сводится к проверке замкнутости в $\overline{R}_{\mathrm{s}}\times\overline{R}_{\mathrm{s}}$ множества

$$E_{R_{\mathrm{s}}}=\bigl\{(x,y)\in\overline{R}_{\mathrm{s}}\times\overline{R}_{\mathrm{s}}\colon p_{R_{\mathrm{s}}}(x)=p_{R_{\mathrm{s}}}(y)\bigr\}.$$

Пусть последовательность $(x_m,y_m)\in E_{R_{\mathrm{s}}}$ сходится в $\overline{R}_{\mathrm{s}}\times\overline{R}_{\mathrm{s}}$ к точке (x,y). Покажем, что точка (x,y) принадлежит $E_{R_{\mathrm{s}}}$.

Рассмотрим четыре случая:

1) $x_m,y_m\in C_{\mathrm{s}}$;

2) $x_m,y_m\in D_{\mathrm{s}}$;

3) $x_m\in C_{\mathrm{s}}$, $y_m\in D_{\mathrm{s}}$;

4) $x_m\in D_{\mathrm{s}}$, $y_m\in C_{\mathrm{s}}$.

В случаях 1) и 2) имеем $x_m=y_m$. Тогда $x=y$ и, следовательно, $(x,y)\in E_{R_{\mathrm{s}}}$. В случае 3) имеем $x_m\in C'_{\mathrm{s}}$, $y_m\in D'_{\mathrm{s}}$, $y_m=\rho_{\mathrm{s}}(x_m)$ и есть две возможности:

3а) $x\in C'_{\mathrm{s}}$;

3б) $x\notin C'_{\mathrm{s}}$.

В подслучае 3а) имеем $y=\rho_{\mathrm{s}}(x)$ и, следовательно, $(x,y)\in E_{R_{\mathrm{s}}}$. Покажем, что случай 3б) невозможен.

Поскольку $C_{\mathrm{s}}\setminus C'_{\mathrm{s}}=\bigcup_{p\in\Omega_{f_{Q_{\mathrm{s}}}}}W^{\mathrm{s}}_p$, имеем $x\in W^{\mathrm{s}}_p$ для некоторой седловой точки $p\in\Omega_{f_{Q_{\mathrm{s}}}}$. Тогда существуют подпоследовательность $\{x_{m_j}\}$, последовательность целых чисел $k_{m_j}\to+\infty$ и точка $z\in W^{\mathrm{u}}_p$ такие, что последовательность $\bigl\{z_{m_j}=f_{Q_{\mathrm{s}}}^{k_{m_j}}(x_{m_j})\bigr\}$ сходится к точке z. Положим $w_{m_j}=\rho_{\mathrm{s}}(z_{m_j})$ и $w=\rho_{\mathrm{s}}(z)$. Тогда последовательность $\{w_{m_j}\}$ сходится к $w\in D'_{\mathrm{s}}$. Так как $y_m=\rho_{\mathrm{s}}(x_m)$, то $y_{m_j}=\rho_{\mathrm{s}}(x_{m_j})=\rho_{\mathrm{s}}\bigl(f_{Q_{\mathrm{s}}}^{-k_{m_j}}(z_{m_j})\bigr)$. Поскольку диффеоморфизм ρ_{s} сопрягает $f_{Q_{\mathrm{s}}}|_{C'_{\mathrm{s}}}$ и $d_{\mathrm{s}}|_{D'_{\mathrm{s}}}$, имеем $y_{m_j}=d_{\mathrm{s}}^{-k_{m_j}}(\rho_{\mathrm{s}}(z_{m_j}))=d_{\mathrm{s}}^{-k_{m_j}}(w_{m_j})$. Получили противоречие с тем, что у последовательности $\bigl\{d_{\mathrm{s}}^{-k_{m_j}}(w_{m_j})\bigr\}$ есть предел в D_{s}.

В случае 4) имеем $x_m\in D'_{\mathrm{s}}$, $y_m\in C'_{\mathrm{s}}$, $y_m=\rho_{\mathrm{s}}^{-1}(x_m)$ и есть две возможности:

4а) $x\in D'_{\mathrm{s}}$;

4б) $x\notin D'_{\mathrm{s}}$.

В подслучае 4а), как и в подслучае 3а), $y=\rho_{\mathrm{s}}^{-1}(x)$ и, следовательно, $(x,y)\in E_{R_{\mathrm{s}}}$. Покажем, что подслучай 4б) невозможен.

Поскольку $x_m\in D'_{\mathrm{s}}$ и $x=O$, последовательность $y_m=\rho_{\mathrm{s}}^{-1}(x_m)$ не имеет предела в C_{s}, что является противоречием.

Таким образом, R_{s} — гладкое связное ориентируемое 3-многообразие без края. Положим $p_{C_{\mathrm{s}}} = p_{R_{\mathrm{s}}}|_{C_{\mathrm{s}}}$, $p_{D_{\mathrm{s}}} = p_{R_{\mathrm{s}}}|_{D_{\mathrm{s}}}$,

$$f_{C_{\mathrm{s}}} = p_{C_{\mathrm{s}}} f_{Q_{\mathrm{s}}} p_{C_{\mathrm{s}}}^{-1}\colon\ p_{C_{\mathrm{s}}}(C_{\mathrm{s}}) \to p_{C_{\mathrm{s}}}(C_{\mathrm{s}}), \qquad f_{D_{\mathrm{s}}} = p_{D_{\mathrm{s}}} d_{\mathrm{s}} p_{D_{\mathrm{s}}}^{-1}\colon\ p_{D_{\mathrm{s}}}(D_{\mathrm{s}}) \to p_{D_{\mathrm{s}}}(D_{\mathrm{s}}).$$

Рассуждая, как выше, мы докажем, что отображение $f_{R_{\mathrm{s}}}\colon R_{\mathrm{s}} \to R_{\mathrm{s}}$, заданное формулой

$$f_{R_{\mathrm{s}}}(x) = \begin{cases} f_{C_{\mathrm{s}}}(x), & x \in p_{C_{\mathrm{s}}}(C_{\mathrm{s}}), \\ f_{D_{\mathrm{s}}}(x), & x \in p_{D_{\mathrm{s}}}(D_{\mathrm{s}}), \end{cases}$$

является диффеоморфизмом многообразия R_{s}, неблуждающее множество которого состоит из n_{s} седловых периодических орбит с индексом Морса 1, n_{u} седловых периодических орбит с индексом Морса 2 и l_{s} стоковых периодических орбит.

Шаг 5. Пусть $C_{\mathrm{u}} = R_{\mathrm{s}}$, $C'_{\mathrm{u}} = R_{\mathrm{s}} \setminus W^{\mathrm{u}}_{\Omega_{f_{R_{\mathrm{s}}}}}$. Обозначим через $\widehat{C}'_{\mathrm{u}}$ пространство орбит действия $f_{R_{\mathrm{s}}}$ на C'_{u} и через $p_{\widehat{C}'_{\mathrm{u}}}\colon C'_{\mathrm{u}} \to \widehat{C}'_{\mathrm{u}}$ естественную проекцию. Тогда пространство $\widehat{C}'_{\mathrm{u}}$ гомеоморфно многообразию, которое получается перестройкой $\widehat{V}$ вдоль ламинации $\widehat{L}^{\mathrm{u}}$, и, следовательно, оно гомеоморфно конечному числу (обозначим его через l_{u}) копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Эта перестройка индуцирует на фундаментальной группе каждой компоненты связности $\widehat{C}'_{\mathrm{u},i}$, $i = 1, \dots, l_{\mathrm{u}}$, многообразия $\widehat{C}'_{\mathrm{u}}$ эпиморфизм в группу $r^{\mathrm{u}}_i\mathbb{Z}$, $r^{\mathrm{u}}_i \in \mathbb{N}$. Тогда множество $C'_{\mathrm{u},i} = p^{-1}_{\widehat{C}'_{\mathrm{u},i}}(\widehat{C}'_{\mathrm{u},i})$ состоит из r^{u}_i компонент связности $C'_{\mathrm{u},i,0}, \dots, C'_{\mathrm{u},i,r^{\mathrm{u}}_i-1}$. Согласно утверждению 2 существует диффеоморфизм $\rho_{\mathrm{u},i,0}\colon C'_{\mathrm{u},i,0} \to \mathbb{R}^3 \setminus O$, сопрягающий диффеоморфизмы $f^{r^{\mathrm{u}}_i}_{R_{\mathrm{s}}}|_{C'_{\mathrm{u},i,0}}$ и $a^{\mathrm{u}}_{3,+1}|_{\mathbb{R}^3\setminus O}$.

Определим диффеоморфизм $a^{\mathrm{u}}_{3,+1,r^{\mathrm{u}}_i}\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{r^{\mathrm{u}}_i} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{r^{\mathrm{u}}_i}$ формулой

$$a^{\mathrm{s}}_{3,+1,r^{\mathrm{u}}_i}(x_1, x_2, x_3, j) = \bigl(2^{-1/r^{\mathrm{u}}_i} x_1, 2^{-1/r^{\mathrm{u}}_i} x_2, 2^{-1/r^{\mathrm{u}}_i} x_3, j+1\bigr).$$

Тогда диффеоморфизм $\rho_{\mathrm{u},i}\colon C'_{\mathrm{u},i} \to (\mathbb{R}^3 \setminus O) \times \mathbb{Z}_{r^{\mathrm{u}}_i}$, заданный для $x \in f^j(C'_{\mathrm{u},i,0})$ формулой

$$\rho_{\mathrm{u},i}(x) = a^{\mathrm{u}}_{3,+1,r^{\mathrm{u}}_i}\bigl(\rho_{\mathrm{u},i,0}\bigl(f^{-j}_{Q_{\mathrm{u}}}(x)\bigr)\bigr),$$

сопрягает $f_{Q_{\mathrm{u}}}|_{C'_{\mathrm{u},i}}$ и $a^{\mathrm{u}}_{3,+1,r^{\mathrm{u}}_i}|_{(\mathbb{R}^3\setminus O)\times\mathbb{Z}_{r^{\mathrm{u}}_i}}$.

Положим

$$D_{\mathrm{u}} = \coprod_{i=1}^{l_{\mathrm{u}}} (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{r^{\mathrm{u}}_i}), \qquad D'_{\mathrm{u}} = \coprod_{i=1}^{l_{\mathrm{u}}} \bigl((\mathbb{R}^3 \setminus O) \times \mathbb{Z}_{r^{\mathrm{u}}_i}\bigr)$$

и обозначим отображение, состоящее из диффеоморфизмов $a^{\mathrm{u}}_{3,+1,r^{\mathrm{u}}_1}, \dots, a^{\mathrm{u}}_{3,+1,r^{\mathrm{u}}_{l_{\mathrm{u}}}}$, через $d_{\mathrm{u}}\colon D_{\mathrm{u}} \to D_{\mathrm{u}}$, а отображение, состоящее из диффеоморфизмов $\rho_{\mathrm{u},1}, \dots, \rho_{\mathrm{u},l_{\mathrm{u}}}$, через $\rho_{\mathrm{u}}\colon C'_{\mathrm{u}} \to D'_{\mathrm{u}}$. Положим $R_{\mathrm{u}} = C_{\mathrm{u}} \cup_{\rho_{\mathrm{u}}} D_{\mathrm{u}}$, $\overline{R}_{\mathrm{u}} = C_{\mathrm{u}} \cup D_{\mathrm{u}}$ и обозначим через $p_{R_{\mathrm{u}}}\colon \overline{R}_{\mathrm{u}} \to R_{\mathrm{u}}$ естественную проекцию. Чтобы показать, что R_{u} — гладкое связное ориентируемое 3-многообразие без края, докажем замкнутость множества

$$E_{R_{\mathrm{u}}} = \bigl\{(x,y) \in \overline{R}_{\mathrm{u}} \times \overline{R}_{\mathrm{u}}\colon\ p_{R_{\mathrm{u}}}(x) = p_{R_{\mathrm{u}}}(y)\bigr\}$$

в $\overline{R}_{\mathrm{u}} \times \overline{R}_{\mathrm{u}}$. Для этого рассмотрим последовательность $(x_m, y_m) \in E_{R_{\mathrm{u}}}$, сходящуюся в $\overline{R}_{\mathrm{u}} \times \overline{R}_{\mathrm{u}}$ к точке (x,y), и покажем, что (x,y) принадлежит $E_{R_{\mathrm{u}}}$.

Рассмотрим четыре возможных случая:

1) $x_m, y_m \in C_{\mathrm{u}}$;

2) $x_m, y_m \in D_{\mathrm{u}}$;

3) $x_m \in C_{\mathrm{u}}$, $y_m \in D_{\mathrm{u}}$;

4) $x_m \in D_{\mathrm{u}}$, $y_m \in C_{\mathrm{u}}$.

В случаях 1) и 2) имеем $x_m = y_m$. Тогда $x = y$ и, следовательно, $(x, y) \in E_{R_{\mathrm{u}}}$. В случае 3) имеем $x_m \in C'_{\mathrm{u}}$, $y_m \in D'_{\mathrm{u}}$, $y_m = \rho_{\mathrm{u}}(x_m)$ и есть две возможности:

3а) $x \in C'_{\mathrm{u}}$;

3б) $x \notin C'_{\mathrm{u}}$.

В подслучае 3а) имеем $y = \rho_{\mathrm{u}}(x)$ и, следовательно, $(x, y) \in E_{R_{\mathrm{u}}}$. Покажем, что подслучай 3б) невозможен.

Поскольку $C_{\mathrm{u}} \setminus C'_{\mathrm{u}} = \bigcup_{p \in \Omega_{f_{R_{\mathrm{s}}}}} W^{\mathrm{u}}_p$, имеем $x \in W^{\mathrm{u}}_p$ для некоторой седловой или стоковой точки $p \in \Omega_{f_{R_{\mathrm{s}}}}$. Получили противоречие, так как последовательность y_m не имеет предела в D_{u}.

В случае 4) имеем $x_m \in D'_{\mathrm{u}}$, $y_m \in C'_{\mathrm{u}}$, $y_m = \rho_{\mathrm{u}}^{-1}(x_m)$ и есть две возможности:

4а) $x \in D'_{\mathrm{u}}$;

4б) $x \notin D'_{\mathrm{u}}$.

В подслучае 4а) имеем $y = \rho_{\mathrm{u}}^{-1}(x)$ и, следовательно, $(x, y) \in E_{R_{\mathrm{s}}}$. Покажем, что подслучай 4б) невозможен.

Так как $x_m \in D'_{\mathrm{u}}$ и $x = O$, последовательность $y_m = \rho_{\mathrm{u}}^{-1}(x_m)$ не имеет предела в C_{u} — противоречие.

Положим $p_{C_{\mathrm{u}}} = p_{R_{\mathrm{u}}}|_{C_{\mathrm{u}}}$, $p_{D_{\mathrm{u}}} = p_{R_{\mathrm{u}}}|_{D_{\mathrm{u}}}$,

$$f_{C_{\mathrm{u}}} = p_{C_{\mathrm{u}}} f_{R_{\mathrm{s}}} p_{C_{\mathrm{u}}}^{-1} \colon\ p_{C_{\mathrm{u}}}(C_{\mathrm{u}}) \to p_{C_{\mathrm{u}}}(C_{\mathrm{u}}), \qquad f_{D_{\mathrm{u}}} = p_{D_{\mathrm{u}}} d_{\mathrm{u}} p_{D_{\mathrm{u}}}^{-1} \colon\ p_{D_{\mathrm{u}}}(D_{\mathrm{u}}) \to p_{D_{\mathrm{u}}}(D_{\mathrm{u}}).$$

Как и выше, отображение $f_{R_{\mathrm{u}}} \colon R_{\mathrm{u}} \to R_{\mathrm{u}}$, заданное формулой

$$f_{R_{\mathrm{u}}}(x) = \begin{cases} f_{C_{\mathrm{u}}}(x), & x \in p_{C_{\mathrm{u}}}(C_{\mathrm{u}}), \\ f_{D_{\mathrm{u}}}(x), & x \in p_{D_{\mathrm{u}}}(D_{\mathrm{u}}), \end{cases}$$

является диффеоморфизмом многообразия R_{u}, неблуждающее множество которого состоит из n_{s} седловых периодических орбит индекса Морса 1, n_{u} седловых периодических орбит индекса Морса 2, l_{s} стоковых периодических орбит и l_{u} источниковых периодических орбит.

Шаг 6. Покажем, что многообразие $M^3 = R_{\mathrm{u}}$ компактно и, следовательно, диффеоморфизм $f = f_{R_{\mathrm{u}}}$ принадлежит классу $\mathrm{MS}(M^3)$ и по построению его схема эквивалентна абстрактной схеме S.

Для доказательства компактности многообразия $R_{\mathrm{u}} = M^3$ достаточно показать, что любая последовательность $\{x_n\} \in M^3$ имеет сходящуюся подпоследовательность. Если бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$ принадлежат Ω_f, то факт очевиден. Рассмотрим противоположную ситуацию. По построению $M^3 = \bigcup_{p \in \Omega_f} W^{\mathrm{s}}_p = \bigcup_{p \in \Omega_f} W^{\mathrm{u}}_p$. С точностью до рассмотрения подпоследовательности существует точка $p_1 \in \Omega_f$ такая, что $\{x_n\} \subset W^{\mathrm{s}}_{p_1} \setminus p_1$. Обозначим через K фундаментальную область ограничения f на $W^{\mathrm{s}}_{p_1} \setminus p_1$. Тогда для каждого члена x_n последовательности $\{x_n\}$ существует целое число k_n такое, что $y_n = f^{k_n}(x_n) \in K$. Не уменьшая общности, мы можем считать, что последовательность $\{y_n\} = \{f^{k_n}(x_n)\}$ сходится к точке $y \in K$ (в противном случае мы можем рассмотреть подпоследовательность с таким свойством). Для последовательности $\{k_n\}$ существуют две возможности:

1) $\{k_n\}$ ограничена;

2) $\{k_n\}$ неограничена.

В случае 1), переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что последовательность $\{k_n\}$ сходится к целому числу k. Тогда $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f^{-k_n}(y_n) = f^{-k}(y)$. Таким образом, подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ сходится к $f^{-k}(y) \in W^{\mathrm{s}}_{p_1}$.

В случае 2), переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $\{k_n\}$ сходится к $+\infty$ или $-\infty$. В случае $k_n \to -\infty$ подпоследовательность $\{x_n = f^{-k_n}(y_n)\}$ сходится к p_1. В случае $k_n \to +\infty$ существует точка $p_2 \in \Omega_f$ такая, что с точностью до рассмотрения подпоследовательности имеем $\{x_n\} \subset W^{\mathrm{u}}_{p_2} \setminus p_2$ и, следовательно, подпоследовательность последовательности $\{x_n = f^{-k_n}(y_n)\}$ сходится к p_2. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bonatti C., Grines V.* Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 // J. Dyn. Control Syst. 2000. V. 6, N 4. P. 579–602.
2. *Bonatti Ch., Grines V., Laudenbach F., Pochinka O.* Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves on 3-manifolds: E-print, 2017. arXiv: 1702.04960 [math.GT].
3. *Bonatti C., Grines V., Medvedev V., Pécou E.* Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds // Topology. 2004. V. 43, N 2. P. 369–391.
4. *Бонатти Х., Гринес В.З., Починка О.В.* Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях // Тр. МИАН. 2005. Т. 250. С. 5–53.
5. *Bonatti C., Grines V., Pochinka O.* Classification of Morse–Smale diffeomorphisms with the chain of saddles on 3-manifolds // Foliations 2005: Proc. Int. Conf., Łodź, 2005. Hackensack, NJ: World Scientific, 2006. P. 121–147.
6. *Bonatti C., Langevin R.* Difféomorphismes de Smale des surfaces. Paris: Soc. math. France, 1998. (Astérisque; V. 250).
7. *Bonatti C., Paoluzzi L.* 3-manifolds which are orbit spaces of diffeomorphisms // Topology. 2008. V. 47, N 2. P. 71–100.
8. *Fox R.H., Artin E.* Some wild cells and spheres in three-dimensional space // Ann. Math. Ser. 2. 1948. V. 49, N 4. P. 979–990.
9. *Гринес В.З.* Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях // Мат. заметки. 1993. Т. 54, №3. С. 3–17.
10. *Grines V.Z., Medvedev T.V., Pochinka O.V.* Dynamical systems on 2- and 3-manifolds. Cham: Springer, 2016.
11. *Гринес В.З., Починка О.В.* Каскады Морса–Смейла на 3-многообразиях // УМН. 2013. Т. 68, №1. С. 129–188.
12. *Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С., Починка О.В.* Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла // Тр. МИАН. 2010. Т. 271. С. 111–133.
13. *Гринес В.З., Жужома Е.В., Починка О.В.* Системы Морса–Смейла и топологическая структура несущих многообразий // Совр. математика. Фунд. напр. 2016. Т. 61. С. 5–40.
14. *Косневски Ч.* Начальный курс алгебраической топологии. М.: Мир, 1983.
15. *Майер А.Г.* Грубое преобразование окружности в окружность // Учен. зап. Горьк. ун-та. 1939. №12. С. 215–229.
16. *Peixoto M.M.* On the classification of flows on 2-manifolds // Dynamical systems: Proc. Symp. Univ. Bahia, Salvador, 1971. New York: Acad. Press, 1973. P. 389–419.
17. *Pixton D.* Wild unstable manifolds // Topology. 1977. V. 16, N 2. P. 167–172.