Басалаев Алексей Андреевич
Темы курсовых работ

a.basalaev@skoltech.ru

1 Классификация квазиоднородных особенностей

кому: начиная со 2о курса

Предлагается изучить классификацию квазиоднородных многочленов $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, для которых множество $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid \partial_{x_1} f = \dots = \partial_{x_n} f = 0\}$ изолировано. Примеры следующие:

$$f = x_1^p, \quad f = x_1^p + x_1 x_2^2, \quad f = x_1^{a_1} x_2 + x_2^{a_2} x_3 + x_3^{a_4}.$$

При $n \leq 3$ такая классификация дана полностью в книге В.И. Арнольд, С.М. Гусейн-Заде, А.Н. Варченко "Особенности дифференцируемых отображений". Для успешной работы на данном проекте полного изучения книги не нужно. Для малых значений n (скажем, $n \leq 4$) надо будет изучить группу диагональных симметрий G_f таких многочленов f, определяемую следующим образом:

$$G_f := \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\} \mid f(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n) = f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Например, для $f = x_1^p$ имеем G_f — циклическая группа, порожденная $\exp(\frac{2\pi k i}{p}) \in \mathbb{C}$. Задача классификации таких групп симметрий является открытой и имеет научное значение. Успешная работа по данному проекту может быть рассмотрена как работа научного ассистента.

2 Простые особенности: особенности типа ADE

кому: начиная со 2о курса

В данном проекте рассматриваются исключительно многочлены $f_{A_n} := x^{n+1} + y^2 + z^2$, $f_{D_n} := x^{n-1} + xy^2 + z^2$, $f_{E_6} := x^4 + y^3 + z^2$, $f_{E_7} := x^3 y + y^3 + z^2$ или же $f_{E_8} := x^5 + y^3 + z^2$ для разных значений n. Для любого такого многочлена f_W рассмотрим множество $X := f_W^{-1}(0)$. Оно не будет гладким многообразием, а будет, напротив, особым. В рамках данного проекта надо будет изучить вопрос "разрешения" имеющихся на X особенностей. Также множество X будет идентифицировано с фактором $\mathbb{C}^2/G$ для некоторой конечной подгруппы $G \subset \mathrm{SU}(2)$. Данный проект может быть рассмотрен как плавное введение в такие концепции алгебраической геометрии, как, например, раздутие.

3 Фробениусовы структуры простых особенностей

кому: начиная со 2о курса

Обозначим за $e_1, \dots, e_n$ стандартные базисные вектора $\mathbb{C}^n$. С помощью любого многочлена f_W из предыдущего списка можно определить ассоциативное и коммутативное умножение $e_i \circ e_j$:

$$e_i \circ e_j = \sum_{k=1}^{n} c_{i,j}^k e_k.$$

В частности, для $f_{A_n} = x^{n+1} + y^2 + z^2$ можно рассмотреть естественное факторкольцо

$$\mathcal{L}_f := \mathbb{C}[x, y, z]/(\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f) \cong \mathbb{C}[x]/\partial_x f \cong \mathbb{C}[x]/x^n.$$

Такое факторкольцо является в точности n-мерным $\mathbb{C}$–векторным пространством $\mathbb{C}\langle 1, [x], \ldots, [x^{n-1}]\rangle$. Сопоставляя вектору $e_k \in \mathbb{C}^n$ вектор $[x^{k-1}] \in \mathcal{L}_f$ мы получим изоморфизм векторных пр-в $\Psi : \mathbb{C}^n \cong \mathcal{L}_f$. В то же время на $\mathcal{L}_f$ есть естественное умножение, т.к. это факторкольцо $[x^a][x^b] = [x^{a+b}]$ если $a+b < n$ и $[x^a][x^b] = 0$ если $a+b \geq n$. Благодаря изморфизму Ψ это умножение может быть использовано для того, чтобы определить умножение векторов $\mathbb{C}^n$: $e_i \circ e_j = e_{i+j}$ если $i + j < n$ и $e_i \circ e_j = 0$ иначе. То есть $\mathbb{C}^n$ будет снабжено структурой алгебры.

Данная конструкция может быть проведена в любым многочленов f_W из предыдущего пункта. Деформируя многочлен f_W с помощью переменных, $c^k_{i,j}$, которые, собственно, и задают умножение, будут тоже зависить от переменных. Таким образом мы получим целое семейство алгебр, которые в том числе будут обладать и некоторыми специальными свойствами.

В данном проекты мы изучим получаемые структуры алгебр на простых примерах. Такие структуры называются фробениусовыми и являются ключевыми объектами зеркальной симметрии.

4 Локальная алгебра особенности

Тема рекомендована студентам 3–4 курсов и магистрантам.

Предлагается изучить алгебраический инвариант изолированной особенности - локальную алгебру. Данный объект обладает богатой структурой играет важную роль в гипотезе зеркальной симметрии. Для данной задачи возможно исследовательское продолжение - классификация локальных алгебр особенностей с симметриями.

Материалы: книга В.И. Арнольд, С.М. Гусейн-Заде, А.Н. Варченко “Особенности дифференцируемых отображений”.

5 Многообразия с умножением

Тема рекомендована студентам 3–4 курсов и магистрантам.

Предлагается изучить многообразия с дополнительной структурой — структурой умножения в касательном пространстве. Данная тема очень обширна, многие такие многообразия строятся естественным образом по многочленам, задающим изолированные особенности, а также по потенциалам теории Громова-Виттена. К исследуемым многообразиям относятся (но не исключительно) F-многообразия и фробениусовы многообразия, с помощью которых формулируется гипотеза зеркальной симметрии.

Материалы: часть 1 книги C.Hertling “Frobenius manifolds and moduli spaces of singularities”.