УДК 512.745.2

И. В. Аржанцев

Проективные вложения с малой границей для однородных пространств

Изучаются эквивариантные открытые проективные вложения однородных пространств, в которых дополнение до открытой орбиты имеет коразмерность не меньше 2. Рассмотрен критерий наличия у пространства такого вложения, доказана конечность числа таких вложений, а также дана конструкция построения вложений в терминах геометрической теории инвариантов. Применение обобщенной конструкции Кокса и теории колец со связками позволяет описать ряд геометрических свойств вложений в комбинаторных терминах.

Библиография: 22 наименования.

Ключевые слова: алгебраическая группа, однородное пространство, эпиморфная подгруппа, кольцо Кокса.

Введение

Пусть G – связная аффинная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики и H – замкнутая подгруппа в G. В качестве основного объекта исследования в настоящей работе выступают эквивариантные вложения однородного пространства G/H, т. е. открытые G-эквивариантные вложения $i\colon G/H \hookrightarrow X$, где X – неприводимое нормальное G-многообразие. Теория вложений однородных пространств является хорошо разработанным и активно развивающимся направлением более общей теории алгебраических групп преобразований. Большинство классификационных результатов здесь основывается на подходе, предложенном в работе [1] и известном теперь как теория Луны–Вуста. Этот подход позволяет в принципе описать все эквивариантные вложения данного однородного пространства G/H, однако сделать такое описание конструктивным удается лишь для пространств сложности не более 1.

Естественно поставить задачу классификации вложений и изучения их свойств при дополнительных ограничениях на многообразие X. Например, если предположить, что многообразие X аффинно, у нас возникают дополнительные средства для изучения вложений (G-модульная структура на алгебре регулярных функций на X и взаимосвязь этой структуры с умножением в алгебре). Обзор результатов, полученных в теории аффинных вложений, дан в работе [2]. Другое естественное ограничение – предположить, что многообразие X проективно. Однако такое предположение едва ли внесет существенное упрощение по сравнению с общим случаем. В настоящей работе мы рассматриваем специальный класс проективных вложений. А именно, *проективным вложением с малой границей* называют вложение $i\colon G/H \hookrightarrow X$, где X – нормальное проективное G-многообразие и коразмерность границы $X \setminus i(G/H)$ в X

Работа выполнена при поддержке INTAS YS 05-109-4958 и гранта Пьера Делиня.

больше или равна двум. Такие вложения возникали в ряде работ (см., например, [3]–[5, § 23 B]), однако, насколько нам известно, первое их систематическое исследование было предпринято в работе [6]. Настоящая работа является непосредственным продолжением этого исследования. Отметим, что если в [6] было получено комбинаторное описание весьма широкого класса так называемых A_2-максимальных вложений с малой границей, то здесь мы ограничимся рассмотрением проективного случая.

Хорошо известно, что алгебра регулярных функций $\mathcal{O}(X)$ на неприводимом проективном многообразии X состоит только из констант. Отсюда следует, что наличие у однородного пространства G/H проективного вложения с малой границей влечет условие $\mathcal{O}(G/H) = \mathbb{K}$. Напомним, что замкнутая подгруппа H алгебраической группы G называется *эпиморфной*, если $\mathcal{O}(G/H) = \mathbb{K}$. Ряд эквивалентных определений, интересных свойств и примеров эпиморфных подгрупп можно найти в [4], [7], [8] и [5, § 23 B].

В § 1 будет показано, что проективные вложения G/H с малой границей определяются некоторыми характерами подгруппы H. Используя подгруппу, указанную в [3] (см. также [4]), и контрпример Нагаты–Стейнберга к 14-й проблеме Гильберта, в § 2 мы приведем пример однородного пространства G/H с эпиморфной подгруппой H, которое не допускает пополнений с малой границей. Этот пример показывает, что условие эпиморфности H не является достаточным для наличия у пространства G/H проективного вложения с малой границей.

Замкнутая подгруппа H в G называется *обозримой*, если однородное пространство G/H квазиаффинно. Далее, подгруппа $H \subseteq G$ называется *подгруппой Гроссханса*, если H обозрима и алгебра $\mathcal{O}(G/H)$ конечно порождена. Известно, что однородное пространство допускает аффинное вложение $G/H \hookrightarrow Z$ с малой границей тогда и только тогда, когда H является подгруппой Гроссханса [5]. В этом случае (нормальное) аффинное вложение пространства G/H с малой границей единственно (с точностью до G-эквивариантного автоморфизма) и соответствующее многообразие Z изоморфно спектру алгебры $\mathcal{O}(G/H)$. Вложение $G/H \hookrightarrow Z = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}(G/H))$ называют *каноническим* вложением пространства G/H.

Интересно выяснить, насколько эти результаты переносятся на проективные вложения с малой границей. Аналогом подгрупп Гроссханса здесь могут служить эпиморфные подгруппы, полученные из подгрупп Гроссханса расширениями при помощи тора (в [6] мы называем их *расширениями Гроссханса*). Соответствующие однородные пространства допускают проективные вложения с малой границей. В § 3 доказана конечность числа проективных вложений с малой границей для G/H, где H – расширение Гроссханса. Более точно, каждое проективное вложение с малой границей реализуется как категорный фактор множества полустабильных точек линеаризованного тривиального линейного расслоения над каноническим вложением $G/H_1 \hookrightarrow Z$ по действию тора, где H_1 – пересечение ядер характеров группы H. В отличие от [6], мы используем здесь только элементарные факты из геометрической теории инвариантов, что позволяет не требовать связности H и не налагать ограничения на группу G.

Используя понятие тотального координатного кольца и обобщение конструкции Кокса из торической геометрии, в [6] мы показали, что при определенных ограничениях на пару (G, H) проективные вложения G/H с малой границей параметризуются “внутренними” конусами некоторого веера $\Sigma(G/H)$, который возникает как GIT-веер для действия тора на аффинном многообразии Z. Более того, эквивариантные морфизмы между вложениями отвечают отношению "быть гранью" на множестве конусов $\Sigma(G/H)$. Разработанная в статье [9] теория колец со связками (bunched rings) позволяет описывать геометрические свойства нормальных многообразий со свободной конечно порожденной группой классов дивизоров и конечно порожденным кольцом Кокса в комбинаторных терминах (см. также [10]). Переформулируя эти результаты применительно к проективным вложениям с малой границей, мы в § 4 описываем группу Пикара, конусы эффективных, полуобильных и обильных дивизоров вложения, характеризуем локально факториальные и $\mathbb{Q}$-факториальные вложения. При условии гладкости факторизуемого многообразия локальная факториальность вложения эквивалентна его гладкости. Если пространство Z канонического вложения $G/H_1 \hookrightarrow Z$ является полным пересечением, то канонический класс пространства X вложения $G/H \hookrightarrow X$ также допускает эффективное описание.

В § 5 приведены примеры. Мы описываем, в частности, все проективные вложения с малой границей для $G = \mathrm{SL}(3)$ и приводим пример такой эпиморфной подгруппы H максимального ранга в $G = \mathrm{SL}(4)$, что G/H допускает более одного проективного вложения с малой границей. В этом случае явно описан граф эквивариантных морфизмов между вложениями.

Автор благодарен профессору Ю. Хаузену за плодотворное сотрудничество и полезные обсуждения, а также рецензенту за ряд ценных замечаний.

§ 1. Эпиморфные подгруппы и характеры

Следующая теорема является критерием существования у однородного пространства G/H проективного вложения с малой границей. Этот результат известен специалистам (некоторые его варианты содержатся, например, в [3, теорема 1]), однако для удобства читателя мы приводим полное доказательство.

Теорема 1.1. *Пусть G – связная аффинная алгебраическая группа и H – замкнутая подгруппа в G. Следующие условия эквивалентны*:

1) *существует проективное вложение $G/H \hookrightarrow X$ с малой границей*;

2) *подгруппа H эпиморфна и существует характер χ подгруппы H такой, что* $\mathrm{Ker}(\chi)$ *– подгруппа Гроссханса в G.*

Доказательство. Пусть $G/H \hookrightarrow X$ – проективное вложение с малой границей. Тогда подгруппа H эпиморфна и в силу нормальности X существуют конечномерный рациональный G-модуль V и замкнутое эквивариантное вложение $X \subseteq \mathbb{P}(V)$ (см., например, [11, теорема 1.7]). Пусть $\widetilde{X} \subseteq V$ – аффинный конус над образом X. Заменяя вложение $X \subseteq \mathbb{P}(V)$ на композицию этого вложения с вложением Веронезе достаточно высокой степени, можно считать, что конус $\widetilde{X}$ нормален.

Лемма 1.2. *Действие $G : \widetilde{X}$ имеет открытую орбиту.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$ и стабилизатор G_{x_0} совпадает с H. Рассмотрим ненулевой вектор $\tilde{x}_0$ на прямой x_0 в модуле V. Если его орбита не открыта в $\widetilde{X}$, то стабилизатор $\widetilde{H}$ точки $\tilde{x}_0$ есть подгруппа конечного индекса в H. Однородное пространство $G/\widetilde{H} \cong G\tilde{x}_0$ квазиаффинно. Тогда квазиаффинно и G/H [5, следствие 2.2], что противоречит эпиморфности H.

Пусть χ – характер подгруппы H такой, что $h \cdot \tilde{x}_0 = \chi(h)\tilde{x}_0$ для любого $h \in H$. Тогда стабилизатор $G_{\tilde{x}_0} = \widetilde{H}$ совпадает с $\mathrm{Ker}(\chi)$. Более того, орбита $G\tilde{x}_0$ в $\widetilde{X}$ является конической, и вложение $G/\widetilde{H} \hookrightarrow \widetilde{X}$, $g\widetilde{H} \to g \cdot \tilde{x}_0$ есть (нормальное) аффинное вложение $G/\widetilde{H}$ с малой границей. Отсюда следует, что алгебра $\mathcal{O}(G/\widetilde{H}) = \mathcal{O}(\widetilde{X})$ конечно порождена, значит, подгруппа $\widetilde{H} = \mathrm{Ker}(\chi)$ является подгруппой Гроссханса в G.

Обратно, пусть $\chi\colon H \to \mathbb{K}^\times$ – характер, ядро которого является подгруппой Гроссханса в G. В силу эпиморфности H факторгруппа $F := H/\mathrm{Ker}(\chi)$ изоморфна одномерному тору и ее G-эквивариантное действие на $G/\mathrm{Ker}(\chi)$ правыми сдвигами определяет положительную градуировку на алгебре $\mathcal{O}(G/\mathrm{Ker}(\chi))$. (Напомним, что $\mathbb{Z}$-градуировка $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ на $\mathbb{K}$-алгебре A называется *положительной*, если $A_0 = \mathbb{K}$ и $A_n = 0$ при $n < 0$.) Рассмотрим проективное G-многообразие $X := \mathrm{Proj}(\mathcal{O}(G/\mathrm{Ker}(\chi)))$, определяемое указанной градуировкой. Пусть

$$G/\mathrm{Ker}(\chi) \hookrightarrow Z := \mathrm{Spec}(\mathcal{O}(G/\mathrm{Ker}(\chi)))$$

– каноническое вложение пространства $G/\mathrm{Ker}(\chi)$ и O – G-неподвижная точка на многообразии Z, отвечающая максимальному идеалу положительных компонент $\bigoplus_{n>0} \mathcal{O}(G/\mathrm{Ker}(\chi))_n$ в $\mathcal{O}(G/\mathrm{Ker}(\chi))$. Имеется каноническое G-эквивариантное сюръективное отображение $p\colon Z \setminus \{O\} \to X$, слоями которого являются F-орбиты. Образом открытой орбиты в Z будет открытая орбита в X, которая изоморфна G/H. Более того, поскольку все F-орбиты на $Z \setminus \{O\}$ одномерны и границей в X является образ границы в Z, вложение $G/H \hookrightarrow X$ является (нормальным) проективным вложением с малой границей. Теорема доказана.

Замечание 1.3. Для упрощения изложения в работе группа G всюду предполагается связной. Однако ясно, что это ограничение не является существенным: проективные вложения $G/H \hookrightarrow X$ с малой границей находятся в естественном биективном соответствии с аналогичными вложениями для $G^0/(G^0 \cap H)$, поскольку условие нормальности исключает возможность пересечения различных неприводимых компонент проективного многообразия X.

Следствие 1.4. *Каждое проективное вложение $G/H \hookrightarrow X$ с малой границей может быть реализовано как $X = \mathrm{Proj}(\mathcal{O}(G/\mathrm{Ker}(\chi)))$ для некоторого характера χ подгруппы H.*

Будем обозначать вложение, отвечающее характеру χ, через $G/H \hookrightarrow X(\chi)$, или просто $X(\chi)$. В этом контексте возникают два вопроса:

(B1) можно ли “конструктивно” описать те характеры подгруппы H, которые приводят к проективным вложениям с малой границей?

(B2) когда характеры χ_1 и χ_2 определяют G-изоморфные вложения?

Ответ на вопрос (B1) мы начнем с формулировки критерия обозримости подгруппы $\mathrm{Ker}(\chi)$ в G. Рассмотрим более общую задачу. Пусть H – замкнутая подгруппа в G и $\mathbb{X}(H)$ – группа характеров H. Положим

$$H_1 := \bigcap_{\chi \in \mathbb{X}(H)} \mathrm{Ker}(\chi).$$

Эта подгруппа обозрима в G [6, предложение 3.13], факторгруппа H/H_1 диагонализуема и потому изоморфна прямому произведению тора T и конечной абелевой группы A. Рассмотрим промежуточную подгруппу: $H_1 \subseteq H' \subseteq H$.

Наша цель – выяснить, когда подгруппа H' обозрима и когда она эпиморфна в G. Поскольку интересующие нас свойства зависят только от связной компоненты единицы подгруппы H', мы можем считать, что образ $\phi(H')$ относительно проекции $\phi\colon H \to H/H_1$ есть подтор S в торе T. Такой подтор определяется примитивной подрешеткой $\mathrm{R}(S) \subseteq \mathbb{X}(T)$, $\mathrm{R}(S) := \{\chi \in \mathbb{X}(T)\colon \chi(s) = 1 \ \ \forall\, s \in S\}$.

Заметим, что тор T G-эквивариантно действует на однородном пространстве G/H_1 правыми сдвигами. Это действие определяет G-инвариантную градуировку

$$\mathcal{O}(G/H_1) = \bigoplus_{\mu\in\mathbb{X}(T)} \mathcal{O}(G/H_1)_\mu, \tag{1.1}$$

где $\mathcal{O}(G/H_1)_\mu := \{f \in \mathcal{O}(G/H_1)\colon f(ghH_1) = \mu(\phi(h))f(gH_1) \quad \forall\, g \in G, h \in \phi^{-1}(T)\}$.

Рассмотрим полугруппу $\mathbb{X}(G/H_1, T) := \{\mu \in \mathbb{X}(T)\colon \mathcal{O}(G/H_1)_\mu \neq 0\}$ и конус $C = C(G/H_1, T)$, который есть замыкание конуса, порожденного этой полугруппой в пространстве $\mathbb{X}(T)_\mathbb{Q} := \mathbb{X}(T) \bigotimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$. (Если полугруппа $\mathbb{X}(G/H_1, T)$ конечно порождена, то она порождает замкнутый полиэдральный конус.) Поскольку пространство G/H_1 квазиаффинно, действие T на $\mathcal{O}(G/H_1)$ эффективно и конус C имеет максимальную размерность в $\mathbb{X}(T)_\mathbb{Q}$. Пусть C° – внутренность конуса C.

Предложение 1.5. *Пусть* $H_1 \subseteq H' \subseteq H$ *и* $S = \phi(H')$. *Тогда*:

(i) $\mathcal{O}(G/H') = \bigoplus_{\mu\in\mathbb{X}(G/H_1,T)\cap\mathrm{R}(S)} \mathcal{O}(G/H_1)_\mu$;

(ii) *если* $C^\circ \cap \mathrm{R}(S) \neq \varnothing$, *то подгруппа* H' *обозрима в* G; *если* H_1 *– подгруппа Гроссханса в* G, *то верно и обратное*;

(iii) *подгруппа* H' *эпиморфна в* G *тогда и только тогда*, *когда* H *эпиморфна и* $\mathrm{R}(S) \cap \mathbb{X}(G/H_1, T) = \{0\}$.

Доказательство. Утверждение (i) следует из формулы (1.1) и равенства $\mathcal{O}(G/H') = \mathcal{O}(G/H_1)^S$.

Докажем утверждение (ii). Пусть $D \subseteq \mathcal{O}(G/H')$ – конечно порожденная $(G \times T/S)$-инвариантная подалгебра в $\mathcal{O}(G/H')$, для которой поля частных QD и $Q\mathcal{O}(G/H')$ совпадают. Тогда мы имеем аффинное вложение $G/H'' \hookrightarrow \mathrm{Spec}(D)$, где H'' – обозримая в G подгруппа, содержащая H'. Более того, подгруппа H' обозрима тогда и только тогда, когда $H' = H''$.

Пусть $B \subseteq \mathcal{O}(G/H_1)$ – конечно порожденная $(G \times T)$-инвариантная подалгебра, для которой поля частных QB и $Q\mathcal{O}(G/H_1)$ совпадают. Тогда имеется аффинное вложение $G/H_1 \hookrightarrow \mathrm{Spec}(B)$. Увеличивая B, мы можем считать, что $D \subset B$. Более того, поскольку алгебра инвариантов B^S конечно порождена, можно заменить D на B^S. Тогда вложению $D \subset B$ отвечает морфизм факторизации $p\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(D)$ по действию тора S. Поскольку все слои первой стрелки в $G/H_1 \to G/H' \to G/H''$ изоморфны S, для обоснования равенства $H' = H''$ достаточно показать, что типичный слой морфизма p есть одна S-орбита, или, эквивалентно, что конус, порожденный весовой полугруппой $\mathbb{X}(\mathrm{Spec}(B), S)$, совпадает с пространством $\mathbb{X}(S)_\mathbb{Q}$. Однако элементы полугруппы $\mathbb{X}(\mathrm{Spec}(B), S)$ есть образы элементов $\mathbb{X}(\mathrm{Spec}(B), T)$ при отображении $\mathbb{X}(T) \to \mathbb{X}(S)$ ограничения характеров на подтор. Условие $C^\circ \cap \mathrm{R}(S) \neq \varnothing$ означает, что ядро данного отображения $\mathrm{R}(S)$ пересекает внутренность конуса C, а значит, конус C проектируется на $\mathbb{X}(S)_\mathbb{Q}$ сюръективно.

Обратно, если H_1 является подгруппой Гроссханса, то можно положить $B = \mathcal{O}(G/H_1)$ и $G/H_1 \hookrightarrow \mathrm{Spec}(B)$ – каноническое вложение для G/H_1. Условие

$H' = H''$ показывает, что типичный слой морфизма p содержит S в качестве открытой орбиты. Если эта орбита является замкнутой, то мы вновь приходим к условию сюръективности проекции $C \to \mathbb{X}(S)_{\mathbb{Q}}$, или, эквивалентно, $C^{\circ} \cap \mathrm{R}(S) \neq \varnothing$. Если же открытая S-орбита в типичном слое p не замкнута, то в ее замыкании лежит S-орбита размерности $\dim S - 1$; G-разнесение последней есть G-орбита O в $\mathrm{Spec}(B)$, которую морфизм p сюръективно отображает на G/H''. Отсюда следует, что $\dim O = \dim G/H_1 - 1$. Получили противоречие с $\mathrm{codim}_{\mathrm{Spec}(B)}(\mathrm{Spec}(B) \setminus (G/H_1)) \geqslant 2$.

Для доказательства утверждения (iii) заметим, что H' эпиморфна в G тогда и только тогда, когда $\mathcal{O}(G/H_1)_0 = \mathbb{K}$ (эпиморфность H) и $\mathcal{O}(G/H') = \mathcal{O}(G/H_1)_0$. Последнее условие равносильно условию $\mathrm{R}(S) \cap \mathbb{X}(G/H_1, T) = \{0\}$. Предложение доказано.

Каждый характер $\mu \in \mathbb{X}(T)$ продолжается до характера группа H/H_1 (полагаем его равным 1 на A) и далее до характера $\chi \in \mathbb{X}(H)$. Обратно, каждый характер $\chi \in \mathbb{X}(H)$ тривиален на H_1, поэтому он определяет характер H/H_1 и характер $\mu \in \mathbb{X}(T)$. Поскольку связные компоненты единицы у ядер пропорциональных характеров совпадают, мы получаем

Следствие 1.6. *Пусть H – эпиморфная подгруппа в G, $\chi \in \mathbb{X}(H)$ и $\mu \in \mathbb{X}(T)$ – характер, отвечающий χ. Тогда*:

(i) *если $\mu \in C^{\circ}$, то подгруппа* $\mathrm{Ker}(\chi)$ *обозрима в G, а если H_1 – подгруппа Гроссханса, то верно и обратное*;

(ii) $\mathrm{Ker}(\chi)$ *эпиморфна в G тогда и только тогда, когда $m\mu \notin \mathbb{X}(G/H_1, T)$ для любого $m > 0$.*

Пример 1.7. Пусть G – связная редуктивная группа и $H = B = TB^u$ – борелевская подгруппа в G, где T – максимальный тор и B^u – максимальная унипотентная подгруппа в G. Тогда $H_1 = B^u$, $\mathbb{X}(G/H_1, T)$ – полугруппа доминантных весов и C совпадает с положительной камерой Вейля. В этом случае для $\chi \in \mathbb{X}(B)$ подгруппа $\mathrm{Ker}(\chi)$ обозрима в G тогда и только тогда, когда вес χ строго доминантен, и эпиморфна в G тогда и только тогда, когда χ не является доминантным.

Предположим теперь, что подгруппа $\mathrm{Ker}(\chi) \subseteq H$ обозрима в G. Вопрос о том, когда $\mathrm{Ker}(\chi)$ является подгруппой Гроссханса в G, представляется очень сложным. Классификация подгрупп Гроссханса непосредственно связана с 14-й проблемой Гильберта и далека от завершения. В частности, автору неизвестны ответы на следующие вопросы:

(В3) если характеры $\chi_1, \chi_2 \in \mathbb{X}(H)$ таковы, что $\mathrm{Ker}(\chi_1)$ и $\mathrm{Ker}(\chi_2)$ обозримы в G, может ли оказаться, что $\mathrm{Ker}(\chi_1)$ является подгруппой Гроссханса в G, а $\mathrm{Ker}(\chi_2)$ не является таковой?

(В4) если для некоторого $\chi \in \mathbb{X}(H)$ ядро $\mathrm{Ker}(\chi)$ является подгруппой Гроссханса в G, верно ли, что и H_1 является подгруппой Гроссханса в G?

(Заметим, что положительный ответ на вопрос (В4) влечет отрицательный ответ на вопрос (В3).)

В настоящее время известен ряд достаточных условий для того, чтобы подгруппа являлась подгруппой Гроссханса, а также некоторый набор примеров обозримых подгрупп, не являющихся подгруппами Гроссханса (см., например, [5]). Используя один из таких примеров, мы, следуя [3], приведем в следующем параграфе пример эпиморфной подгруппы H в полупростой группе G

такой, что для любого $\chi \in \mathbb{X}(H)$ подгруппа $\mathrm{Ker}(\chi)$ не является подгруппой Гроссханса.

В заключение приведем еще одно свойство проективных вложений с малой границей.

Предложение 1.8. *Пусть G – связная редуктивная группа и $G/H \hookrightarrow X$ – проективное вложение с малой границей. Тогда для любой точки $x \in X$ ее стабилизатор G_x содержится в собственной параболической подгруппе группы G.*

Доказательство. Если G_x не содержится в собственной параболической подгруппе, то согласно [12, теорема 4.1] точка x имеет G-инвариантную аффинную окрестность U в X. Тогда $G/H \subset U$ и, значит, пространство G/H квазиаффинно. Это противоречит эпиморфности подгруппы H.

Следствие 1.9. *Если G – связная редуктивная группа и $G/H \hookrightarrow X$ – проективное вложение с малой границей, то X не содержит G-неподвижных точек.*

Заметим, что условие редуктивности G здесь существенно: достаточно рассмотреть действие максимальной параболической подгруппы $P \subset \mathrm{SL}(3)$ на $\mathbb{P}^2$.

§ 2. Контрпример Нагаты–Стейнберга

Положим $G = \mathrm{SL}(2) \times \cdots \times \mathrm{SL}(2)$ (здесь 9 копий). Для того чтобы задать подгруппу H, зафиксируем различные числа $a_1, \ldots, a_9$ такие, что $\sum_{i=1}^{9} a_i \neq 0$. Определим подгруппу $H \subset G$ следующим образом:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} t & c_1 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} t & c_9 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \right\},$$

где $t \in \mathbb{K}^\times$, $c_1, \ldots, c_9 \in \mathbb{K}$ и $\sum_{i=1}^{9} c_i = 0$, $\sum_{i=1}^{9} a_i c_i = 0$, $\sum_{i=1}^{9} a_i^3 c_i = 0$.

Данная подгруппа есть полупрямое произведение одномерного тора и 6-мерной коммутативной унипотентной группы.

Лемма 2.1. *Подгруппа H эпиморфна в G.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда H содержится в некоторой собственной подгруппе F, которая обозрима в G [5, лемма 23.5]. Подгруппа $F \subset G$ обозрима тогда и только тогда, когда она либо редуктивна, либо содержится в стабилизаторе старшего вектора некоторого нетривиального простого G-модуля [5, лемма 7.7]. Единственной (с точностью до сопряженности) собственной связной редуктивной подгруппой в $\mathrm{SL}(2)$ является максимальный тор. Рассматривая подгруппы, проекции которых на каждую копию $\mathrm{SL}(2)$ сюръективны, нетрудно показать, что H не лежит ни в какой собственной редуктивной подгруппе группы G. Поэтому H должна стабилизировать старший вектор.

Каждый простой модуль группы G имеет вид $V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_9$, где V_i – простой d_i-мерный $\mathrm{SL}(2)$-модуль, и группа G действует на V покомпонентно. Пусть $v = v_1 \otimes \cdots \otimes v_9$ – стабилизируемый H старший вектор. Тогда прямая $\langle v_i \rangle$ сохраняется под действием стандартной борелевской подгруппы в $\mathrm{SL}(2)$, значит, v_i умножается на $t^{d_i - 1}$, и весь вектор v умножается на $t^{d_1 + \cdots + d_9 - 9}$. Однако $d_i \geqslant 1$ и как минимум одно $d_i > 1$. Получили противоречие с $H \subseteq G_v$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Для любого* $\chi \in \mathbb{X}(H)$ *подгруппа* $\mathrm{Ker}(\chi)$ *не является подгруппой Гроссханса в* G.

Доказательство. Рассмотрим характер $\chi_1 \in \mathbb{X}(H)$, $\chi_1(h) := t$. Тогда $\mathrm{Ker}(\chi_1)$ совпадает с унипотентным радикалом H^u подгруппы H. Если H^u – подгруппа Гроссханса, то для любого G-модуля V алгебра H^u-инвариантов $\mathcal{O}(V)^{H^u}$ конечно порождена [5, теорема 9.3]. Однако если рассмотреть G-модуль $V = \mathbb{K}^2 \oplus \dots \oplus \mathbb{K}^2$ (9 копий) с покомпонентным действием G, то алгебра $\mathcal{O}(V)^{H^u}$ не является конечно порожденной [13].

Рассмотрим произвольный характер $\chi_n(h) := t^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Алгебра $\mathcal{O}(G/H^u)$ есть целое замыкание алгебры $\mathcal{O}(G/\mathrm{Ker}(\chi_n))$ в поле частных $\mathbb{K}(G/H^u)$, которое является конечным расширением поля $\mathbb{K}(G/\mathrm{Ker}(\chi_n))$. Поэтому конечная порожденность алгебры $\mathcal{O}(G/\mathrm{Ker}(\chi_n))$ влекла бы конечную порожденность алгебры $\mathcal{O}(G/H^u)$. Противоречие.

Теорема 2.3. *Однородное пространство* G/H *не допускает вложений* $G/H \hookrightarrow X$ *с малой границей, где многообразие* X *полно.*

Доказательство. Из теоремы 1.1 и леммы 2.2 вытекает, что G/H не допускает проективных вложений с малой границей.

Для изучения произвольных пополнений $G/H \hookrightarrow X$ с малой границей мы заметим, что $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(G/H) = \mathbb{K}$ (лемма 2.1) и $\mathrm{Cl}(X) = \mathrm{Cl}(G/H)$, где $\mathrm{Cl}(X)$ – группа классов дивизоров многообразия X. Известно, что если G – связная односвязная полупростая алгебраическая группа и H – замкнутая подгруппа в G, то $\mathrm{Cl}(G/H) \cong \mathbb{X}(H)$ [14, теорема 4]. Следовательно, в нашем случае $\mathrm{Cl}(X) \cong \mathbb{Z}$.

Теперь нам понадобится следующее

Предложение 2.4. *Пусть* X *– нормальное многообразие с* $\mathcal{O}(X) = \mathbb{K}$ *и* $\mathrm{Cl}(X) \cong \mathbb{Z}$. *Тогда* X *квазипроективно.*

Доказательство. Пусть $X = \bigcup_i U_i$ – аффинное покрытие X. Дополнение $X \setminus U_i$ есть объединение конечного числа простых дивизоров $D_{i1} \cup \dots \cup D_{ik_i}$. Рассмотрим дивизор D, класс $[D]$ которого свободно порождает $\mathrm{Cl}(X)$. Тогда $[D(i)] = s_i[D]$ для некоторых целых s_i, где $D(i) := D_{i1} + \dots + D_{ik_i}$. Все числа s_i имеют одинаковый знак. В самом деле, если, например, $s_1 \leqslant 0$, $s_2 \geqslant 0$, то $s_2 D(1) - s_1 D(2)$ – главный эффективный дивизор. Условие $\mathcal{O}(X) = \mathbb{K}$ влечет равенство $s_2 D(1) - s_1 D(2) = 0$, откуда $X \setminus U_1 = \varnothing$ и X аффинно. Противоречие.

Тем самым, можно считать, что все $s_i > 0$. Заменяя дивизоры $D(i)$ на кратные, можно также предполагать, что все они линейно эквивалентны. Поскольку дополнения к носителям дивизоров $D(i)$ образуют аффинное покрытие X, каждый из $D(i)$ обилен.

Итак, если $G/H \hookrightarrow X$ – пополнение с малой границей, то многообразие X квазипроективно и полно. Следовательно, X проективно, чего быть не может. Теорема доказана.

§ 3. Классификация проективных вложений с малой границей

Настоящий параграф посвящен комбинаторной классификации проективных вложений с малой границей для данного пространства G/H в предположении, что H_1 есть подгруппа Гроссханса в G. Поскольку для любого характера

$\chi \in \mathbb{X}(H)$ алгебра $\mathcal{O}(G/\operatorname{Ker}(\chi))$ есть подалгебра в $\mathcal{O}(G/H_1)$, состоящая из функций, инвариантных относительно квазитора $\operatorname{Ker}(\chi)/H_1$, конечная порожденность $\mathcal{O}(G/H_1)$ влечет конечную порожденность $\mathcal{O}(G/\operatorname{Ker}(\chi))$. Тем самым, характер χ определяет проективное вложение G/H с малой границей тогда и только тогда, когда подгруппа $\operatorname{Ker}(\chi)$ обозрима в G.

Рассмотрим аффинное G-многообразие $Z := \operatorname{Spec}(\mathcal{O}(G/H_1))$. Напомним, что факторгруппа H/H_1 изоморфна прямому произведению $T \times A$, где T – тор, A – конечная абелева группа. Поскольку мы интересуемся теми характерами $\chi \in \mathbb{X}(H)$, которые определяют проективные вложения G/H с малой границей, и характеры χ и $n\chi$ определяют изоморфные вложения, мы будем рассматривать только те характеры H, которые тривиальны на A, и отождествлять их с характерами T. Группа T G-эквивариантно действует на G/H_1, а следовательно, на $\mathcal{O}(G/H_1)$ и Z. Пусть $f_1, \ldots, f_m$ – система порождающих алгебры $\mathcal{O}(Z)$, состоящая из T-полуинвариантных функций, т. е. $t \cdot f_i = \mu_i(t) f_i$ для некоторых $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{X}(T)$. Рассмотрим полугруппу $\mathbb{X}(Z, T) = \mathbb{X}(G/H_1, T)$, состоящую из тех весов μ, для которых весовая компонента $\mathcal{O}(Z)_\mu$ отлична от нуля. Пусть $C = C(G/H_1, T)$ – конус, порожденный этой полугруппой. Ясно, что полугруппа $\mathbb{X}(Z, T)$ порождена весами $\mu_1, \ldots, \mu_m$ и C – выпуклый полиэдральный конус максимальной размерности в $\mathbb{X}(T)_{\mathbb{Q}}$.

Наша цель – реализовать проективные вложения G/H с малой границей как GIT-факторы, отвечающие различным T-линеаризациям тривиального линейного расслоения на аффинном многообразии Z. Для этого нам потребуются некоторые сведения из [15, § 2]. Каждой точке $z \in Z$ мы сопоставим *орбитную полугруппу*, т. е. полугруппу тех весов $\mu \in \mathbb{X}(Z, T)$, для которых найдется полуинвариант $f \in \mathcal{O}(Z)_\mu$ такой, что $f(z) \neq 0$. Будем называть *орбитным конусом точки* z конус $\omega(z) \subseteq \mathbb{X}(T)_{\mathbb{Q}}$, порожденный ее орбитной полугруппой. Нетрудно проверить, что конус $\omega(z)$ порождается теми μ_i, для которых $f_i(z) \neq 0$. В частности, число орбитных конусов конечно. С каждой точкой $\chi \in C \cap \mathbb{X}(T)$ свяжем так называемый GIT-*конус* $\sigma(\chi)$:

$$\sigma(\chi) := \bigcap_{z \in Z,\, \chi \in \omega(z)} \omega(z).$$

Напомним, что конечный набор Σ выпуклых полиэдральных конусов в конечномерном рациональном векторном пространстве V называется *веером*, если:

(i) грань любого элемента из Σ лежит в Σ;

(ii) пересечение любых двух элементов из Σ есть грань каждого из них.

(Иногда в определении веера требуют, чтобы все входящие в него конусы были острыми. Мы не налагаем это требование. В интересующей нас ниже ситуации оно будет выполнено автоматически.) *Носителем* веера Σ называется множество точек $v \in V$, содержащихся в хотя бы одном конусе из Σ.

Предложение 3.1 [15, теорема 2.11]. *Набор* GIT-*конусов* $\Sigma(Z) := \{\sigma(\chi) \colon \chi \in C \cap \mathbb{X}(T)\}$ *является веером с носителем* C.

Веер $\Sigma(Z)$ называется GIT-*веером* аффинного T-многообразия Z. Такой веер может быть эффективно вычислен. Например, если алгебра $\mathcal{O}(Z)$ задана образующими и соотношениями, алгоритм нахождения $\Sigma(Z)$ можно найти в [16, пример 1.3].

С каждым характером $\chi \in \mathbb{X}(T)$ связана T-линеаризация тривиального линейного расслоения над Z

$$T \times (Z \times \mathbb{K}) \to Z \times \mathbb{K}, \qquad (t, z, a) \to (t \cdot z, \chi(t)a),$$

а также множество полустабильных точек такой линеаризации

$$Z^{ss}(\chi) := \{z \in Z \colon f(z) \neq 0 \quad \text{для некоторого} \quad f \in \mathcal{O}(Z)_{s\chi},\ s > 0\}.$$

Ясно, что множество $Z^{ss}(\chi)$ открыто и $(G \times T)$-инвариантно в Z. Более того, известная конструкция Мамфорда позволяет построить категорный фактор $\pi \colon Z^{ss}(\chi) \to Z^{ss}(\chi)/\!/T$ для T-действия на $Z^{ss}(\chi)$, где

$$Z^{ss}(\chi)/\!/T = \operatorname{Proj}\biggl(\bigoplus_{s \geqslant 0} \mathcal{O}(Z)_{s\chi}\biggr).$$

Тем самым, если характер χ определяет проективное вложение $G/H \hookrightarrow X(\chi)$, то $X(\chi)$ G-изоморфно фактору $Z^{ss}(\chi)/\!/T$.

Далее, два характера χ_1 и χ_2 называют GIT-*эквивалентными*, если соответствующие им множества полустабильных точек $Z^{ss}(\chi_1)$ и $Z^{ss}(\chi_2)$ совпадают.

Предложение 3.2 [15, предложение 2.9]. *Характеры χ_1 и χ_2 GIT-эквивалентны тогда и только тогда, когда $\sigma(\chi_1) = \sigma(\chi_2)$.*

В частности, число классов GIT-эквивалентности конечно. Совпадение подмножеств $Z^{ss}(\chi_1)$ и $Z^{ss}(\chi_2)$ влечет канонический G-эквивариантный изоморфизм факторов: $Z^{ss}(\chi_1)/\!/T \cong Z^{ss}(\chi_2)/\!/T$. Итак, доказана

Теорема 3.3. *Предположим, что H_1 – подгруппа Гроссханса в G. Тогда*:

(i) *характер χ определяет проективное вложение $G/H \hookrightarrow X(\chi)$ с малой границей, если и только если $\chi \in C^{\circ}$*;

(ii) *если $\sigma(\chi_1) = \sigma(\chi_2)$, то вложения $X(\chi_1)$ и $X(\chi_2)$ G-эквивариантно изоморфны.*

В частности, число классов изоморфизма проективных вложений G/H с малой границей конечно.

Тем самым получен частичный ответ на вопрос (B2). В следующем параграфе мы покажем, что результаты работы [6] дают исчерпывающий ответ на этот вопрос при некоторых дополнительных ограничениях, налагаемых на пару (G, H).

§ 4. Геометрия вложений с малой границей

Как известно, каждая связная аффинная алгебраическая группа G есть полупрямое произведение связной редуктивной подгруппы L (называемой *подгруппой Леви*) и унипотентного радикала G^u. В свою очередь, L есть произведение $R \cdot S$ центрального тора R и полупростой подгруппы S. Рассмотрим нормальную подгруппу $\widehat{G} := S \cdot G^u$. Пусть H – эпиморфная подгруппа в G.

Лемма 4.1. *Действие $\widehat{G} \colon G/H$ левыми сдвигами транзитивно.*

Доказательство. Покажем, что $\widehat{G}H = G$. Рассмотрим проекцию $\psi \colon G \to G/\widehat{G}$ на тор $G/\widehat{G}$. Если $\psi(H) \neq G/\widehat{G}$, то имеется нетривиальный характер ξ

группы G, ограничение которого на H тривиально. Тогда ξ определяет непостоянную регулярную функцию на G/H. Получили противоречие с эпиморфностью H.

Далее мы предполагаем, что $G = \widehat{G}$, или, эквивалентно, $\mathbb{X}(G) = 0$. Лемма 4.1 служит частичной компенсацией такому ограничению. Более того, мы будем предполагать, что группа классов $\mathrm{Cl}(G)$ тривиальна. Этого всегда можно добиться, заменяя G ее конечнолистным накрытием [17, предложение 4.6].

Определение 4.2. Подгруппа $H \subset G$ называется *расширением Гроссханса*, если H связна и $H_1 = \bigcap_{\chi\in\mathbb{X}(H)} \mathrm{Ker}(\chi)$ является подгруппой Гроссханса в G.

Если H – расширение Гроссханса в G, то H/H_1 совпадает с тором T. При наложенных ограничениях алгебра $\mathcal{O}(G/H_1)$ конечно порождена и факториальна. В самом деле, условие $\mathrm{Cl}(G) = 0$ равносильно факториальности алгебры $\mathcal{O}(G)$, связность H влечет связность H_1 и условие $\mathbb{X}(H_1) = 0$ [6, предложение 3.13], откуда следует факториальность алгебры $\mathcal{O}(G)^{H_1} \cong \mathcal{O}(G/H_1)$ [11, теорема 3.17].

Ниже мы, следуя [9], кратко опишем обобщение известной конструкции Д. Кокса из торической геометрии, доставляющее реализацию широкого класса нормальных многообразий X в качестве категорных факторов для действия так называемого тора Нерона–Севери T на открытом подмножестве $\widehat{X}$ аффинного факториального многообразия $\overline{X}$. Пусть X – неприводимое нормальное многообразие со свободной конечно порожденной группой классов дивизоров $\mathrm{Cl}(X) \cong \mathbb{Z}^k$. Зафиксируем подгруппу K в группе дивизоров Вейля $\mathrm{WDiv}(X)$, которая при естественной проекции $\mathrm{WDiv}(X) \to \mathrm{Cl}(X)$ изоморфно отображается на $\mathrm{Cl}(X)$. Рассмотрим градуированный пучок $\mathcal{O}_X$-алгебр на X:

$$\mathcal{R}_X = \bigoplus_{D\in K} \mathcal{O}(D), \qquad \text{где} \qquad \mathcal{O}(D,U) = \{f \in \mathbb{K}(X)\colon\ \mathrm{div}(f) + D\big|_U \geqslant 0\}.$$

Алгебра глобальных сечений этого пучка $R(X) = \Gamma(\mathcal{R}_X, X)$ факториальна [18], [19] и называется *тотальным координатным кольцом*, или *кольцом Кокса*, многообразия X.

Каждый однородный элемент $f \in R(X)$ степени $D \in K$ определяет подмногообразие $Z(f) \subset X$, которое является носителем дивизора $\mathrm{div}(f) + D$. Предположим, что кольцо $R(X)$ конечно порождено. Тогда ему отвечает аффинное факториальное многообразия $\overline{X} := \mathrm{Spec}(R(X))$. Рассмотрим открытое подмножество

$$\widehat{X} := \bigcup_{f\in F(X)} \overline{X}_f \subset \overline{X},$$

где $F(X)$ – совокупность однородных элементов кольца $R(X)$, для которых открытое подмножество $X \setminus Z(f)$ аффинно. Можно показать, что $\widehat{X}$ естественно изоморфно относительному спектру пучка $\mathcal{R}_X$ над многообразием X. В частности, этот относительный спектр квазиаффинен. *Тором Нерона–Севери* для многообразия X называют алгебраический тор T, группа характеров которого отождествлена с решеткой K; K-градуировки пучка $\mathcal{R}_X$ и кольца $R(X)$ определяют действия тора T на многообразиях $\widehat{X}$ и $\overline{X}$. Ясно, что открытое вложение $\widehat{X} \subset \overline{X}$ является T-эквивариантным. Многообразие $\widehat{X}$ допускает категорный фактор $\pi\colon \widehat{X} \to X$ по действию тора T.

В случае $X_0 = G/H$ кольцо Кокса $R(X_0)$ совпадает с кольцом $\mathcal{O}(G/H_1)$ (см. [6, § 3]) и условие его конечной порожденности равносильно тому, что H_1 – подгруппа Гроссханса в G. Многообразие $\overline{X}_0$ есть $Z = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}(G/H_1))$, а в качестве π выступает морфизм факторизации $G/H_1 \to G/H$ по правому действию тора $T = H/H_1$ на G/H_1. Для произвольного вложения $G/H \hookrightarrow X$ с малой границей многообразие $\overline{X}$ по-прежнему совпадает с Z, тогда как $\widehat{X}$ есть открытое G-инвариантное подмножество в Z (в частности, оно содержит открытую орбиту G/H_1), однозначно определяющее X.

Напомним, что *G-эквивариантным морфизмом* из вложения $G/H \hookrightarrow X_1$ во вложение $G/H \hookrightarrow X_2$ называется G-эквивариантный морфизм $\phi\colon X_1 \to X_2$, индуцирующий тождественное отображение открытых орбит. Ясно, что между двумя вложениями может быть не более одного эквивариантного морфизма. В [6, предложение 2.4] мы показали, что эквивариантный морфизм $\phi\colon X_1 \to X_2$ между вложениями отвечает вложению открытых подмножеств $\widehat{X}_1 \subseteq \widehat{X}_2$ многообразия Z. Отсюда вытекает

Теорема 4.3 [6, теорема 3.10]. *Пусть G – связная аффинная алгебраическая группа такая, что $\mathbb{X}(G) = 0$ и $\mathrm{Cl}(G) = 0$, и H – эпиморфная подгруппа в G, являющаяся расширением Гроссханса. Тогда*:

(i) *вложения $G/H \hookrightarrow X(\chi_1)$ и $G/H \hookrightarrow X(\chi_2)$ G-эквивариантно изоморфны, если и только если $\sigma(\chi_1) = \sigma(\chi_2)$*;

(ii) *наличие эквивариантного морфизма $X(\chi_1) \to X(\chi_2)$ равносильно тому, что конус $\sigma(\chi_2)$ является гранью конуса $\sigma(\chi_1)$.*

Теория колец со связками [9] позволяет описывать геометрические свойства нормальных многообразий со свободной конечно порожденной группой классов и конечно порожденным тотальным координатным кольцом при использовании обобщенной конструкции Кокса. В этом параграфе мы не будем излагать теорию колец со связками, но лишь сформулируем результаты этой теории применительно к проективным вложениям с малой границей. Сведения, необходимые для установления соответствия результатов, можно найти в [6, § 5].

Пусть G – связная аффинная алгебраическая группа такая, что $\mathbb{X}(G) = 0$ и $\mathrm{Cl}(G) = 0$, и H – эпиморфная подгруппа в G, являющаяся расширением Гроссханса. Поскольку GIT-веер $\Sigma(Z)$ однозначно определяется парой (G, H), нам будет удобно обозначать его $\Sigma(G/H)$. Следуя изложенному в § 3, будем обозначать через $f_1, \ldots, f_m$ систему простых попарно неассоциированных образующих алгебры $\mathcal{O}(G/H_1)$, которые полуинвариантны относительно правого действия $T = H/H_1$ с весами $\mu_1, \ldots, \mu_m$ соответственно. Обозначим через E решетку с базисом $e_1, \ldots, e_m$ и через $Q\colon E \to \mathbb{X}(T)$ проекцию, отправляющую e_i в μ_i. Через Q будем также обозначать соответствующую проекцию рациональных векторных пространств $E_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{X}(T)_{\mathbb{Q}}$. Пусть $\gamma := \mathrm{cone}(e_1, \ldots, e_m)$ – конус в $E_{\mathbb{Q}}$, порожденный $e_1, \ldots, e_m$. Для каждого характера $\chi \in \mathbb{X}(T) \cap \mathrm{cone}(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ обозначим через $\mathrm{cov}(\chi)$ совокупность граней γ_0 конуса γ таких, что $Q(\gamma_0)$ является орбитным конусом некоторой точки $z \in Z = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}(G/H_1))$, $\chi \in Q(\gamma_0)^\circ$, и γ_0 не является гранью никакой другой грани конуса γ, удовлетворяющей указанным свойствам. Через $\mathrm{lin}(\gamma_0)$ обозначим линейную оболочку грани γ_0 в пространстве $E_{\mathbb{Q}}$.

По построению группа классов многообразия $X(\chi)$ (совпадающая с $\mathrm{Cl}(G/H)$) отождествлена с решеткой $\mathbb{X}(T)$, порожденной $\mu_1, \ldots, \mu_m$. Следующее предложение описывает группу Пикара $\mathrm{Pic}(X(\chi))$ как подрешетку в $\mathbb{X}(T)$.

Предложение 4.4 [9, предложение 7.1]. *Имеет место равенство*

$$\operatorname{Pic}(X(\chi)) = \bigcap_{\gamma_0 \in \operatorname{cov}(\chi)} Q(\operatorname{lin}(\gamma_0) \cap E).$$

Напомним, что нормальное многообразие X называется *локально факториальным*, если $\operatorname{Cl}(X) = \operatorname{Pic}(X)$, и $\mathbb{Q}$-*факториальным*, если для каждого дивизора Вейля на X некоторая его кратность является дивизором Картье.

Следствие 4.5. *Справедливы следующие утверждения*:

(i) *многообразие* $X(\chi)$ *локально факториально тогда и только тогда, когда* $Q(\gamma_0 \cap E)$ *порождает решетку* $\mathbb{X}(T)$ *для каждого элемента* $\gamma_0 \in \operatorname{cov}(\chi)$;

(ii) *многообразие* $X(\chi)$ *является* $\mathbb{Q}$-*факториальным тогда и только тогда, когда* GIT-*конус* $\sigma(\chi)$ *имеет максимальную размерность в* $\mathbb{X}(T)_{\mathbb{Q}}$.

Замечание 4.6. Если многообразие $\widehat{X(\chi)}$ является гладким, то согласно [9, предложение 5.6] локальная факториальность многообразия $X(\chi)$ равносильна его гладкости.

Обозначим через $\operatorname{Eff}(X)$, $\operatorname{SAmple}(X)$ и $\operatorname{Ample}(X)$ конусы, порожденные классами дивизоров, обладающими эффективным представителем, не имеющими базисных точек и обильными соответственно.

Предложение 4.7 [9, предложение 7.2, теорема 7.3]. *Имеем*

$$\operatorname{Eff}(X(\chi)) = \operatorname{cone}(\mu_1, \dots, \mu_m), \quad \operatorname{SAmple}(X(\chi)) = \sigma(\chi), \quad \operatorname{Ample}(X(\chi)) = \sigma(\chi)^{\circ}.$$

Напомним, что кольцо $R(G/H) = \mathcal{O}(G/H_1)$ несет G-эквивариантное действие тора T и поэтому является $\mathbb{X}(T)$-градуированным. Предположим, что идеал соотношений между элементами $f_1, \dots, f_m$ в кольце $\mathcal{O}(G/H_1)$ порождается $\mathbb{X}(T)$-однородными многочленами $g_1, \dots, g_d$, причем $d = m - \dim T - \dim X$. Тогда результаты из [9, § 8] позволяют вычислить канонический класс D_c многообразия $X(\chi)$.

Предложение 4.8. *Имеем* $D_c = \sum_{i=1}^{d} \deg(g_i) - \sum_{j=1}^{m} \mu_j$.

§ 5. Примеры

Всюду в этом параграфе G – связная односвязная полупростая группа.

Пример 5.1. Покажем, что веер $\Sigma(G/H)$ может иметь весьма сложную комбинаторную структуру. Пусть $\chi_1, \dots, \chi_s$ – произвольный набор ненулевых векторов в некоторой решетке M, содержащий базис этой решетки и порождающий острый конус C в $M_{\mathbb{Q}}$. Рассмотрим набор конусов Ω, порожденных всевозможными подмножествами множества $\{\chi_1, \dots, \chi_s\}$. Для каждой точки $\chi \in C \cap M$ определим конус

$$\sigma(\chi) := \bigcap_{\omega \in \Omega,\, \chi \in \omega} \omega.$$

Из предложения 3.1 следует, что набор конусов

$$\Sigma(\chi_1, \dots, \chi_s) := \{\sigma(\chi) \colon \chi \in C \cap M\}$$

есть веер с носителем C. Покажем, что этот веер совпадает с GIT-веером $\Sigma(G/H)$ для некоторого однородного пространства G/H.

Рассмотрим решетку N с базисом $e_1, \ldots, e_s$ и сюръективный гомоморфизм $\phi\colon N \to M$, определенный на базисе формулой $e_i \to \chi_i$. Если отождествить решетки M и N с решетками характеров торов T и S соответственно, то гомоморфизм ϕ определяет реализацию T как подтора в S.

Пусть $S \subset B = SB^u$ – максимальный тор и подгруппа Бореля в G. Будем считать, что характеры $e_1, \ldots, e_s$ отождествлены с фундаментальными весами тора S. Подгруппа $H := TB^u$ является эпиморфной в G, и соответствующая ей подгруппа H_1 совпадает с B^u. Используя описание канонического вложения $G/B^u \hookrightarrow Z$ [5, теорема 5.4], нетрудно показать, что любой конус $\omega \in \Omega$ реализуется как орбитный конус для T-многообразия Z [6, предложение 4.4]. Отсюда следует, что $\Sigma(G/H) = \Sigma(\chi_1, \ldots, \chi_s)$.

Пример 5.2. Пусть $\mathfrak{g}$ – касательная алгебра группы G и $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$ – нульконус ее присоединенного представления. Известно, что $\mathfrak{n}$ неприводим, нормален, содержит конечное число G-орбит и все эти орбиты имеют четную размерность [20]. В частности, дополнение к открытой орбите $Ge \subset \mathfrak{n}$ имеет коразмерность не меньше 2, и связная компонента единицы G_e^0 стабилизатора G_e есть (унипотентная) подгруппа Гроссханса в G. Пусть $H := G_{\langle e\rangle}$ – стабилизатор прямой $\langle e\rangle$. Тогда H^0 – расширение Гроссханса подгруппы $H_1 = G_e^0$ посредством одномерного тора. Например, при $G = \mathrm{SL}(4)$ мы получаем

$$H^0 = \left\{ \begin{pmatrix} t^3 & a & b & c \\ 0 & t & a & b \\ 0 & 0 & t^{-1} & a \\ 0 & 0 & 0 & t^{-3} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{K}^\times,\ a, b, c \in \mathbb{K} \right\}.$$

Проективизация $\mathbb{P}(\mathfrak{n})$ конуса $\mathfrak{n}$ определяет проективное вложение $G/H \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathfrak{n})$ с малой границей. Более того, поскольку ранг группы характеров подгруппы H равен единице, это единственное вложение G/H с указанными свойствами.

Пример 5.3. В случае $G = \mathrm{SL}(2)$ подгруппа Бореля B является единственной собственной эпиморфной подгруппой, однородное пространство $G/B \cong \mathbb{P}^1$ проективно и не допускает нетривиальных вложений.

Рассмотрим случай $G = \mathrm{SL}(3)$ и связной подгруппы H. Здесь имеются три проективных однородных пространства: G/B, $G/P_1 \cong \mathbb{P}(\mathbb{K}^3)$ и $G/P_2 \cong \mathbb{P}((\mathbb{K}^3)^*)$, где P_1 и P_2 – максимальные параболические подгруппы в G. В случае диагональных действий $G : \mathbb{P}(\mathbb{K}^3) \times \mathbb{P}(\mathbb{K}^3)$ и $G : \mathbb{P}((\mathbb{K}^3)^*) \times \mathbb{P}((\mathbb{K}^3)^*)$ открытая орбита имеет дополнение коразмерности 2. Этим исчерпываются проективные вложения $G/H \hookrightarrow X$ с малой границей, где H – подгруппа ранга 2. Предположим, что ранг H равен 1. В силу эпиморфности имеем $\dim H \geqslant 3$ [7]. Также H не содержит нетривиальных полупростых подгрупп, иначе условие, налагаемое на ранг, влекло бы $\mathbb{X}(H) = 0$, что противоречит эпиморфности. Итак, подгруппа H разрешима. Если H регулярна, т. е. нормализуется максимальным тором в G, то возможны три типа подгрупп.

Подгруппа типа 1 имеет вид

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} t^p & a & b \\ 0 & t^q & c \\ 0 & 0 & t^{-p-q} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{K}^\times,\ a, b, c \in \mathbb{K},\ p > 0,\ p + q > 0,\ (p, p + q) = 1 \right\}.$$

Здесь $H_1 = B^u$ и

$$\begin{aligned} Z = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}(G/B^u)) &= \{(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \colon x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0\} \\ &\subset \mathbb{K}^3 \oplus (\mathbb{K}^3)^*. \end{aligned}$$

Получаем 2-параметрическое семейство проективных вложений с малой границей, а именно $X_{p,q} = (Z \setminus \{0\})//\mathbb{K}^\times$, где

$$t \cdot (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (t^p x_1, t^p x_2, t^p x_3, t^{p+q} y_1, t^{p+q} y_2, t^{p+q} y_3).$$

Для каждого из них группа классов имеет ранг один, а группа Пикара образует в ней подгруппу индекса $p(p+q)$.

В данном примере многообразие Z является гиперповерхностью. Веса образующих равны $p, p, p, p+q, p+q, p+q$, а вес соотношения равен $2p+q$. Применяя предложение 4.8, мы находим канонический класс для многообразия $X_{p,q}$:

$$D_c = 2p + q - 6p - 3q = -4p - 2q.$$

Подгруппа типа 2 имеет вид

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} t^p & 0 & b \\ 0 & t^q & c \\ 0 & 0 & t^{-p-q} \end{pmatrix} \colon t \in \mathbb{K}^\times,\ b, c \in \mathbb{K},\ p, q > 0,\ (p, q) = 1 \right\}.$$

Здесь также имеем 2-параметрическое семейство вложений, отвечающих

$$X'_{p,q} = ((\mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K}^3) \setminus (0, 0))//\mathbb{K}^\times$$

относительно действия

$$t \cdot (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}) = (t^p x_{11}, t^p x_{12}, t^p x_{13}, t^q x_{21}, t^q x_{22}, t^q x_{23}).$$

Подгруппа типа 3 имеет вид

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} t^p & a & b \\ 0 & t^q & 0 \\ 0 & 0 & t^{-p-q} \end{pmatrix} \colon t \in \mathbb{K}^\times,\ a, b \in \mathbb{K},\ p, q > 0,\ (p, q) = 1 \right\}.$$

Соответствующие вложения получаются из вложений типа 2 переходом к двойственному модулю $(\mathbb{K}^3)^*$.

Отметим, что пространства вложений, отвечающие типам 2 и 3, являются торическими многообразиями. Стандартная процедура позволяет построить отвечающие им веера.

Наконец, имеется ровно одна (с точностью до сопряженности) нерегулярная эпиморфная подгруппа:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} t & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \colon t \in \mathbb{K}^\times,\ a, b \in \mathbb{K} \right\},$$

которая также соответствует проективному вложению $G/H \hookrightarrow X$ с малой границей. Это вложение 3-листно накрывает вложение из примера 5.2.

Итак, в случае $G = \mathrm{SL}(3)$ каждое однородное пространство G/H, где группа H эпиморфна, допускает ровно одно проективное вложение с малой границей и размерности таких вложений принимают значения 3, 4 и 5.

Пример 5.4. Приведем пример регулярной эпиморфной подгруппы H максимального ранга в $G = \mathrm{SL}(4)$ такой, что G/H допускает более одного проективного вложения с малой границей. Положим

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & 0 & a & b \\ 0 & t_2 & c & d \\ 0 & 0 & t_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_4 \end{pmatrix} : t_1t_2t_3t_4 = 1,\ a, b, c, d \in \mathbb{K} \right\}.$$

Поскольку подгруппа H содержит максимальный тор группы G, подгруппа H эпиморфна тогда и только тогда, когда она не содержится ни в какой собственной редуктивной подгруппе группы G [5, лемма 23.5]. Заметим, что H^u совпадает с унипотентным радикалом P^u, где P – параболическая подгруппа в G. Известно, что в простых группах унипотентный радикал параболической подгруппы не лежит в собственных редуктивных подгруппах [21, предложение 7], что доказывает эпиморфность H. С другой стороны, H_1 также совпадает с P^u, а такая подгруппа является подгруппой Гроссханса [5, теорема 16.4].

Для вычисления веера $\Sigma(G/H)$ нам нужна информация о многообразии $Z = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}(G/P^u))$. Такие многообразия изучались в работе [22]. Применительно к данной ситуации в работе [22, теорема 3.2] получена явная реализация многообразия Z. Пусть e_1, e_2, e_3, e_4 – стандартный базис в $\mathbb{K}^4$ и

$$V_1 = \mathrm{Hom}(\langle e_1, e_2\rangle, \mathbb{K}^4), \qquad V_2 = \mathrm{Hom}\left(\langle e_1 \wedge e_2\rangle, \bigwedge^2 \mathbb{K}^4\right),$$
$$V_3 = \mathrm{Hom}\left(\langle e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_4\rangle, \bigwedge^3 \mathbb{K}^4\right)$$

– пространства линейных отображений векторных пространств, рассматриваемые как G-модули относительно действия на образе отображения. Рассмотрим $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ как G-модуль с диагональным действием и точку $x = (i_1, i_2, i_3) \in V$, где i_j – тождественное вложение соответствующего подпространства. Тогда $Z = \overline{Gx}$. Действие тора T, коммутирующее с G-действием, происходит из действия на аргумент линейного отображения. Полугруппа весов такого действия порождается весами

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2,\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4,$$

где $\varepsilon_i((t_1, t_2, t_3, t_4)) = t_i$. Соотношение $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 0$ влечет $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_4)$. Следующая диаграмма характеризует расположение базисных весов:

$$\begin{tikzcd}
 & \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \arrow[d, dash] & \\
\varepsilon_1 \arrow[r, dash] & \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \varepsilon_2 \\
 & \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4 &
\end{tikzcd}$$

Мы утверждаем, что каждый конус, порожденный подмножеством множества $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3, \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_4\}$, является орбитным конусом для действия T

на Z. Это утверждение легко проверить непосредственно. Например, конус, порожденный $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, есть орбитный конус точки

$$y = \big((e_1 \to e_1, e_2 \to e_1), (e_1 \wedge e_2 \to 0), (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \to e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 \to 0)\big).$$

Тем самым, веер $\Sigma(G/H)$ содержит 18 конусов, 9 из которых пересекают внутренность конуса C. Согласно теореме 4.3 для пространства G/H имеется 9 проективных вложений с малой границей и диаграмма эквивариантных морфизмов между ними имеет следующий вид:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 5 \arrow[d] & 2 \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl] \\
7 \arrow[r] & 9 & 8 \arrow[l] \\
3 \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur] & 6 \arrow[u] & 4 \arrow[l] \arrow[u] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Вложения, отвечающие конусам 1, 2, 3 и 4, и только они являются $\mathbb{Q}$-факториальными (и даже локально факториальными); см. следствие 4.5.

Список литературы

1. D. Luna, Th. Vust, "Plongements d'espaces homogènes", *Comment. Math. Helv.*, **58**:1 (1983), 186–245.
2. I. V. Arzhantsev, "Affine embeddings of homogeneous spaces", *Surveys in geometry and number theory*: *reports on contemporary Russian mathematics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **338**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, 5–55.
3. F. Bien, A. Borel, "Sous-groupes épimorphiques de groupes linéaires algébriques. II", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **315**:13 (1992), 1341–1346.
4. F. Bien, A. Borel, J. Kollár, "Rationally connected homogeneous spaces", *Invent. Math.*, **124**:1–3 (1996), 103–127.
5. F. D. Grosshans, *Algebraic homogeneous spaces and invariant theory*, Lecture Notes in Math., **1673**, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
6. I. V. Arzhantsev, J. Hausen, "On embeddings of homogeneous spaces with small boundary", *J. Algebra*, **304**:2 (2006), 950–988.
7. F. Bien, "Orbits, multiplicities and differential operators", *Representation theory of groups and algebras*, Contemp. Math., **145**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, 199–227.
8. F. Bien, A. Borel, "Sous-groupes épimorphiques de groupes linéaires algébriques. I", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **315**:6 (1992), 649–653.
9. F. Berchtold, J. Hausen, "Cox rings and combinatorics", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **359**:3 (2007), 1205–1252.
10. Y. Hu, S. Keel, "Mori dream spaces and GIT", *Michigan Math. J.*, **48**:1 (2000), 331–348.
11. Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, "Теория инвариантов", *Алгебраическая геометрия – 4*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **55**, ВИНИТИ, М., 1989, 137–309; англ. пер.: V. L. Popov, E. B. Vinberg, "Invariant theory", *Algebraic geometry*. IV. *Linear algebraic groups*, *invariant theory*, Encyclopaedia Math. Sci., **55**, Springer-Verlag, Berlin, 1994, 123–278.
12. K. Trautman, "Orbits that always have affine stable neighbourhoods", *Adv. Math.*, **91**:1 (1992), 54–63.

13. R. Steinberg, “Nagata’s example”, *Algebraic groups and Lie groups*, Austral. Math. Soc. Lect. Ser., **9**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, 375–384.
14. В. Л. Попов, “Группы Пикара однородных пространств линейных алгебраических групп и одномерные однородные векторные расслоения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **38**:2 (1974), 294–322; англ. пер.: V. L. Popov, “Picard groups of homogeneous spaces of linear algebraic groups and one-dimensional homogeneous vector bundles”, *Math. USSR-Izv.*, **8**:2 (1974), 301–327.
15. F. Berchtold, J. Hausen, “GIT-equivalence beyond the ample cone”, *Michigan Math. J.*, **54**:3 (2006), 483–516.
16. I. V. Arzhantsev, J. Hausen, “On the multiplication map of a multigraded algebra”, *Math. Res. Lett.*, **14**:1 (2007), 129–136.
17. F. Knop, H. Kraft, D. Luna, Th. Vust, “Local properties of algebraic group actions”, *Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie*, DMV Sem., **13**, Birkhäuser, Basel, 1989, 63–75.
18. F. Berchtold, J. Hausen, “Homogeneous coordinates for algebraic varieties”, *J. Algebra*, **266**:2 (2003), 636–670.
19. E. J. Elizondo, K. Kurano, K. K. Watanabe, “The total coordinate ring of a normal projective variety”, *J. Algebra*, **276**:2 (2004), 625–637.
20. B. Kostant, “Lie group representations on polynomial rings”, *Amer. J. Math.*, **85**:3 (1963), 327–404.
21. I. V. Arzhantsev, “Algebras with finitely generated invariant subalgebras”, *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*), **53**:2 (2003), 379–398.
22. I. V. Arzhantsev, D. A. Timashev, “On the canonical embeddings of certain homogeneous spaces”, *Lie groups and invariant theory*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **213**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 63–83.

И. В. Аржанцев (I. V. Arzhantsev)
Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: arjantse@mccme.ru

Поступило в редакцию
11.01.2008
31.08.2008