Математические заметки

Том 85 выпуск 5 май 2009

УДК 512.71

О факториальности колец Кокса

И. В. Аржанцев

Обобщенная конструкция Кокса сопоставляет алгебраическому многообразию замечательный инвариант – его тотальное координатное кольцо, или кольцо Кокса. В работе дано новое доказательство факториальности кольца Кокса в случае, когда группа классов дивизоров многообразия свободна. Это доказательство основано на понятии однородной факториальности. В случае наличия кручения в группе классов мы показываем, что колько Кокса по-прежнему однородно факториально, однако факториальность может утратиться.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Пусть X – неприводимое нормальное алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ со свободной конечно порожденной группой классов дивизоров $\mathrm{Cl}(X)$. Обозначим через $\mathrm{WDiv}(X)$ группу дивизоров Вейля многообразия X и зафиксируем подгруппу $K \subset \mathrm{WDiv}(X)$, которая проектируется на $\mathrm{Cl}(X)$ изоморфно. Следуя известной конструкции Кокса из торической геометрии [1], определим тотальное координатное кольцо или кольцо Кокса многообразия X как

$$R(X) = \bigoplus_{D\in K} \mathscr{O}(X,D), \qquad \text{где} \quad \mathscr{O}(X,D) = \{f \in \mathbb{K}(X) \mid \mathrm{div}(f) + D \geqslant 0\}.$$

Умножение на однородных компонентах кольца $R(X)$ совпадает с умножением в поле рациональных функций $\mathbb{K}(X)$, а на неоднородные элементы продолжается по дистрибутивности. Несложно показать, что кольцо $R(X)$ с точностью до изоморфизма не зависит от выбора подгруппы K (в п. 3 мы докажем обобщение этого утверждения, см. предложение 3.2). Важным свойством кольца $R(X)$ является его факториальность, см. [2], [3]. В данной работе мы предлагаем новое доказательство этого факта.

Теорема 1.1. *Кольцо $R(X)$ является факториальным.*

Наша основная цель – показать, что факториальность кольца $R(X)$ отражает тот факт, что каждый эффективный дивизор Вейля на многообразии X единственным образом представляется в виде неотрицательной целочисленной линейной комбинации простых дивизоров. Из указанного свойства непосредственно следует факториальность на множестве однородных элементов мультиградуированного кольца $R(X)$

Работа выполнена при поддержке фонда INTAS YS (грант № 05-109-4958) и гранта Пьера Делиня.

(мы называем это a priori более слабое свойство *однородной факториальностью*). Затем мы показываем, что однородная факториальность влечет факториальность. Реализации этой схемы посвящен п. 2.

В п. 3 мы определяем кольцо Кокса для многообразия X с конечно порожденной, но не обязательно свободной группой классов и, следуя [2] и [4], проверяем корректность определения. В этой ситуации кольцо Кокса также оказывается однородно факториальным. Наконец, в п. 4 мы описываем кольцо Кокса однородного пространства алгебраической группы. Это позволяет привести примеры, показывающие, что в случае наличия кручения в группе классов кольцо Кокса может оказаться нефакториальным.

2. Доказательство теоремы 1.1. Начнем с нескольких простых фактов о мультиградуированных алгебрах. Пусть R – коммутативная ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbb{K}$. Предположим, что R градуирована решеткой $\mathbb{Z}^n$, т.е.

$$R=\bigoplus_{u\in\mathbb{Z}^n}R_u,\qquad R_uR_v\subseteq R_{u+v}.$$

Обозначим через $R^\times$ (соответственно R^+) мультипликативную полугруппу обратимых (соответственно однородных) элементов алгебры R.

Лемма 2.1. (i) *Пусть для любых $a,b\in R^+$ условие $ab=0$ влечет $a=0$ или $b=0$. Тогда алгебра R не содержит делителей нуля.*

(ii) *Пусть R не содержит делителей нуля и для любых $a,b\in R^+$ условие $ab=1$ влечет $a,b\in R_0$. Тогда $R^\times=R_0^\times$.*

(iii) *Пусть R не содержит делителей нуля. Если $a\in R^+$ и $a=bc$, то $b,c\in R^+$.*

Доказательство. Зафиксируем на решетке $\mathbb{Z}^n$ лексикографический порядок. Тогда каждому ненулевому элементу алгебры R сопоставляются два однородных элемента – его старший и младший члены. При этом старший (соответственно младший) член произведения двух элементов есть произведение их старших (соответственно младших) членов. Отсюда легко следуют утверждения леммы.

Следствие 2.2. (i) *Кольцо Кокса $R(X)$ не содержит делителей нуля.*

(ii) *Полугруппа $R(X)^\times$ совпадает с полугруппой $\mathscr{O}(X)^\times$, где $\mathscr{O}(X)$ – алгебра регулярных функций на многообразии X.*

Доказательство. Утверждение (i) следует из леммы 2.1, (i) и отсутствия делителей нуля в $\mathbb{K}(X)$. Для доказательства (ii) заметим, что если $f_1\in\mathscr{O}(X,D_1)$, $f_2\in\mathscr{O}(X,D_2)$ и $f_1f_2=1$, то $D_1+D_2=0$, $\operatorname{div}(f_1)+\operatorname{div}(f_2)=0$, и сумма эффективных дивизоров $\operatorname{div}(f_1)+D_1$ и $\operatorname{div}(f_2)+D_2$ равна нулю. Отсюда $\operatorname{div}(f_i)+D_i=0$, $i=1,2$, а значит, и $D_i=0$. Остается воспользоваться леммой 2.1, (ii) и заметить, что $R(X)_0=\mathscr{O}(X)$.

Определение 2.3. Пусть A – конечно порожденная абелева группа, и пусть $R=\bigoplus_{u\in A}R_u$ – A-градуированная алгебра. Тогда

- ненулевой элемент $a\in R^+\setminus R^\times$ называется *однородно неприводимым*, если из условия $a=bc$, $b,c\in R^+$ вытекает, что либо b, либо c обратим;

- A-градуированная алгебра R называется *однородно факториальной*, если каждый ее ненулевой необратимый однородный элемент представим в виде произведения однородно неприводимых элементов, и такое представление единственно с точностью до ассоциированности и порядка множителей.

Замечание 2.4. Пусть $R = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^n} R_u$ не содержит делителей нуля. Тогда из леммы 2.1, (iii) следует, что факториальность R влечет однородную факториальность.

Предложение 2.5. *Кольцо Кокса $R(X) = \bigoplus_{D \in K} \mathscr{O}(X, D)$ является однородно факториальным.*

Доказательство. Эффективные дивизоры Вейля на X находятся в биективном соответствии с классами ассоциированности элементов из $R(X)^+$, и произведение однородных элементов отвечает сложению дивизоров. Следовательно, классы однородно неприводимых элементов кольца $R(X)$ отвечают простым дивизорам, и однородная факториальность следует из того, что каждый эффективный дивизор Вейля единственным образом представляется в виде неотрицательной целочисленной линейной комбинации простых дивизоров.

Далее нам потребуется следующая хорошо известная лемма, см., например, [5; предложение 17.1]. Для удобства читателя мы приведем ее с доказательством.

Лемма 2.6. *Пусть Z – нормальное алгебраическое многообразие с регулярным действием алгебраического тора T. Тогда каждый дивизор Вейля на Z линейно эквивалентен T-инвариантному дивизору.*

Доказательство. В силу своей нормальности множество особых точек на многообразии Z имеет коразмерность $\geqslant 2$. Поэтому можно считать, что Z гладко. Здесь каждый дивизор Вейля является дивизором Картье. Достаточно доказать утверждение для эффективного дивизора D. Линейное расслоение, отвечающее D, допускает T-линеаризацию [6; п. 2.4], которая определяет структуру рационального T-модуля на $\mathscr{O}(Z, D)$. Любой T-собственный вектор в $\mathscr{O}(Z, D)$ определяет T-инвариантный дивизор, линейно эквивалентный D.

Переход к подмногообразию гладких точек многообразия X не изменяет кольцо $R(X)$, поэтому далее мы предполагаем, что X гладко. Следуя [2], определим "универсальный торсор" $\widehat{X} \to X$ над многообразием X. Рассмотрим K-градуированный пучок $\mathscr{O}_X$-алгебр

$$\mathscr{R}_X = \bigoplus_{D \in K} \mathscr{O}(D), \qquad \text{где} \quad \mathscr{O}(U, D) = \{f \in \mathbb{K}(X) \mid [\operatorname{div}(f) + D]|_U \geqslant 0\},$$

и относительный спектр $\widehat{X} = \operatorname{Spec}_X(\mathscr{R}_X)$ этого пучка над X. Ясно, что

$$R(X) = H^0(X, \mathscr{R}_X) = \mathscr{O}(\widehat{X}).$$

K-градуировка на $\mathscr{R}_X$ определяет регулярное действие тора $T = \operatorname{Spec}(\mathbb{K}[K])$ на $\widehat{X}$ и канонический аффинный морфизм $p\colon \widehat{X} \to X$, определенный вложением $\mathscr{O}_X \subset \mathscr{R}_X$, является T-инвариантным. Поскольку все дивизоры на X являются дивизорами Картье, p есть локально тривиальное расслоение со слоем T. Следовательно,

$\widehat{X}$ гладко. Зафиксируем аффинное покрытие $\{U_i\}$ многообразия X. Каждый дивизор $D_i = X \setminus U_i$ отвечает элементу $f_i \in R(X)^+$. Сечение f_i пучка $\mathscr{R}_X$ обратимо в точности над U_i. Поэтому $p^{-1}(U_i)$ совпадает с

$$\widehat{X}_{f_i} = \{z \in \widehat{X} : f_i(z) \neq 0\}.$$

Мы получили открытое аффинное покрытие $\{\widehat{X}_{f_i}\}$ многообразия $\widehat{X}$, где $f_i \in \mathscr{O}(\widehat{X})$. Отсюда легко вывести, что многообразие $\widehat{X}$ квазиаффинно, см. [7; гл. 2, приложение, лемма 8].

Мы готовы завершить доказательство теоремы 1.1. Предположим, что кольцо $R(X)$ не факториально. Тогда $R(X)$ содержит неглавный простой идеал высоты один. Поскольку $R(X) = \mathscr{O}(\widehat{X})$, это кольцо Крулля, и его простые идеалы высоты один биективно соответствуют существенным дискретным нормированиям кольца $R(X)$, см. [8; раздел 1.3]. С другой стороны, простые дивизоры на нормальном квазиаффинном многообразии также биективно соответствуют существенным дискретным нормированиям его алгебры регулярных функций. Следовательно, на $\widehat{X}$ есть простой неглавный дивизор. В силу леммы 2.6 можно предполагать, что на $\widehat{X}$ есть простой T-инвариантный неглавный дивизор. В отвечающем ему идеале $I \lhd R(X)$ содержится некоторый однородный, а значит, и некоторый однородно неприводимый элемент. Предположим, что для некоторых $a, b \in R(X)$ произведение ab делится на p, но никакая однородная компонента a и b на p не делится. Рассматривая старшие компоненты a и b и используя однородную факториальность, приходим к противоречию. Значит, главный идеал $(p) \lhd R(X)$ прост. Включение $(p) \subseteq I$ влечет равенство $(p) = I$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 1.1.

В заключение этого пункта мы докажем следующее

Предложение 2.7. *Пусть $R = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^n} R_u$ – мультиградуированная конечно порожденная $\mathbb{K}$-алгебра без делителей нуля. Тогда однородная факториальность алгебры R влечет ее факториальность.*

Доказательство. Покажем, что R целозамкнута. Мультиградуировка определяет действия n-мерного тора T автоморфизмами алгебры R и ее поля частных $\mathrm{Quot}(R)$. Известно, что целое замыкание $\overline{R}$ алгебры R в $\mathrm{Quot}(R)$ есть T-инвариантная подалгебра, причем T-действие определяет на $\overline{R}$ структуру рационального T-модуля. Следовательно, алгебра $\overline{R}$ также $\mathbb{Z}^n$-градуирована, и R является ее однородной подалгеброй. Каждый однородный элемент $r \in \overline{R}$ можно представить в виде $r = r_1/r_2$, $r_1, r_2 \in R^+$. Целая зависимость r_1/r_2 над R и однородная факториальность влекут $r_1/r_2 \in R^+$, откуда $\overline{R} = R$.

Хорошо известно, что факториальность алгебры R равносильна условию $\mathrm{Cl}(Z) = 0$ на нормальное аффинное многообразие $Z = \mathrm{Spec}(R)$. Использованные выше рассуждения показывают, что каждый простой T-инвариантный дивизор на Z является главным, и лемма 2.6 завершает доказательство.

Замечание 2.8. Незначительное обобщение первой части доказательства предложения 2.7 показывает, что в нулевой характеристике для любой конечно порожденной абелевой группы A однородная факториальность конечно порожденной алгебры $R = \bigoplus_{u \in A} R_u$ без делителей нуля влечет ее целозамкнутость.

3. Кручение в группе классов дивизоров. В этом пункте мы определим кольцо Кокса для многообразия X с произвольной конечно порожденной группой классов и, следуя [2] и [4], докажем корректность этого определения.

Пусть $S \subset \mathrm{WDiv}(X)$ – конечно порожденная подгруппа, сюръективно проектирующаяся на $\mathrm{Cl}(X)$. Рассмотрим кольцо

$$T_S(X) = \bigoplus_{D \in S} \mathscr{O}(X, D).$$

Пусть $S^0 \subset S$ – ядро проекции $S \to \mathrm{Cl}(X)$. Выберем согласованные базисы $D_1, \dots, D_s$ в S и $D_1^0 = d_1 D_1, \dots, D_r^0 = d_r D_r$ в S^0, $r \leqslant s$. Назовем набор рациональных функций

$$\mathscr{F} = \{F_D \in \mathbb{K}(X)^\times : D \in S^0\}$$

согласованным (в работе [2] использован термин “shifting family”), если $\mathrm{div}(F_D) = D$ и $F_{D+D'} = F_D F_{D'}$. Ясно, что набор $\{F_D\}$ определяется функциями $F_{D_i^0}$, $i = 1, \dots, r$: если $D = a_1 D_1^0 + \dots + a_r D_r^0$, то $F_D = F_{D_1^0}^{a_1} \dots F_{D_r^0}^{a_r}$. Зафиксируем некоторый согласованный набор $\mathscr{F}$.

Пусть $D_1, D_2 \in S$ и $D_1 - D_2 \in S^0$. Отображение $f \to F_{D_1 - D_2} f$ задает изоморфизм векторных пространств $\mathscr{O}(X, D_1)$ и $\mathscr{O}(X, D_2)$. Легко видеть, что линейная оболочка элементов вида $f - F_{D_1 - D_2} f$ по всем D_1, D_2 с $D_1 - D_2 \in S^0$ и всем $f \in \mathscr{O}(X, D_1)$ есть идеал $I(S, \mathscr{F}) \lhd T_S(X)$. Определим кольцо Кокса многообразия X как

$$R_{S,\mathscr{F}}(X) = T_S(X) / I(S, \mathscr{F}).$$

Поскольку $D/D^0 \cong \mathrm{Cl}(X)$, кольцо $R_{S,\mathscr{F}}(X)$ несет естественную $\mathrm{Cl}(X)$-градуировку.

Лемма 3.1. *Предположим, что $\mathscr{O}(X)^\times = \mathbb{K}^\times$. Тогда кольцо $R_{S,\mathscr{F}}(X)$ с точностью до изоморфизма не зависит от выбора $\mathscr{F}$.*

Доказательство. Набор функций $F_{D_1^0}, \dots, F_{D_r^0}$ определен с точностью до замены $F_{D_i^0} \to \gamma_i F_{D_i^0}$, $\gamma_i \in \mathbb{K}^\times$. Зафиксируем элементы $\alpha_i \in \mathbb{K}^\times$, $i = 1, \dots, r$, такие, что $\alpha_i^{d_i} = \gamma_i$, и положим $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_s = 1$. Тогда искомый изоморфизм факторколец индуцирован автоморфизмом $T_S(X) \to T_S(X)$, который на компоненте $\mathscr{O}(X, D)$, $D = a_1 D_1 + \dots + a_s D_s$, действует умножением на $\alpha_1^{a_1} \dots \alpha_s^{a_s}$.

Предложение 3.2. *Предположим, что $\mathscr{O}(X)^\times = \mathbb{K}^\times$. Тогда кольцо $R_S(X)$ с точностью до изоморфизма не зависит от выбора S.*

Доказательство. Пусть $M \subset \mathrm{WDiv}(X)$ – другая конечно порожденная подгруппа, проектирующаяся на $\mathrm{Cl}(X)$. Можно считать, что $\mathrm{rk}(S) \geqslant \mathrm{rk}(M)$.

Для дальнейшего доказательства нам потребуется

Лемма 3.3. *Существует сюръективный гомоморфизм $\phi\colon S \to M$, для которого следующая диаграмма коммутативна*:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & M \arrow[dl] \\ & \mathrm{Cl}(X) & \end{tikzcd}$$

Доказательство. Выберем согласованные базисы $D_1, \dots, D_s$ в S и $d_1D_1, \dots, d_rD_r$ в S^0, а также $M_1, \dots M_k$ в M и $m_1M_1, \dots, m_pM_p$ в M^0 такие, что каждое d_i (соответственно m_i) делится на d_{i+1} (соответственно m_{i+1}). Из условия $S/S^0 \cong \mathrm{Cl}(X) \cong M/M^0$ следует, что $s-r = k-p$ и наборы $(d_1, \dots, d_r)$ и $(m_1, \dots, m_p)$ могут отличаться лишь некоторым количеством единиц, стоящих в конце. Остается положить $\phi(D_i) = M_i$ при $i = 1, \dots, p$, $\phi(D_i) = M_{i-r+p}$ при $i = r+1, \dots, s$, и $\phi(D_i) = 0$ при прочих i.

Вернемся к доказательству предложения 3.2. Для подгруппы $(S+M)^0 \subset S+M$ выберем согласованное семейство $\mathscr{F}$ и определим сюръективный гомоморфизм Φ: $T_S(X) \to T_M(X)$ на однородных компонентах $\mathscr{O}(X,D) \to \mathscr{O}(X,\phi(D))$ формулой $\Phi(f) = F_{D-\phi(D)}f$. Ядро гомоморфизма Φ лежит в идеале $I(S,\mathscr{F}|_{S^0})$, а сам идеал $I(S,\mathscr{F}|_{S^0})$ сюръективно отображается на $I(M,\mathscr{F}|_{M^0})$. Это показывает, что Φ определяет гомоморфизм $R_S(X) \to R_M(X)$, являющийся изоморфизмом.

Заметим, что в кольце $T_S(X)$ однородные элементы из компонент, отвечающих D_1 и D_2 с условием $D_1 - D_2 \in S^0$, могли определять один и тот же эффективный дивизор на X. Однако после факторизации по идеалу $I(S,\mathscr{F})$ эффективные дивизоры Вейля на X вновь находятся в биективной соответствии с классами ассоциированности элементов из $R(X)^+$.

Предложение 3.4. *Кольцо $R(X)$ является однородно факториальным.*

Доказательство. Утверждение следует из доказательства предложения 2.5.

Замечание 3.5. Согласно [3; следствие 1.2] кольцо $T_S(X)$ является факториальным. В следующем пункте мы увидим, что это свойство может не выпоняться для кольца $R(X)$ в случае, когда группа $\mathrm{Cl}(X)$ имеет кручение.

4. Однородные пространства алгебраических групп. В этом пункте мы предполагаем, что поле $\mathbb{K}$ имеет нулевую характеристику. Пусть G – связная аффинная алгебраическая группа такая, что ее группа характеров $\mathbb{X}(G)$ тривиальна и $\mathrm{Cl}(G) = 0$. Заметим, что выполнения последнего условия можно добиться, заменив группу G ее конечнолистным накрытием [6; предложение 4.6]. Согласно известному результату Розенлихта условие $\mathbb{X}(G) = 0$ равносильно условию $\mathscr{O}(G)^\times = \mathbb{K}^\times$.

Пусть H – замкнутая подгруппа в G. Однородное пространство G/H имеет каноническую структуру гладкого квазипроективного многообразия. Известно [9], что

$$\mathrm{Cl}(G/H) \cong \mathrm{Pic}(G/H) \cong \mathbb{X}(H).$$

Напомним, как устанавливается последний изоморфизм. Каждый характер $\chi \in \mathbb{X}(H)$ определяет одномерный H-модуль $\mathbb{K}_\chi$. Рассмотрим однородное расслоение

$$L_\chi = G \times_H \mathbb{K}_\chi := (G \times \mathbb{K}_\chi)/H, \qquad h \cdot (g,a) := (gh^{-1}, \chi(h)a).$$

В работе [9] показано, что проекция $L_\chi \to G/H$ является G-линеаризованным линейным расслоением над G/H и

$$L_{\chi_1} \otimes L_{\chi_2} \cong L_{\chi_1+\chi_2}.$$

Более того, отображение $\chi \to L_\chi$ определяет изоморфизм между $\mathbb{X}(H)$ и $\mathrm{Pic}(G/H)$.

Поскольку $\mathrm{Cl}(G) = 0$, прообраз расслоения L_χ на G относительно проекции $G \to G/H$ есть тривиальное G-линеаризованное линейное расслоение. Это позволяет отождествить пространство сечений $H^0(X, L_\chi)$ со следующим подпространством в $\mathscr{O}(G)$:

$$\mathscr{O}(G)_\chi^{(H)} := \{f \in \mathscr{O}(G) : f(gh^{-1}) = \chi(h)f(g) \text{ для всех } h \in H,\ g \in G\}.$$

Тензорное произведение сечений отвечает произведению соответствующих функций в $\mathscr{O}(G)$.

Рассмотрим подгруппу

$$H_1 = \bigcap_{\chi \in \mathbb{X}(H)} \mathrm{Ker}(\chi).$$

Следующая теорема доставляет эффективное описание кольца Кокса пространства G/H; см. также [10; лемма 3.14].

Теорема 4.1. *Пусть G – связная аффинная алгебраическая группа, для которой $\mathbb{X}(G) = 0$ и $\mathrm{Cl}(X) = 0$, и H – замкнутая подгруппа в G. Тогда*

$$R(G/H) \cong \mathscr{O}(G/H_1).$$

Доказательство. Заметим, что диагонализуемая группа $Q = H/H_1$ действует на G/H умножениями справа. Поскольку $\mathbb{X}(H) = \mathbb{X}(Q)$ и каждый рациональный Q-модуль есть прямая сумма одномерных подмодулей, мы получаем

$$\mathscr{O}(G/H_1) = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{X}(H)} \mathscr{O}(G)_\chi^{(H)}.$$

Дивизоры Вейля на G/H биективно соответствуют прямым, порожденным Q-полуинвариантами $f \in \mathrm{Quot}(\mathscr{O}(G/H_1)) \subseteq \mathbb{K}(G)$. При этом эффективным дивизорам отвечают полуинварианты $f \in \mathscr{O}(G/H_1)$. Выбирая мультипликативную конечно порожденную группу полуинвариантов в $\mathrm{Quot}(\mathscr{O}(G/H_1))$, веса которых пробегают всю группу $\mathbb{X}(Q)$, в качестве подгруппы $S \subset \mathrm{WDiv}(G/H)$, читатель легко проверит, что кольцо Кокса, связанное с S, изоморфно $\mathscr{O}(G/H_1)$.

Несложно показать, что если H связна, то группа Q является тором, группа $\mathbb{X}(H)$ свободна и $\mathbb{X}(H_1) = 0$. Следовательно, в этом случае $\mathrm{Cl}(G/H_1) = 0$ и кольцо $R(G/H)$ факториально (что также следует из теоремы 1.1). Для несвязной H группа характеров $\mathbb{X}(H_1)$ может оказаться нетривиальной.

Пример 4.2. Положим $G = \mathrm{SL}(2)$, а в качестве H возьмем нормализатор N максимального тора $T \subset \mathrm{SL}(2)$. Здесь $\mathbb{X}(H)$ изоморфна циклической группе $\mathbb{Z}_2$ порядка 2, $H_1 = T$ и $\mathbb{X}(H_1) \cong \mathbb{Z}$. Следовательно, кольцо Кокса

$$R(\mathrm{SL}(2)/N) \cong \mathscr{O}(\mathrm{SL}(2)/T)$$

не является факториальным. Заметим, что $\mathrm{SL}(2)/N$ есть гладкая аффинная поверхность X с $\mathrm{Cl}(X) \cong \mathbb{Z}_2$, кольцо $R(X)$ изоморфно $\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]/(x_2^2 - x_1x_3 - 1)$, и $\mathbb{Z}_2$-градуировка на $R(X)$ определена как $\deg(x_1) = \deg(x_2) = \deg(x_3) = \overline{1}$.

Можно указать несколько способов сопоставить поверхности X факториальное кольцо. Во-первых, рассмотрим подгруппу $S \subset \mathrm{WDiv}(X)$, порожденную одним неглавным дивизором. Кольцо $T_S(X)$ изоморфно кольцу

$$(\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, t, t^{-1}]/(x_2^2 - x_1x_3 - 1))^{\mathbb{Z}_2},$$

где группа $\mathbb{Z}_2$ действует умножением переменных x_1, x_2, x_3, t и t^{-1} на -1.

Во-вторых, пространство $\mathrm{SL}(2)/N$ допускает замечательное (wonderful; термин Д. Луны) $\mathrm{SL}(2)$-эквивариантое вложение в $\mathbb{P}^2$ и

$$R(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3].$$

Кольца Кокса замечательных вложений сферических однородных пространств описаны в работе [11].

Пример 4.3. Используя конструкцию из примера 4.2, можно для произвольной конечно порожденной несвободной абелевой группы A построить гладкое аффинное многообразие X, для которого $\mathrm{Cl}(X) \cong A$ и кольцо $R(X)$ не является факториальным. Пусть

$$A \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_s} \oplus \mathbb{Z}^n.$$

Положим $X = G/H$, где G есть прямое произведение $s + n$ простых групп

$$\mathrm{SL}(d_1) \times \cdots \times \mathrm{SL}(d_s) \times \mathrm{SL}(2) \times \cdots \times \mathrm{SL}(2)$$

и

$$H = H(1) \times \cdots \times H(s) \times T \times \cdots \times T,$$

где $H(i)$ есть расширение максимального тора группы $\mathrm{SL}(d_i)$ посредством элементов его нормализатора, действующих на элементы тора как степени одного d_i-цикла. В этом случае $\mathbb{X}(H) \cong A$ и

$$\mathbb{X}(H_1) \cong \mathbb{Z}^{d_1 + \cdots + d_s - s}.$$

Автор благодарен профессору Ю. Хаузену за ценные обсуждения, в которых возникли некоторые из доказываемых ниже результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] D. A. Cox, “The homogeneous coordinate ring of a toric variety”, *J. Algebraic Geom.*, **4**:1 (1995), 17–50.

[2] F. Berchtold, J. Hausen, “Homogeneous coordinates for algebraic varieties”, *J. Algebra*, **266**:2 (2003), 636–670.

[3] E. J. Elizondo, K. Kurano, K. Watanabe, “The total coordinate ring of a normal projective variety”, *J. Algebra*, **276**:2 (2004), 625–637.

[4] J. Hausen, *Cox rings and combinatorics. II*, `arXiv: math.AG/0801.3995`.

[5] D. A. Timashev, *Homogeneous spaces and equivariant embeddings*, `arXiv: math.AG/0602228`.

[6] F. Knop, H. Kraft, D. Luna, Th. Vust, “Local properties of algebraic group actions”, *Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie*, DMV Sem., **13**, Birkhäuser, Basel, 1989, 63–75.

[7] F. D. Grosshans, *Algebraic Homogeneous Spaces and Invariant Theory*, Lecture Notes in Math., **1673**, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[8] P. Samuel, *Lectures on unique factorization domains*, Notes by M. Pavman Murthy. Tata Inst. Fund. Res. Lectures on Math., **30**, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1964.

[9] В. Л. Попов, "Группы Пикара однородных пространств линейных алгебраических групп и одномерные однородные векторные расслоения", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **38**:2 (1974), 294–322.

[10] I. V. Arzhantsev, J. Hausen, "On embeddings of homogeneous spaces with small boundary", *J. Algebra*, **304**:2 (2006), 950–988.

[11] M. Brion, "The total coordinate ring of a wonderful variety", *J. Algebra*, **313**:1 (2007), 61–99.

И. В. Аржанцев
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: arjantse@mccme.ru

Поступило
05.02.2008