



О насыщенности подполей инвариантов конечных групп

И. В. Аржанцев, А. П. Петравчук

Каждое подполе $\mathbb{K}(\phi)$ поля рациональных дробей $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ содержится в единственном максимальном подполе вида $\mathbb{K}(\psi)$. Элемент ψ называется порождающим для элемента ϕ . Подполе в $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ называется насыщенным, если вместе с каждым своим элементом оно содержит его порождающий. В работе свойство насыщенности изучается для подполя инвариантов $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)^G$ конечной группы G автоморфизмов поля $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Рассмотрим кольцо многочленов $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ над произвольным полем $\mathbb{K}$. Напомним, что многочлен $h \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \setminus \mathbb{K}$ называется *замкнутым*, если подалгебра $\mathbb{K}[h]$ целозамкнута в $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Для каждого многочлена $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \setminus \mathbb{K}$ найдутся такие замкнутый многочлен h и многочлен $F(t) \in \mathbb{K}[t]$, что $f = F(h)$. При этом многочлен h определяется многочленом f однозначно с точностью до замены $h \rightarrow \alpha h + \beta$, $\alpha \in \mathbb{K}^\times$, $\beta \in \mathbb{K}$, и называется *порождающим* для многочлена f .

Подалгебру $A \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ назовем *насыщенной*, если с каждым своим элементом, отличным от константы, она содержит и его порождающий. Ясно, что каждая подалгебра A , целозамкнутая в $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, насыщена, однако обратное утверждение неверно. В работе [1] мы, среди прочего, изучали свойство насыщенности для подалгебр инвариантов $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G$ конечных подгрупп $G \subseteq \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 1 [1; теорема 4]. *Пусть $\mathbb{K}$ – произвольное поле и $G \subseteq \text{GL}_n(\mathbb{K})$ – конечная подгруппа. Тогда подалгебра инвариантов $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G$ насыщена в $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ тогда и только тогда, когда группа G не допускает нетривиальных гомоморфизмов в мультипликативную группу $\mathbb{K}^\times$ поля $\mathbb{K}$.*

В частности, насыщенность подалгебры $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G$ зависит от поля $\mathbb{K}$ и (абстрактной) группы G , но не зависит от матричной реализации группы G .

Цель данной заметки – исследовать свойство насыщенности для подполей рациональных инвариантов. Начнем с необходимых определений. Пусть $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ – поле рациональных дробей и $\psi \in \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n) \setminus \mathbb{K}$. Напомним, что подполе $L \subseteq$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-90416-Укр-ф-а), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-1983.2008.1) и гранта DFFD F25.1/095.

$\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ называется *алгебраически замкнутым* в $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$, если каждый элемент из $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$, алгебраический над L , лежит в L . Рациональная дробь ψ называется *замкнутой*, если подполе $\mathbb{K}(\psi)$ алгебраически замкнуто в $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$. Для каждого $\phi \in \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n) \setminus \mathbb{K}$ найдутся такие замкнутая дробь ψ и элемент $H(t) \in \mathbb{K}(t)$, что $H(\psi) = \phi$. Элемент ψ определен элементом ϕ с точностью до преобразования

$$\psi \rightarrow \frac{\alpha\psi + \beta}{\gamma\psi + \delta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{K}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \quad (1)$$

см. [2; теорема 6] или [3; лемма 2], и называется *порождающим* для элемента ϕ .

Порождающие элементы естественно возникают при решении различных задач. Так, пусть $\phi = P/Q$ – несократимая запись дроби ϕ . Рассмотрим 1-форму $\omega = QdP - PdQ$. Ее *полем констант* называют поле тех рациональных дробей $\xi \in \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$, для которых $\omega \wedge d\xi = 0$. Известно, что это поле порождается порождающим элементом ψ : случай двух переменных восходит к классическим работам А. Пуанкаре по алгебраическому интегрированию дифференциальных уравнений, общий случай обсуждается в [2]. Далее, если ядро $\mathbb{K}$ -дифференцирования поля $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ имеет размерность один, то это ядро имеет вид $\mathbb{K}(\psi)$ для некоторой замкнутой дроби ψ . Обратно, для каждой замкнутой дроби ψ в работе [4] построено $\mathbb{K}$ -дифференцирование поля $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$, ядро которого совпадает с $\mathbb{K}(\psi)$. Несколько характеристик замкнутых дробей получено в работах [5] и [3]. Также в [5] доказан аналог теоремы Штейна для рациональных дробей и получена оценка на число приводимых слоев. Наконец, в [2; п. 7] указан алгоритм для нахождения образующей ψ данной рациональной дроби ϕ .

Подполе $L \subseteq \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ назовем *насыщенным*, если с каждым своим элементом, отличным от константы, оно содержит и его порождающий. Ясно, что каждое подполе, алгебраически замкнутое в $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$, является насыщенным. Из приведенных ниже результатов следует, что обратное неверно.

Пусть G – конечная подгруппа в группе автоморфизмов поля $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$. Далее мы исследуем вопрос о насыщенности подполя инвариантов $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)^G$. Интересно отметить, что из теоремы Люрота вытекает следующий факт: подполе $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)^G$ насыщенно в $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ тогда и только тогда, когда каждое одномерное G -инвариантное подполе в $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ лежит в $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)^G$. Геометрически это означает, что слои любого G -эквивариантного рационального морфизма из $\mathbb{K}^n$ на кривую являются G -инвариантными.

2. Основные результаты. Следующий результат доставляет достаточное условие насыщенности подполя инвариантов.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathbb{K}$ – поле характеристики нуль и G – конечная группа автоморфизмов поля $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$. Предположим, что группа G не имеет нетривиальных абелевых фактор-групп, а также фактор-групп, изоморфных знакопеременной группе A_5 . Тогда подполе $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)^G$ насыщенно в $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что порождающий элемент ψ для элемента $\phi \in \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)^G \setminus \mathbb{K}$ не является инвариантным. Из формулы (1) следует, что элемент ψ определен элементом ϕ с точностью до действия группы $\text{PGL}_2(\mathbb{K})$. Следовательно, группа G допускает нетривиальный гомоморфизм в $\text{PGL}_2(\mathbb{K})$. Этот гомоморфизм определен над конечнопорожденным расширением поля рациональных

чисел. Каждое такое расширение изоморфно подполю поля комплексных чисел $\mathbb{C}$. С другой стороны, из классификации конечных подгрупп в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ [1] следует, что каждая такая подгруппа либо разрешима, либо изоморфна A_5 . Это противоречит условиям теоремы.

ПРИМЕР 1. Группа автоморфизмов поля $\mathbb{C}(x)$ изоморфна $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Пусть $G \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ – подгруппа вращений икосаэдра, изоморфная A_5 . Тогда подполе инвариантов $\mathbb{C}(x)^G$ не насыщено в $\mathbb{C}(x)$.

Теперь мы рассмотрим подполя инвариантов, отвечающие (регулярным) представлениям конечной группы G . Заметим, что группа $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ содержит единственную с точностью до сопряженности подгруппу, изоморфную A_5 . Ее прообраз в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ обозначим через I_{120} . Это группа из 120 элементов. Поскольку A_5 не допускает нетривиальных двумерных представлений, I_{120} не содержит подгрупп, изоморфных A_5 . Центр Z группы I_{120} состоит из двух элементов, и $I_{120}/Z \cong A_5$. Значит, I_{120} совпадает со своим коммутантом.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраически замкнутое поле характеристики нуль и $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ – конечная подгруппа. Следующие условия эквивалентны:

- (i) группа G не имеет нетривиальных абелевых фактор-групп, а также фактор-групп, изоморфных I_{120} ;
- (ii) подполе $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)^G$ насыщено в $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\Rightarrow$ (ii) Предположим, что найдется $\phi \in \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)^G \setminus \mathbb{K}$, для которого порождающий элемент $\psi = p/q$, $p, q \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, не инвариантен. Поскольку подполе $\mathbb{K}(\psi)$ является G -инвариантным, инвариантно и подпространство, порожденное p и q . Значит, группа G допускает нетривиальный гомоморфизм в группу $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$. В силу условий теоремы образ G попадает в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$. Далее, его образом в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ может быть только подгруппа, изоморфная A_5 . Следовательно, образ G в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ совпадает с I_{120} ; противоречие.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Если группа G имеет нетривиальную абелеву фактор-группу, то подалгебра $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G$ не насыщена в $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ (теорема 1). Отсюда следует, что и подполе $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)^G$ не насыщено в $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$. В случае, когда G допускает сюръективный гомоморфизм на группу I_{120} , нам потребуется вспомогательная лемма. Это хорошо известное в теории представлений утверждение, однако из-за отсутствия точной ссылки мы приведем его с доказательством.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathbb{K}$ – поле характеристики нуль и $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ – конечная подгруппа. Тогда любое неприводимое представление группы G реализуется как подпредставление в G -модуле $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку для любого неединичного $g \in G$ подпространство g -неподвижных векторов в $\mathbb{K}^n$ является собственным, найдется вектор $v \in \mathbb{K}^n$, для которого отображение $\gamma_v: G \rightarrow \mathbb{K}^n$, $\gamma_v(g) = gv$ инъективно. Пусть $F(G)$ – пространство $\mathbb{K}$ -значных функций на группе G с канонической структурой G -модуля. Естественный гомоморфизм

$$\gamma_v^*: \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow F(G), \quad (\gamma_v^* f)(g) = f(\gamma_v(g)),$$

является G -эквивариантным и сюръективным. С другой стороны, G -модуль $F(G)$ является модулем, двойственным к групповой алгебре группы G и, значит, любой простой G -модуль входит в $F(G)$ с ненулевой кратностью.

Рассмотрим G -подмодуль $U = \langle p, q \rangle$ в $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, изоморфный простому двумерному I_{120} -модулю.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathbb{K}$ – произвольное поле и $H \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ – конечная подгруппа, содержащая не скалярную матрицу. Тогда подполе $\mathbb{K}(y_1, y_2)^H$ не насыщено в $\mathbb{K}(y_1, y_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим конечный набор элементов $\{g \cdot y_1 / (g \cdot y_2) : g \in G\}$. Хотя бы один элементарный симметрический многочлен σ_i от этих элементов отличен от константы. С другой стороны, порождающим для $\sigma_i \in \mathbb{K}(y_1, y_2)^H$ служит $y_1/y_2 \notin \mathbb{K}(y_1, y_2)^H$.

Применяя лемму 2 к образу H группы G в $\mathrm{GL}(U)$, получаем требуемое.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ – подгруппа, изоморфная A_5 . Тогда подполе $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)^G$ насыщено в $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$.

Отсюда и из примера 1 следует, что в случае подполей инвариантов насыщенность зависит не только от поля $\mathbb{K}$ и группы G , но и от представления группы G автоморфизмами поля $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$.

Поскольку группа A_5 допускает точное трехмерное представление, следствие 1 позволяет при $n \geq 3$ построить насыщенное подполе в $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$, над которым поле $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ алгебраично. Ясно, что для подполя $\mathbb{K} \subset L \subseteq \mathbb{K}(x_1)$ насыщенность равносильна условию $L = \mathbb{K}(x_1)$. Остается рассмотреть случай $n = 2$. Из леммы 2 и теоремы 1 следует, что для собственной конечной подгруппы $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ подполе инвариантов $\mathbb{K}(x_1, x_2)^G$ не насыщено. Тем не менее, насыщенное подполе инвариантов конечной группы в $\mathbb{K}(x_1, x_2)$ построить можно. Как показано в [6], см. также [7; с. 78], в группе $\mathrm{SL}_3(\mathbb{K})$ есть подгруппа F порядка 1080, для которой факторгруппа F/Z , где Z – центр группы $\mathrm{SL}_3(\mathbb{K})$, изоморфна знакопеременной группе A_6 . Это определяет эффективное действие группы A_6 на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$, а значит и на поле $\mathbb{K}(x_1, x_2)$. Согласно теореме 2 подполе инвариантов $\mathbb{K}(x_1, x_2)^{A_6}$ насыщено в $\mathbb{K}(x_1, x_2)$.

В заключение приведем три примера, показывающие, что насыщенность подалгебры инвариантов не влечет насыщенность подполя инвариантов.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим следующие подгруппы:

- $G = I_{120} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$;
- $G = \langle \theta \rangle \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, где θ – поворот $\mathbb{R}^2$ на 120° ;
- $G = \langle \tau \rangle \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, где $\tau(x_1) = x_2$, $\tau(x_2) = x_1$, и $\mathbb{K}$ – поле характеристики два.

В каждом из случаев подалгебра $\mathbb{K}[x_1, x_2]^G$ насыщена в $\mathbb{K}[x_1, x_2]$ (теорема 1), а подполе $\mathbb{K}(x_1, x_2)^G$ не насыщено в $\mathbb{K}(x_1, x_2)$ (лемма 2).

Авторы благодарны Ю. Г. Прохорову, указавшему им на работу [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I. V. Arzhantsev, A. P. Petravchuk, “Closed polynomials and saturated subalgebras of polynomial algebras”, *Ukrainian Math. J.*, **59**:12 (2007), 1783–1790.

- [2] J. Moulin Ollagnier, “Algebraic closure of a rational function”, *Qual. Theory Dyn. Syst.*, **5:2** (2004), 285–300.
- [3] A. P. Petravchuk, O. G. Iena, “On closed rational functions in several variables”, *Algebra Discrete Math.*, 2007, № 2, 115–124.
- [4] A. van den Essen, J. Moulin Ollagnier, A. Nowicki, “Rings of constants of the form $k[f]$ ”, *Comm. Algebra*, **34:9** (2006), 3315–3321.
- [5] A. Bodin, “Reducibility of rational functions in several variables”, *Israel J. Math.*, **164** (2008), 333–347.
- [6] G. A. Miller, H. F. Blichfeldt, L. E. Dickson, *Theory and Applications of Finite Groups*, Dover Publ., New York, NY, 1916.
- [7] S. S.-T. Yau, Y. Yu, *Gorenstein Quotient Singularities in Dimension Three*, Mem. Amer. Math. Soc., **105**, no. 505, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, 88 pp.

И. В. Аржанцев

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: arjantse@mccme.ru

Поступило

24.07.2008

А. П. Петравчук

Киевский Национальный университет им. Т. Г. Шевченко

E-mail: aptr@univ.kiev.ua