А. В. Королев

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ
ДЛЯ АКАДЕМИЧЕСКОГО БАКАЛАВРИАТА

*Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника и практикума для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественнонаучным направлениям*

**Книга доступна в электронной библиотечной системе biblio-online.ru**

**Москва ▪ Юрайт ▪ 2017**

УДК
ББК
Р

***Автор*:**

**Королев Алексей Васильевич** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Департамента прикладной математики и бизнес-информатики Санкт-Петербургской школы экономики и менеджмента Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» — Санкт-Петербург (НИУ ВШЭ — Санкт-Петербург).

***Рецензенты*:**

*Бодунов Н. А.* — доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики факультета электроники Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» (г. Санкт-Петербург);

*Матвеенко В. Д.* — доктор физико-математических наук, профессор Департамента экономики Санкт-Петербургской школы экономики и менеджмента, научный руководитель образовательной программы «Прикладная экономика и математические методы» Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» — Санкт-Петербург.

**Королев, А. В.**

Р Дифференциальные и разностные уравнения : Учебник и практикум для академического бакалавриата / А. В. Королев. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 000 с. — Серия : Бакалавр. Академический курс

ISBN 978-5-9916-9896-2

Учебник ориентирован на рассмотрение основных теоретических вопросов курса обыкновенных дифференциальных и обыкновенных разностных уравнений, а также стохастических дифференциальных уравнений, предполагающих использование наиболее популярной в среде экономистов разновидности стохастического интеграла — интеграла Ито.

Учебник состоит из теоретической и практической частей. В теоретической части в ненавязчивой манере приводятся легкие доказательства большинства теоретических положений курса. В практической части курса подробно и обстоятельно, местами даже «занудно», демонстрируются на конкретных примерах методы решения различных задач.

Учебник может использоваться студентами при изучении курсов обыкновенных дифференциальных, разностных и стохастических дифференциальных уравнений.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

*Для подготовки бакалавров экономических и технических специальностей высших учебных заведений, а также для студентов направления «Менеджмент».*

УДК
ББК



ISBN 978-5-9916-9896-2



# Оглавление

# Предисловие

Данный учебник преследует цель дать читателю необходимый минимум знаний по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории разностных уравнений и теории стохастических дифференциальных уравнений. Все три названные раздела одинаково необходимы для полноценного экономического образования. Учебник состоит из теоретической и практической частей.

Пособие написано на основе курса лекций, который читается для студентов экономического факультета Санкт-Петербургского филиала ГУ ВШЭ. Единого учебника, соответствующего программе курса, так же как и единого практикума по трем перечисленным темам, не существует. Студентам, не желающим ограничивать свои знания лекционным курсом, приходится пользоваться множеством разных учебников и задачников, в частности теми книгами, которые перечислены в списке литературы. Иногда рассматриваемые в курсе вопросы излагаются в данных книгах с разных позиций или в различной общности, что может создавать дополнительные трудности для изучающего лекционный курс, в особенности если учесть довольно большой объем курса при сравнительно небольшом количестве лекционных часов.

Во введении даются основные понятия: обыкновенного дифференциального уравнения, решения, расширенного фазового пространства, интегральной кривой. Демонстрируется тот факт, что решение дифференциального уравнения не обязано быть единственным, формулируется задача Коши. В первой главе рассматриваются линейные дифференциальные уравнения. Вторая глава посвящена доказательству теоремы существования и единственности решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений общего вида. Третья глава посвящена линейным системам дифференциальных уравнений и преследует одну из основных задач данного курса — приобретение студентами навыков решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей. В четвертой главе рассмотрены автономные системы, классификация точек покоя, фазовые портреты линеаризованных систем в окрестности точки покоя. Пятая глава посвящена исследованию устойчивости решений по Ляпунову и асимптотической устойчивости. Свободное владение студентами материалом четвертой и пятой глав также входит в число основных задач курса. В шестой главе рассматривается применение операционного исчисления для решения дифференциальных уравнений и систем.

Седьмая глава курса посвящена теории разностных уравнений, которые, как известно, возникают, в частности, тогда, когда некоторая рассматриваемая величина регистрируется через некоторые промежутки времени.

Кроме того, разностные схемы используются для приближенного решения дифференциальных уравнений. Поскольку многие факты теории линейных разностных уравнений полностью аналогичны соответствующим фактам теории линейных дифференциальных уравнений и основное внимание в данной главе уделяется линейным разностным стационарным системам уравнений, то данный раздел курса не должен вызывать у студентов больших затруднений.

В восьмой главе рассматривается теория стохастических дифференциальных уравнений: стохастические интегралы, геометрическое броуновское движение, замена переменных в стохастическом интеграле и некоторые приложения теории стохастических дифференциальных уравнений, в частности метод реальных опционов и образование цены финансовых опционов.

Остальной материал книги посвящен практике. Рассматривается решение различных задач. В конце книги предложены задачи для самостоятельного решения и ответы к ним.

Для усвоения данного курса необходимы знания по математическому анализу, линейной алгебре, теории вероятностей и математической статистике.

В результате изучения данного курса студент должен:

***знать***

- основные понятия теории дифференциальных, разностных и стохастических дифференциальных уравнений;
- основные факты, касающиеся существования, единственности, устойчивости решений.

***уметь***

- решать дифференциальные, разностные и стохастические дифференциальные уравнения;
- анализировать решения на устойчивость.

***владеть***

- методами решения дифференциальных, разностных и стохастических дифференциальных уравнений;
- методами анализа устойчивости решений.

# Введение. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Соотношение вида

$$y^{(n)} = f(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t)), \tag{В.1}$$

где $f$ — функция от $n + 1$ переменных, определенная на множестве $G \subset \subset \mathbb{R} \times Y^n$ и принимающая свои значения в $Y$ ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), будем называть *обыкновенным дифференциальным уравнением*, разрешенным относительно старшей производной. Если $Y = \mathbb{R}$, то соотношение (В.1) называется вещественным дифференциальным уравнением, а если $Y = \mathbb{C}$ — то комплексным дифференциальным уравнением.

Обозначения:

$t$ — независимая переменная (всегда вещественная);

$y$ — неизвестная функция, принимающая свои значения в множестве $Y$ (($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$);

$y', ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}$ — производные этой функции.

Порядок старшей производной ($n$) носит название *порядка уравнения*. Часто $y, y', ..., y^{(n-1)}$ называют фазовыми переменными, $f$ — правой частью уравнения, $G$ — *областью задания* уравнения (В.1), или расширенным фазовым пространством.

**Определение В.1.** Всякая функция, определенная на каком-либо промежутке вещественной оси $\mathbb{R}$ и $n$ раз дифференцируемая на этом промежутке, называется *решением*, если подстановка этой функции и ее производных в уравнение (В.1) обращает его в тождество.

Для краткости часто пишут просто

$$y^{(n)} = f(t, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

**Пример В.1**

Дано уравнение

$$y' = -y^2. \tag{В.2}$$

Здесь $f(t, y) = -y^2$, $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{t}$, $t \in (0; +\infty)$. Эта функция на интервале $(0; +\infty)$ определена, непрерывна и дифференцируема, и подстановка ее в уравнение (В.2) превращает его в тождество, так как

$$y' = -\frac{1}{t^2}.$$

Есть ли другие решения? Ясно, что решениями уравнения (В.2) являются

$$y = \frac{1}{t - C},\ C \in \mathbb{R},\ t \in (-\infty; C);$$

$$y = \frac{1}{t - C},\ C \in \mathbb{R},\ t \in (C; +\infty);$$

$$y \equiv 0,\ t \in (-\infty; +\infty).$$

Других решений нет.

---

Пусть функция $\varphi: I \to Y$ где $I$ — интервал вещественной оси, — решение дифференциального уравнения (В.1).

**Определение В.2.** Множество вида

$$\gamma = \{(t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t), t \in I)\} \subset G \qquad (В.3)$$

называется *интегральной кривой* расширенного фазового пространства $G$. Другими словами, это геометрическое изображение решения.

**Пример В.2**

Вычислить координаты касательного вектора в фиксированной точке $t_0$ и записать уравнение касательной к $\gamma$ в данной точке.

*Решение.* Координаты касательного вектора: $(1, y'(t_0), ..., y^{(n)}(t_0))$ Уравнение касательной к $\gamma$ в точке $t_0$ в параметрической форме:

$$\begin{cases} t = t_0 + 1(t - t_0) = t, \\ y = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0), \\ ... \\ y^{(n-1)} = y^{(n-1)}(t_0) + y^{(n)}(t_0)(t - t_0). \end{cases}$$

При $n = 1$ это просто касательная к графику функции — решения данного дифференциального уравнения.

---

**Задача Коши.** В области задания $G$ фиксируется некоторая точка, она называется начальной точкой, $(t_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$. Требуется найти такое решение $\varphi$ дифференциального уравнения (В.1), которое, во-первых, было бы определено на некотором промежутке $I$, содержащем точку $t_0$, и, во-вторых, такое, что

$$\begin{cases} \varphi(t_0) = y_0, \\ \varphi'(t_0) = y_0', \\ ... \\ \varphi^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \qquad (В.4)$$

Условия (В.4) называются *условиями Коши.*

*Геометрический смысл* задачи Коши: в расширенном фазовом пространстве фиксируется точка, которая называется начальной, и требуется найти решения, которые проходили бы через эту точку.



# Глава 1
# ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Обыкновенное дифференциальное уравнение называется линейным, если функция $f$ линейна относительно всех фазовых переменных. Иными словами, дифференциальное уравнение вида

$y(n) = a_1(t)y + a_2(t)y' + ... + a_n(t)y^{(n-1)} + q(t)$

называется линейным дифференциальным уравнением (ЛУ). Здесь $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$, $q$ определены и непрерывны на некотором промежутке $I \subset \mathbb{R}$, $f$: $G = I \times Y^n \to Y$, $Y = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

**Теорема 1.1 (существования и единственности решения для линейного дифференциального уравнения).** *Для любой начальной точки* $(t_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}) \in G$ *соответствующая задача Коши имеет единственное решение, определенное на промежутке* $I$ (*где определены и непрерывны все коэффициенты и свободные члены*).

Любое другое решение этой задачи Коши является сужением указанного решения на меньший интервал (доказательство будет дано позднее исходя из более общих теорем).

*Замечание 1.1.* Эта теорема для нелинейных задач уже не справедлива.

**Пример 1.1**

Это контрпример, показывающий, что теорема 1.1 для нелинейных задач, вообще говоря, не справедлива.

Рассмотрим следующую задачу Коши. Требуется найти решение дифференциального уравнения

$$y' = -y^2,\ G = \mathbb{R} \times Y^1.$$

Условия Коши: $y(1) = 1$.

Существует следующее решение, проходящее через точку (1; 1): $y = \frac{1}{t}$, $t \in (0; +\infty)$.

Ясно, что оно не единственно. Например, существует решение $y = \frac{1}{t}$, $t \in (0{,}5; 5)$. Здесь единственность решения может быть на разных интервалах.

---

## 1.1. Линейная однородная функция относительно фазовых переменных

Мы будем обозначать через $C(I, Y)$ класс функций, заданных на промежутке $I$, со значениями в $Y$ и непрерывных на $I$. Через $C^n(I, Y)$ мы обозначаем класс функций, определенных на $I$, со значениями в $Y$ и $n$ раз непрерывно дифференцируемых на $I$, т.е. таких функций, у которых на $I$ существует $n$-я производная и она непрерывна на $I$.

При изучении линейных уравнений предпочтительнее другая запись дифференциального уравнения, а именно

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + ... + p_n(t)y = q(t), \tag{1.1}$$

где $p_1, p_2, ..., p_n, q \in C(I, Y)$, $Y = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, для линейного неоднородного уравнения (ЛНУ) и

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + ... + p_n(t)y = 0, \tag{1.2}$$

где $p_1, p_2, ..., p_n \in C(I, Y)$, $Y = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, для линейного однородного уравнения (ЛОУ).

### 1.1.1. Оператор, определяемый линейным однородным уравнением. Линейность пространства решений

Множество всех решений ЛОУ (1.2), определенных на интервале $I$ и принимающих значения в $Y$, будем обозначать $\mathrm{R}_Y$. Таким образом, $\mathrm{R}_Y \subset C^{(n)}(I, Y)$.

Структура линейного пространства на множестве функций вводится следующим образом:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(t) \overset{def}{=} \varphi_1(t) + \varphi_2(t),\ t \in I$$

$$(\alpha\varphi)(t) \overset{def}{=} \alpha\varphi(t),\ t \in I,\ \alpha \in Y.$$

**Определение 1.1.** Рассмотрим отображение $L$: $C^n(I, Y) \to C(I, Y)$, действующее следующим образом. Для любого $y \in C^n(I, Y)$ положим $L(y) = y^n + p_1(t)y^{n-1} + ... + p_n(t)y \in C(I, Y)$. Отображение $L$ называется *оператором*, определенным линейным дифференциальным уравнением (1.2).

Ясно, что $L(\varphi_1 + \varphi_2) = L(\varphi_1) + L(\varphi_2)$, $L(\alpha\varphi) = \alpha L(\varphi)$.

Таким образом, $L$ — линейный оператор и его ядро $\operatorname{Ker} L = R_Y$ — линейное пространство.

### 1.1.2. Матрица Вронского и линейная независимость решений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для линейных уравнений

Для любого $t \in I$ и любых $n$ чисел $y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)} \in Y$ существует единственное решение уравнения (1.1) $\varphi: I \to Y$, такое что $\varphi(t_0) = y_0$, $\varphi'(t_0) = y_0'$, ..., $\varphi^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ (доказательство будет следовать из более общих соображений).

**Определение 1.2.** Рассмотрим семейство функций $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k \in C^{(n)}(I, Y)$. Матрица вида

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & ... & \varphi_k \\ \varphi_1' & \varphi_2' & ... & \varphi_k' \\ ... & ... & ... & ... \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & ... & \varphi_k^{(n-1)} \end{pmatrix}$$



называется *матрицей Вронского*[1] *функций* $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ и обозначается $W(t)$. Если $n = k$, то определитель матрицы Вронского будем называть *вронскианом* и обозначать $w(t)$.

**Теорема 1.2.** *Если* $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k \in C^{(n)}(I, Y)$ и $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ *линейно зависимы, то для любого* $t \in I$ верно, что $\operatorname{rank} W(t) < k$.

***Доказательство.*** Линейная зависимость функций означает, что хотя бы одна из рассматриваемых функций линейно выражается через остальные, например

$$\varphi_k(t) = \alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t) + ... + \alpha_{k-1}\varphi_{k-1}(t),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}$ не зависят от $t$. Продифференцируем это выражение $k-1$ раз. Получим

$$\varphi_k'(t) = \alpha_1\varphi_1'(t) + \alpha_2\varphi_2'(t) + ... + \alpha_{k-1}\varphi_{k-1}'(t)$$

и т. д., вплоть до

$$\varphi_k^{(k-1)}(t) = \alpha_1\varphi_k^{(k-1)}(t) + \alpha_2\varphi_2^{(k-1)}(t) + ... + \alpha_{k-1}\varphi_{k-1}^{(k-1)}(t).$$

Получилось, что столбцы матрицы линейно зависимы при любом $t$.

***Следствие.*** Если ранг матрицы Вронского хотя бы при одном $t$ равен $k$, то функции $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ линейно независимы.

**Теорема 1.3.** *Пусть* $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k \in \mathrm{R}_Y$ *и пусть* $\exists t_0 \in I$: $\operatorname{rank} W(t_0) < k$. *Тогда функции* $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ *линейно зависимы.*

***Доказательство.*** Если при $t_0 \in I$ столбцы матрицы $W(t_0)$ линейно зависимы, то существуют такие $c_1, c_2, ..., c_k \in Y$, не все равные нулю, что

$$\begin{cases} c_1\varphi_1(t_0) + c_2\varphi_2(t_0) + ... + c_k\varphi_k(t_0) = 0, \\ c_1\varphi_1'(t_0) + c_2\varphi_2'(t_0) + ... + c_k\varphi_k'(t_0) = 0, \\ ... \\ c_1\varphi_1^{(n-1)}(t_0) + c_2\varphi_2^{(n-1)}(t_0) + ... + c_k\varphi_k^{(n-1)}(t_0) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$\xi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + ... + c_k\varphi_k.$$

Так построенная функция $\xi$ есть решение уравнения (1.2), и оно удовлетворяет начальным условиям $\xi(t_0) = 0$, $\xi'(t_0) = 0$, ..., $\xi^{(n-1)}(t_0) = 0$.

Тогда по теореме существования и единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения получаем $\xi(t) = 0$ $(t \in I)$. Следовательно, $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ линейно зависимы.

***Следствие из теорем 1.2 и 1.3.*** Для решений $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k \in \mathrm{R}_Y$ справедливо одно из двух:

1) $\forall t \in I$ $\operatorname{rank} W(t) < k$, т.е. $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ линейно зависимы;
2) $\forall t \in I$ $\operatorname{rank} W(t) = k$, т.е. $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ линейно независимы.

[1] Юзеф Вроньский (Wronski, настоящая фамилия Хёне (Hoene), 1776–1853), замечательный польский математик и философ-мистик.

### 1.1.3. Основная теорема о размерности пространства решений линейного однородного уравнения. Пространство решений в случае простых корней характеристического полинома

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение (1.2).

**Теорема 1.4. (о размерности пространства решений ЛОУ).** *Множество всех $Y$-решений, т.е. решений, которые являются функциями со значениями из поля $Y$, определенных на промежутке $I$, линейного однородного уравнения* (1.2) *образует $n$-мерное линейное пространство над $Y$.*

***Доказательство.*** Линейно независимых решений не может быть больше $n$ штук, так как $W(t)$ — матрица $n \times k$ и $\operatorname{rank} W(t) \le n$. Докажем, что найдется $n$ штук линейно независимых решений. Зафиксируем $t_0 \in I$ и, используя теорему существования и единственности решения задачи Коши, построим $n$ решений, удовлетворяющих следующим начальным условиям:

$$\varphi_1(t_0) = 1, \varphi_2(t_0) = 0, ..., \varphi_n(t_0) = 0;$$

$$\varphi_1'(t_0) = 0, \varphi_2'(t_0) = 1, ..., \varphi_n'(t_0) = 0;$$

$$...$$

$$\varphi_1^{(n-1)}(t_0) = 0, \varphi_2^{(n-1)}(t_0) = 0, ..., \varphi_n^{(n-1)}(t_0) = 1.$$

Очевидно, что $\operatorname{rank} W(t_0) = n$, следовательно, $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ линейно независимы.

**Определение 1.3.** Базис в пространстве решений ЛОУ $n$-го порядка (т.е. любые $n$ линейно независимых решений) называется *фундаментальной системой решений*.

*Замечание 1.2.* Если $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ — фундаментальная система решений, то $R_Y = \{C_1\varphi_1 + ... + C_2\varphi_2 + ... + C_n\varphi_n \mid t \in I, C_1, C_2, ..., C_n \in Y\}$. Другими словами, чтобы найти все решения ЛОУ (1.2), достаточно найти $n$ линейно независимых решений.

### 1.1.4. Формула Лиувилля

Рассмотрим $n$ решений $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \in \mathrm{R}_Y$ и для них запишем матрицу Вронского $W(t)$ для любого $t \in I$. Тогда справедлива следующая формула для вронскиана (*формула Лиувилля*):

$$w(t) = \det W(t) = w(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} p_1(\tau)d\tau}, \; t \in I,$$

где $p_1(t)$ — коэффициент при $(n-1)$-й производной в ЛОУ (1.2).

***Доказательство*** формулы Лиувилля. Имеем

$$w(t) = \det W(t) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & ... & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & ... & \varphi_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & ... & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$



Ясно, что $w(t) \in C^1(I, Y)$ Ясно также, что если есть матрица $\{a_i^j(t)\}$ с элементами непрерывными и дифференцируемыми, то производная от определителя равна, очевидно, сумме $n$ штук определителей, в которых все строки, кроме $i$-й, совпадают со строками исходного определителя, а $i$-я отличается от $i$-й строки исходного определителя только тем, что каждый ее элемент заменен его производной. Таким образом,

$$w'(t) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & ... & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & ... & \varphi_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ \varphi_1^{(n-2)} & \varphi_2^{(n-2)} & ... & \varphi_n^{(n-2)} \\ \varphi_1^{(n)} & \varphi_2^{(n)} & ... & \varphi_n^{(n)} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

потому что $n-1$ предыдущих слагаемых все равны нулю, ибо содержат по две одинаковых строки. Но

$$\varphi_j^{(n)} = -p_1(t)\varphi_j^{(n-1)}(t) - p_2(t)\varphi_j^{(n-2)}(t) - ... - p_n(t)\varphi_j(t), j = 1, 2, ..., n, \tag{1.4}$$

так как все $\varphi_j$ являются решениями. Подставим выражения (1.4) в последнюю строку определителя (1.3) для всех $j = 1, 2, ..., n$. Получим

$$w'(t) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & ... & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & ... & \varphi_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ \varphi_1^{(n-2)} & \varphi_2^{(n-2)} & ... & \varphi_n^{(n-2)} \\ -p_1(t)\varphi_1^{(n-1)} & -p_1(t)\varphi_2^{(n-1)} & ... & -p_1(t)\varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = -p_1(t)w(t).$$

Решением дифференциального уравнения $w'(t) = -p_1(t)w(t)$, как легко проверить подстановкой в уравнение, является

$$w(t) = \det W(t) = w(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} p_1(\tau)d\tau}, \; t \in I.$$

## 1.2. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0, \tag{1.5}$$

где $p_1, p_2, ..., p_n \in Y$, $Y = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Областью задания будем считать всю вещественную ось. Л. Эйлер предложил искать фундаментальную систему решений в форме экспонент.

**Определение 1.4.** Рассмотрим функцию $e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$. Подействуем на нее оператором, определенным ЛОУ (1.5). Получим

$$L(e^{\lambda t}) = e^{\lambda t}\{\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n\} = e^{\lambda t}P(\lambda).$$

Полином $P(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n$, где $\lambda$ — комплексная переменная, будем называть *характеристическим полиномом* линейного однородного уравнения (1.5).

**Теорема 1.5.** *Если все корни характеристического полинома* $P(\lambda)$ ЛОУ (1.5) *простые, то* $\Re_Y = \{C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} + ... + C_ne^{\lambda_n t} \mid t \in \mathbb{R}, C_1, C_2, ..., C_n \in \mathbb{C}\}$, *где* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *— корни* $P(\lambda)$.

***Доказательство.*** Ясно, что $e^{\lambda t}$ является решением ЛОУ (1.2) тогда и только тогда, когда $P(\lambda) = 0$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ — все попарно различные корни характеристического многочлена $P(\lambda)$. Тогда, взяв в качестве $\lambda$ числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, получим $n$ решений: $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, ..., e^{\lambda_n t}$. Будут ли они линейно зависимы? Если мы построим матрицу Вронского и покажем, что хотя бы при одном $t$ ее определитель не равен нулю, то они линейно независимы (так как если они линейно зависимы, то вронскиан равен нулю везде). Имеем:

$$W(t) = \left.\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & ... & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & ... & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1}e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{n-1}e^{\lambda_2 t} & ... & \lambda_n^{n-1}e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

— матрица Ван-дер-Монда. Ее определитель отличен от нуля, если $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Значит, если характеристический многочлен имеет $n$ различных корней, то

$$C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} + ... + C_ne^{\lambda_n t},$$

где $t \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2, ..., C_n \in \mathbb{C}$, — все его решения.

### 1.2.1. Линейная независимость квазиодночленов

**Определение 1.5.** *Квазиполином* — это произведение экспоненты на полином, т.е. функция вида $Q(t)e^{\lambda t}$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, а $Q(t)$ — полином над полем вещественных чисел. В частности, квазиодночлен — это произведение экспоненты на одночлен.

Таким образом, экспонента и полином также являются квазиполиномами. При этом степенью квазиполинома называется степень полинома $Q(t)$.

Посмотрим, как меняется порядок квазиполинома при дифференцировании:

$$(Q(t)e^{\lambda t})' = (\lambda Q(t) + Q'(t))e^{\lambda t} = R(t)e^{\lambda t},$$

где $R(t) = \lambda Q(t) + Q'(t)$.

Таким образом, если $\lambda \neq 0$ то $\deg Q = \deg R$, а если $\lambda = 0$, то $\deg Q > \deg R$.



***Лемма 1.1.*** Рассмотрим $m$ штук квазиполиномов

$$Q_1(t)e^{\lambda_1 t}, Q_2(t)e^{\lambda_2 t}, ..., Q_m(t)e^{\lambda_m t},$$

таких что $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ попарно различны. Тогда $\sum_{j=1}^{m} Q_j(t)e^{\lambda_j t} = 0$ тогда и только тогда, когда $Q_1(t) = 0$, $Q_2(t) = 0$, ..., $Q_m(t) = 0$.

***Доказательство.*** Используем метод математической индукции.

Для $m = 1$ утверждение леммы справедливо. Сумма, состоящая из единственного слагаемого, равна нулю, тогда и только тогда, когда это слагаемое равно нулю, а на $e^{\lambda t}$ можно сократить.

Пусть утверждение теоремы верно для некоторого числа $m$. Докажем его для $m + 1$. Предположим, что

$$Q_1(t)e^{\lambda_1 t} + Q_2(t)e^{\lambda_2 t} + ... + Q_m(t)e^{\lambda_m t} + Q_{m+1}(t)e^{\lambda_{m+1} t} \equiv 0. \quad (1.6)$$

Докажем, что $Q_1(t) = Q_2(t) = ... = Q_m(t) = Q_{m+1}(t) = 0$. Для этого умножим выражение (1.6) на $e^{-\lambda_{m+1} t}$. Получим

$$\sum_{j=1}^{m} Q_j(t)e^{\mu_j t} + Q_{m+1}(t) \equiv 0, \;\; \mu_j = \lambda_j - \mu_{m+1}, \; j = 1, 2, ..., m. \quad (1.7)$$

Заметим, что:

1) $\mu_j \neq 0$, $j = 1, 2, ..., m$, потому что $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m, \lambda_{m+1}$ попарно различны;
2) $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$ — попарно различны.

Продифференцировав равенство (1.7) достаточное число раз для того, чтобы полином $Q_{m+1}(t)$ исчез, получим

$$\sum_{j=1}^{m} R_j(t)e^{\mu_j t} \equiv 0,$$

тогда по индукционному предположению $R_j(t) \equiv 0$, $j = 1, 2, ..., m$. Но $\deg R_j = \deg Q_j$, $j = 1, 2, ..., m$, потому что $\mu_j \neq 0$ так как $\lambda_j \neq \lambda_{m+1}$, $j = 1, 2, ..., m$. Значит, $Q_j(t) = 0$, $j = 1, 2, ..., m$. Тогда и $Q_{m+1}(t) = 0$.

***Лемма 1.2.*** Пусть имеется $n$ различных квазиодночленов

$$\{t^{k_j}e^{\lambda_j t} \mid j = 1, 2, ..., n;\; k_j \in \mathbb{N},\; \lambda_j \in \mathbb{C}\}.$$

Тогда они линейно независимы над полем комплексных чисел.

***Доказательство.*** Составим линейную комбинацию $\sum_{j=1}^{n} c_j t^{k_j} e^{\lambda_j t} \equiv 0$.

Не умаляя общности, будем считать, что $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ — это $m$ попарно различных чисел, а $\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, ..., \lambda_n$ — это те, которые повторяются. Соберем коэффициенты при одинаковых $\lambda$:

$$\underbrace{(c_1t^{k_1} + c_{j_1}t^{k_{j_1}} + ...)e^{\lambda_1 t}}_{Q_1(t)} + ... + \underbrace{(c_mt^{k_m} + c_{j_m}t^{k_{j_m}} + ...)e^{\lambda_m t}}_{Q_m(t)} \equiv 0.$$

Здесь $j_1 \in \{m + 1, ..., n\}$ — тот индекс, для которого выполняется равенство $\lambda_{j_1} = \lambda_1$, ..., $j_m \in \{m + 1, ..., n\}$ — тот индекс, для которого выполняется равенство $\lambda_{j_m} = \lambda_m$. Все наши $c_j$ в какую-нибудь скобочку обязательно войдут. Мы имеем $m$ квазиполиномов с различными $\lambda$. По лемме 1.1 все эти полиномы равны тождественно нулю. Рассмотрим первый из них:

$$c_1 t^{k_1} + c_{j_1} t^{k_{j_1}} + \ldots.$$

Очевидно, что $k_1 \neq k_{j_1}$, иначе было бы два одинаковых квазиодночлена, что противоречит условию, поскольку $\lambda$ у них одно и то же. Из тех же соображений все степени одночленов в первой скобке различны. А поскольку все степени разные и сумма равна нулю тождественно, значит, все коэффициенты при этих степенях равны нулю:

$$c_1 = c_{j_1} = \ldots = 0.$$

Те же рассуждения верны и для каждого из оставшихся полиномов $Q_2(t)$, $Q_3(t)$, ..., $Q_m(t)$.

### 1.2.2. Построение комплексной фундаментальной системы решений линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами

***Лемма 1.3.*** Имеет место следующее тождество:

$$L(t^k e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} \sum_{i=0}^{k} C_k^i P^{(i)}(\lambda) t^{k-i},$$

где $L$ — оператор, определенный ЛОУ (1.5); $P^{(i)}(\lambda)$ — $i$-я производная полинома $P(\lambda)$ по $\lambda$.

***Доказательство.*** Заметим, что $\dfrac{\partial^k}{\partial \lambda^k} e^{\lambda t} = t^k e^{\lambda t}$, следовательно,

$$L(t^k e^{\lambda t}) = L\left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} e^{\lambda t}\right) = \left(L \cdot \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\right)(e^{\lambda t}) = \left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\right)(L(e^{\lambda t})) = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}(P(\lambda) e^{\lambda t}).$$

Мы воспользовались тем, что если вторая смешанная производная непрерывна, то можно поменять местами операции дифференцирования, а также тем, что

$$L(e^{\lambda t}) = (\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n) e^{\lambda t} = P(\lambda) e^{\lambda t}.$$

Воспользуемся также формулой Лейбница:

$$\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}(a(\lambda) \cdot b(\lambda)) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \cdot a^{(i)}(\lambda) \cdot b^{(k-i)}(\lambda).$$

Получим

$$L(t^k e^{\lambda t}) = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}(P(\lambda) e^{\lambda t}) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \cdot P^{(i)}(\lambda) \cdot t^{(k-i)} \cdot e^{\lambda t},$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 1.6 (основная теорема Эйлера).** *Пусть $P(\lambda)$ — характеристический многочлен уравнения (1.5) и пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — все его различные корни, а $k_1, k_2, \ldots, k_m$ — их кратности. Тогда набор функций*

$$\{e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t}; \ldots; e^{\lambda_m t}, te^{\lambda_m t}, \ldots, t^{k_m-1}e^{\lambda_m t}\}$$

*является фундаментальной системой решений.*



***Доказательство.*** По основной теореме алгебры $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. По лемме 1.2 все $n$ функций линейно независимы. Остается проверить, что все они — решения. Применим лемму 1.3, подставляя вместо $\lambda$ числа $\lambda_j$ и вместо $k$ числа 0, 1, 2, ..., $k_j - 1$ для всех $j = 1, 2, \ldots, m$. Получим

$$L(t^k e^{\lambda_j t}) = e^{\lambda_j t} \sum_{i=0}^{k} C_k^i P^{(i)}(\lambda_j) t^{k-i} = 0,$$

так как $\lambda_j$ — корень $P(\lambda)$ кратности большей, чем $k$.

### 1.2.3. Построение вещественной фундаментальной системы решений линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами

Допустим, что известны решения уравнения (1.5) и что в его фундаментальной системе решений есть пара комплексно-сопряженных решений. Не умаляя общности, можем считать, что это первые два решения:

$$\{\varphi(t), \overline{\varphi(t)}, \varphi_3(t), \ldots, \varphi_n(t)\}. \tag{1.8}$$

Заменим пару $\varphi(t)$ и $\overline{\varphi(t)}$ на $u = \operatorname{Re}\varphi(t)$, $v = \operatorname{Im}\varphi(t)$. Будут ли они решениями ЛОУ (1.5)? Конечно, будут, потому что

$$u = \frac{\varphi + \overline{\varphi}}{2}, \; v = \frac{\varphi - \overline{\varphi}}{2i},$$

а линейная комбинация решений с постоянными коэффициентами — тоже решение. Проверим, что семейство решений $\{u(t), v(t), \varphi_3(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$ также линейно независимо. Предположим, что $C_1 u + C_2 v + \ldots + C_n \varphi_n = 0$, $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{C}$.

Подставим вместо $u$ и $v$ их выражения через $\varphi(t)$ и $\overline{\varphi(t)}$. Получим

$$C_1\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\overline{\varphi}}{2}\right) + C_2\left(\frac{\varphi}{2i} - \frac{\overline{\varphi}}{2i}\right) + \ldots + C_n\varphi_n = \frac{1}{2}\left(C_1 + \frac{C_2}{i}\right)\varphi + \frac{1}{2}\left(C_1 - \frac{C_2}{i}\right)\overline{\varphi} + \ldots + C_n\overline{\varphi}_n = 0.$$

Тогда по теореме Эйлера все коэффициенты равны нулю:

$$C_1 + \frac{C_2}{i} = 0, C_1 - \frac{C_2}{i} = 0, C_3 = 0, \ldots, C_n = 0.$$

Из первых двух равенств следует, что $C_1 = C_2 = 0$, т.е. все $C_1, C_2, \ldots, C_n$ равны нулю. Таким образом, $\{u(t), v(t), \varphi_3(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$ — фундаментальная система решений, в которой первые два комплексно-сопряженных решения в семействе (1.8) заменены вещественными функциями. Поступая аналогичным образом с каждой парой комплексно-сопряженных решений в фундаментальной системе (1.8), получим вещественную систему решений ЛОУ (1.5).

### 1.2.4. Метод Эйлера

Сначала находят корни характеристического многочлена линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами (1.5). Строится комплексная фундаментальная система решений. Так как характеристический многочлен имел вещественные коэффициенты, то для любого комплексного корня найдется парный ему сопряженный корень той же кратности.

Пусть, например, $\lambda = \alpha + i\beta$ — некоторый комплексный корень кратности $m$. Тогда и $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ — корень кратности $m$. Данным корням соответствует линейно независимое семейство решений $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, ..., t^{m-1}e^{\lambda t}; e^{\bar{\lambda}t}, te^{\bar{\lambda}t}, ..., t^{m-1}e^{\bar{\lambda}t}$. Для каждого $k = 0, 1, ..., m - 1$ имеем: $t^k e^{(\alpha+i\beta)t} = t^k e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$. Если теперь в семействе линейно независимых решений ЛОУ (1.5) заменить пару решений $t^k e^{\lambda t}$ и $t^k e^{\bar{\lambda}t}$ парой $t^k\mathrm{Re}(e^{\lambda t}) = t^k e^{\alpha t}\cos\beta t$ и $t^k\mathrm{Im}(e^{\lambda t}) = t^k e^{\alpha t}\sin\beta t$, то получится снова фундаментальная система решений. И так поступим для каждого $k = 0, 1, ..., m - 1$ для каждой пары комплексно-сопряженных корней. Получится вещественная фундаментальная система решений.

Наличие комплексных корней физически объясняет наличие колебаний у системы.

**Пример 1.2**

Решим уравнение $y^V - 2y^{IV} - 16y' + 32y = 0$.

*Решение.* Выпишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 - 16\lambda + 32 = 0.$$

Разложим левую часть на множители:

$$(\lambda - 2)(\lambda^4 - 16) = 0,$$

или

$$(\lambda - 2)^2(\lambda + 2)(\lambda^2 + 4) = 0.$$

Найдем корни:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = 2i, \lambda_5 = -2i.$$

Получим общее решение

$$y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + C_3e^{-2x} + C_4\cos 2x + C_5\sin 2x.$$

## 1.3. Линейные неоднородные уравнения

### 1.3.1. Структура множества решений и метод вариации произвольной постоянной

Наряду с линейным неоднородным уравнением (1.1), или $L(y) = q(t)$, будем рассматривать соответствующее ему линейное однородное уравнение (1.2), $L(y) = 0$.

**Теорема 1.7.** *Пусть известна* $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ *— фундаментальная система решений уравнения* (1.2) *и существует* $\Psi$ *— решение уравнения* (1.1). *Тогда*

$$\{\Psi + C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + ... + C_n\varphi_n\text{: } C_1, C_2, ..., C_n \in Y\} \qquad (1.9)$$

*— множество всех решений линейного неоднородного уравнения* (1.1).

***Доказательство.*** Считая $C_1, C_2, ..., C_n$ произвольно выбранными и зафиксированными, имеем

$$L\left(\Psi + \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j\right) = L(\Psi) + \sum_{j=1}^{n} C_jL(\varphi_j) = q + 0 = q.$$



Обратно, пусть $\xi$ — любое решение уравнения (1.1), т.е. $L(\xi) = q$. Мы хотим показать, что $\xi$ представимо в виде (1.9). Имеем

$$L(\xi - \Psi) = L(\xi) - L(\Psi) = q - q = 0,$$

значит, $\xi - \Psi \in \mathrm{R}_Y$, т.е. $\xi - \Psi = \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j$, или $\xi = \Psi + \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j$.

**Теорема 1.8 (о вариации произвольной постоянной).** *Пусть* $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ *— фундаментальная система решений уравнения* (1.2). *Тогда* $y = \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j$ *является решением уравнения* (1.1), *если* $C_j \in C^1(I, Y), j = 1, 2, ..., n$, *и их производные удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} C_j'\varphi_j = 0, \\ \sum_{j=1}^{n} C_j'\varphi_j' = 0, \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{n} C_j'\varphi_j^{(n-2)} = 0, \\ \sum_{j=1}^{n} C_j'\varphi_j^{(n-1)} = q. \end{cases}$$

***Доказательство.*** По условию $C_j \in C^1(I, Y)$, $\varphi_j \in C^{(n)}(I, Y)$, $j = 1, 2, ..., n$, поэтому имеем

$$y = \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j \in C^1;$$

$$y' = \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j' + \sum_{j=1}^{n} C_j'\varphi_j = \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j' \in C^1;$$

$$y'' = \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j'' + \sum_{j=1}^{n} C_j'\varphi_j' = \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j'' \in C^1;$$

$$\dots$$

$$y^{(n-1)} = \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j^{(n-1)} + \sum_{j=1}^{n} C_j'\varphi_j^{(n-2)} = \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j^{(n-1)} \in C^1;$$

$$y^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} C_j'\varphi_j^{(n-1)} = \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j^{(n)} + q \in C^1.$$

Умножая первое из равенств на $p_n$, второе — на $p_{n-1}$, третье — на $p_{n-2}$ и т.д., предпоследнее равенство — на $p_1$, последнее — на 1 и складывая, получаем

$$L(y) = \sum_{j=1}^{n} C_jL(\varphi_j) + q = q.$$

Теорема доказана.

**Пример 1.3**

Решим уравнение

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{\cos^2 3x}.$$

*Решение*. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ имеет корень $\lambda = 2$ кратности 2. Фундаментальная система решений однородного уравнения: $\varphi_1(x) = e^{-2x}$, $\varphi_2(x) = xe^{-2x}$. Тогда $\varphi_1'(x) = -2e^{-2x}$, $\varphi_2'(x) = (1-2x)e^{-2x}$. Выпишем систему уравнений относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-2x} + C_2'(x)xe^{-2x} = 0, \\ C_1'(x)(-2)e^{-2x} + C_2'(x)(1-2x)e^{-2x} = \dfrac{e^{-2x}}{\cos^2 3x}. \end{cases}$$

Сокращая на $e^{-2x}$, получаем систему

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)x = 0, \\ C_1'(x)(-2) + C_2'(x)(1-2x) = \dfrac{1}{\cos^2 3x}. \end{cases}$$

Решим систему уравнений методом Крамера:

$$\Delta = 1 - 2x + 2x = 1,\ \Delta_1 = -\frac{x}{\cos^2 3x},\ \Delta_2 = \frac{1}{\cos^2 3x},$$

$$C_1'(x) = -\frac{x}{\cos^2 3x},\ C_2'(x) = \frac{1}{\cos^2 3x}.$$

Тогда

$$C_1(x) = -\int \frac{x}{\cos^2 3x}dx = -\frac{1}{3}\int x d\operatorname{tg} 3x = -\frac{1}{3}x\operatorname{tg}3x + \frac{1}{3}\int \operatorname{tg}3x dx =$$

$$= -\frac{1}{3}x\operatorname{tg}3x - \frac{1}{9}\int\frac{d\cos 3x}{\cos 3x} = -\frac{1}{3}x\operatorname{tg}3x - \frac{1}{9}\ln|\cos 3x| + C_1;$$

$$C_2(x) = \int\frac{dx}{\cos^2 3x} = \frac{1}{3}\operatorname{tg}3x + C_2.$$

Таким образом, решение уравнения равно

$$y(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x) =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}x\operatorname{tg}3x - \frac{1}{9}\ln|\cos 3x| + C_1\right)e^{-2x} + \left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}3x + C_2\right)xe^{-2x}.$$

*Замечание 1.3*. Пользуясь результатом предыдущей теоремы, легко получить явное выражение решения линейного неоднородного уравнения (1.1). Из теоремы 1.8 следует, что

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & \varphi_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \dots \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ q \end{pmatrix}.$$

Так как для любого $t \in I$ вронскиан $\omega(t) \neq 0$, то по теореме Крамера для каждого $j = 1, 2, \dots, n$ получаем



$$C_j' = \frac{A_j^{(n-1)}}{\omega}q,$$

где $A_j^{(n-1)}$ — алгебраическое дополнение элемента $\varphi_j^{(n-1)}$ матрицы Вронского. Следовательно, для любого $j = 1, 2, \dots, n$ верно, что

$$C_j = \int_{t_0}^{t}\frac{A_j^{(n-1)}(\tau)}{\omega(\tau)}q(\tau)d\tau.$$

Очевидно, что подынтегральное выражение непрерывно. Имеем

$$y = \int_{t_0}^{t}\frac{q(\tau)}{\omega(\tau)}\sum_{j=1}^{n}A_j^{(n-1)}(\tau)\varphi_j(t)d\tau = \int_{t_0}^{t}\frac{\det\begin{pmatrix} \varphi_1(\tau) & \varphi_2(\tau) & \dots & \varphi_n(\tau) \\ \varphi_1'(\tau) & \varphi_2'(\tau) & \dots & \varphi_n'(\tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-2)}(\tau) & \varphi_2^{(n-2)}(\tau) & \dots & \varphi_n^{(n-2)}(\tau) \\ \varphi_1(t) & \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \end{pmatrix}}{\omega(\tau)}q(\tau)d\tau.$$

### 1.3.2. Метод неопределенных коэффициентов

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение (1.1) в ситуации, когда $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{C}$ — константы, а правая часть — квазиполином, т.е.

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = Q(t)e^{\alpha t}, \tag{1.10}$$

и пусть $\deg Q = m$. Возможны два случая:

1) $P(\alpha) \neq 0$, т.е. $\alpha$ не является корнем характеристического полинома. Этот случай носит название *нерезонансного*.

2) $P(\alpha) = 0$, т.е. имеет место *резонанс*. Обозначим через $k$ кратность $\alpha$ как корня характеристического полинома: $P(\alpha) = 0$, $P'(\alpha) = 0, \dots, P^{(k-1)}(\alpha) = 0$, $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$ (мы могли и в первом случае ввести кратность, полагая $k = 0$).

***Лемма 1.4.*** Если имеется неоднородное уравнение $L(y) = \sum_{j=1}^{n} q_j$, то можно рассмотреть отдельно для каждого $j$ уравнение $L(y) = q_j$ и если для каждого $j$ найдено решение $\Psi_j$ то в качестве решения исходного уравнения можно взять $\sum_{j=1}^{n}\Psi_j$.

Доказательство леммы 1.4 очевидно.

***Лемма 1.5.*** Пусть $L$ имеет вещественные коэффициенты, $\Psi$ — решение уравнения $L(y) = q$. Тогда $L(\operatorname{Re}\Psi) = \operatorname{Re}q$, $L(\operatorname{Im}\Psi) = \operatorname{Im}q$.

**Пример 1.4**

Пусть правая часть имеет вид $q = \cos(t) = \operatorname{Re}e^{it}$. Тогда находим решение для экспоненты и от полученного решения берем только вещественную часть. Аналогично, для $\sin(t)$.

**Теорема 1.9.** *Существует единственное решение уравнения* (1.10) *вида* $y = R(t)e^{\alpha t}$, *где* $\deg R = m = \deg Q$, *в нерезонансном случае, и* $y = t^k R(t)e^{\alpha t}$, *где* $\deg R = m = \deg Q$, *в резонансном случае* (*можно в обоих случаях применять формулу для резонансного случая, считая, что в нерезонансном случае просто* $k = 0$).

***Доказательство.*** Утверждение теоремы легко следует из метода неопределенных коэффициентов.

**Пример 1.5**

Решим уравнение

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x} + e^{3x}\cos 2x. \tag{1.11}$$

*Решение.* Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$ имеет корень $\lambda = 3$ кратности 2 и корень $\lambda = 0$ кратности 1, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + C_3.$$

Правая часть уравнения (1.11) состоит из двух слагаемых, поэтому нужно искать отдельно частные решения уравнений

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x}; \tag{1.12}$$

$$y''' - 6y'' + 9y' = e^{3x}\cos 2x. \tag{1.13}$$

Число 3 является корнем кратности 2 характеристического уравнения, поэтому частное решение уравнения (1.12) имеет вид

$$y_1 = x^2(ax + b)e^{3x}.$$

Подставив $y_1$ вместо $y$ в уравнение (1.12), найдем $a = 1/18$, $b = -1/18$.

Число $3 + 2i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение уравнения (1.13) имеет вид

$$y_2 = e^{3x}(c\cos 2x + d\sin 2x).$$

Подставив $y_2$ вместо $y$ в уравнение (1.13), найдем $c = -3/52$, $d = -1/26$.

Общее решение уравнения (1.11) равно

$$y = y_0 + y_1 + y_2.$$

# Глава 2
# ВОПРОСЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

## 2.1. Нормальные системы

Рассмотрим *общую систему n* обыкновенных дифференциальных уравнений порядков $m_1, m_2, ..., m_n$:

$$\begin{cases} y_1^{(m_1)}(t) = f_1(t, y_1(t), ..., y_1^{(m_1-1)}(t); ...; y_n(t), ..., y_n^{(m_n-1)}(t)), \\ ... \\ y_n^{(m_n)}(t) = f_n(t, y_1(t), ..., y_1^{(m_1-1)}(t); ...; y_n(t), ..., y_n^{(m_n-1)}(t)), \end{cases} \tag{2.1}$$

где $f_1, f_2, ..., f_n$: $G \to Y$, $G \subseteq R \times Y^{m_1+m_2+...+m_n}$, $y_1, y_2, ..., y_n \in Y$ ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). При этом $G$ называется областью задания, или расширенным фазовым пространством. Все $y$ и все их производные до порядка на единицу меньше старших производных включительно называются *фазовыми переменными*, или *переменными состояния*, или *переменными положения*. Возможны два крайних случая общей системы.

1. Случай $n = 1$. Тогда система (2.1) принимает вид

$$y^{(m)} = f(t, y, y', y'', ..., y^{(m-1)}).$$

и называется *обыкновенным дифференциальным уравнением порядка m*.

2. Случай $m_1 = m_2 = ... = m_n = 1$. Тогда система (2.1) принимает вид

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, ..., y_n), \\ ... \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{2.2}$$

и называется *n-мерной нормальной системой*.

**Определение 2.1.** Набор $n$ функций $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$: $I \to Y$, где $I \subseteq \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, называется *решением системы* (2.1), если подстановка $y_1 = \varphi_1(t)$, ..., $y_n = \varphi_n(t)$, $t \in I$, обращает уравнения системы (2.1) в тождества.

**Определение 2.2.** Подмножество расширенного фазового пространства

$$\gamma = \{(t, \varphi_1(t), \varphi_1'(t), ..., \varphi_n^{(m_n-1)}(t)) : t \in I\} \subset G$$

называется *интегральной кривой*. Это гомеоморфный (взаимно однозначный и взаимно непрерывный) образ отрезка $I$. Кривая $\gamma$ — гладкая, потому что в любой точке существует производная по $t$ от каждой координаты.

**Определение 2.3.** Решение системы называется *максимально продолженным* (полным, непродолжимым), если оно не является сужением на меньший интервал какого-либо решения этой системы.

Обычно понятие эквивалентности систем вводится следующим определением.

**Определение 2.4.** Две системы называются *эквивалентными*, если любое решение первой из них является решением второй и наоборот.

Любая общая система сводится к нормальной простой заменой всех фазовых переменных новыми неизвестными. В связи с этим будем использовать следующее определение эквивалентности систем.

**Определение 2.4′.** Две системы назовем *эквивалентными*, если у них совпадают области определения и одинаковы интегральные кривые.

Ясно, что две системы, эквивалентные согласно второму определению, будут тем более эквивалентны и в соответствии с первым (более общим) определением.

## 2.2. Теорема о сжатом отображении

**Норма оператора.** Зафиксируем в $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение и будем обозначать через $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, $x \in \mathbb{R}^n$, корень из скалярного квадрата $x$.

Пусть $A$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор.

**Определение 2.5.** *Нормой* оператора $A$ называется число

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Геометрически $\|A\|$ означает наибольший коэффициент растяжения преобразования $A$.

**Метрическое пространство операторов.** Множество $L$ всех линейных операторов $A$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ само является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$ (по определению $(A + \lambda B)x = Ax + \lambda Bx$).

Определим *расстояние* между двумя операторами как норму их разности:

$$\rho(A, B) = \|A - B\|.$$

*Метрическим пространством* называется пара, состоящая из множества $M$ и функции $\rho$: $M \times M \to \mathbb{R}$, называемой метрикой, если:

1) $\rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых $x, y \in M$;
3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для любых $x, y, z \in M$.

**Определение 2.6.** Последовательность точек метрического пространства $M$ называется *последовательностью Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N$, что для любых $i, j$, больших $N$, верно, что $\rho(x_i, x_j) < \varepsilon$. Пространство называется *полным*, если всякая последовательность Коши сходится.

**Теорема 2.1.** *Пространство линейных операторов $L$ с метрикой $\rho$ является полным метрическим пространством.*



***Доказательство.*** Непосредственно из определения расстояния между операторами следует, что $\rho > 0$, если $A \neq B$, и $\rho = 0$, если $A = B$, причем $\rho(A, B) = \rho(B, A)$. Неравенство треугольника $\rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(C, B)$ вытекает из неравенства $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$, если положить $X = A - C$, $Y = C - B$. Итак, $\langle L, \rho\rangle$ — метрическое пространство.

Докажем его полноту.

Пусть $\{A_i\}$ — последовательность Коши, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$, такое что $\rho(A_m, A_k) < \varepsilon$ для любых $m, k > N$.

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Составим последовательность точек $x_i \in \mathbb{R}^n$: $x_i = A_i x$. Покажем, что $\{x_i\}$ — последовательность Коши в пространстве $\mathbb{R}^n$, снабженном евклидовой метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Действительно, по определению нормы оператора при $m, k > N$ верно, что

$$\|x_m - x_k\| \leq \rho(A_m, A_k)\|x\| \leq \varepsilon\|x\|.$$

Поскольку $\|x\|$ — фиксированное (не зависящее от $m, k$) число, из последнего неравенства следует, что $\{x_i\}$ — последовательность Коши. Пространство $\mathbb{R}^n$ — полное, поэтому существует предел

$$y = \lim_{i \to +\infty} x_i \in \mathbb{R}^n.$$

Заметим, что $\|x_k - y\| \leq \varepsilon\|x\|$ при $k > N(\varepsilon)$, причем $N(\varepsilon)$ — не зависящее от $x$ число (то же, что и ранее, в начале доказательства).

Точка $y$ зависит от $x$ линейно (предел суммы равен сумме пределов). Мы получаем линейный оператор $A$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $Ax = y$, $A \in L$. Мы видим, что при $k > N(\varepsilon)$ верно, что

$$\rho(A_k, A) = \|A_k - A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|x_k - y\|}{\|x\|} \leq \varepsilon.$$

Значит, $\lim\limits_{k \to +\infty} A_k = A$ и пространство $L$ полно.

**Сжатые отображения.** Пусть $A$: $M \to M$ — отображение метрического пространства $M$ в себя.

**Определение 2.7.** Отображение $A$ называется *сжатым*, если существует постоянная $\lambda$, такая что $0 < \lambda < 1$ и для любых $x, y \in M$ верно, что $\rho(Ax, Ay) < < \lambda\rho(x, y)$.

**Определение 2.8.** Точка $x$ называется *неподвижной* точкой отображения $A$, если $Ax = x$.

**Теорема 2.2 (о сжатых отображениях).** *Пусть $A$: $M \to M$ — сжатое отображение полного метрического пространства $M$ в себя. Тогда $A$ имеет неподвижную точку, и только одну. Для любой точки $x$ из $M$ последовательность образов точки $x$ при применении $A$: $x$, $Ax$, $A^2x$, $A^3x$, ... сходится к неподвижной точке.*

***Доказательство.*** Пусть $\rho(x, Ax) = d$. Тогда $\rho(A^n x, A^{n+1}x) \leq \lambda^n d$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda^n$ сходится, поэтому последовательность $A^n x$, $n = 0, 1, 2, ...$, является последовательностью Коши. Пространство $M$ полно. Поэтому существует предел $X = \lim\limits_{n \to +\infty} A^n x$.

Покажем, что $X$ — неподвижная точка. Заметим, что всякое сжатое отображение непрерывно (можно взять $\delta = \varepsilon$). Поэтому

$$AX = A \lim_{n\to+\infty} A^n x = \lim_{n\to+\infty} A^{n+1} x = X.$$

Покажем, что всякая неподвижная точка $Y$ совпадает с $X$. Действительно,

$$\rho(X, Y) = \rho(AX, AY) \le \lambda\rho(X, Y),$$

где $\lambda < 1$. Следовательно, $\rho(X, Y) = 0$.

## 2.3. Пикаровы приближения

**Векторная запись нормальной системы.** Пусть $y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t)$ — неизвестные скалярные функции вещественной переменной $t$. Обозначим $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ ... \\ y_n(t) \end{pmatrix}$. Производную от $y(t)$ определим покомпонентно: $y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ ... \\ y_n'(t) \end{pmatrix}$. Непрерывность и интегрируемость также будем понимать покомпонентно. Обозначим $f_j(t, y) = f_j(t, y_1, ..., y_n)$, $j = 1, 2, ..., n$, $f(t, y) = \begin{pmatrix} f_1(t, y) \\ ... \\ f_n(t, y) \end{pmatrix}$. Тогда нормальная система (2.2) примет вид векторного дифференциального уравнения

$$y' = f(t, y),\ (t, y) \in G \subseteq \mathbb{R} \times Y^n;\ Y = \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{C}, \tag{2.3}$$

в котором $f$ — векторная функция, $f\colon G \to Y^n$ а $y(t) \in Y^n$ — неизвестная векторная функция. В дальнейшем будем называть уравнение (2.3) $n$-мерным векторным дифференциальным уравнением, или для краткости просто дифференциальным уравнением. Решением дифференциального уравнения (2.3) будем называть всякую функцию $y = \varphi(t)$, $t \in I$, $\varphi\colon I \to Y^n$, такую что $\varphi'(t) \equiv f(t, \varphi(t))$ для любого $t \in I$. Множество $\gamma = \{(t, \varphi(t))\colon t \in I\}$ будем, как и ранее, называть интегральной кривой.

Задача Коши в векторной записи выглядит следующим образом. Пусть $(t, y_0) \in G$. Требуется найти решение уравнения (2.3), такое что

$$y\big|_{t=t_0} = y_0. \tag{2.4}$$

**Определение 2.9.** Говорят, что решение $\varphi\colon I \to Y^n$ (векторного) дифференциального уравнения (2.3) с начальным условием (2.4) *определено на максимальном промежутке существования*, если задача Коши (2.3) — (2.4) не имеет решений, являющихся продолжением $\varphi$ на больший интервал.



Очевидно, что решения, определенные на максимальном промежутке существования, являются максимально продолженными, или полными, решениями.

**Отображение Пикара.** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v(t, x), \tag{2.5}$$

заданное в некоторой области расширенного фазового пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть правая часть дифференциального уравнения (2.5) определена и дифференцируема (класса $C^r$, $r \ge 1$) в области $U$ расширенного фазового пространства: $U \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$.

**Определение 2.10.** Назовем *отображением Пикара* отображение $A$, переводящее функцию $\varphi\colon t \in \mathbb{R} \to x \in \mathbb{R}^n$ в функцию $A\varphi\colon t \in R \to x \in \mathbb{R}^n$, где

$$(A\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau, \varphi(\tau))d\tau.$$

Геометрически переход от $\varphi$ к $A\varphi$ означает построение по кривой $(\varphi)$ новой кривой $(A\varphi)$, касательная к которой при каждом $t$ параллельна данному полю направлений, но не на самой кривой $(A\varphi)$ — тогда $A\varphi$ было бы решением, — а в соответствующей точке кривой $(\varphi)$. Имеем:

$$\varphi \text{ — решение с начальными условиями } \varphi(t_0) = x_0 \Leftrightarrow \varphi = A\varphi.$$

**Приближения Пикара.** Последовательным *приближением Пикара* называются функции, определенные следующим рекуррентным способом:

$$\varphi^{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau, \varphi^k(\tau))d\tau.$$

Рассмотрим последовательность *приближений Пикара*, начав с $\varphi \equiv x_0$. Возьмем любую точку $(t_0, x_0) \in U$. Цилиндр $Cil = \{t, x\colon |t - t_0| \le a, |x - x_0| \le b\}$ при достаточно малых $a$ и $b$ лежит в области $U$. Обозначим через $C$ и $L$ верхние грани величин $|v|$ и $|v'|$ на этом цилиндре, где $v'$ обозначает производную $v$ по $x$ (т.е. матрицу Якоби). Верхние грани достигаются, так как цилиндр компактен: $|v| \le C$, $|v'| \le L$.

Рассмотрим конус $K_0$ с вершиной $(t_0, x_0)$ высотой $a'$ и раствором $C$:

$$K_0 = \{t, x\colon |t - t_0| \le a', |x - x_0| \le C|t - t_0|\}.$$

Если число $a'$ достаточно мало, то этот конус целиком лежит в цилиндре $Cil$. Внутри цилиндра лежит также всякий конус $K_x$, полученный из $K_0$ параллельным перенесением вершины в точку $(t_0, x)$ где $|x - x_0| \le b'$ при достаточно малом $b'$.

Будем считать, что $a'$ и $b'$ выбраны столь малыми, что $K_x \in Cil$. Решение $\varphi$ уравнения (2.5) с начальным условием $\varphi(t_0) = x$ будем искать в виде $\varphi(t) = x + h(t, x)$.

Соответствующая интегральная кривая будет лежать внутри конуса $K_x$.

**Метрическое пространство *M*.** Рассмотрим всевозможные непрерывные отображения $h$ цилиндра $|x - x_0| \le b'$, $|t - t_0| \le a'$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Через $M$ обозначим множество отображений, удовлетворяющих еще условию

$$|h(t,x)| \le C|t-t_0| \tag{2.6}$$

(в частности, $h(t_0, x) = 0$).

Введем в $M$ метрику, полагая

$$\rho(h_1,h_2) = \|h_1 - h_2\| = \max_{\substack{|x-x_0|\le b',\\ |t-t_0|\le a'}} |h_1(t,x) - h_2(t,x)|.$$

**Теорема 2.3.** *Множество $M$, снабженное метрикой $\rho$, является полным метрическим пространством.*

***Доказательство.*** Равномерно сходящаяся последовательность непрерывных функций сходится к непрерывной функции. Если допредельные значения функции удовлетворяли неравенству (2.6), то и предельная функция удовлетворяет неравенству (2.6) с той же константой $C$.

Заметим, что пространство $M$ зависит от трех положительных чисел $a'$, $b'$, $C$.

## 2.4. Локальная теорема существования и единственности решения задачи Коши

**Условие Липшица.** Пусть $A$: $M_1 \to M_2$ — отображение метрического пространства $M_1$ (с метрикой $\rho_1$) в метрическое пространство $M_2$ (с метрикой $\rho_2$) и $L$ — положительное вещественное число.

**Определение 2.11.** Отображение $A$ удовлетворяет *условию Липшица с постоянной* $L$ (пишется $A \in \mathrm{Lip}L$), если оно увеличивает расстояние между двумя точками $M_1$ не более чем в $L$ раз: $\rho_2(Ax, Ay) \le L\rho_1(x, y)$ для любых $x, y \in M_1$.

Если отображение $A$ таково, что у каждой точки $x$ метрического пространства $M_1$ найдется такая окрестность $U_x$, для которой выполняется условие Липшица с некоторой постоянной $L_x$, т.е. для любых $y, z \in U_x$ верно, что $\rho_2(Ax, Ay) \le L_x\rho_1(x, y)$, то мы будем говорить, что отображение $A$ удовлетворяет *локальному условию Липшица* (пишется $A \in \mathrm{locLip}$).

**Сжатое отображение** $A$: $M \to M$. Определим отображение $A$: $M \to M$ следующим образом:

$$(Ah)(t,x) = \int_{t_0}^{t} v(\tau, x + h(\tau,x))d\tau. \tag{2.7}$$

В силу неравенства (2.6) точка $(\tau, x + h(\tau, x)) \in K_x$ и, следовательно, принадлежит области определения поля $v$.

**Теорема 2.4.** *Если значение $a'$ достаточно мало, то выражение* (2.7) *задает сжатое отображение пространства $M$ в себя.*

***Доказательство.*** 1. Покажем, что $A$ переводит $M$ в себя. Функция $Ah$ непрерывна, так как интеграл непрерывно зависящей от параметра непрерывной функции непрерывно зависит от параметра и от верхнего предела. Имеем:



$$|(Ah)(t,x)| \le \left|\int_{t_0}^{t} v(\tau, x + h(\tau,x))d\tau\right| \le \left|\int_{t_0}^{t} C dt\right| \le C|t - t_0|.$$

Таким образом, $AM \subset M$.

2. Покажем, что отображение $A$ сжато, т.е. $\|Ah_1 - Ah_2\| \le \lambda\|h_1 - h_2\|$ при некотором $0 < \lambda < 1$. Действительно,

$$(Ah_1 - Ah_2)(t,x) = \int_{t_0}^{t} (v_1 - v_2)d\tau,$$

где $v_i = v(\tau, x + h_i(\tau, x))$, $i = 1, 2$. Но $v(\tau, x)$ при фиксированном $\tau$ удовлетворяет условию Липшица (по второму аргументу) с постоянной $L$. Поэтому

$$|v_1(\tau) - v_2(\tau)| \le L|h_1(\tau, x) - h_2(\tau, x)| \le L\|h_1 - h_2\|.$$

Тогда

$$|(Ah_1 - Ah_2)(t,x)| \le \left|\int_{t_0}^{t} L\|h_1 - h_2\|d\tau\right| \le La'\|h_1 - h_2\|.$$

При $La' < 1$ отображение сжато.

**Теорема 2.5 (локальная теорема существования и единственности решения задачи Коши).** *Пусть правая часть дифференциального уравнения* (2.5) *непрерывно дифференцируема в окрестности точки* $(t_0, x_0)$ *расширенного фазового пространства. Тогда у точки $t_0$ есть такая окрестность, что в этой окрестности определено и единственно решение уравнения* (2.5) *с начальным условием $\varphi(t_0) = x$, где $x$ — любая достаточно близкая к $x_0$ точка, причем это решение непрерывно зависит от начальной точки $x$.*

***Доказательство.*** *Существование.* Сжатое отображение $A$ по теореме о сжатом отображении имеет неподвижную точку $h \in M$. Положим

$$g(t,x) = x + h(t,x).$$

Тогда

$$g(t,x) = x + \int_{t_0}^{t} v(\tau, g(\tau,x))d\tau$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial t} = v(t, g(t,x)).$$

Мы видим, что $g$ при фиксированном $x$ удовлетворяет уравнению (2.5), а при $t = t_0$ — начальному условию $g(t_0, x) = x$. Функция $g$ непрерывна, так как $h \in M$.

*Единственность.* Пусть $\varphi_1$ и $\varphi_2$ — пара решений с общим начальным условием $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$, определенных при $|t - t_0| < a$. Пусть $0 < a' < a$. Положим

$$\|\varphi\| = \max_{|t-t_0|<a'} |\varphi(t)|.$$

Имеем

$$\varphi_1(t)-\varphi_2(t)=\int\limits_{t_0}^{t}(v(\tau,\varphi_1(\tau))-v(\tau,\varphi_2(\tau)))d\tau.$$

При достаточно малом $a'$ точки $(\tau, \varphi_1(\tau))$, $(\tau, \varphi_2(\tau))$ лежат в цилиндре, где $v \in \mathrm{Lip}L$. Поэтому $\|\varphi_1 - \varphi_2\| \le La'\|\varphi_1 - \varphi_2\|$, откуда при $La' < 1$ следует $\|\varphi_1 - \varphi_2\| = 0$. Итак, решения $\varphi_1$ и $\varphi_2$ в некоторой окрестности точки $t_0$ совпадают.

*Замечание 2.1.* Из доказательства теоремы очевидно, что вместо условия непрерывной дифференцируемости функции $v$ в некоторой окрестности точки $(t_0, x_0)$ расширенного фазового пространства достаточно было потребовать выполнения условия Липшица по фазовой переменной в этой окрестности.

*Замечание 2.2.* Условие непрерывности функции $v(t, x)$ в окрестности точки $(t_0, x_0)$ гарантирует существование решения задачи Коши, а условие непрерывности $v'_x(t, x)$ в окрестности точки $(t_0, x_0)$ — его единственность.

**Пример 2.1**

Рассмотрим задачу Коши $x' = \sqrt[3]{x^2}$, $x(0) = 0$.

*Решение.* Функция $v(t,x)=\sqrt[3]{x^2}$ непрерывна на всей плоскости, а для

$$v'_x(t,x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

непрерывность нарушается во всех точках вида $(t; 0)$. Таким образом, в окрестности начальной точки $(0; 0)$ условия теоремы 2.5 не выполняются. Легко проверить, что поставленная задача Коши имеет два решения: $x_1 \equiv 0$ и $x_2 = \frac{1}{27}t^3$.

**Пример 2.2**

Рассмотрим задачу Коши $x' = -\frac{t}{x}$, $x(0) = 0$.

*Решение.* Непрерывность функции $v(t,x) = -\frac{t}{x}$ нарушается во всех точках вида $(t; 0)$. Интегрируя заданное дифференциальное уравнение, получаем

$$\int x\,dx = -\int t\,dt,$$

откуда находим общее решение дифференциального уравнения

$$t^2 + x^2 = C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, не существует решения задачи Коши с начальными условиями $x(0) = 0$.

**Пример 2.3**

Рассмотрим задачу Коши $x' = \frac{x}{t}$, $x(0) = 0$.

*Решение.* Интегрируя заданное дифференциальное уравнение, получаем

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dt}{t},$$



откуда находим общее решение дифференциального уравнения

$$x = Ct,\ C \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, все решения дифференциального уравнения для любого $C$ проходят через точку $(0; 0)$(бесконечно много решений задачи Коши).

## 2.5. Глобальная теорема существования и единственности решения задачи Коши

Используя локальную теорему существования и единственности решения задачи Коши, рассмотрев открытое покрытие интегральной кривой и склеив локальные решения, не представляет большого труда получить доказательство следующей глобальной теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

**Теорема 2.6 (глобальная теорема существования и единственности решения задачи Коши).** *Рассматривается система* (2.3), *и пусть $G$ — открытое множество в $\mathbb{R} \times Y^n$ и $f \in C(G, Y^n)$. Кроме того, предположим, что функция $f$ удовлетворяет локальному условию Липшица по фазовой переменной в $G$. Тогда любая задача Коши имеет единственное максимально продолженное решение и любое другое решение задачи Коши является сужением этого максимально продолженного решения на меньший интервал.*

*Замечание 2.3.* Из непрерывной дифференцируемости $f$ по фазовым переменным следует выполнение локального условия Липшица, $f \in \mathrm{loc\ Lip}_y(D)$.

*Замечание 2.4.* Из глобальной теоремы существования и единственности решения задачи Коши следует, что интервал, на котором существует максимально продолженное решение, всегда открыт.

Сведение системы общего вида (2.1) к нормальной системе (2.2) дает нам следующую теорему для общих систем.

**Теорема 2.7 (глобальная теорема существования и единственности решения задачи Коши для общих систем).** *Если $G$ — открытое множество расширенного фазового пространства и функции $f_1, f_2, ..., f_n$ непрерывны вместе со своими частными производными по фазовым переменным, то любая задача Коши имеет единственное максимально продолженное решение. Любое другое решение является сужением указанного решения на меньший интервал.*

Приведем без доказательства следующую теорему о поведении максимально продолженных решений линейной системы.

**Теорема 2.8.** *Пусть изучается система* (2.3) *с начальным условием* (2.4) *и теми же ограничениями: открытость $G$, функция $f$ непрерывна и удовлетворяет в $G$ локальным условиям Липшица по фазовой переменной. Пусть $\varphi$: $I \to Y^n$ — максимально продолженное решение задачи Коши* (2.3) — (2.4). *Тогда при $t$, стремящемся к какому-либо концу интервала $I$, соответствующая точка графика решения $\varphi$ покидает любой компакт, лежащий в $G$. Таким образом, если $I = (\alpha; \beta)$, то для любого компакта $\overline{D} \subset G$ найдутся такие значения $\alpha'$ и $\beta'$, что $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$ и для любого $t \in (\alpha; \alpha') \cup (\beta'; \beta)$ верно, что $(t, \varphi(t)) \notin \overline{D}$.*

**Определение 2.12.** Нормальная система (2.1) называется *почти линейной*, если выполнены два условия:

1) область $G$ имеет специальный вид: $G = I \times Y^n$;

2. На интервале $I$ существуют неотрицательные непрерывные вещественные (скалярные) функции $M(t)$ и $N(t)$, такие что для любой пары $(t, y) \in G$ верно, что

$$\|f(t, y)\| \le M(t)\|y\| + N(t).$$

**Теорема 2.9 (о максимально продолженном решении почти линейной системы).** *Пусть выполнены условия глобальной теоремы существования и единственности решения задачи Коши и пусть система* (2.1) *является почти линейной. Тогда любое максимально продолженное решение этой системы определено на промежутке I.*

*Замечание 2.5.* Другими словами, у почти линейных систем все максимально продолженные решения определены на одном интервале, а именно, на интервале задания уравнения. У нелинейных и не почти линейных систем могут быть разные максимально продолженные решения на разных интервалах.

# Глава 3
# ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

## 3.1. Векторная запись линейной системы. Существование и единственность решения

Система обыкновенных дифференциальных уравнений называется линейной, если ее правая часть линейна относительно фазовых переменных. Достаточно изучать *линейные нормальные* системы, потому что при преобразовании общей линейной системы к нормальной линейность сохраняется.

Рассмотрим линейную нормальную систему

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(t, y_1, y_2, ..., y_n) = p_1^1(t)y_1 + ... + p_1^n(t)y_n + q_1(t), \\ ... \\ \dot{y}_n = f_n(t, y_1, y_2, ..., y_n) = p_n^1(t)y_1 + ... + p_n^n(t)y_n + q_n(t), \end{cases}$$

где $p_i^j, q \in C(I, Y), i = 1, ..., n, j = 1, ..., n;$ $I$ — интервал на вещественной оси; $Y = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Удобно перейти к матричной записи

$$\dot{y} = P(t)y + q(t), \tag{3.1}$$

где $P(t) = \{p_i^j\}_{i,\, j=1,\, ...,\, n}$, $q(t)$ — вектор-столбец свободных членов,

$$q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ ... \\ q_n(t) \end{pmatrix}, \; y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ ... \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \; \dot{y}(t) = \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ ... \\ \dot{y}_n(t) \end{pmatrix},$$

$P(t)$, $q(t)$ заданы и непрерывны на $I \subset \mathbb{R}$.

Из глобальной теоремы существования и единственности решения задачи Коши (теорема 2.6) и теоремы о максимально продолженном решении почти линейной системы (теорема 2.9) вытекает следующая теорема.

**Теорема 3.1 (существования и единственности решения задачи Коши для *n*-мерной линейной системы).** *Какую бы начальную точку* $(t_0; y_0) \in G = I \times Y^n$ *для задачи Коши мы ни взяли, существует единственное решение соответствующей задачи Коши, определенное на интервале I. Более того, любое другое решение этой задачи Коши является сужением указанного решения на меньший интервал.*

*Замечание 3.1.* Другими словами, задача Коши для линейной системы имеет решение на интервале непрерывности коэффициентов и свободного члена.

Рассмотрим пример, показывающий, что, например, для уравнения Бернулли дело обстоит иначе. Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(t)y = q(t)y^{\alpha},\ \alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1.$$

**Пример 3.1**

Рассмотрим следующую задачу Коши. Дано уравнение Бернулли

$$y' + 2y = y^2e^t$$

и начальные условия $y(0) = 2$. Интервалом, на котором непрерывны все коэффициенты рассматриваемого уравнения и его правая часть, является вся вещественная ось, т.е. $(-\infty;\ +\infty)$. Нетрудно убедиться, что решением данной задачи Коши является функция

$$y = \frac{1}{e^x - \frac{1}{2}e^{2x}}.$$

Однако это решение существует только на интервале $(-\infty;\ \ln 2)$.

## 3.2. *n*-мерная линейная однородная система

Параллельно с линейной неоднородной (ЛНС) системой (3.1) будем рассматривать линейную однородную систему (ЛОС)

$$\dot{y} = P(t)y. \tag{3.2}$$

### 3.2.1. Основная теорема о размерности пространства решений

Обозначим через $\Re_Y$ множество всех максимально продолженных решений ЛОС$_n$ (3.2). Их непрерывная дифференцируемость следует из системы (3.2), поэтому $\Re_Y \in C^1(I, Y^n)$.

**Теорема 3.2 (основная теорема о размерности пространства решений).** *$\Re_Y$ является n-мерным линейным пространством над Y.*

***Доказательство.*** Заметим, что сумма двух решений и результат умножения решения на константу тоже являются решением системы (3.2). Это проверяется подстановкой их в систему (3.2). Нулевым элементом пространства решений является функция, тождественно равная нулю на $I$.

Зафиксируем элемент $t_0 \in I$ и построим такое отображение $l: \Re_Y \to Y$, которое действует по следующему правилу: $l(\varphi) = \varphi(t_0)$. Тогда $l(0) = 0$ и для любых $a_1, a_2 \in Y$ верно, что $l(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = (a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2)(t_0) = a_1\varphi_1(t_0) + a_2\varphi_2(t_0) = a_1 l(\varphi_1) + a_2 l(\varphi_2)$ т.е. $l$ — гомоморфизм линейных пространств.

По теореме существования и единственности решения задачи Коши для любого $y_0 \in Y^n$ найдется такое решение $\varphi$ системы (3.2), что $\varphi(t_0) = y_0$. Значит, $l$ — эпиморфизм.

Пусть $l(\varphi_1) = l(\varphi_2)$, т.е. $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0) = y_0$, где $\varphi_1, \varphi_2$ — решения системы (3.2). Тогда по теореме существования и единственности $\varphi_1 = \varphi_2$. Значит, $l$ — мономорфизм.

Итак, $l$ — изоморфизм, $R_Y \approx Y^n$, в частности $\dim R_Y = n$.



***Следствие 1.*** Решения $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ системы (3.2) являются линейно независимыми тогда и только тогда, когда векторы $\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), ..., \varphi_n(t_0)$ линейно независимы.

**Определение 3.1.** Базис в пространстве решений $R_Y$ (т.е. $n$ линейно независимых решений) называется *фундаментальной системой решений*.

***Следствие 2.*** Если $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ — фундаментальная система решений, то $\Re_Y = \{C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + ... + C_n\varphi_n: C_1, C_2, ..., C_n \in Y\}$.

Другими словами, если $y$ — решение системы (3.2), то найдутся такие $C_1, C_2, ..., C_n \in Y$, что $y = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + ... + C_n\varphi_n(t),\ t \in I$.

### 3.2.2. Матрицы решений

**Определение 3.2.** Всякая $(n \times k)$-матрица $\Psi(t),\ t \in I$, называется *матрицей решений* системы (3.2), если ее столбцы являются решениями этой системы.

**Определение 3.3.** Если столбцы матрицы решений образуют фундаментальную систему решений, то матрица называется *фундаментальной матрицей решений*.

**Теорема 3.3.** *$(n \times k)$-матрица $\Psi(t),\ t \in I$, является матричным решением системы* (3.2) *тогда и только тогда, когда $\dot{\Psi}(t) = P(t)\Psi(t)$ для любого $t \in I$.*

Доказывать здесь нечего, это просто матричная формулировка.

**Теорема 3.4.** *$(n \times n)$-матрица решений $\Phi(t)$ является фундаментальной матрицей тогда и только тогда, когда* $\det\Phi(t) \neq 0$ для любого $t \in I$.

***Доказательство.*** Данный результат непосредственно вытекает из следствия 1 основной теоремы о размерности пространства решений.

**Теорема 3.5.** *Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица решений системы* (3.2). *Тогда множество матриц вида $\{\Phi(t)S$: $S$ — постоянная $(n \times k)$-матрица с элементами из поля $Y\}$ есть множество всех $(n \times k)$-матриц решений.*

***Доказательство.*** Утверждение теоремы очевидно, если рассматривать число алгебраически.

**Теорема 3.6.** *Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица решений. Тогда множество матриц вида $\{\Phi(t)S$: $S$ — постоянная невырожденная $(n \times n)$-матрица$\}$ есть множество всех фундаментальных матриц решений.*

***Доказательство.*** 1. Для любой постоянной $(n \times n)$-матрицы $S$ по теореме 3.5 $\Phi S$ — тоже решение. Но матрица $S$ — невырожденная, следовательно, $\Phi S$ — тоже невырожденная. А любая невырожденная матрица — фундаментальная матрица решений.

2. Пусть $\tilde{\Phi}$ — любая фундаментальная матрица решений. Тогда по теореме 3.5 $\tilde{\Phi} = \Phi S$, $S$ — некая постоянная матрица. Но тогда $S = \Phi^{-1}\tilde{\Phi}$, т.е. $S$ — невырожденная постоянная матрица, таким образом, $\tilde{\Phi}$ действительно представима как $\Phi S$, где $S$ не вырождена.

*Следствие.* Если $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица решений, то $\Re_Y = \{\Phi(t)C: C \in Y^n\}$.

## 3.3. Линейные неоднородные системы

**Теорема 3.7.** *Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица решений системы* (3.2) *и пусть $\Psi(t)$ — какое-нибудь решение системы* (3.1). *Тогда множество $\{\Psi(t) + \Phi(t)C,\ t \in I,\ C \in Y^n\}$ — множество всех решений системы* (3.1).

***Доказательство.*** Проверим, что любой элемент рассматриваемого множества действительно является решением системы (3.1):

$$\frac{d}{dt}(\Psi+\Phi C)=P\Psi+q+P\Phi C=P(\Psi+\Phi C)+q.$$

Обратно, пусть $\xi(t)$, $t\in I$, — какое-нибудь решение системы (3.1). Тогда

$$\dot{\xi}(t)=P(t)\xi(t)+q(t).$$

Так как и $\xi$, и $\Psi$ — решения системы (3.1), то $\frac{d}{dt}(\Psi-\xi)=P(\Psi-\xi)$, т.е. $\Psi-\xi$ — решение системы (3.2), или $\Psi-\xi\in\mathfrak{R}_Y$. Столбцы матрицы $\Phi$ образуют базис $\mathfrak{R}_Y$, следовательно, $\Psi-\xi$ — линейная комбинация этих столбцов, значит, существует такой вектор $C\in Y^n$, что $\Psi-\xi=\Phi C$, т.е. $\xi=\Psi-\Phi C$. Теорема доказана.

**Теорема 3.8 (метод вариации произвольной постоянной).** *Пусть* $\Phi(t)$ — *какая-нибудь фундаментальная матрица системы* (3.2). *Тогда векторная функция* $y=\Phi(t)C(t)$, $t\in I$, *такая что* $C(t)$ — *непрерывно-дифференцируемая на* $I$ *векторная функция и имеет место тождество*

$$\Phi(t)\dot{C}(t)=q(t), \tag{3.3}$$

*является решением системы* (3.1).

***Доказательство.*** Имеем

$$\frac{d}{dt}(\Phi(t)C(t))=\dot{\Phi}C+\Phi\dot{C}=P\Phi C+q,$$

т.е. $\Phi C$ удовлетворяет системе (3.1), что и требовалось доказать.

## 3.4. Линейные однородные системы *n*-го порядка с постоянной матрицей

Рассмотрим линейную однородную систему $n$-го порядка с постоянной матрицей (ЛОС$_n$ с ПМ)

$$\dot{y}=Ay, \tag{3.4}$$

где $A=\{a_i^j\}_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,n}$, $a_i^j\in Y$. Пусть пока $Y=\mathbb{C}$.

Метод, восходящий к Эйлеру, — это попытка искать решение в виде экспонент.

### 3.4.1. Построение фундаментальных систем решений в случае простых собственных чисел матрицы *A*

Однако искать решение в виде $y=e^{\lambda t}$ мы не можем, эта запись в случае системы уравнений была бы бессмысленной, поэтому будем искать решение в виде $y=e^{\lambda t}S$, где $S$ — постоянный вектор. Наша цель — подобрать $\lambda$ и $S$ так, чтобы это было решением, а можно ли это сделать — пока не знаем.



Случай $S=0$ не интересен нам, это очевидное нулевое решение. Область задания — вся вещественная ось, по $t$ от $-\infty$ до $+\infty$. Имеем

$$y=e^{\lambda t}S,\ S\neq 0. \tag{3.5}$$

Тогда $\dot{y}=\lambda e^{\lambda t}S$ и, следовательно, $\lambda e^{\lambda t}S=Ae^{\lambda t}S$.

Таким образом, выражение (3.5) является решением системы (3.4) тогда и только тогда, когда $\lambda S=AS$, т.е.

$$(A-\lambda E)S=0. \tag{3.6}$$

Уравнение (3.6) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда

$$\det(A-\lambda E)=0, \tag{3.7}$$

т.е. если $\lambda$ — собственное число матрицы $A$, или корень характеристического полинома. Очевидно, что все собственные векторы образуют линейное пространство, так как сложение и умножение на число дают также собственный вектор. Обозначим I — множество всех решений уравнения $BS=0$. Тогда $\mathrm{I}=\{S\in C^n\colon BS=0\}=\mathrm{Ker}B$.

Многочлен $\det(A-\lambda E)$ принято обозначать $P(\lambda)$ и называть характеристическим многочленом.

*Замечание 3.2.* Если ЛОУ$_n$ свести к ЛОС$_n$ и написать для ЛОС$_n$ характеристический многочлен, то он будет тем же, что и характеристический многочлен ЛОУ$_n$.

Пусть $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ — все различные собственные числа матрицы $A$, а $S^1$, $S^2,\dots,S^n$ — соответствующие собственные векторы. Тогда $e^{\lambda_i t}S_i$ — решения, их $n$ штук. Будут ли решения линейно независимы? Они линейно независимы, если и только если линейно независимы для любого $t$ соответствующие векторы. Пусть $t=0$, тогда решения при $t=0$ — это соответственно $S^1,S^2,\dots,S^n$, и они линейно независимы, потому что это собственные векторы, отвечающие различным собственным числам, и их $n$ штук, а размерность пространства решений равна $n$, так что это базис пространства решений. Следовательно, любое решение системы (3.4) $y(t)$ имеет вид $y(t)=C_1e^{\lambda_1 t}S^1+\ldots+C_ne^{\lambda_n t}S^n$ для некоторых $C^1,\dots,C^n\in\mathbb{C}$.

### 3.4.2. Матричные ряды

**Определение 3.4.** *Нормой* матрицы $B=\{b_i^j\}_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,k}$ назовем вещественное число $\|B\|=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{k}|b_i^j|$.

В частности, для столбца получим $b=\begin{pmatrix}b_1\\ \dots\\ b_n\end{pmatrix}$, $\|b\|=\max\limits_i|b_i|$, а для строки $a=(a^1,\dots,a^k)$ получается $\|a\|=\sum\limits_{j=1}^{k}|a^j|$.

*Замечание 3.3.* При таком определении нормы матрицы для любого вектора $S$ и любой матрицы $B$ имеем $\|BS\|\le\|B\|\cdot\|S\|$.

Рассмотрим последовательность $(n \times n)$-матриц $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ .

**Определение 3.5.** Говорят, что эта последовательность *сходится* к матрице $A$, если $\| A_n - A \| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

В нашем конечномерном случае совершенно очевидно, что это равносильно покомпонентной сходимости:

$$(a_i^j)_n - a_i^j \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,\ i = 1, 2, ..., n;\ j = 1, 2, ..., k.$$

Говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится к матрице $A$, если эти частные суммы сходятся к $A$, т.е. если $\sum_{k=1}^{m} A_k \xrightarrow[m\to+\infty]{} A$.

Будем рассматривать матричные степенные ряды $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$, $A^0 = E$. С каждым матричным рядом связан формальный скалярный комплексный степенной ряд: вместо матрицы $A$ подставим комплексную переменную $Z$:

$$f(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k \tag{3.8}$$

и будем обозначать этот ряд $f(Z)$. Нам не важно, сходится он или нет. А матричный ряд будем, соответственно, обозначать $f(A)$. Через $\rho$ обозначим радиус сходимости ряда (3.8). Таким образом, $0 \le \rho \le +\infty$.

Если $\rho = 0$, то ряд называется расходящимся.

Одно из определений экспоненты — $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$, $\rho = +\infty$.

**Определение 3.6.** Пусть $A$, $B$ — $(n \times n)$-матрицы. Говорят, что матрицы $A$ и $B$ *подобны*, $A \sim B$, если $A = SBS^{-1}$, где $S$ — невырожденная матрица.

Таким образом, все матрицы разбиваются отношением подобия на классы эквивалентности.

***Лемма 3.1.*** Если $A \sim B$, то ряды $f(A)$ и $f(B)$ сходятся или расходятся одновременно и в случае сходимости имеет место соотношение $f(A) = Sf(B)S^{-1}$.

***Доказательство.*** Рассмотрим частные суммы этих рядов:

$A^0 = SB^0S^{-1}$ — очевидно;

$A^1 = SB^1S^{-1}$ — дано;

...

$A^k = SB^kS^{-1}$ — индукционное предложение.

Тогда

$$A^{k+1} = A^kA = SB^kS^{-1} \times SBS^{-1} = SB^{k+1}S^{-1}.$$

Значит,

$$\sum_{k=0}^{m} a_k A^k = \sum_{k=0}^{m} a_k (SB^kS^{-1}) = S\left(\sum_{k=0}^{m} a_k B^k\right)S^{-1}.$$

Теперь видим, что эти суммы сходятся или расходятся одновременно, и в случае сходимости перейдем к пределу. Лемма доказана.



***Лемма 3.2.*** Пусть матрица $B$ имеет квазидиагональный вид:

$$B = \operatorname{diag}\{B_1, B_2, ..., B_m\} = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_m \end{pmatrix}.$$

Ряд $f(B)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится каждый из рядов $f(B_i)$ для каждого блока отдельно. Более того, в случае сходимости имеет место соотношение

$$f(B) = \operatorname{diag}\{f(B_1), ..., f(B_m)\}.$$

***Доказательство.*** Заметим, что $B^k$ — тоже блочно-диагональная матрица, у которой вдоль главной диагонали будут стоять степени блоков (можно это проверить методом математической индукции). Поэтому $a_kB^k = \operatorname{diag}\{a_kB_1^k, ..., a_kB_m^k\}$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n} a_k B^k = \operatorname{diag}\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k B_1^k, ..., \sum_{k=0}^{n} a_k B_m^k\right\}$$

и переходим к пределу. Лемма доказана.

По теореме Жордана[1] в каждом классе подобных матриц найдется матрица в жордановой форме. Клетка Жордана имеет вид

$$\Lambda = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & ... & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{r}.$$

Мы выбрали верхнедиагональную форму и обозначили клетку Жордана (жорданову клетку) через $\Lambda$. В частности, если $r = 1$, то жорданова клетка — это просто число $\lambda$.

***Лемма 3.3.*** Пусть $\Lambda = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & ... & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{r}$ — клетка Жордана и пусть $\rho$ — радиус сходимости степенного ряда $f(Z)$. Тогда:

1) если $|\lambda| < \rho$ (т.е. собственное число находится внутри круга сходимости), то матричный степенной ряд $f(\Lambda)$ сходится;

2) если $|\lambda| > \rho$ (собственное число за кругом сходимости), то ряд $f(\Lambda)$ расходится.

***Доказательство.*** Для доказательства леммы надо просто выписать, чему равно $f(\Lambda)$.

[1] См., например: *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч II. Линейная алгебра : учебник. М. : Физматлит, 2000.

**Теорема 3.9.** *Если все собственные числа матрицы A находятся внутри круга сходимости, то $f(A)$ сходится. Если какое-либо собственное число матрицы A лежит вне круга сходимости, то $f(A)$ расходится.*

***Доказательство.*** Пусть $A$ — произвольная матрица, $\Lambda$ — ее жорданова форма. Утверждение теоремы следует теперь из лемм 3.1, 3.2, 3.3.

### 3.4.3. Экспоненциально-матричные ряды. Общий вид матрицы $e^{tJ}$, где $J$ — жорданова форма матрицы

**Определение 3.7.** *Матричной экспонентой* назовем следующий матричный степенной ряд:

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Пусть $A$ — $(n \times n)$-матрица, $J$ — жорданова форма матрицы $A$, $A = SJS^{-1}$, $S$ — матрица перехода. Тогда $tA = S(tJ)S^{-1}$ и, следовательно, $e^{tA} = Se^{tJ}S^{-1}$ (по лемме 3.1). Пусть $J = \mathrm{diag}\{\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_m\}$, согласно теореме Жордана каждая клетка $\Lambda_k$ имеет вид

$$\Lambda_k = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & \lambda_k & 1 \\ 0 & ... & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}}_{r_k},$$

где порядок матрицы $r_k$ не превосходит кратности соответствующего собственного числа $\lambda_k$. По лемме 3.2

$$e^{tJ} = \mathrm{diag}\{e^{t\Lambda_1}, e^{t\Lambda_2}, ..., e^{t\Lambda_m}\} = \begin{pmatrix} e^{t\Lambda_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{t\Lambda_2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & e^{t\Lambda_m} \end{pmatrix}.$$

Посмотрим, что представляет собой один блок $e^{t\Lambda_i}$. Опустим индекс у $\Lambda_i$ и рассмотрим просто жорданову клетку $\Lambda$ порядка $r$. Она представляет собой сумму двух матриц

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & ... & ... \\ ... & ... & ... & 1 \\ 0 & 0 & ... & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + Z,$$

где $Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$



Тогда $Z^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$, ..., $Z^{r-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$, $Z^r = 0$.

И все последующие степени также нулевые. В матричном случае формула $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ справедлива, только если перемножение матриц $A$ и $B$ коммутативно, а в нашем случае это именно так. Таким образом,

$$e^{t\Lambda} = e^{t\lambda E + tZ} = e^{t\lambda E}e^{tZ} = e^{t\lambda}Ee^{tZ} = e^{t\lambda}e^{tZ}.$$

В этой цепочке равенств, очевидно, каждый следующий член сходится тогда и только тогда, когда сходится предыдущий. Рассмотрим отдельно сомножитель $e^{tZ}$:

$$e^{tZ} = E + \frac{t}{1!}Z + \frac{t^2}{2!}Z^2 + ... + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}Z^{r-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & ... & \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & ... & \frac{t^{r-3}}{(r-3)!} & \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & ... & \frac{t^{r-4}}{(r-4)!} & \frac{t^{r-3}}{(r-3)!} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$e^{t\Lambda} = e^{t\lambda}e^{tZ} = e^{t\lambda}\left(E + \frac{t}{1!}Z + \frac{t^2}{2!}Z^2 + \ldots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}Z^{r-1}\right) =$$

$$= e^{t\lambda}\begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & ... & \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & ... & \frac{t^{r-3}}{(r-3)!} & \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & ... & \frac{t^{r-4}}{(r-4)!} & \frac{t^{r-3}}{(r-3)!} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В частности, если $r = 1$, то $e^{t\Lambda} = e^{t\lambda}(1) = (e^{t\lambda})$.

### 3.4.4. Фундаментальная матрица решений линейной однородной системы с постоянной матрицей в виде матричной экспоненты

При решении линейной однородной системы с постоянными коэффициентами огромную роль будет играть ряд

$$e^{tA}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k.$$

**Теорема 3.10.** *Матричная экспонента $e^{tA}$ является фундаментальной системой решений линейной однородной системы* (3.4) *с постоянной матрицей.*

***Доказательство.*** Во-первых, заметим, что элементами матрицы $e^{tA}$ являются квазиполиномы, т.е. непрерывно-дифференцируемые функции. Во-вторых, проверим, что $e^{tA}$ — матрица решений системы (3.4), т.е. каждый ее столбец является решением. Вычислим производную от $e^{tA}$:

$$\frac{d}{dt}e^{tA}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{(t+\Delta t)A}-e^{tA}}{\Delta t}.$$

Абсолютно сходящиеся непрерывно-дифференцируемые ряды можно почленно дифференцировать. Кроме того, в тех случаях, когда перемножение матриц коммутативно, постоянный сомножитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{(t+\Delta t)A}-e^{tA}}{\Delta t}=\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{\Delta tA}-E}{\Delta t}\right)e^{tA}.$$

Рассмотрим ряд, стоящий в числителе дроби в последнем выражении:

$$e^{\Delta tA}-E=E+\frac{\Delta t}{1!}A+\frac{(\Delta t)^2}{2!}A^2+\ldots-E=\frac{\Delta t}{1!}A+\frac{(\Delta t)^2}{2!}A^2+\ldots=\Delta t\left(A+\frac{\Delta t}{2!}A^2+\ldots\right).$$

Тогда

$$\frac{e^{\Delta tA}-E}{\Delta t}=A+\Delta t\left(\frac{1}{2!}A^2+\frac{\Delta t}{3!}A^3+\ldots\right)\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}A.$$

Таким образом, $\frac{d}{dt}e^{tA}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{e^{(t+\Delta t)A}-e^{tA}}{\Delta t}=Ae^{tA}$, т.е., подставляя $y=e^{tA}$ в систему (3.4), получаем тождество. Значит, $e^{tA}$ — матрица решений системы (3.4).

Заметим, что матрица решений $e^{tA}$ при $t=0$ не вырождена, потому что $e^{tA}\big|_{t=0}=E$. Следовательно, $e^{tA}$ — фундаментальная матрица решений системы (3.4).

*Замечание 3.4.* Поскольку $e^{tA}$ — фундаментальная матрица решений системы (3.4), а $S$ — невырожденная матрица, то $e^{tA}S$ — также фундаментальная матрица решений системы (3.4). Но $e^{tA}S=Se^{tJ}$, поэтому самый простой способ решить систему (3.4) — это привести матрицу $A$ к жордановой форме и выписать фундаментальную матрицу решений $Se^{tJ}$.



**Пример 3.2**

Решим систему

$$\begin{cases}\dot x=2x+y+z,\\ \dot y=-2x-z,\\ \dot z=2x+y+2z.\end{cases}\qquad(3.9)$$

*Решение.* Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 1\\ -2 & -\lambda & -1\\ 2 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0;\qquad(3.10)$$

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=\lambda_3=1.$$

Для простого корня $\lambda_1=2$ находим собственный вектор $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$, решая систему уравнений

$$\begin{cases}\beta+\gamma=0,\\ -2\alpha-2\beta-\gamma=0,\\ 2\alpha+\beta=0\end{cases}$$

(коэффициенты этой системы равны элементам детерминанта (3.10) при $\lambda=2$). Находим

$$2\alpha=-\beta=\gamma.$$

Значит, вектор $\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 2\end{pmatrix}$ — собственный и

$$\begin{cases}x=e^{2t},\\ y=-2e^{2t},\\ z=2e^{2t}\end{cases}$$

— частное решение системы (3.9).

Для кратного корня $\lambda=1$ сначала найдем собственный вектор, решая систему уравнений

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0,\\ -2\alpha-\beta-\gamma=0,\\ 2\alpha+\beta+\gamma=0\end{cases}$$

(коэффициенты этой системы равны элементам детерминанта (3.10) при $\lambda=1$). Находим $\alpha=0$, $-\beta=\gamma$. Значит, вектор

$$\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}\qquad(3.11)$$

— собственный. Найдем присоединенный вектор, решая систему уравнений

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0,\\ -2\alpha-\beta-\gamma=1,\\ 2\alpha+\beta+\gamma=-1\end{cases}$$

(коэффициенты этой системы равны элементам детерминанта (3.10) при $\lambda = 1$, а правые части представляют собой компоненты найденного собственного вектора (3.11)).

Находим $\alpha = -1$, $\beta = 1 - \gamma$. Значит, вектор $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ — присоединенный для собственного вектора (3.11). Таким образом, жорданова форма матрицы системы (3.9) имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а матрица перехода к жорданову базису

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Следовательно, фундаментальная матрица решений системы

$$Se^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & -e^t \\ -2e^{2t} & e^t & (t+1)e^t \\ 2e^{2t} & -e^t & -te^t \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы (3.9) имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{2t} - C_3 e^t, \\ y(t) = -2C_1 e^{2t} + C_2 e^t + C_3 (t+1) e^t, \\ z(t) = 2C_1 e^{2t} - C_2 e^t - C_3 t e^t. \end{cases}$$

---

**Пример 3.3**

Решим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = 5x + 2y. \end{cases}$$

*Решение*. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0,\ \lambda = 3 \pm 2i.$$

Для корня $\lambda = 3 + 2i$ найдем собственный вектор $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, решая систему

$$\begin{cases} (1-2i)a - b = 0, \\ 5a - (1+2i)b = 0. \end{cases}$$

Можно взять $a = 1$, $b = 1 - 2i$. Имеем частное решение

$$\begin{cases} x = e^{(3+2i)t}, \\ y = (1-2i)e^{(3+2i)t}. \end{cases} \qquad (3.12)$$



Так как данная система — с вещественными коэффициентами, то решение, соответствующее корню $\lambda = 3 - 2i$, является комплексно сопряженным с найденным решением.

Жорданова форма матрицы исходной системы имеет диагональный вид:

$$J = \begin{pmatrix} 3+2i & 0 \\ 0 & 3-2i \end{pmatrix},$$

матрица перехода к жорданову базису

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-2i & 1+2i \end{pmatrix},$$

поэтому

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{3+2i} & 0 \\ 0 & e^{3-2i} \end{pmatrix},\ Se^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{3+2i} & e^{3-2i} \\ (1-2i)e^{3+2i} & (1+2i)e^{3-2i} \end{pmatrix},$$

общее решение имеет вид

$$\begin{cases} x = \tilde{C}_1 e^{3+2i} + \tilde{C}_2 e^{3-2i}, \\ y = \tilde{C}_1 (1-2i) e^{3+2i} + \tilde{C}_2 (1+2i) e^{3-2i}, \end{cases}$$

где $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ — комплексные числа.

Чтобы получить вещественное решение, надо взять вещественную и мнимую части найденного комплексного решения (3.12). Так как

$$e^{3+2i} = e^{3t}(\cos 2t + i\sin 2t),$$

то вещественная фундаментальная система решений имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \operatorname{Re} e^{(3+2i)t} = e^{3t}\cos 2t, \\ y_1 = \operatorname{Re}(1-2i)e^{(3+2i)t} = e^{3t}(\cos 2t + 2\sin 2t); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \operatorname{Im} e^{(3+2i)t} = e^{3t}\sin 2t, \\ y_2 = \operatorname{Im}(1-2i)e^{(3+2i)t} = e^{3t}(\sin 2t - 2\cos 2t). \end{cases}$$

Общее вещественное решение выражается через два найденных линейно независимых решения:

$$\begin{cases} x = C_1 x_1 + C_2 x_2 = C_1 e^{3t}\cos 2t + C_2 e^{3t}\sin 2t, \\ y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{3t}(\cos 2t + 2\sin 2t) + C_2 e^{3t}(\sin 2t - 2\cos 2t). \end{cases}$$

---

# Глава 4
# АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ

## 4.1. Основные свойства автономных систем

**Определение 4.1.** *Автономной* системой называется система дифференциальных уравнений (векторное дифференциальное уравнение) вида

$$\dot{y} = F(y), y \in M \subseteq \mathbb{R}^n, \tag{4.1}$$

где $M$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $F \in C^1(M)$.

Таким образом, автономной системой называется система дифференциальных уравнений вида (4.1), у которой $F$, т.е. правая часть уравнения, явно не зависит от независимой переменной. Максимально продолженное решение уравнения (4.1), удовлетворяющее начальным условиям $y(t_0) = y_0$, будем обозначать через $\varphi(t, t_0, y_0)$, $t \in I(t_0, y_0) \subseteq \mathbb{R}$, где $I(t_0, y_0)$ — максимальный промежуток существования решения данной задачи Коши.

*Траекторией* решения мы называем множество точек фазового пространства вида $L_{y_0} = \{\varphi(t, t_0, y_0)\colon t \in I(t_0, y_0)\}$, а *интегральная кривая* данного решения — это множество точек расширенного фазового пространства вида $\{t, \varphi(t, t_0, y_0)\colon t \in I(t_0, y_0)\}$.

Если есть некоторое решение дифференциального уравнения, задающее некоторое движение в расширенном фазовом пространстве, то образ этого движения в фазовом пространстве мы называем фазовой траекторией движения. Другими словами, фазовая траектория — это проекция интегральной кривой в фазовое пространство.

Ясно, что траектория зависит только от $y_0$, но не от начального момента $t_0$. Поэтому, рассматривая траектории решений $\varphi(t, 0, y_0)$, начинающиеся с $y_0$ при $t = 0$, мы получим все траектории, начинающиеся с $y_0$. Другими словами, множество всех траекторий, начинающихся в $y_0$, получится, если мы рассмотрим только решения

$$L_{y_0} = \{\varphi(t - t_0, 0, y_0)\colon t - t_0 \in I(0, y_0) = I(y_0)\}.$$

## 4.2. Точки покоя

Перечисление различных видов решений, задаваемых ими движений и соответствующих траектории фазового пространства приведем в виде следующей таблицы соответствия (табл. 4.1).



*Таблица 4.1*

**Соответствие решений, движений и траекторий**

| Решение $\Phi_{y_0}(t)$ | Движение $\Phi_{y_0}(t)$ | Траектория $L_{y_0}$ |
|---|---|---|
| 1. Постоянное $\Phi_{y_0}(t) \equiv y_0$ | Покой | $\{y_0\}$ — точка покоя |
| 2. Периодическое. Существует $\omega > 0$, такое что $\Phi_{y_0}(t+\omega) = \Phi_{y_0}(t)$ | Периодическое, или колебания | Замкнутая траектория (цикл) $L_{y_0} = \{\Phi_{y_0}(t)\colon t \in [0; \omega]\}$ |
| 3. Непериодическое | Непериодическое, или переходное | Незамкнутая траектория |

**Теорема 4.1.** *Точка* $p \in M$ *является точкой покоя системы* (4.1) *тогда и только тогда, когда* $F(p) = 0$.

***Доказательство.*** *Необходимость.* Если $p$ — точка покоя то $\Phi(t, 0, p) \equiv p$, следовательно, $F(p) = 0$.

*Достаточность.* Рассмотрим постоянную функцию $\Psi(t) \equiv p$, $t \in \mathbb{R}$, где $p$ удовлетворяет условию $F(p) = 0$. Ясно, что $\Psi(t)$ — решение системы (4.1):

$$0 = \dot{\Psi}(t) = F(p) = 0.$$

Это решение начинается в $p$ в момент $t = 0$ в силу единственности решения задачи Коши, других решений с таким начальным условием не бывает.

Точку покоя автономной системы будем также называть *особой*, или *стационарной, точкой* данной системы уравнений.

**Линеаризация автономных систем в окрестности точки покоя.** Пусть $p$ — точка покоя системы (4.1), это означает, что $y(t) \equiv p$ — решение системы (4.1), по определению точки покоя. В силу теоремы 4.1 это равносильно условию $F(p) = 0$.

Обозначим $y = p + z$. Тогда функция $z(t)$ удовлетворяет следующему (векторному) уравнению:

$$\dot{z} = F(p+z), \quad F \in C^1(M). \tag{4.2}$$

Тогда

$$\dot{z} = F(p) + \frac{\partial F}{\partial y} \times \left.\frac{\partial (p+z)}{\partial z}\right|_{y=p} \times z + g(z),$$

или

$$\dot{z} = \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=p} \times z + g(z),$$

где $\dfrac{\| g(z) \|}{\| z \|} \xrightarrow[\|z\| \to 0]{} 0.$

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=p} \cdot z. \tag{4.3}$$

Переход от системы (4.2) к системе (4.3) называется *линеаризацией*.

## 4.3. Классификация Пуанкаре

Пусть $\varphi(t, y_0)$, $t \in I(y_0) = I(0, y_0)$ — максимально продолженное решение задачи Коши для автономной системы (4.1) дифференциальных уравнений $\dot{y} = F(y)$, где $F\colon M \to \mathbb{R}^n$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $F \in C^1(M)$, $M$ — открыто в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, $\varphi(0, y_0) = y_0$.

**Определение 4.2.** Точка покоя $p$ называется *простой*, если

$$\det \frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{y=p} \neq 0. \qquad (4.4)$$

Так как определитель матрицы равен произведению ее собственных чисел, то условие (4.4) равносильно отсутствию у матрицы Якоби $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=p}$ собственных чисел, равных нулю.

Будем рассматривать простые точки покоя.

В дальнейшем в главе в качестве иллюстрирующего примера рассмотрим систему уравнений

$$\dot{Z} = AZ,\ Z \in \mathbb{R}^2 \qquad (4.5)$$

(однородную линейную автономную систему). У матрицы $A$ существует жорданова форма: $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, и $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ или $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Пусть жорданова форма вещественная. Тогда в новых координатах система принимает вид $\dot{u} = Ju$, или

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \lambda_1 u_1 + \varepsilon u_2, \\ \dot{u}_2 = \lambda_2 u_2. \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда $\varepsilon = 0$. Тогда общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} u_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}, \\ u_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}, \end{cases}$$

или, с учетом начальных условий $u_{10}$, $u_{20}$,

$$\begin{cases} u_1 = u_{10} e^{\lambda_1 t}, \\ u_2 = u_{20} e^{\lambda_2 t}. \end{cases}$$

Тогда $u_{10} = u_{20} = 0$ — точка покоя (рис. 4.1).

Рассмотрим различные случаи.

I. Собственные числа вещественны.

*Случай 1.* Собственные числа имеют разные знаки: $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. Пусть для определенности $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$. Фазовый портрет нашей системы в новых координатах приведен на рис. 4.2.



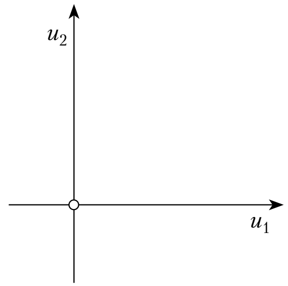
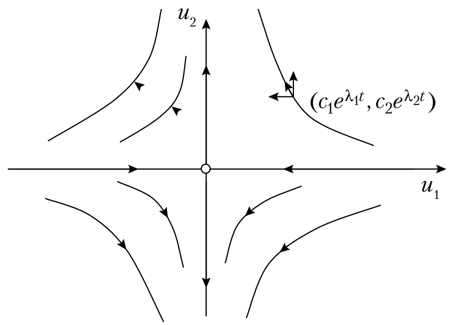



*Рис. 4.1*




(0,0) – точка неустойчивая

*Рис. 4.2*

Траектории, показанные на рис. 4.2 (соответствующие случаю $\lambda_1 \lambda_2 < 0$), называются гиперболическими. Исключим из уравнений $t$. Получим

$$u_1 = c_1 e^{\lambda_1 t},\ u_2 = c_2 e^{\lambda_2 t};$$

$$\frac{u_1}{c_1} = e^{\lambda_1 t},\ \frac{u_2}{c_2} = e^{\lambda_2 t};$$

$$\left(\frac{u_1}{c_1}\right)^{\lambda_2} = \left(\frac{u_2}{c_2}\right)^{\lambda_1};$$

$$u_2 = c_2 \left(\frac{u_1}{c_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1}.$$

Почти все решения — гиперболические. Гиперболические траектории разделяют траектории, направленные по осям.

Такая постоянная точка, как в нашем случае, называется *седло*. В случае седла имеется четыре гиперболических сектора (с гиперболическими траекториями), а траектории, которые разбивают плоскость на четыре сектора, называются *сепаратриссы* (от *separe* — разбивать, отделять). Итак, у нас четыре сепаратриссы, в том числе две устойчивые и две неустойчивые. Фазовый портрет в исходных координатах приведен на рис. 4.3.

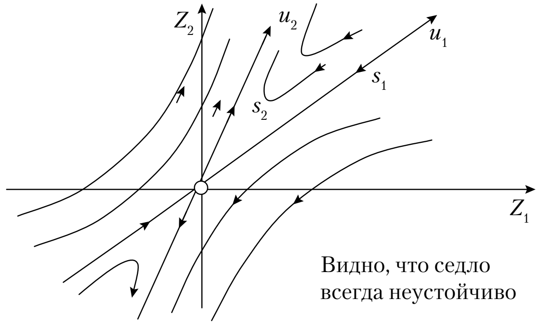



*Рис. 4.3*

*Замечание 4.1.* Предположим, что система (4.5) — результат линеаризации некоторой исходной автономной системы в окрестности точки покоя. Что изменится, если мы теперь восстановим исходную систему, т.е. припишем к системе (4.5) нелинейную часть: $\dot{Z} = AZ + g(Z)$? Существенно ничего не изменится. Сепаратриссы те же, чуть-чуть искривятся, но изменения будут второго порядка малости. Углы те же при входе в точку покоя, но уже не лучи, а какие-нибудь линии. А вдали от точки покоя может быть все что угодно.

Траектория входит в точку покоя, касаясь луча. То направление, по которому траектория входит в точку покоя, называется *исключительным*. Сепаратриссы линейной системы при входе в точку покоя направлены вдоль собственных векторов матрицы $A$.

*Случай 2.* Собственные числа имеют одинаковые знаки: $\lambda_1\lambda_2 > 0$.

В этом случае возможны следующие варианты.

а) Собственные числа различны: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ Жорданова форма имеет вид $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Когда перейдем на плоскость $(u_1, u_2)$ получится тот же вид уравнения, но с положительным показателем степени: $\dfrac{u_2}{c_2} = \left(\dfrac{u_1}{c_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1}$.

Пусть для определенности $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. Фазовый портрет в плоскости $(u_1, u_2)$ приведен на рис. 4.4.

Траекториями являются не сами параболы, а только их ветки. Когда вернемся на плоскость $(Z_1, Z_2)$ оси поменяются, углы между ними необязательно останутся прямыми (рис. 4.5, 4.6).

Направление, которого касаются все траектории, называется *ведущим*. Оно соответствует тому $\lambda$, которое по модулю меньше. Рисунок 4.5 соответствует случаю $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Для случая $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ (рис. 4.6) стрелки направлены противоположно. Это то же самое, что у системы заменить $t$ на $-t$ (обратить время). Возможно ли это в реальности — вопрос теоретической физики и поэтому выходит далеко за рамки нашего курса[1].

[1] См. по этому вопросу, например: *Хокинг С.* Краткая история времени от Большого взрыва до черных дыр. Амфора, 1989.



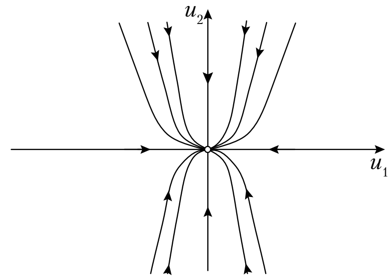



*Рис. 4.4*

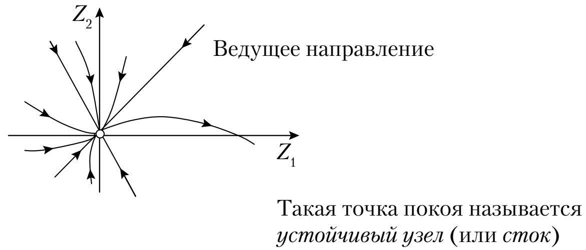



*Рис. 4.5*

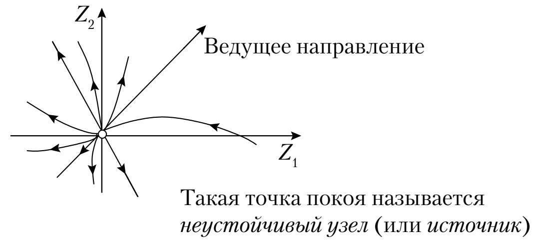



*Рис. 4.6*

В случае если оба собственных числа вещественны и отрицательны, мы имеем *устойчивый узел*, или *сток* (см. рис. 4.5). Если аналогичная картинка, но с противоположным направлением стрелок, то *неустойчивый узел*, или *источник* (см. рис. 4.6).

И седло, и узел — некритические случаи устойчивости.

б) Собственные числа вещественны и равны между собой: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Тогда жорданова форма может быть $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ либо $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Если $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E$, то траектории — всевозможные лучи, в том числе и оси координат.

Этот узел называется *декритическим*. У него траектория — вдоль любого направления (рис. 4.7).

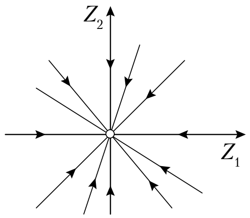



*Рис. 4.7*

В этом случае $A = SJS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Другими словами, этот случай бывает тогда и только тогда, когда матрица $A$ сразу имеет вид $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Второй случай, когда $A \neq \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. В этом случае есть решение $e^{\lambda t}V$, где $V$ — собственный вектор матрицы $A$, а все остальные — как показано на рис. 4.8. Такой узел называется *вырожденным*. Возьмем обычный узел и начнем сближать $\lambda_1$ и $\lambda_2$, тогда их лучи тоже сближаются. Или нарисуем их очень близкими. И вот крайний случай, два пространства как бы слились, оно (пространство) — одно двукратное.

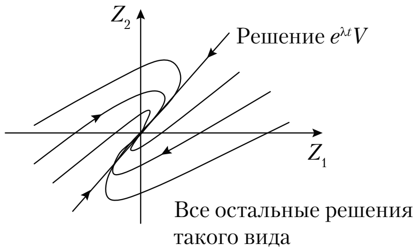



*Рис. 4.8*

Чтобы понять, как устроены траектории, просто выпишем решение. В координатах $(u_1, u_2)$ система примет вид

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} u.$$

Общее решение данной системы $u = e^{\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} t} C$, где $u$, $C$ — векторы. Таким образом, $u = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C$ — множество всех решений, или в координатной форме



$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix};$$
$$u_1(t) = e^{\lambda t}(c_1 + tc_2),$$
$$u_2(t) = e^{\lambda t}c_2.$$

Тогда

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{c_1}{c_2} + t; \;\; e^{\lambda t} = \frac{u_2}{c_2}; \;\; \lambda t = \ln\frac{u_2}{c_2}; \;\; t = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{u_2}{c_2};$$
$$u_1 = u_2\left(\frac{c_1}{c_2} + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{u_2}{c_2}\right).$$

*Замечание 4.2*. Пусть нелинейная автономная система имеет вид

$$\dot{Z} = AZ + g(Z), \tag{4.6}$$

причем $g(Z) = o(\|Z\|^{1+\varepsilon})$. Рассмотрим линеаризованную систему

$$\dot{Z} = AZ,$$

которая совпадает с системой (4.5).

Для узлов и седел А. Пуанкаре доказал, что вблизи точки покоя фазовый портрет системы (4.6) будет совпадать с фазовым портретом системы (4.5) с точностью до величин второго порядка малости. Направление входа в точку покоя и сам тип точки покоя для системы (4.6) также будут совпадать с направлением входа в точку покоя и типом точки покоя системы (4.5). Таким образом, узлы и седла являются грубыми, или структурно-устойчивыми, точками покоя. Сохраняется вся структура поведения, не только тип устойчивости. Поэтому данные системы можно возмущать малыми возмущениями.

Итак, если $\lambda_1$, $\lambda_2$ вещественны, то стационарная точка — узел или седло:

- узел, когда $\lambda_1\lambda_2 > 0$ ($\det A > 0$);
- седло, когда $\lambda_1\lambda_2 < 0$ ($\det A < 0$).

II. Собственные числа — комплексно сопряженные числа: $\lambda_{1,\,2} = \alpha \pm i\beta$ ($\beta > 0$).

Не умаляя общности, считаем, что матрица $A$ уже приведена к жордановой форме, т.е. $A = J$, $\dot{Z} = JZ$.

Рассмотрим систему с матрицей $B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, т.е. $\dot{u} = Bu$. Докажем, что $J \sim B$. Запишем характеристическое уравнение матрицы $B$, найдем ее собственные числа и жорданову форму:

$$\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + \beta^2 = 0;$$
$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha^2 - \beta^2} = \alpha \pm i\beta;$$
$$J = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix}.$$

Следовательно, существует такая невырожденная матрица $S$, что $J = SBS^{-1}$. Тогда

$$Z = Su;\; \dot{Z} = S\dot{u};$$
$$S\dot{u} = JSu;\; \dot{u} = S^{-1}JSu = Bu.$$

Матрица $B$ называется вещественной жордановой формой. Мы перешли на плоскость $(u_1, u_2)$ (рис. 4.9).

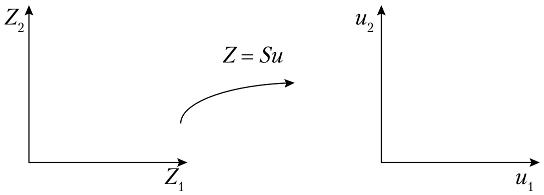



*Рис. 4.9*

Имеем систему с матрицей $B$

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \alpha u_1 - \beta u_2, \\ \dot{u}_2 = \beta u_1 + \alpha u_2. \end{cases}$$

Перейдем к полярным координатам и сложим:

$$+\begin{array}{l|l} u_1 = r\cos\varphi & \times 1 \\ u_2 = r\sin\varphi & \times i \end{array}$$

Тогда

$$\zeta = u_1 + iu_2 = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = re^{i\varphi}.$$

Теперь сложим

$$+\begin{array}{l|l} \dot{u}_1 = \alpha u_1 - \beta u_2 & \times 1 \\ \dot{u}_2 = \beta u_1 + \alpha u_2 & \times i \end{array}$$

и получим $\dot{\zeta} = (\alpha + i\beta)(u_1 + iu_2)$.

Мы получили дифференциальное уравнение

$$\dot{\zeta} = (\alpha + i\beta)\zeta.$$

Решая его, находим

$$\zeta(t) = e^{(\alpha+i\beta)t} r_0 e^{i\varphi_0};$$
$$re^{i\varphi} = r_0 e^{\alpha t} e^{i(\beta t + \varphi_0)}.$$

Отсюда получаем решение нашей системы в полярных координатах:

$$\begin{aligned} r(t) &= r_0 e^{\alpha t}, \\ \varphi(t) &= \beta t + \varphi_0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

*Замечание 4.3.* Вместо этого мы могли просто выразить $u_1$ и $u_2$ в полярных координатах, продифференцировать и получить систему уравнений



$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r, \\ \dot{\varphi} = \beta \end{cases}$$

и оказались бы те же решения.

Возможны следующие варианты.

1. $\alpha \neq 0$ — *фокус*.

В данном случае решение тоже приближается к точке покоя, но не с определенной скоростью, а как спираль, все время накручивается. Такая точка покоя называется *фокус*, или *сток*, если такое происходит с возрастанием времени, и *неустойчивый фокус*, или *источник*, если такое происходит с убыванием времени. Здесь полярный угол стремится к бесконечности, а в узле — к определенному значению. Это движение соответствует затухающим колебаниям. На рис. 4.10 изображен устойчивый фокус, или сток. В случае неустойчивого фокуса, т.е. в случае $\alpha > 0$, направление стрелок противоположное (рис. 4.11).

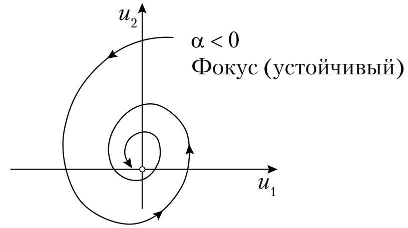



*Рис. 4.10*

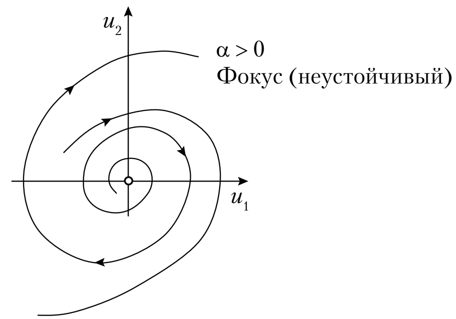



*Рис. 4.11*

Чтобы получить явное выражение для траектории, исключим $t$ из решения (4.7). Получим

$$t = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{r}{r_0},$$
$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\beta}{\alpha}\ln\frac{r}{r_0}.$$

2. $\alpha = 0$ — *центр*.

В этом случае колебания не затухают, траектории представляют собой какие-то замкнутые кривые. На плоскости $(u_1, u_2)$ — это окружности (случай $\beta > 0$ — рис. 4.12, случай $\beta < 0$ — рис. 4.13).

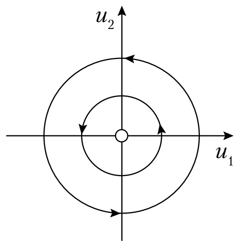
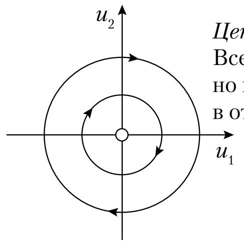



*Рис. 4.12*




*Центр.*
Всегда устойчив,
но не асимптотически устойчив,
в отличие от предыдущих случаев

*Рис. 4.13*

Выпишем в явном виде уравнение траектории:

$$r(t) = r_0,$$
$$\varphi(t) = \beta t + \varphi_0.$$

Итак, в случае комплексных корней характеристического полинома $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ имеет место фокус или центр:

- если $\alpha \neq 0$, то фокус;
- если $\alpha = 0$, то центр.

*Замечание 4.4.* Рассмотрим случай, когда есть возмущение (4.6).

Для фокуса характер устойчивости сохраняется, это некритический случай. А центр — это критический случай. В этом случае при наличии возмущения может быть и центр, и фокус (проблема центра и фокуса). И наконец, может быть случай, когда в сколь угодно малой окрестности точки покоя найдутся и замкнутая, и незамкнутая траектории, т.е. и окружности, и спирали. Такая точка покоя системы (4.6) называется *центрофокусом*.

**Теорема Пуанкаре.** *Рассмотрим автономную систему*

$$\dot{y} = F(y), \; y \in \mathbb{R}^2, \tag{4.8}$$

*и пусть правая часть такова, что имеет место единственность решения задачи Коши. Пусть система* (4.8) *имеет замкнутую траекторию L. Тогда внутри L существует точка покоя системы* (4.8) (рис. 4.14).



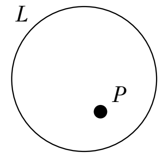



*Рис. 4.14*

***Доказательство.*** Утверждение теоремы вытекает из теоремы Брауэра: всякое непрерывное отображение замкнутого круга на себя имеет хотя бы одну неподвижную точку.

# Глава 5
# УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ПО ЛЯПУНОВУ

## 5.1. Определение устойчивости. Сведение к исследованию устойчивости нулевого решения

Рассмотрим нормальную систему

$$\dot{y} = f(t, y), \tag{5.1}$$

$(t, y) \in G \subseteq \mathbb{R} \times Y^n$, $f$: $G \to Y^n$, $G$ — открыто в $\mathbb{R} \times Y^n$, $f \in C(G, Y^n)$, $f \in$ $\in$ loc $\mathrm{Lip}_y(G)$.

Фиксируем $(\tau, \eta) \in G$. Будем обозначать через $\varphi(t; \tau, \eta)$, где $t \in I(\tau, \eta) \subseteq \mathbb{R}$, полное решение системы (5.1), такое что

$$\varphi(\tau; \tau, \eta) = \eta. \tag{5.2}$$

Будем рассматривать решение $\psi(t)$, определенное на интервале $[t_0; +\infty)$. Обозначим $y_0 = \psi(t_0)$ начальное значение, таким образом, $(t_0; y_0)$ — начальная точка. Итак, $\psi(t) = \varphi(t; t_0, y_0)$ при $t \in [t_0; +\infty)$.

Рассмотрим некоторое решение, будем его называть невозмущенным (рис. 5.1).

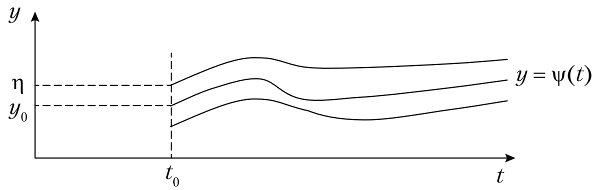



*Рис. 5.1*

**Определение 5.1.** Невозмущенное решение $\varphi(t; t_0, y_0)$, $t \in [t_0; +\infty)$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $\eta$, такого что $\|\eta - y_0\| < \delta$, для любого $t \in [t_0; +\infty)$ выполняется условие $\|\varphi(t; t_0, \eta) - \varphi(t; t_0, y_0)\| < \varepsilon$.

Другими словами, решения $\varepsilon$-близки, если начальное значение $\delta$-близко к $y_0$ (рис. 5.2).

Грубо говоря, решение называется устойчивым по Ляпунову, если все решения, начинающиеся близко от $\psi(t)$, остаются близкими к нему. У маятника два положения равновесия. Верхнее — это неустойчивое движение, оно не реализуется, всегда есть какая-то ошибка, может быть, скорость



начальная какая-то ненулевая. Нижнее положение маятника — устойчивое равновесие.

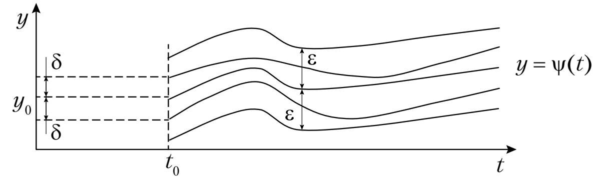



*Рис. 5.2*

**Определение 5.2.** Решение, которое не является устойчивым по Ляпунову, является *неустойчивым решением*, или неустойчивым движением.

**Определение 5.2′.** Невозмущенное решение $\varphi(t; t_0, y_0)$, $t \in [t_0; +\infty)$ называется *неустойчивым по Ляпунову*, если $\exists \varepsilon > 0$: $\forall \delta > 0$ $\exists t \in [t_0; +\infty)$: $\exists \eta$: $(\|\eta - y_0\| < \delta \;\&\; \|\varphi(t; t_0, \eta) - \varphi(t; t_0, y_0)\| \geq \varepsilon)$.

Тогда определение устойчивого движения можно дать как вторичное определение.

**Определение 5.1′.** Невозмущенное решение называется *устойчивым по Ляпунову*, если оно не является неустойчивым по Ляпунову.

**Определение 5.3.** Рассматриваемое невозмущенное решение называется *асимпотически устойчивым*, если оно устойчивопо Ляпунову и является притягивающим, т.е. существует такое $\Delta > 0$, что для любого $\eta$, такого что $\|\eta - y_0\| < \Delta$, верно, что $\|\varphi(t; t_0, \eta) - \varphi(t; t_0, y_0)\| \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

Рассмотрим отклонение $Z = y - \psi(t)$ решения $y$ от невозмущенного решения $\psi$. Тогда $\dot{Z} = \dot{y} - \dot{\psi}$. Таким образом, имеем

$$\dot{Z} = f(t, \psi(t) + Z) - f(t, \psi(t)) \overset{def}{=} F(t, Z). \tag{5.3}$$

Очевидно, что если $y$ удовлетворяет уравнению (5.1),то $Z$ удовлетворяет уравнению (5.3). Обратно, если $Z$ удовлетворяет уравнению (5.3), то $y = Z + \psi(t)$ удовлетворяет уравнению $\dot{Z} = \dot{y} - \dot{\psi} = f(t, y) - \dot{\psi}$, или $\dot{y} = f(t, y)$, т.е. уравнению (5.1).

Ясно, что $Z \equiv 0$ является решением уравнения (5.3). Будем называть это решение нулевым, или 0-решением.

***Лемма 5.1.*** Тип устойчивости решения $\psi(t)$ системы (5.1) совпадает с типом устойчивости 0-решения системы (5.3).

***Доказательство.*** Рассмотрим (вместо $y$) функцию $Z = \varphi(t; t_0, \eta) - \psi(t)$. Мы уже видели (непосредственно перед формулировкой леммы), что если $y$ — решение системы (5.1), то $y - \psi(t)$ — решение системы (5.3), и наоборот. А $\varphi(t; t_0, \eta)$ — решение системы (5.1), поэтому $Z$ — решение системы (5.3). Обозначим $\zeta = Z\big|_{t=t_0} = \eta - y_0$, где $y_0 = \psi(t_0)$. То, что нулевое решение (5.3) является устойчивым, значит, что $\|\varphi(t; t_0, \eta) - \psi(t)\| < \varepsilon$, как только $\|\eta - y_0\| < \delta$. Но это и есть неравенство из определения 5.1, т.е. устойчивость по Ляпунову уравнения (5.1). Последнее показывает, что 0-решение системы (5.3) устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда устойчиво по Ляпунову решение (5.1) $\psi(t)$. Ясно также, что 0-решение системы (5.3) является притягивающим тогда и только тогда, когда притягивающим является решение $\psi(t)$ уравнения (5.1). Лемма доказана.

На основании леммы 5.1 все результаты можно формулировать для нулевого решения системы (5.3).

## 5.2. Устойчивость линейных систем

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{y} = p(t)y + q(t), \tag{5.4}$$

где $(t, y) \in (-\infty; +\infty) \times Y^n$.

**Теорема 5.1.** *Всякое решение линейной системы* (5.4) *имеет тот же тип устойчивости, что и нулевое решение соответствующей линейной однородной системы*

$$\dot{y} = p(t)y. \tag{5.5}$$

***Доказательство.*** Любое решение линейной системы, вообще говоря, определено на $(-\infty; +\infty)$ как максимально продолженное. Но нас интересует только $\psi(t)$, $t \in [t_0; +\infty)$.

По лемме 5.1 тип устойчивости системы (5.4) совпадает с типом устойчивости системы:

$$\dot{Z} = p(t)(\psi(t) + Z) + q(t) - p(t)\psi(t) - q(t) = p(t)Z.$$

Теорема доказана.

Это очень простое, но очень важное утверждение. У линейной системы все решения имеют один и тот же тип устойчивости, так как все они имеют тот же тип устойчивости, что и нулевое решение соответствующей однородной системы. Тогда если какое-то решение устойчиво, то и любое решение устойчиво. Поэтому часто говорят не об устойчивости решения, а об устойчивости системы. Это по существу свойство системы.

**Теорема 5.2 (об устойчивости по Ляпунову).** *Рассмотрим линейную однородную систему* (5.5)

*Следующие три условия эквивалентны*:

1. 0-*решение системы* (5.5) *устойчиво.*
2. *Фундаментальная матрица решений системы* (5.5) *ограничена на* $[t_0; +\infty)$ ($t_0$ — *это фиксированный начальный момент, с которого мы начинаем исследование устойчивости*).
3. *Любое решение системы* (5.5) *ограничено на* $[t_0; +\infty)$.

*Замечание 5.1.* Если какая-нибудь фундаментальная матрица $\Phi(t)$ ограничена на полуинтервале $[t_0; +\infty)$, то и любая фундаментальная матрица также ограничена на $[t_0; +\infty)$, потому что любая фундаментальная матрица равна $\Phi(t)S$, а $S$ — постоянная матрица (матрица перехода). Поэтому в п. (2) можно писать «существует» или «любая».

***Доказательство.*** (3) $\Rightarrow$ (2) — очевидно. Если $\Phi$ — фундаментальная матрица, то любой ее столбец — решение. Каждый элемент ограничен, значит, матрица ограничена.



(2) $\Rightarrow$ (1). Нам нужна такая фундаментальная матрица $\Phi$, которая при $t = t_0$ равна $E$. Если $\tilde{\Phi}(t)$ — какая-то фундаментальная матрица, то $\Phi(t) = \tilde{\Phi}(t)\tilde{\Phi}^{-1}(t_0)$ — тоже фундаментальная матрица и $\Phi(t_0) = \tilde{\Phi}(t_0)\tilde{\Phi}^{-1}(t_0)E$. Тогда решение, которое при $t_0$ равно $\eta$, есть $\Phi(t)\eta$:

$$\varphi(t, t_0, \eta) = \Phi(t)\eta.$$

В силу единственности решения задачи Коши это то самое решение. Мы хотим доказать, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $|\eta| < \delta \Rightarrow |\varphi(t, t_0, \eta)| < \varepsilon$. А нам дано условие (2), что $\exists M > 0$: $\|\Phi(t)\| \le M\ \forall t \ge t_0$. Так возьмем в качестве $\delta$ величину $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$, тогда $\|\varphi(t, t_0, \eta)\| \le \|\Phi(t)\| \cdot \|\eta\| < M\delta = \varepsilon$.

(1) $\Rightarrow$ (3). Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists \delta_0 > 0$: ($\forall \eta$: $\|\eta\| < \delta_0$) ($\forall t \ge t_0$) $\|\varphi(t, t_0, \eta)\| < 1$. Мы доказали, что есть решения, ограниченные единицей.

Возьмем любое решение, начинающееся в $\eta$. Если $\eta < \delta_0$, то доказывать нечего.

Пусть $\eta \ge \delta_0$. Выберем $\alpha > 0$ настолько малым, чтобы $\|\alpha\eta\| = \alpha\|\eta\| < \delta_0$, т.е. чтобы $\alpha\eta$ попало в круг радиуса $\delta_0$ (рис. 5.3).

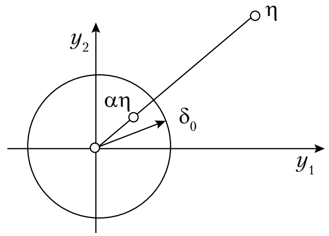



*Рис. 5.3*

Имеет место следующее равенство:

$$\varphi(t, t_0, \alpha\eta) = \Phi(t)\alpha\eta = \alpha\Phi(t)\eta = \alpha\varphi(t, t_0, \eta).$$

Данное равенство выполняется, потому что всякое решение записывается в таком виде, а при $t = t_0$ данные решения совпадают, значит, по теореме существования и единственности решения задачи Коши они совпадают и для любого $t$. Но тогда

$$\frac{1}{\alpha}\varphi(t, t_0, \alpha\eta) = \varphi(t, t_0, \eta).$$

Следовательно, $\|\varphi(t, t_0, \alpha\eta)\| < 1\ \forall t \ge t_0$.

Значит, $\|\varphi(t, t_0, \eta)\| < \dfrac{1}{\alpha}\ \forall t \ge t_0$.

**Следствие** (теорема о неустойчивости). Следующие три условия эквивалентны:

1) неверно, что справедливо условие 1 теоремы 5.2;
2) неверно, что справедливо условие 2 теоремы 5.2;
3) неверно, что справедливо условие 3 теоремы 5.2.

Неустойчивость доказать часто проще, потому что достаточно привести одно неограниченное решение.

**Пример 5.1**

Рассмотрим систему уравнений $\begin{cases}\dot{x} = -tx^2,\\ \dot{y} = y.\end{cases}$ У нее есть решение $\begin{cases} y = e^t,\\ x = 0.\end{cases}$

Раз оно неограниченно, то система неустойчива.

**Теорема 5.3 (об асимптотической устойчивости).** *Следующие три условия эквивалентны*:

(1) 0-*решение системы* (5.5) *асимптотически устойчиво.*

(2) *Фундаментальная матрица системы* (5.5) *стремится к нулю* (*т.е. норма матрицы стремится к нулю*) *при* $t \to +\infty$.

(3) *Любое решение системы* (5.5) *стремится к нулю* (*или к нулевому решению*) *при* $t \to +\infty$.

***Доказательство.*** (3) $\Rightarrow$ (2). Очевидно, потому что каждый элемент стремится к нулю.

(2) $\Rightarrow$ (1). Норма фундаментальной матрицы стремится к нулю, следовательно, фундаментальная матрица ограничена. Тогда из теоремы 5.2 следует устойчивость нулевого решения. Нужно доказать, что нулевое решение притягивает. Имеем:

$$\varphi(t, t_0, \eta) = \Phi(t)\eta.$$

Норма $\Phi(t)$ стремится к нулю, поэтому в силу предыдущего равенства любое решение стремится к нулю, значит, нулевое решение притягивает все решения.

(1) $\Rightarrow$ (3). Дано: $\exists \Delta > 0$: $(\forall \eta)$: $\|\eta\| < \Delta \Rightarrow \|\varphi(t, t_0, \eta)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Любое решение $\varphi(t, t_0, \eta)$ представляется в виде

$$\varphi(t, t_0, \eta_0) = \frac{1}{\alpha}\varphi(t, t_0, \alpha\eta_0),$$

где $\alpha$ — положительное число.

Выбрав $\alpha$ так, чтобы $\alpha\eta_0$ попала в круг радиуса $\Delta$ (рис. 5.4), получим, что

$$\forall \eta_0 \ \|\varphi(t, t_0, \eta_0)\| = \frac{1}{\alpha}\|\varphi(t, t_0, \alpha\eta_0)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,$$

т.е. выполнено условие (1).

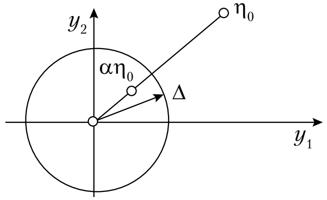



*Рис. 5.4*

Теорема доказана.



## 5.3. Устойчивость однородных систем с постоянной матрицей

Рассмотрим линейную однородную систему

$$\dot{y} = Ay,\ t \in \mathbb{R}, \tag{5.6}$$

с постоянной матрицей $A$, где $\lambda_j$ — ее собственные числа. Решения будем рассматривать на промежутке $[0; +\infty)$.

А. Некритический случай.

*Случай 1.* Все собственные числа матрицы $A$ отрицательны.

**Теорема 5.4.** *Пусть для любого собственного числа* $\lambda_j$ *матрицы* $A$ *верно, что* $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$. *Тогда имеет место асимптотическая устойчивость системы* (5.6).

***Доказательство.*** Проверим, что выполняются условия предыдущей теоремы, т.е. что все элементы фундаментальной матрицы стремятся к нулю при $t \to +\infty$. Мы знаем, что фундаментальная матрица этой системы имеет вид $e^{tA}$. Обозначая через $S$ матрицу перехода, такую что $A = SJS^{-1}$, где $J$ — жорданова форма матрицы $A$, получаем

$$e^{tA} = e^{S(tJ)S^{-1}} = Se^{tJ}S^{-1},$$

где $e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & e^{tJ_m}\end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & J_m\end{pmatrix}$.

Пусть

$$J_k = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k & 1\\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_k\end{pmatrix}}_{r_k}.$$

Тогда

$$e^{tJ_k} = e^{t\lambda_k}\begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} & \frac{t^{r_k-1}}{(r-1)!}\\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \dots & \frac{t^{r_k-3}}{(r-3)!} & \frac{t^{r_k-2}}{(r-2)!}\\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{r_k-4}}{(r-4)!} & \frac{t^{r_k-3}}{(r-3)!}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{t}{1!}\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим элемент матрицы $e^{tJ}$. Он имеет вид

$$e^{t\lambda_k}\frac{t^s}{s!}=e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda_k}e^{i\,\mathrm{Im}\,\lambda_k}\frac{t^s}{s!}. \tag{5.7}$$

Мы знаем, что $|e^{i\alpha}|=1$ для любого $\alpha\in\mathbb{R}$. Из выражения (5.7) ясно, что при сделанных в условиях теоремы предположениях наша система имеет фундаментальную матрицу, все элементы которой стремятся к нулю при $t\to+\infty$, а тогда, по предыдущей теореме, система асимптотически устойчива.

*Замечание 5.2*. В ходе доказательства установлено, что в условиях теоремы

$$\|e^{tA}\|\xrightarrow[t\to+\infty]{}0.$$

*Случай 2*. Все собственные числа матрицы $A$ отличны от нуля, и среди них есть положительное собственное число.

**Теорема 5.5.** *Пусть существует такое собственное число* $\lambda_k$ *матрицы* $A$, *что* $\mathrm{Re}\lambda_k>0$. *В этом случае нулевое решение системы* (5.6) *неустойчиво* (*а значит, и все остальные решения неустойчивы, или система неустойчива*).

***Доказательство.*** Поскольку $\lambda_k$ — собственное число, то по методу Эйлера существует решение в виде $e^{t\lambda_k}S^k$, где $S^k$ — ненулевой вектор. Данное решение, очевидно, не ограничено, и тогда по теореме об устойчивости система неустойчива.

Б. Критический случай.

Все собственные числа матрицы $A$ неположительны, и среди них есть собственное число, равное нулю.

**Теорема 5.6.** *Пусть* $\forall\lambda_j$ $\mathrm{Re}\lambda_j\le 0$ *но* $\exists\lambda_j$: $\mathrm{Re}\lambda_j=0$ (*называется критический случай*). *Здесь может быть две возможности*:

а) *Любому* $\lambda_k$, *такому что* $\mathrm{Re}\lambda_k=0$, *в жордановой форме соответствуют лишь простые клетки* (*их может быть несколько*) *размера* $1\times1$. *Тогда система будет устойчива, но не асимптотически*;

б) $\exists\lambda_k$: $Re\lambda_k=0$, *которому соответствует непростая клетка. Тогда система неустойчива.*

***Доказательство.*** Убедимся, во-первых, что не может быть асимптотической устойчивости. Существует решение вида $e^{t\lambda_k}S^k$, где $\mathrm{Re}\lambda_k=0$, $S_k\ne0$. Это решение, очевидно, к нулю не стремится. Для асимптотической устойчивости нужно, чтобы любое решение стремилось к нулю. Убедимся, что в случае а) фундаментальная матрица $e^{tA}$ остается ограниченной. Для этого убедимся что $e^{tJ}$ ограничена, а для этого проверим, что любая клетка матрицы Жордана ограничена. А для этого надо установить, что выражения вида (5.7) ограничены. Но где $e^{t\lambda_k}$ и $\mathrm{Re}\lambda_k<0$, там стремление к нулю, и поэтому они ограничены, а где $\mathrm{Re}\lambda_k=0$ и жорданова клетка простая, там этих полиномов от $t$ нет. Значит, фундаментальная матрица ограничена, следовательно, система устойчива по теореме об устойчивости.

Наконец, в случае б) будут неустойчивые жордановы клетки размера $r>1$, там есть многочлены, они неограниченно растут с ростом $t$, в то время как $|e^{t\lambda_k}|=1$, поскольку $\mathrm{Re}\lambda_k=0$. Таким образом, матрица $e^{tJ}$ не ограничена.



Переход от неограниченности $e^{tJ}$ к неограниченности $e^{tA}$ выполняется следующим образом. Имеем $e^{tJ}=S^{-1}e^{tA}S$. Поэтому если бы матрица $e^{tA}$ была ограничена, то и $e^{tJ}$ была бы ограничена, а мы только что убедились, что это не так.

## 5.4. Устойчивость по первому приближению

***Лемма 5.2.*** Пусть $\{\lambda_j\}$ — множество собственных чисел матрицы $A$. Обозначим $\Lambda\overset{def}{=}\max\limits_j\mathrm{Re}\,\lambda_j$. Тогда для любого $\sigma>\Lambda$ существует число $K>0$, такое что $\|e^{tA}\|\le Ke^{t\sigma}$ для всех $t\ge0$.

***Доказательство.*** Рассмотрим матрицу $B=A-\sigma E$. Множество ее собственных чисел $\{\lambda_j-\sigma\}$. Для любого собственного числа матрицы $B$ верно, что $\mathrm{Re}(\lambda_j-\sigma)=\mathrm{Re}\lambda_j-\sigma<0$. Но если у матрицы все собственные числа имеют отрицательную вещественную часть, то норма ее стремится к нулю при $t\to+\infty$. Следовательно, ее норма ограничена. Обозначим

$$K\overset{def}{=}\sup_{t\in[0;+\infty)}\|e^{tB}\|<+\infty.$$

Тогда, так как $e^{tA}=e^{t(B+\sigma E)}=e^{tB}e^{t\sigma E}=e^{t\sigma}e^{tB}$, получаем, что $\|e^{tA}\|\le e^{t\sigma}\|e^{tB}\|\le\le Ke^{t\sigma}$.

Лемма доказана.

Будем считать, что

$$\dot y=Ay+g(t,y), \tag{5.8}$$

причем $g$ обладает хорошими свойствами, так что имеет место единственность решения задачи Коши, а эта добавка $g(t,y)$ мала по сравнению с $\|y\|$ в окрестности нуля, т.е. что

$$\frac{\|g(t,y)\|}{\|y\|}\xrightarrow[\|y\|\to0]{}0 \text{ равномерно по } t\in[t_0;+\infty),$$

другими словами, $\|g(t,y)\|=o(\|y\|)$, $g(t,0)=0$.

С помощью леммы 5.2 доказываются следующие две теоремы.

**Теорема 5.7 (об устойчивости по первому приближению).** *Пусть все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части. Тогда нулевое решение системы* (5.8) *асимптотически устойчиво.*

**Теорема 5.8 (о неустойчивости по первому приближению).** *Если в условиях теоремы 5.7 у матрицы A найдется такое собственное число* $\lambda_j$, *что* $\mathrm{Re}\lambda_j>0$, *то нулевое решение системы* (5.8) *неустойчиво.*

Можно сказать, что в некритических случаях характер поведения системы сохраняется при допустимых возмущениях.

**Пример 5.2**

Исследуем на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases}\dot x=\sqrt{4+4y}-2e^{x+y},\\ \dot y=\sin ax+\ln(1-4y), \quad a=\mathrm{const}.\end{cases}$$

*Решение*. Используя разложение Тейлора, получаем

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + \psi_1(x, y), \\ \dot{y} = ax - 4y + \psi_2(x, y), \end{cases}$$

где функции $\psi_1$, $\psi_2$ равны $o(x^2 + y^2)$. Найдем собственные значения матрицы коэффициентов:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ a & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 8 + a = 0,\ \lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{1-a}.$$

При $a > 1$ корни комплексные, $\mathrm{Re}\lambda_{1,\,2} = -3 < 0$, при $-8 < a \le 1$ корни вещественные отрицательные, значит, в этих случаях нулевое решение асимптотически устойчиво.

При $a < -8$ один из корней положителен, значит, нулевое решение неустойчиво.

При $a = -8$ имеем $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -6$ и вопрос об устойчивости не решается с помощью теорем 5.7 и 5.8.

# Глава 6
# ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

**Определение 6.1.** Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называется *функцией-оригиналом*, если она обладает следующими свойствами:

1) $f(x) = 0$ при $x < 0$;

2) существует интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ для любых конечных $a$ и $b$;

3) существуют такие постоянные $M > 0$ и $\sigma \ge 0$, что $|f(x)| \le Me^{\sigma x}$ при всех $x$.

Ясно, что если $f(x)$ и $g(x)$ — функции-оригиналы, то:

1) для любого $c \in \mathbb{C}$ $cf(x)$ — функция-оригинал;

2) $f(x) \pm g(x)$ — функции-оригиналы;

3) $f(x) \cdot g(x)$ — функция-оригинал;

4) $\Phi(x) = \int\limits_0^x f(s)ds$ — функция-оригинал.

**Определение 6.2.** *Сверткой* функций $f$ и $g$ называется функция, обозначаемая $f * g$ и задаваемая равенством

$$(f * g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(x-s)ds.$$

**Теорема 6.1.** *Свертка $f * g$ функций-оригиналов $f$ и $g$ является функцией-оригиналом, и верно, что*

$$(f * g)(x) = \int\limits_0^x f(s)g(x-s)ds.$$

***Доказательство.*** Из определения функции-оригинала следует, что $f(s) = 0$ при $s < 0$ и $g(x - s) = 0$ при $s > x$. Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(x-s)ds = \int\limits_0^x f(s)g(x-s)ds.$$

Из определения функции-оригинала также следует, что существуют такие постоянные $M_1 > 0$, $\sigma_1 \ge 0$, $M_2 > 0$, $\sigma_2 \ge 0$, что $|f(x)| \le M_1 e^{\sigma_1 t}$, $|g(x)| \le M_2 e^{\sigma_2 t}$.

Обозначим $\sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$. Тогда

$$|(f * g)(x)| \le \int\limits_0^x M_1 M_2 e^{\sigma x} ds = x M_1 M_2 e^{\sigma x} \le M_1 M_2 e^{(\sigma+1)x},$$

так как $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \ldots > x$ при $x \ge 0$. Теорема доказана.

Пусть $f(x)$ — функция-оригинал, для которой выполнено неравенство $|f(x)| \le Me^{\sigma x}$. Рассмотрим область $D$ комплексной плоскости $D = \{s \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}s > \sigma\}$ и определим функцию

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}dx, s \in D. \qquad (6.1)$$

**Определение 6.3.** Функция $F(s)$ называется *изображением* функции-оригинала $f(x)$ при преобразовании Лапласа, или изображением $f(x)$ по Лапласу. Мы будем писать $f(x) \mapsto F(s)$, или $F(s) = L[f(x)]$.

**Теорема 6.2.** *Несобственный интеграл* (6.1) *сходится.*

***Доказательство.*** Для доказательства нам достаточно найти такую неотрицатель-ную функцию $g(x)$, что $|f(x)e^{-sx}| \le g(x)$ и существует конечный предел

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^T g(x)dx.$$

Из определения функции-оригинала также следует, что существуют такие постоянные $M > 0$, $\sigma \ge 0$, что $|f(x)| \le Me^{\sigma t}$. Тогда $|f(x)e^{-sx}| \le Me^{\sigma t}e^{-(\mathrm{Re}s)x}$. Возьмем $g(x) = Me^{(\sigma-\mathrm{Re}s)x}$. Из определения области $D$ следует, что $b = \sigma - \mathrm{Re}s < 0$. Тогда

$$\int_0^T g(x)dx = \int_0^T Me^{bx}dx = \frac{M}{b}e^{bx}\Big|_{x=0}^{x=T} = \frac{M}{b}e^{bT} - \frac{M}{b} \xrightarrow[T\to+\infty]{} -\frac{M}{b}.$$

**Теорема 6.3.** *Преобразование Лапласа линейно*: *если* $f_1(x) \mapsto F_1(s)$, $\mathrm{Re}s > \sigma_1$ и $f_2(x) \mapsto F_2(s)$, $\mathrm{Re}s > \sigma_2$, а $c_1$, $c_2$ — постоянные, то $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) \mapsto c_1F_1(s) + c_2F_2(s)$, $\mathrm{Re}s > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$.

***Доказательство.*** Утверждение теоремы следует из линейности интеграла.

**Теорема 6.4 (смещения).** *Если* $f(x) \mapsto F(s)$, $\mathrm{Re}s > \sigma$, *то* $e^{\alpha x}f(x) \mapsto F(s-a)$, $\mathrm{Re}s > \sigma + \mathrm{Re}a$.

***Доказательство.*** При $\mathrm{Re}s > \sigma + \mathrm{Re}a$ верны равенства

$$\int_0^{+\infty} e^{ax}f(x)e^{-sx}dx = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-(s-a)x}dx = F(s-a).$$

Теорема доказана.

**Пример 6.1**

Рассмотрим функцию Хевисайда $\delta_1 = \begin{cases} 1, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

При $\mathrm{Re}s > 0$ верно, что $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-sx} = 0$. Поэтому

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}dx = -\frac{1}{s}e^{-sx}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{1}{s}.$$

Таким образом, $\delta_1(x) \mapsto \frac{1}{s}$, $\mathrm{Re}s > 0$.



**Пример 6.2**

Из примера 6.1 и теоремы смещения непосредственно следует, что

$$e^{ax}\delta_1(x) \mapsto \frac{1}{s-a}, \mathrm{Re}s > \mathrm{Re}a. \qquad (6.2)$$

**Пример 6.3**

По формуле Эйлера $\cos(\omega x) = \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2}$.

Из формулы (6.2) следует, что при $\mathrm{Re}s > \mathrm{Re}(i\omega) = 0$ верно, что

$$e^{i\omega x} \mapsto \frac{1}{s-i\omega}, e^{-i\omega x} \mapsto \frac{1}{s+i\omega}.$$

Из линейности преобразования Лапласа (теорема 6.3) при $\mathrm{Re}s > 0$ следует, что

$$\cos(\omega x)\delta_1(x) \mapsto \frac{1}{2}\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+i\omega} = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

Итак, $\cos(\omega x)\delta_1(x) \mapsto \frac{s}{s^2+\omega^2}$, $\mathrm{Re}s > 0$.

По формуле Эйлера $\sin(\omega x) = \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i}$.

Из линейности преобразования Лапласа (теорема 6.3) при $\mathrm{Re}s > 0$ следует, что

$$\sin(\omega x)\delta_1(x) \mapsto \frac{1}{2i}\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{2i}\frac{1}{s+i\omega} = \frac{s+i\omega-s+i\omega}{2i(s^2+\omega^2)} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Итак, $\sin(\omega x)\delta_1(x) \mapsto \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$, $\mathrm{Re}s > 0$.

**Пример 6.4**

Рассмотрим функцию $x\delta_1(x)$. Так как для любого $\sigma > 0$ найдется такое $M > 0$, что $x \le Me^{\sigma x}$ при всех $x \ge 0$, а для любого $s \in D = \{s \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}s > 0\}$ можно найти такое $\sigma$, что $0 < \sigma < \mathrm{Re}s$, то интеграл $\int_0^{+\infty} xe^{-sx}dx$ сходится при любом $s \in D$. Вычислим интеграл:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-sx}dx = -\frac{1}{s}\int_0^{+\infty} xd(e^{-sx}) =$$
$$= -\frac{1}{s}\left(xe^{-sx}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-sx}dx\right) = \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-sx}dx = \frac{1}{s^2}.$$

Итак, $x\delta_1(x) \mapsto \frac{1}{s^2}$, $\mathrm{Re}s > 0$.

Точно так же, с помощью интегрирования по частям, доказывается, что

$$x^2\delta_1(x) \mapsto \frac{1}{s^3}, \mathrm{Re}s > 0, x^3\delta_1(x) \mapsto \frac{1}{s^4}, \mathrm{Re}s > 0,$$

и вообще $x^n\delta_1(x) \mapsto \frac{1}{s^{n+1}}$, $\mathrm{Re}s > 0$, при $n = 1, 2, 3, \ldots$ .

**Пример 6.5**

Вычислим изображение функции $\frac{1}{2\beta}t\sin\beta t$. Очевидно, что интеграл $\frac{1}{2\beta}\int\limits_0^{+\infty} xe^{-sx}\sin\beta x\,dt$ сходится при любом $s\in D=\{s\in\mathbb{C}: \operatorname{Re}s>0\}$. Представим рассматриваемый интеграл в виде суммы:

$$\frac{1}{2\beta}\int\limits_0^{+\infty} xe^{-sx}\sin\beta x\,dt=\frac{1}{4\beta i}\left(\int\limits_0^{+\infty} xe^{(i\beta-s)x}dt-\int\limits_0^{+\infty} xe^{(-i\beta-s)x}dt\right).$$

Вычислим слагаемые отдельно:

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{(i\beta-s)x}dt=\frac{1}{i\beta-s}\int\limits_0^{+\infty} xd(e^{(i\beta-s)x})=\frac{1}{i\beta-s}xe^{(i\beta-s)x}\Big|_{x=0}^{x=+\infty}-\frac{1}{i\beta-s}\int\limits_0^{+\infty} e^{(i\beta-s)x}dx=$$

$$=0-\frac{1}{(i\beta-s)^2}e^{(i\beta-s)x}\Big|_{x=0}^{x=+\infty}=\frac{1}{(s-i\beta)^2};$$

совершенно аналогично получаем $\int\limits_0^{+\infty} xe^{(-i\beta-s)x}dt=\frac{1}{(s+i\beta)^2}$.

Тогда

$$\frac{1}{2\beta}\int\limits_0^{+\infty} xe^{-sx}\sin\beta x\,dt=\frac{1}{4\beta i}\left(\frac{1}{(s-i\beta)^2}-\frac{1}{(s+i\beta)^2}\right)=\frac{2i\beta s+2i\beta s}{4i\beta(s^2+\beta^2)^2}=\frac{s}{(s^2+\beta^2)^2}.$$

Итак, $\frac{1}{2\beta}t\sin\beta t\mapsto\frac{s}{(s^2+\beta^2)^2}$, $\operatorname{Re}s>0$.

---

Далее мы будем считать, что функция-оригинал $f(x)$, как и все ее рассматриваемые производные, имеет предел при $x$, стремящемся к нулю справа. Эти пределы мы будем обозначать $f(0)$, $f'(0)$ и т.д.

**Теорема 6.5 (о дифференцировании оригинала).** *Если у функции-оригинала $f(x)$ есть производная $f'(x)$, также являющаяся функцией-оригиналом, и $f(x)\mapsto F(s)$, $\operatorname{Re}s>\sigma_1$, $f'(x)\mapsto F_1(s)$, $\operatorname{Re}s>\sigma_2$, то*

$$F_1(s)=sF(s)-f(0), \tag{6.3}$$

*где* $\operatorname{Re}s>\max\{\sigma_1,\sigma_2\}$

***Доказательство.*** Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int\limits_0^{+\infty} f'(x)e^{-sx}dx=e^{-sx}f(x)\Big|_{x=0}^{x=+\infty}-\int\limits_0^{+\infty} f(x)(-s)e^{-sx}dx=$$

$$=s\int\limits_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}dx-f(0)=sF(s)-f(0),$$

что и требовалось доказать.

Используя формулу (6.3), мы можем теперь находить изображения старших производных от функций-оригиналов. Например, если $f(x)\mapsto F(s)$, $f'(x)\mapsto F_1(s)$, то, дважды применяя формулу (6.3), получим

$$\begin{gathered}f''(x)=(f'(x))'\mapsto sF_1(s)-f'(0)=\\=s(sF(s)-f(0))-f'(0)=s^2F(s)-sf(0)-f'(0).\end{gathered} \tag{6.4}$$



Если $f(x)\mapsto F(s)$, $f''(x)\mapsto F_2(s)$, то, применяя формулы (6.3) и (6.4), получим

$$\begin{gathered}f'''(x)=(f''(x))'\mapsto sF_2(s)-f''(0)=s(s^2F(s)-sf(0)-f'(0))-f''(0)=\\=s^3F(s)-s^2f(0)-sf'(0)-f''(0).\end{gathered}$$

И вообще, если $f(x)\mapsto F(s)$, $f^{(n-1)}(x)\mapsto F_{n-1}(s)$, то

$$f^{(n)}(x)\mapsto s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0).$$

**Теорема 6.6 (запаздывания).** *Пусть $f(t)$ — функция-оригинал и $f(t)\mapsto F(s)$, $t_0>0$. Тогда $f(t-t_0)\mapsto e^{-t_0s}F(s)$.*

***Доказательство.*** Функция $f(t-t_0)$, очевидно, является оригиналом, если $f(t)$ — оригинал. По определению преобразования Лапласа находим

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-st}f(t-t_0)dt=\int\limits_0^{t_0} e^{-st}f(t-t_0)dt+\int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-st}f(t-t_0)dt.$$

Первый интеграл обратится в нуль, так как при $t<t_0$, естественно, $t-t_0<0$ и поэтому $f(t-t_0)=0$. Во втором интеграле сделаем замену переменной $t=\tau+t_0$:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-s(\tau+t_0)}f(\tau)d\tau=e^{-st_0}\int\limits_0^{+\infty} e^{-s\tau}f(\tau)d\tau=e^{-st_0}F(s),$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь задачу, обратную задаче нахождения изображений для функций-оригиналов, а именно, задачу нахождения функции-оригинала по заданному изображению. Остановимся на вычислении оригиналов правильных рациональных дробей.

**Определение 6.4.** Функции вида

$$\frac{P_m(s)}{Q_n(s)}, \tag{6.5}$$

где $P_m(s)$ и $Q_n(s)$ — многочлены от $s$ степеней $m$ и $n$ соответственно, называются *дробно-рациональными функциями*, или *рациональными дробями*. Если $m<n$, то дробно-рациональная функция (6.5) называется *правильной*. Дробно-рациональные функции вида

$$\frac{A}{(s-a)^p},\ \frac{As+B}{[(s-a)^2+b^2]^p},\ p\in\mathbb{N},$$

где $A$, $B$, $a$, $b$ — вещественные числа, называют *простейшими*.

Известно, что любую правильную дробно-рациональную функцию можно представить, и притом единственным образом, в виде суммы простейших.

Из приведенных теорем и примеров следует, что

$$Ax^n\delta_1(x)\mapsto\frac{A}{s^{n+1}},\ n\in\mathbb{N};\ Ae^{ax}\delta_1(x)\mapsto\frac{A}{s-a};$$

$$Axe^{ax}\delta_1(x)\mapsto\frac{A}{(s-a)^2};\; Ae^{ax}\cos(\omega x)\delta_1(x)\mapsto\frac{A(s-a)}{(s-a)^2+\omega^2};$$

$$Ae^{ax}\sin(\omega x)\delta_1(x)\mapsto\frac{A\omega}{(s-a)^2+\omega^2};\; At\sin\omega t\mapsto\frac{2A\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}.$$

**Пример 6.6**

Найдем функцию-оригинал изображения: а) $F(s)=\frac{5}{s-4}$; б) $F(s)=\frac{5s+10}{(s-3)^2+16}$.

*Решение*. Мы будем искать функции-оригиналы при $x \geq 0$, поэтому множитель $\delta_1(t)$ везде будем опускать.

а) Так как $e^{4x}\mapsto\frac{1}{s-4}$, то $f(x) = 5e^{4x}$.

б) Представим $F(s) = F_1(s) + F_2(s)$, где

$$F_1(s)=5\frac{s-3}{(s-3)^2+16},\; F_2(s)=\frac{25}{4}\cdot\frac{4}{(s-3)^2+16}.$$

Из равенств

$$e^{3x}\cos 4x\mapsto\frac{s-3}{(s-3)^2+16},\; e^{3x}\sin 4x\mapsto\frac{4}{(s-3)^2+16}$$

следует, что $f(x)=5e^{3x}\cos 4x+\frac{25}{4}\sin 4x$.

Применение операционного метода позволяет сводить решение некоторых дифференциальных уравнений к решению простых алгебраических задач.

**Пример 6.7**

Решим задачу Коши $y'' - 4y + 3e = e^{-2x}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$.

*Решение*. Будем считать, что $x \geq 0$. Обозначим искомое решение через $y(x)$. Пусть $y(x) \mapsto Y(s)$, тогда $y'(x) = sY(s) - y(0) = sY(s) + 1$, $y''(x) \mapsto s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s) + s - 2$.

Применяя преобразование Лапласа к рассматриваемому дифференциальному уравнению и учитывая, что

$$e^{-2x}\mapsto\frac{1}{s+2},$$

приходим к следующему алгебраическому уравнению для $Y(s)$:

$$s^2Y(s)+s-2-4sY(s)-4+3Y(s)=\frac{1}{s+2},$$

или

$$(s^2-4s+3)Y(s)=-s+6+\frac{1}{s+2}.$$

Тогда

$$Y(s)=\frac{-s^2+4s+13}{(s-1)(s-3)(s+2)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s-3},$$

$$A=-\frac{8}{3},\; B=\frac{1}{15},\; C=\frac{8}{5}.$$



Следовательно,

$$y(x)=-\frac{8}{3}e^{x}+\frac{1}{15}e^{-2x}+\frac{8}{5}e^{3x}.$$

**Пример 6.8**

Найдем решение задачи Коши $x''(t) + x'(t) = t$, $x(1) = 2$, $x'(1) = 3$.

*Решение*. В этой задаче начальные условия заданы в точке $t = 1$. Чтобы применить операционный метод для решения этой задачи, удобно перейти к новой переменной: $\tau = t - 1$, тогда $x(t) = x(\tau + 1)$. Пусть $x(\tau + 1) = x_1(\tau)$, тогда задача перепишется в виде

$$x_1''(\tau)+x_1'(\tau)=\tau+1,\; x(0) = 2,\; x'(0) = 3$$

и если $x_1(\tau) \mapsto X_1(s)$, то получим уравнение в изображениях

$$s^2X_1(s)-2s-3+sX_1(s)-2=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s},$$

решая которое, находим

$$X_1(s)=\frac{2s^3+5s^2+s+1}{s^3(s+1)}.$$

Разложим рациональную дробь на простейшие:

$$\frac{2s^3+5s^2+s+1}{s^3(s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{D}{s+1},$$

$$D=\left.\frac{2s^3+5s^2+s+1}{s^3}\right|_{s=-1}=-3,\; C=\left.\frac{2s^3+5s^2+s+1}{s+1}\right|_{s=0}=1,$$

$$\frac{2s^3+5s^2+s+1}{s^3(s+1)}-\frac{1}{s^3}+\frac{3}{s+1}=\frac{2s^3+5s^2+s+1-s-1+3s^3}{s^3(s+1)}=\frac{5s^2(s+1)}{s^3(s+1)}=\frac{5}{s},$$

значит,

$$\frac{2s^3+5s^2+s+1}{s^3(s+1)}=\frac{5}{s}+\frac{1}{s^3}-\frac{3}{s+1}.$$

Восстановив оригинал, найдем

$$x_1(\tau)=5-3e^{-\tau}+\frac{\tau^2}{2}.$$

Чтобы получить решение исходной задачи, осталось вернуться к старой переменной:

$$x(t)=\left(5-3e^{-(t-1)}+\frac{(t-1)^2}{2}\right)\cdot\chi(t-1).$$

Преимущество операционного метода решения линейных дифференциальных уравнений перед классическими методами состоит в том, что не получая общего решения дифференциального уравнения, сразу получаем решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Однако, этот метод применим также и для нахождения общего решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

**Пример 6.9**

Найдем общее решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x}+2\dot{x}+10x=2e^{-t}\cos 3t.$$

*Решение.* Для нахождения общего решения рассмотрим задачу Коши для данного уравнения с начальными условиями $x(0) = C_1$, $x'(0) = C_2$, где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные. Уравнение в изображениях, соответствующее этой задаче Коши, имеет вид

$$s^2X(s)-C_1s-C_2+2sX(s)-2C_1+10X(s)=2\frac{s+1}{(s+1)^2+9},$$

или

$$[(s+1)^2+9]X(s)=C_1s+C_2+2C_1+2\frac{s+1}{(s+1)^2+9},$$

откуда находим

$$X(s)=C_1\frac{s+1}{(s+1)^2+9}+(C_1+C_2)\frac{1}{(s+1)^2+9}+2\frac{s+1}{[(s+1)^2+9]^2}.$$

Возвращаясь к оригиналам, получаем общее решение заданного уравнения:

$$x(t)=e^{-t}C_1\cos 3t+e^{-t}C_2^*\frac{1}{3}\sin 3t+e^{-t}t\frac{1}{3}\sin 3t=e^{-t}\left(C_1\cos 3t+\frac{1}{3}(t+C_2^*)\sin 3t\right),$$

где $C_2^*=C_1+C_2$.

При решении задачи Коши операционным методом иногда бывает удобно не выписывать в явном виде изображение функции, стоящей в правой части уравнения, а воспользоваться теоремой 6.1 умножения изображений. Это необходимо, если изображение правой части уравнения не может быть найдено в явном виде.

**Пример 6.10**

Найдем решение задачи Коши $\ddot{x}(t)+x(t)=3e^{-t^2}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

*Решение.* Пусть $x(t) \mapsto X(s)$, функция $3e^{-t^2}$ является оригиналом, обозначим ее изображение через $F(s)$. Тогда уравнение в изображениях принимает вид

$$s^2X(s) - s - 2 + X(s) = F(s).$$

Решив его, найдем $X(s)$:

$$X(s)=\frac{s+2}{s^2+1}+F(s)\frac{1}{s^2+1}.$$

Оригиналом изображения $\frac{s+2}{s^2+1}$, очевидно, является функция $\cos x + 2\sin x$.

Для восстановления оригинала функции $F(s)\frac{1}{s^2+1}$ применим теорему 6.1. Поскольку $3e^{-t^2}\mapsto F(s)$, $\sin t\mapsto\frac{1}{s^2+1}$, оригиналом произведения функций является свертка: $3e^{-t^2}*\sin t$. Таким образом, решением задачи Коши является функция:

$$x(t)=\cos t+2\sin t+3\int_0^t e^{-\tau^2}\sin(t-\tau)\,d\tau.$$



*Замечание 6.1.* Отметим, что полученный интеграл не выражается через элементарные функции.

Дадим определение решения дифференциального уравнения с разрывной правой частью. Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения

$$x^{(n)}(t) + a_1x^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}x'(t) + a_nx(t) = f(t), \qquad (6.6)$$

удовлетворяющее некоторым заданным начальным условиям, причем функция $f(t)$ имеет конечное число точек разрыва первого рода.

В этом случае будем называть функцию $x(t)$ решением дифференциального уравнения (6.6), если:

1) $x(t), x'(t), ..., x^{(n-1)}(t)$ — непрерывные функции;

2) $x^{(n)}(t)$ имеет конечное число точек разрыва первого рода, совпадающих с точками разрыва функции $f(t)$;

3) равенство (6.6) верно во всех точках непрерывности функции $x^{(n)}(t)$.

**Пример 6.11**

Найдем решение задачи Коши $x'(t) - x(t) = f(t)$, $x(0) = 0$, где

$$f(t)=\begin{cases}5, \text{если } 0\le t<3,\\ 0, \text{если } t\ge 3.\end{cases}$$

*Решение.* Пусть $x(t) \mapsto X(s)$. Найдем изображение правой части нашего уравнения с помощью теоремы запаздывания:

$$f(t)\mapsto 5\frac{1}{s}-5\frac{1}{s}e^{-3s}.$$

Перейдем от исходной задачи к уравнению в изображениях:

$$sX(s)-X(s)=5\frac{1-e^{-3s}}{s}.$$

Следовательно,

$$X(s)=\frac{5}{s(s-1)}-\frac{5}{s(s-1)}e^{-3s}.$$

Разложим рациональную дробь $\frac{5}{s(s-1)}$ на простейшие:

$$\frac{5}{s(s-1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}.$$

Получаем $A = -5$, $B = 5$. При восстановлении оригинала опять воспользуемся теоремой запаздывания и получим

$$x(t)=\begin{cases}5(e^t-1),\ 0\le t<3,\\ 5(e^t-e^{t-3}),\ t>3.\end{cases}$$

Можно легко проверить, что $x(t)$ является непрерывной функцией, а ее производная в точке $t = 3$ имеет разрыв первого рода. Действительно,

$$\lim_{t\to 3-0}x(t)=5(e^3-1),\ \lim_{t\to 3+0}x(t)=x(3)=5e^3-5,$$

$$\lim_{t\to 3-0}x'(t)=\lim_{t\to 3-0}5e^t=5e^3,\ \lim_{t\to 3+0}x(t)=\lim_{t\to 3+0}(5e^t-5e^{t-3})=5e^3-5.$$

Рассмотрим один важный класс линейных дифференциальных уравнений — линейные уравнения с аналитическими коэффициентами. Пусть в уравнении

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = q(x) \qquad (6.7)$$

коэффициенты $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$ и функция $q(x)$ разлагаются в степенные ряды:

$$p_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^i (x - x_0)^k, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \qquad (6.8)$$

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k, \qquad (6.9)$$

сходящиеся в некоторой окрестности точки $x_0$. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 6.7.** *Если ряды* (6.8), (6.9) *сходятся при* $|x - x_0| < r$, *где* $r > 0$, *то для любых чисел* $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ *решение уравнения* (6.7) *удовлетворяющее начальным условиям*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

*разлагается в степенной ряд*

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (x - x_0)^k, \qquad (6.10)$$

*который сходится при* $|x - x_0| < r$.

Заметим, что вследствие формулы Тейлора

$$A_0 = y(x_0), A_1 = y'(x_0), A_2 = \frac{y''x_0)}{2}, \ldots, A_{n-1} = \frac{y^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}.$$

Поэтому коэффициенты $A_0$, $A_1$, ..., $A_{n-1}$ определяются сразу из начальных условий. Для определения остальных коэффициентов используются два метода.

Первый метод состоит в том, что ряд (6.10) подставляют в уравнение (6.7), прирав-нивают коэффициенты при одинаковых степенях $(x - x_0)$ и из полученных уравнений последовательно находят коэффициенты $A_n$, $A_{n+1}$, ... .

**Пример 6.12**

Задано дифференциальное уравнение

$$y'' - \frac{2}{1-x}y' + \frac{1}{1-x}y = 0. \qquad (6.11)$$

Найдем разложение в степенной ряд общего решения с точностью до $x^4$ в окрестности точки $x_0 = 0$.

*Решение.* Фундаментальную систему решений $y_1(x)$, $y_2(x)$ будем искать как решения, удовлетворяющие следующим начальным условиям:

$$\begin{cases} y_1(0) = 1, \\ y_1'(0) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y_2(0) = 0, \\ y_2'(0) = 1. \end{cases}$$



Поскольку векторы $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ линейно независимы, построенные решения действительно будут составлять фундаментальную систему решений.

Функции $p_1(x) = -\frac{2}{1-x}$, $p_2(x) = \frac{1}{1-x}$ разлагаются в ряды по степеням $x$, сходящиеся при $|x| < 1$. По теореме 6.7 решения $y_1(x)$, $y_2(x)$ также будут разлагаться в ряды по степеням $x$, сходящиеся при $|x| < 1$:

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^1 x^k,\ y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^2 x^k. \qquad (6.12)$$

Из начальных условий находим $A_0^1 = 1$, $A_1^1 = 0$, $A_0^2 = 0$, $A_1^2 = 1$.

Продифференцируем ряды (6.12) и подставим их в уравнение $(1-x)y'' - 2y' + y = 0$, равносильное уравнению (6.11) при $x \neq 1$:

$$(1-x)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)A_k^i x^{k-2} - 2\sum_{k=1}^{\infty} kA_k^i x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k^i x^k = 0, \quad i = 1, 2. \qquad (6.13)$$

Приравниваем к нулю коэффициент при $x^0$ в левой части равенства (6.13):

$$2A_2^i - 2A_1^i + A_0^i = 0,$$

откуда находим $A_2^1 = -\frac{1}{2}$, $A_2^2 = 1$.

Приравниваем к нулю коэффициент при $x^1$ в левой части равенства (6.13):

$$6A_3^i - 2A_2^i - 4A_2^i + A_1^i = 6A_3^i - 6A_2^i + A_1^i = 0,$$

откуда $A_3^1 = -\frac{1}{2}$, $A_3^2 = \frac{5}{6}$.

Приравниваем к нулю коэффициент при $x^2$ в левой части равенства (6.13):

$$12A_4^i - 6A_3^i - 6A_3^i + A_2^i = 12A_4^i - 12A_3^i + A_2^i,$$

откуда $A_4^1 = -\frac{11}{24}$, $A_4^2 = \frac{3}{4}$.

Таким образом, разложения для функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ имеют вид

$$y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{11}{24}x^4 + \ldots,$$

$$y_2(x) = x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + \frac{3x^4}{4} + \ldots,$$

где многоточия обозначают члены степенных рядов, содержащие $x^5$, $x^6$ и т.д.

Получаем требуемое разложение общего решения уравнения (6.11):

$$y(x) = C_1 + C_2 x + \left(C_2 - \frac{C_1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{5C_2}{6} - \frac{C_1}{2}\right)x^3 + \left(\frac{3C_2}{4} - \frac{11C_1}{24}\right)x^4 + \ldots .$$

Второй метод нахождения коэффициентов в разложении (6.10) состоит в последовательном применении равенств

$$A_k = \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

вытекающих из формулы Тейлора. Так как искомая функция $y(x)$ — решение уравнения (6.6), получаем равенство

$$y^{(n)}(x_0) = q(x_0) - p_1(x_0)y^{(n-1)}(x_0) - \ldots - p_n(x_0)y(x_0),$$

из которого находим $y^{(n)}(x_0)$, а следовательно, и $A_n$.

Дифференцируем уравнение (6.6) по $x$ и подставляем $x = x_0$:

$$y^{(n+1)}(x_0) = q'(x_0) - p_1'(x_0)y^{(n-1)}(x_0) - p_1(x_0)y^{(n)}(x_0) - \ldots -$$
$$- p_n'(x_0)y(x_0) - p_n(x_0)y'(x_0).$$

Все числа, входящие в правую часть этого равенства, уже известны. Из этого равенства находим $y^{(n+1)}(x_0)$ и $A_{n+1}$. Продолжая дифференцировать уравнение (6.6), последовательно определяем $A_{n+2}$, $A_{n+3}$, ... .

**Пример 6.13**

Задано дифференциальное уравнение

$$y'' - xy = 0. \qquad (6.14)$$

Найдем разложение общего решения данного уравнения в степенной ряд в окрестности точки $x_0 = 0$ с точностью до $x^5$.

*Решение*. Будем искать фундаментальную систему решений $y_1(x)$, $y_2(x)$ как решения, удовлетворяющие начальным условиям

$$\begin{cases} y_1(0) = 1, \\ y_1'(0) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y_2(0) = 0, \\ y_2'(0) = 1. \end{cases}$$

Функции $p_1(x) = 0$, $p_2(x) = x$ разлагаются в ряды по степеням $x$, сходящиеся при $|x| < \infty$, значит, и функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ по теореме 6.6 разлагаются в ряды, сходящиеся при $|x| < \infty$. Из начальных условий следует, что $A_0^1 = 1, A_1^1 = 0, A_0^2 = 0, A_1^2 = 1$.

Из уравнения (6.14) получаем при $x = 0$ равенство $y''(0) = 0$. Отсюда $A_2^1 = 0, A_2^2 = 0$. Дифференцируем равенство $y'' = xy$ по $x$:

$$y''' = xy' + y. \qquad (6.15)$$

Подставляя в полученное равенство $x = 0$, находим $y'''(0) = y(0)$. Поэтому $y_1'''(0) = 1$, $y_2'''(0) = 0$, $A_3^1 = \dfrac{1}{6}$, $A_3^2 = 0$. Дифференцируем равенство (6.16):

$$y^{IV} = xy'' + 2y'. \qquad (6.17)$$

При $x = 0$ получаем $y^{IV}(0) = 2y'(0)$. Отсюда $y_1^{IV}(0) = 0$, $y_2^{IV}(0) = 2$, $A_4^1 = 0$, $A_4^2 = \dfrac{2}{4!} = \dfrac{1}{12}$. Дифференцируем равенство (6.17): $y^V = xy''' + 3y''$. При $x = 0$ имеем $y^V(0) = 3y''(0) = 0$. Отсюда $A_5^1 = A_5^2 = 0$ и функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ представляются рядами

$$y_1(x) = 1 + \frac{x^3}{6} + \ldots, \; y_2(x) = x + \frac{x^4}{12} + \ldots,$$

где многоточия обозначают члены рядов, содержащие $x^6$, $x^7$ и т.д. Общее решение уравнения (6.14) имеет вид

$$y(x) = C_1 + C_2 x + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^4}{12} + \ldots .$$

Операционный метод применяется и для решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. По существу метод интегрирования систем не отличается от метода интегрирования одного уравнения. В этом случае после перехода к уравнениям в изображениях получается система линейных алгебраических уравнений.



**Пример 6.14**

Найдем решение задачи Коши

$$\begin{cases} x'(t) = -7x(t) + y(t), \\ y'(t) = -2x(t) - 5y(t), \end{cases} x(0) = 1, y(0) = 1.$$

*Решение*. Пусть $x(t) \mapsto X(s)$, $y(t) \mapsto Y(s)$, тогда система уравнений в изображениях имеет вид

$$\begin{cases} sX(s) - 1 = -7X(s) + Y(s), \\ sY(s) - 1 = -2X(s) - 5Y(s), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (s+7)X(s) - Y(s) = 1, \\ 2X(s) + (s+5)Y(s) = 1. \end{cases}$$

Для ее решения удобно воспользоваться формулами Крамера:

$$\Delta = s^2 + 12s + 37, \; \Delta_1 = s + 6, \; \Delta_2 = s + 5;$$

$$X(s) = \frac{s+6}{(s+6)^2 + 1}, \; Y(s) = \frac{s+5}{(s+6)^2 + 1}.$$

Возвращаясь к оригиналам, находим решение исходной задачи:

$$x(t) = e^{-6t}\cos t, \; y(t) = e^{-6t}\cos t - e^{-6t}\sin t.$$

# Глава 7
# РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

## 7.1. Линейные разностные уравнения первого порядка

**Определение 7.1.** *Линейным разностным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

$$y_{k+1} + a_k y_k = f_k, \tag{7.1}$$

где $a_k$ — известная функция $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, причем $\forall k\ a_k \neq 0$; $f_k$ — известная функция $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$; $y_k$ — неизвестная функция $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$).

**Пример 7.1 (арифметическая прогрессия)**

Пусть $a_k = -1\ \forall k$, $f_k = d\ \forall k$. Тогда уравнение (7.1) задает арифметическую прогрессию с разностью $d$.

**Пример 7.2 (геометрическая прогрессия)**

Пусть $a_k = -q\ \forall k$, $f_k = 0\ \forall k$. Тогда уравнение (7.1) задает геометрическую прогрессию со знаменателем $q$.

**Пример 7.3 (частичные суммы ряда)**

Для числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ его $k$-й частичной суммой назовем сумму $\sum\limits_{n=1}^{k} f_n$. Тогда $y_k$ удовлетворяет уравнению вида $y_{k+1} = y_k + f_{k+1}$.

**Пример 7.4**

В условиях предыдущего примера $k$-м частичным произведением назовем произведение $y_k = \prod\limits_{n=1}^{k} f_n$. Тогда $y_k$ удовлетворяет уравнению вида $y_{k+1} = y_k f_{k+1}$.

**Определение 7.2.** Последовательность $y_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, называется *решением* уравнения (7.1), если она обращает его в числовое тождество для всех $k \in$ $\in \mathbb{N}_0$. График решения (7.1) представляет собой последовательность точек плоскости с координатами $(k, \varphi_k)$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$.

**Определение 7.3.** Если $f_k \equiv 0\ \forall k \in \mathbb{N}_0$, то уравнение (7.1) называется *линейным однородным разностным уравнением* (ЛОРУ) первого порядка. В противном случае уравнение (7.1) называется *линейным неоднородным разностным уравнением* (ЛНРУ) первого порядка.



Для линейного однородного разностного уравнения (ЛОРУ) первого порядка

$$y_{k+1} + a_k y_k = 0, \tag{7.2}$$

где $a_k \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$, формулу всех решений можно получить с помощью последовательных подстановок. Из уравнения (7.2) имеем, что

$$y_1 = -a_0 y_0,\ y_2 = -a_1 y_1 = +a_0 a_1 y_0,\ y_3 = -a_2 y_2 = -a_0 a_1 a_2 y_0, \ldots,$$

$$y_k = (-1)^k a_0 a_1 \ldots a_{k-1} y_0,$$

или

$$y_k = y_0 (-1)^k \prod_{j=0}^{k-1} a_j.$$

Положим $y_0 = C$, $A_k = (-1)^k \prod\limits_{j=0}^{k-1} a_j$. Заметим, что $A_k \neq 0$ для любого $k \in \mathbb{N}_0$. Формула всех решений линейного однородного разностного уравнения (7.2) принимает вид

$$y_k = C A_k, \tag{7.3}$$

где $C$ — произвольная постоянная, $C \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Формула (7.3) называется *формулой общего решения* ЛОРУ (7.2).

Для решения линейного неоднородного разностного уравнения первого порядка (7.1) используется метод вариации произвольной постоянной.

Будем искать решение ЛНРУ (7.1) в таком же виде (7.3), как и решение ЛОРУ (7.2), но только $C$ будем считать не произвольной постоянной, а некоторой неизвестной функцией от $k$, где $k \in \mathbb{N}_0$:

$$y_k = C_k A_k,\ k \in \mathbb{N}_0. \tag{7.4}$$

Подставляя выражение (7.4) в уравнение (7.1), получаем

$$C_{k+1} A_{k+1} + a_k C_k A_k = f_k,$$

или

$$C_{k+1} A_{k+1} - C_k A_{k+1} = f_k$$

(так как $A_k$ — решение ЛОРУ).

Отсюда находим

$$C_{k+1} = C_k + \frac{f_k}{A_{k+1}}.$$

Итерируя по $k$, получаем

$$C_k = C_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f_j}{A_{j+1}},$$

где $k \in \mathbb{N}_0$; $C_0 = D$ — произвольная постоянная ($D \in \mathbb{R}$). Подставляя $C_k$ в выражение (7.4), находим формулу всех решений уравнения (7.1):

$$y_k = \left( D + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f_j}{A_{j+1}} \right) A_k. \quad (7.5)$$

Формулу (7.5) называют формулой общего решения ЛНРУ первого порядка.

Из формулы (7.5) ясно, что общее решение ЛНРУ (7.1) представляет собой сумму общего решения ЛОРУ (7.2) и некоторого частного решения ЛНРУ (7.1).

**Пример 7.5**

Решим уравнение

$$y_{k+1} - \left( \frac{k+2}{k+1} \right)^2 y_k = \frac{2k+4}{k+3}.$$

*Решение.* Имеем

$$A_k = (-1)^k (-1)^k \prod_{j=0}^{k-1} \left( \frac{j+2}{j+1} \right)^2 = (k+1)^2;$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{f_j}{A_{j+1}} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{2j+4}{(j+3)(j+2)^2} = 2 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(j+3)(j+2)} =$$

$$= 2 \sum_{j=0}^{k-1} \left( \frac{1}{j+2} - \frac{1}{j+3} \right) = 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{k}{k+2}.$$

Следовательно, общее решение ЛНРУ по формуле (7.5) имеет вид

$$y_k = \left( C + \frac{k}{k+2} \right) (k+1)^2.$$

**Определение 7.4.** Задача нахождения решения уравнения (7.1), удовлетворяющего начальному условию $y_0 = u \in \mathbb{R}$, называется *разностной задачей Коши*. Решение разностной задачи Коши для уравнения (7.1) существует, единственно при любом $u \in \mathbb{R}$ и задается формулой

$$y_k = \left( u + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f_j}{A_{j+1}} \right) A_k. \quad (7.6)$$

*Замечание 7.1.* Решение задачи Коши, выраженное формулой (7.6), часто не выражается в элементарных функциях. Например, уравнение (7.1) при $a_k = -1$, $f_k = \ln k$, $k \in \mathbb{N}$ не имеет решения в классе элементарных функций.

## 7.2. Общие свойства и методы решения линейных разностных уравнений

**Определение 7.5.** *Линейным разностным уравнением порядка n* называется уравнение вида

$$y_{k+n} + a_{1k} y_{k+n-1} + \ldots + a_{nk} y_k = f_k, \quad (7.7)$$



где $a_{1k}, \ldots, a_{nk}, f_k$ — известные функции целочисленного аргумента, причем для любого $k \in \mathbb{N}_0$ верно, что $a_{nk} \neq 0$, $a_{1k}, \ldots, a_{nk}, f_k$: $\mathbb{N}_0 \to Y$, $Y = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$; $y_k$ — искомая функция. Функции $a_{1k}, \ldots, a_{nk}$ называются коэффициентами, а функция $f_k$ — правой частью уравнения (7.7).

Уравнение (7.7) иногда называют линейным рекуррентным уравнением порядка $n$ или линейным дискретным отображением порядка $n$, а аргумент $k \in \mathbb{N}_0$ — дискретным временем.

Если $f_k \equiv 0$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$, то уравнение (7.7) называют ЛОРУ порядка $n$, иначе — ЛНРУ порядка $n$. Последовательность $\varphi_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, называется *решением* уравнения (7.7), если она обращает его в тождество для любого $k \in \mathbb{N}_0$. График решения представляет собой последовательность точек плоскости с координатами $(k, \varphi_k)$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$.

В параграфе 7.1 мы дали определение разностной задачи Коши применительно к линейному разностному уравнению первого порядка (определение 7.4). Дадим общее определение разностной задачи Коши для линейного разностного уравнения порядка $n$.

**Определение 7.6.** Задачу нахождения решения уравнения (7.7), удовлетворяющего начальным условиям $y_0 = u_1, y_1 = u_2, \ldots, y_{n-1} = u_n$, где $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — заданные числа, будем называть *разностной задачей Коши*.

**Теорема 7.1.** *Решение разностной задачи Коши всегда существует и единственно.*

***Доказательство.*** Положим $k = 0$ и подставим начальные значения $u_1, u_2, \ldots, u_n$ в уравнение (7.7). Тогда

$$y_n = f_0 - a_{10} u_n - \ldots - a_{n0} u_1.$$

Зная $y_n$, из уравнения (7.7) при $k = 1$ найдем значение

$$y_{n+1} = f_1 - a_{11} y_n - a_{21} u_n - \ldots - a_{n1} u_2.$$

Зная $y_{n+1}$, при $k = 2$ найдем

$$y_{n+2} = f_2 - a_{12} y_{n+1} - a_{22} y_n - a_{32} u_n - \ldots - a_{n2} u_3.$$

И т.д. Ясно, что данная процедура позволяет найти любое значение решения разностной задачи Коши.

Рассмотрим линейное однородное разностное уравнение порядка $n$

$$y_{k+n} + a_{1k} y_{k+n-1} + \ldots + a_{n-1,\,k} y_{k+1} + a_{nk} y_k = 0, \quad (7.8)$$

где $a_{1k}, \ldots, a_{nk}$ — известные функции дискретного аргумента $k \in \mathbb{N}_0$, причем $a_{nk} \neq 0$ для всех $k \in N_0$.

**Теорема 7.2.** *Если $y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{mk}$ — решения ЛОРУ* (7.8), *то их линейная комбинация $y_k = C_1 y_{1k} + C_2 y_{2k} + \ldots + C_m y_{mk}$, где $C_1, C_2, \ldots, C_m \in Y$ ($Y = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), также является решением уравнения* (7.8).

Доказательство теоремы очевидно.

**Определение 7.7.** Функции $y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{mk}$ дискретного аргумента $k \in \mathbb{N}_0$ называются *линейно зависимыми* (на множестве $\mathbb{N}_0$), если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in Y$, не все равные нулю и такие, что $\alpha_1 y_{1k} + \alpha_2 y_{2k} + \ldots + \alpha_m y_{mk} = 0$ для любого $k \in \mathbb{N}_0$.

Если же данное равенство для всех $k \in \mathbb{N}_0$ справедливо лишь при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$, то функции $y_{1k}, y_{2k}, ..., y_{mk}$ называются *линейно независимыми* (на множестве $\mathbb{N}_0$).

Рассмотрим определитель

$$D(y_{1k}, ..., y_{mk}) = \begin{vmatrix} y_{1k} & y_{2k} & ... & y_{mk} \\ y_{1,k+1} & y_{2,k+1} & ... & y_{m,k+1} \\ ... & ... & ... & ... \\ y_{1,k+m-1} & y_{2,k+m-1} & ... & y_{m,k+m-1} \end{vmatrix}$$

**Теорема 7.3.** *Если функции $y_{1k}, y_{2k}, ..., y_{mk}$ линейно зависимы (на множестве $\mathbb{N}_0$), то определитель $D(y_{1k}, ..., y_{mk}) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$.*

Доказательство теоремы очевидно.

**Теорема 7.4.** *Если функции $y_{1k}, y_{2k}, ..., y_{nk}$ являются решениями ЛОРУ (7.8), то для любого $k \in \mathbb{N}_0$ справедлива формула*

$$D(y_{1,k+1}, ..., y_{n,k+1}) = (-1)^n a_{nk} D(y_{1k}, ..., y_{nk}).$$

***Доказательство.*** Подставляя $y_{1k}, y_{2k}, ..., y_{nk}$ в уравнение (7.8), получаем линейную алгебраическую систему уравнений относительно $a_{1k}, ..., a_{nk}$ следующего вида:

$$\begin{cases} a_{1k} y_{1,k+n-1} + ... + a_{nk} y_{1k} = -y_{1,k+n}, \\ a_{1k} y_{2,k+n-1} + ... + a_{nk} y_{2k} = -y_{2,k+n}, \\ ... \\ a_{1k} y_{n,k+n-1} + ... + a_{nk} y_{nk} = -y_{n,k+n}. \end{cases}$$

Из этой системы получаем соотношения (для $a_{nk}$):

$$a_{nk} D(y_{1k}, ..., y_{nk}) = -\begin{vmatrix} y_{1,k+n-1} & y_{1\,k+1} & ... & y_{1,k+n} \\ y_{2,k+n-1} & y_{2,k+1} & ... & y_{2,k+n} \\ ... & ... & ... & ... \\ y_{n,k+n-1} & y_{n,k+1} & ... & y_{n,k+n} \end{vmatrix}.$$

Перестановка $n-1$ раз столбцов определителя в правой части равенства дает выражение для определителя $(-1)^{n-1} D(y_{1,k+1}, ..., y_{n,k+1})$, откуда

$$a_{nk} D(y_{1k}, ..., y_{nk}) = (-1)^n D(y_{1,k+1}, ..., y_{n,k+1}).$$

***Следствие.*** В условиях теоремы 7.4 имеет место следующая формула для любого $k \in \mathbb{N}_0$:

$$D(y_{1k}, ..., y_{nk}) = (-1)^{nk} \prod_{j=0}^{k-1} a_{nj} D(y_{10}, ..., y_{n0}).$$

**Теорема 7.5.** *Пусть $y_{1k}, ..., y_{nk}$ — решение ЛОРУ (7.8). Если определитель $D(y_{1k}, ..., y_{nk}) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$, то $y_{1k}, ..., y_{nk}$ — линейно зависимые функции (на множестве $\mathbb{N}_0$).*



***Доказательство.*** Рассмотрим линейную алгебраическую систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 y_{10} + \alpha_2 y_{20} + ... + \alpha_n y_{n0} = 0, \\ \alpha_1 y_{11} + \alpha_2 y_{21} + ... + \alpha_n y_{n1} = 0, \\ ... \\ \alpha_1 y_{1,n-1} + \alpha_2 y_{2,n-1} + ... + \alpha_n y_{n,n-1} = 0. \end{cases}$$

Поскольку определитель этой системы $D(y_{10}, ..., y_{n0}) = 0$ то можно найти такие числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, не все равные нулю, которые являются решением этой системы. Значит, при найденных $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ имеют место равенства

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{ik} = 0, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1. \tag{7.9}$$

Рассмотрим соотношения

$$y_{in} + a_{10} y_{i,n-1} + ... + a_{n0} y_{i0} = 0, \; i = 1, 2, ..., n. \tag{7.10}$$

Умножим каждое из соотношений на $\alpha_i$ и сложим равенства для всех $i$ от 1 до $n$. Получим

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{in} + a_{10} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{i,n-1} + ... + a_{n0} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{i0} = 0. \tag{7.11}$$

Учитывая равенства (7.9), отсюда получаем, что

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{in} = 0.$$

Таким образом, равенства (7.9) выполняются теперь при $k = 0, 1, 2, ..., n-1, n$. Рассматривая теперь соотношения, аналогичные (7.10), но для моментов времени не от 0 до $n$, а от 1 до $n+1$, и выписывая в новой ситуации выражение, аналогичное (7.11), получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{i,n+1} = 0.$$

и т.д. Мы установили, что при выбранной системе чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ на всем множестве $\mathbb{N}_0$ выполняется равенство

$$\alpha_1 y_{1k} + \alpha_2 y_{2k} + ... + \alpha_n y_{nk} = 0.$$

Но это и означает линейную зависимость решений $y_{1k}, ..., y_{nk}$ на всем множестве $\mathbb{N}_0$.

*Замечание 7.2.* В доказательстве теоремы 7.5 использовалось равенство нулю определителя $D(y_{1k}, ..., y_{nk}) = 0$ только при $k = 0$. Равенство нулю данного определителя для любого $k \in \mathbb{N}_0$ следует из равенства его нулю для $k = 0$.

*Замечание 7.3.* Из теорем 7.3 и 7.5 следует, что решение $y_{1k}, ..., y_{nk}$ уравнения (7.8) линейно зависимы на множестве $\mathbb{N}_0$ тогда и только тогда, когда на всем множестве $\mathbb{N}_0$ определитель $D(y_{1k}, ..., y_{nk}) \equiv 0$.

**Теорема 7.6.** *Решения $y_{1k}, ..., y_{nk}$ ЛОРУ (7.8) линейно независимы на множестве $\mathbb{N}_0$ тогда и только тогда, когда $D(y_{1k}, ..., y_{nk}) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$.*

***Доказательство.*** Утверждение теоремы непосредственно вытекает из следствия из теоремы 7.4.

**Определение 7.8.** Система $n$ линейно независимых на множестве $\mathbb{N}_0$ решений $y_{1k}$, ..., $y_{nk}$ ЛОРУ (7.8) порядка $n$ называется *фундаментальной системой решений* уравнения (7.8).

**Пример 7.6**

Функции $2^k$ и $3^k$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 0$.

**Теорема 7.7.** *Существует бесконечно много фундаментальных систем решений уравнений ЛОРУ* (7.8).

***Доказательство.*** Зададим $n^2$ чисел $u_{ij}$, $i, j = 1, 2, ..., n$, подчинив их выбор лишь условию

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда решение $\varphi_{ik}$, определяемое начальными условиями $y_{i0} = u_{i1}$, $y_{i1} = u_{i2}$, ..., $y_{i,\,n-1} = u_{in}$, существует и единственно для любого $i = 1, 2, ..., n$ в силу теоремы 7.1. Так как для этих решений $D(\varphi_{10}, \varphi_{20}, ..., \varphi_{n0}) \neq 0$, то на основании теорем 7.4 и 7.6 решения $\varphi_{1k}, \varphi_{2k}, ..., \varphi_{nk}$ линейно независимы на множестве $\mathbb{N}_0$. Значит, они образуют фундаментальную систему решений уравнения (6.8) и таких систем бесконечно много.

**Определение 7.9.** Множество всех решений ЛОРУ (7.8) называется *общим решением* этого уравнения.

Общее решение уравнения (7.8) содержит все без исключения решения этого уравнения, определяемые произвольно заданными начальными условиями $y_0 = u_1$, $y_1 = u_2$, ..., $y_{n-1} = u_n$.

**Теорема 7.8.** *Если* $\varphi_{1k}, \varphi_{2k}, ..., \varphi_{nk}$ — фундаментальная система решений уравнения (7.8), *то его общее решение задается формулой* $C_1\varphi_{1k} + C_2\varphi_{2k} + ... + C_n\varphi_{nk}$, *где* $C_1, C_2, ..., C_n$ — *произвольные постоянные*, $k \in \mathbb{N}_0$.

***Доказательство.*** Из теоремы 7.2 следует, что $y_k$ — решение. Покажем, что любое решение уравнения (7.8) может быть представлено в таком виде. Пусть имеется произвольное решение $Z_k$ уравнения (7.8), которое определяется начальными условиями $Z_0 = v_1$, $Z_1 = v_2$, ..., $Z_{n-1} = v_n$.

Выберем из множества решений $y_k$ такую функцию, которая бы имела те же самые начальные значения. Для этого необходимо найти решение $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$ следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1\varphi_{10} + C_2\varphi_{20} + ... + C_n\varphi_{n0} = v_1, \\ C_1\varphi_{11} + C_2\varphi_{21} + ... + C_n\varphi_{n1} = v_2, \\ ... \\ C_1\varphi_{1,\,n-1} + C_2\varphi_{2,\,n-1} + ... + C_n\varphi_{n,\,n-1} = v_n. \end{cases}$$



Определитель этой системы $D(\varphi_{10}, \varphi_{20}, ..., \varphi_{n0}) \neq 0$, так как $\varphi_{1k}, \varphi_{2k}, ..., \varphi_{nk}$ — фундаментальная система решений. Следовательно, решение данной системы уравнений существует и единственно. Мы получим функцию, имеющую те же начальные значения, что и $Z_k$. По теореме 7.1 (существования и единственности решения задачи Коши) $y_k = Z_k$.

**Теорема 7.9 (принцип суперпозиции для ЛНРУ).** *Пусть в ЛНРУ* (7.7) $f_k = f_k^{(1)} + f_k^{(2)}$ *для всех* $k \in \mathbb{N}_0$ *и пусть* $y_k^{(1)}$ — *какое-либо решение уравнения* (7.7) *при* $f_k = f_k^{(1)}$ *и* $y_k^{(2)}$ — *какое-либо решение уравнения* (7.7) при $f_k = f_k^{(2)}$. *Тогда* $y_k = y_k^{(1)} + y_k^{(2)}$ *является решением уравнения* (7.7).

***Доказательство.*** Обозначая левую часть уравнения (7.7) через $Ly_k$, получаем

$$Ly_k = Ly_k^{(1)} + Ly_k^{(2)} = f_k^{(1)} + f_k^{(2)} = f_k$$

для любого $k \in \mathbb{N}_0$.

## 7.3. Линейные разностные стационарные уравнения

**Определение 7.10.** *Линейным разностным стационарным уравнением порядка n* называется уравнение

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + ... + a_n y_k = f_k, \tag{7.12}$$

где коэффициенты $a_1$, ..., $a_n$ — вещественные числа, причем $a_n \neq 0$; $f_k$ — известная функция на $\mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$). Параллельно с ЛНРУ (7.12) мы будем рассматривать ЛОРУ

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + ... + a_n y_k = 0. \tag{7.13}$$

Будем искать нетривиальные решения уравнения (7.13) в виде $y_k = \lambda^k$, $\lambda \neq 0$.

Подставляя $y_k$ в уравнение (7.13) и сокращая на $\lambda^k$, получаем

$$\lambda^{k+n} + a_1\lambda^{k+n-1} + ... + a_n\lambda^k = 0$$

и затем

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n = 0. \tag{7.14}$$

**Определение 7.11.** Уравнение (7.14) называется *характеристическим уравнением* для уравнения (7.13), а $L(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n$ называется *характеристическим полиномом* уравнения (7.13).

*Замечание 7.4.* Уравнение (7.14) не может иметь нулевых корней, так как $a_n \neq 0$.

Ясно, что $\lambda^k$ — решение уравнения (7.14) тогда и только тогда, когда $\lambda$ — корень уравнения (7.14).

***Случай 1.*** Все $\lambda_i$ вещественны и различны. Тогда все решения уравнения (7.8) $\lambda_1^k, \lambda_2^k, ..., \lambda_n^k$ линейно независимы. Действительно,

$$D(\lambda_1^k, ..., \lambda_n^k) = \begin{vmatrix} \lambda_1^k & \lambda_2^k & ... & \lambda_n^k \\ \lambda_1^{k+1} & \lambda_2^{k+1} & ... & \lambda_n^{k+1} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{k+n-1} & \lambda_2^{k+n-1} & ... & \lambda_n^{k+n-1} \end{vmatrix} = \lambda_1^k \lambda_2^k \cdots \lambda_n^k W(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \neq 0,$$

так как $W(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ — определитель Ван-дер-Монда для $\lambda_1, ..., \lambda_n$ и он отличен от нуля, если $\lambda_1, ..., \lambda_n$ попарно различны. Поэтому $y_k = C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k + ... + C_n\lambda_n^k$, где $C_1, C_2, ..., C_n$ — произвольные постоянные, является общим решением ЛОРУ (7.13).

**Пример 7.7**

Решим уравнение $y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k = 0$.

*Решение.* Характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, его корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$. Поэтому общее решение $y_k = C_1(-2)^k + C_2$, где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные.

**Определение 7.12.** Число $\lambda_0$ ($\lambda_0 \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) называется *корнем кратности m* ($m \in \mathbb{N}$) уравнения $L(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n = 0$, если $L(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m L_1(\lambda)$, где $L_1(\lambda)$ — многочлен степени $n - m$ и $L_1(\lambda_0) \neq 0$.

***Случай 2.*** Характеристическое уравнение (7.14) имеет кратные корни. Ясно, что $\lambda_0$ — корень кратности $m$, когда $L(\lambda_0) = L'(\lambda_0) = ... = L^{(m-1)}(\lambda_0) = 0$, $L^{(m)}(\lambda_0) \neq 0$.

Легко доказать, что если $\lambda_0$ — корень кратности $m$ характеристического уравнения, то каждая из функций вида $\lambda_0^k$, $k\lambda_0^k$, $k^2\lambda_0^k$, ..., $k^{m-1}\lambda_0^k$ является решением уравнения (7.8). Можно доказать, что все $n$ функций такого вида для всех корней образуют фундаментальную систему решений. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ — корни характеристического уравнения (7.14) соответственно кратностей $m_1, m_2, ..., m_s$ ($m_1 + m_2 + ... + m_s = n$).

Тогда общее решение ЛОРУ (7.13) имеет вид

$$y_k = \sum_{j=1}^{s} (C_{0j} + C_{1j}k + C_{2j}k^2 + ... + C_{m_j-1,\, j}k^{m_j-1})\lambda_j^k, \qquad (7.15)$$

где $C_{ij}$ — произвольные постоянные.

**Пример 7.8**

Решим уравнение $y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 0$.

*Решение.* Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ имеет корень кратности два: $\lambda_{1,2} = 2$. Значит, общее решение $y_k = (C_1 + kC_2)2^k$.

***Лемма 7.1.*** Функция $y_k = u_k + iv_k$ является комплексным решением уравнения (7.13) тогда и только тогда, когда $u_k = \mathrm{Re}\,y_k$ и $v_k = \mathrm{Im}\,y_k$ являются вещественными решениями уравнения (7.13).

***Доказательство.*** Обозначим левую часть уравнения (7.13) через $Ly_k$. Утверждение леммы следует из равенства $Ly_k = L(u_k + iv_k) = Lu_k + iLv_k$ для любого $k \in \mathbb{N}_0$.



***Лемма 7.2.*** Если $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ — комплексный корень кратности $m$ характеристического уравнения (7.14), то и $\overline{\lambda}_0 = \alpha - i\beta$ — также корень уравнения (7.14) кратности $m$.

***Доказательство.*** Поскольку все коэффициенты $L(\lambda)$ вещественны и $L(\lambda_0) = 0$, имеем

$$L(\overline{\lambda}_0) = \overline{\lambda}_0^n + a_1\overline{\lambda}_0^{n-1} + ... + a_n = \overline{L(\lambda_0)} = \overline{0} = 0.$$

Аналогично получаем

$$L'(\overline{\lambda}_0) = ... = L^{(m-1)}(\overline{\lambda}_0) = 0,\ L^{(m)}(\overline{\lambda}_0) \neq 0.$$

Лемма доказана.

Пусть $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ — комплексный корень кратности $m$ характеристического уравнения (7.14), тогда по лемме 7.2 $\overline{\lambda}_0 = \alpha - i\beta$ тоже корень кратности $m$. Поэтому наряду с решением уравнения (7.13) вида $y_{lk} = k^l\lambda^k$ в формуле общего решения (7.15) содержится и решение уравнения (7.13) вида $\overline{y}_{lk} = k^l\overline{\lambda}^k$ для любого $l = 0, 1, ..., m - 1$.

Имеем $\lambda = re^{i\varphi}$, тогда $\lambda^k = |\lambda|^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$. Поэтому

$$y_{lk} = k^l\lambda^k = k^l|\lambda|^k\cos k\varphi + ik^l|\lambda|^k\sin k\varphi = u_{lk} + iv_{lk}$$

при всех $l = 0, 1, ..., m - 1$, где $u_{lk} = \mathrm{Re}\,y_{lk}$, $v_{lk} = \mathrm{Im}\,y_{lk}$. По лемме 7.1 $u_{lk}$, $v_{lk}$ — вещественные решения уравнения (7.13) для любого $l = 0, 1, ..., m - 1$.

Перейдем от исходного базиса решений уравнения (7.13) к новому базису, заменив каждую комплексно-сопряженную пару решений $y_{lk}, \overline{y}_{lk}$ на вещественную пару решений $u_{lk}$, $v_{lk}$ при всех $l = 0, 1, ..., m - 1$. Точнее, для каждого вещественного корня $\lambda$ кратности $p$ характеристического уравнения (7.14) построим функции $\lambda_k$, $k\lambda^k$, ..., $k^{p-1}\lambda^k$, а для каждого комплексного корня $\lambda$ кратности $m$ построим функции

$$|\lambda|^k\cos k\varphi,\ k|\lambda|^k\cos k\varphi,\ ...,\ k^{m-1}|\lambda|^k\cos k\varphi,$$

$$|\lambda|^k\sin k\varphi,\ k|\lambda|^k\sin k\varphi,\ ...,\ k^{m-1}|\lambda|^k\sin k\varphi,$$

тогда совокупность всех таких функций образует фундаментальную систему ЛОРУ (7.13).

**Пример 7.9**

Решим уравнение $y_{k+2} + y_k = 0$.

*Решение.* Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$. Корни $\lambda_{1,2} = \pm i$. Поэтому общее комплексное решение — $y_k = \hat{C}_1 i^k + \hat{C}_2(-i)^k$, где $\hat{C}_1, \hat{C}_2$ — произвольные комплексные постоянные. Имеем

$$\lambda = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2},\ \ \lambda^k = i^k = \cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2},$$

следовательно, общее вещественное решение имеет вид

$$y_k = C_1\cos\frac{k\pi}{2} + C_2\sin\frac{k\pi}{2},$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные вещественные постоянные.

Если нам известна фундаментальная система решений ЛОРУ (7.8) $\varphi_{1k}$, ..., $\varphi_{nk}$ и какое-нибудь частное решение $y_k^{(0)}$ ЛНРУ (7.7), то общее решение ЛНРУ (7.7) имеет вид

$$y_k = C_1\varphi_{1k} + \ldots + C_n\varphi_{nk} + y_k^{(0)},$$

где $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$ — произвольные постоянные.

**Теорема 7.10.** *Пусть в уравнении* (7.12) $f_k = P_s(k)\mu^k$, *где* $P_s(k)$ *— многочлен степени s с вещественными коэффициентами, а* $\mu$ *— вещественное число. Если* $\mu$ *не является корнем характеристического уравнения, то для уравнения* (7.12) *существует частное решение вида*

$$y_k^{(0)} = Q_s(k)\mu^k, \tag{7.16}$$

*где* $Q_s(k)$ *— многочлен степени s. Если* $\mu$ *является корнем кратности m характеристического уравнения, то для уравнения* (7.12) *существует частное решение вида*

$$y_k^{(0)} = k^m Q_s(k)\mu^k, \tag{7.17}$$

*где* $Q_s(k)$ *— многочлен степени s.*

***Доказательство.*** Пусть $\mu$ — не корень характеристического многочлена, т.е. $L(\mu) = \mu^n + a_1\mu^{n-1} + \ldots + a_n \neq 0$.

Будем искать решение уравнения (7.12) в виде (7.16). Подставим выражение (7.16) в уравнение (7.12):

$$\mu^{k+n}Q_s(k+n) + a_1\mu^{k+n-1}Q_s(k+n-1) + \ldots +$$
$$+ a_{n-1}\mu^{k+1}Q_s(k+1) + a_n\mu^k Q_s(k) = P_s(k)\mu^k.$$

Пусть $P_s(k) = p_0k^s + p_1k^{s-1} + \ldots + p_s$, $Q_s(k) = q_0k^s + q_1k^{s-1} + \ldots + q_s$. Известно, что $p_0 \neq 0$. Докажем, что $q_0 \neq 0$. Если подставить выражения $P_s(k)$ и $Q_s(j)$ при всех $j = k, k+1, \ldots, k+n$, сократить на $\mu^k$ и приравнять коэффициенты при $k^s$, получим равенство

$L(\mu)q_0 = p_0$.

Так как $L(\mu) \neq 0$ то $q_0 = \dfrac{p_0}{L(\mu)} \neq 0$.

Пусть $\mu$ — корень кратности 1 характеристического уравнения (7.14), т.е. $m = 1$. Докажем, что существует частное решение уравнения (7.12) вида $y_k^{(0)} = kQ_s(k)\mu^k$.

Подставим это выражение в уравнение (7.12). Получим

$$(k+n)\mu^{k+n}Q_s(k+n) + a_1(k+n-1)\mu^{k+n-1}Q_s(k+n-1) + \ldots +$$
$$+ a_nk\mu^kQ_s(k) = P_s(k)\mu^k.$$

Сократим на $\mu^k$, разложим каждую степень многочлена $Q_s(j)$ при всех $j = k, k+1, \ldots, k+n$ по формуле бинома Ньютона и рассмотрим коэффициенты левой части равенства при $k^{s+1}$ и $k^s$. Коэффициент при $k^{s+1}$ равен $L(\mu)q_0$, а коэффициент при $k^s$ равен

$$L(\mu)q_1 + \mu(s+1)L'(\mu)q_0.$$



Из условия $L(\mu) = 0$ и $L'(\mu) \neq 0$ получаем

$$q_0 = \frac{p_0}{\mu(s+1)L'(\mu)} \neq 0.$$

Значит, действительно существует решение указанного вида.

*Замечание 7.5.* На практике указанный в теореме многочлен $Q_s(k)$ находят методом неопределенных коэффициентов.

**Пример 7.10**

Решим уравнение $y_{k+2} - 4y_{k+1} + 3y_k = k2^k$.

*Решение.* Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$. Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$.

Общее решение: $y_k = C_1 + C_2 3^k + y_k^{(0)}$. Частное решение: $y_k^{(0)} = (ak+b)2^k$.

Подставим $y_k^{(0)}$ в уравнение:

$$[a(k+2)+b]2^{k+2} - 4[a(k+1)+b]2^{k+1} + 3[ak+b]2^k = k2^k.$$

Методом неопределенных коэффициентов находим

$$4ak + \cancel{8a} + 4b - 8ak - \cancel{8a} - 8b + 3ak + 3b = k,$$

откуда $\begin{cases} -ak = k, \\ 7b - 8b = 0 \end{cases}$ и поэтому $b = 0$; $a = -1$.

Следовательно, общее решение ЛНРУ имеет вид $y_k = C_1 + C_2 3^k - k2^k$.

**Пример 7.11**

Решим уравнение $y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 4 \cdot 1^k$.

*Решение.* Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Корни: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

Общее решение имеет вид $y_k = C_1 + C_2 2^k + y_k^{(0)}$, где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные, а $y_k^{(0)}$ — частное решение заданного уравнения. На основании теоремы 7.1 $y_k^{(0)} = ak$, где $a$ — коэффициент, который находится подстановкой $y_k^{(0)}$ в уравнение. Имеем

$$a(k+2) - 3a(k+1) + 2ak = 4.$$

Отсюда $a = -4$ и поэтому $y_k = C_1 + C_2 2^k - 4k$ является общим решением заданного уравнения.

**Теорема 7.11.** *Пусть в уравнении* (6.12) $f_k = P_s(k)\lambda^k$, *где* $P_s(k)$ *— заданный многочлен степени s, а* $\lambda$ *— заданное комплексное число. Если число* $\lambda$ *не является корнем характеристического уравнения* (7.14), *то существует комплексное частное решение уравнения* (7.12) *вида* $y_k^{(0)} = Q_s(k)\lambda^k$, *где* $Q_s(k)$ *— многочлен одинаковой с* $P_s(k)$ *степени s. Если же число* $\lambda$ *является корнем кратности m характеристического уравнения* (7.14), *то существует комплексное частное решение уравнения* (7.12) *вида* $y_k^{(0)} = k^mQ_s(k)\lambda^k$, *где* $Q_s(k)$ *— многочлен одинаковой с* $P_s(k)$ *степени s.*

***Доказательство.*** Доказательство теоремы 7.11 аналогично доказательству теоремы 7.10.

**Теорема 7.12.** *Пусть в уравнении* (7.12) $f_k = |\lambda|^k(P_s(k)\cos k\alpha + Q_s(k)\sin k\alpha)$ *где* $P_s(k)$ *и* $Q_s(k)$ *— заданные многочлены степени не больше s с веще-*

*ственными коэффициентами. Если число* $\lambda = |\lambda|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ *не является корнем характеристического уравнения* (7.14), *то для уравнения* (7.12) *существует частное решение вида*

$$y_k^{(0)} = |\lambda|^k\, (T_s(k)\cos k\alpha + U_s(k)\sin k\alpha),$$

*где* $T_s(k)$ *и* $U_s(k)$ *— многочлены степени не больше* $s$ *с вещественными коэффициентами. Если же число* $\lambda = |\lambda|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ *является корнем кратности* $m$ *характеристического уравнения* (7.16), *то для уравнения* (7.14) *существует частное решение вида*

$$y_k^{(0)} = k^m\, |\lambda|^k\, (T_s(k)\cos k\alpha + U_s(k)\sin k\alpha),$$

где $T_s(k)$ *и* $U_s(k)$ *— многочлены степени не больше* $s$ *с вещественными коэффициентами.*

***Доказательство.*** Пусть в уравнении (7.12) $f_k = |\lambda|^k(P_s(k)\cos k\alpha + Q_s(k)\sin k\alpha)$, где $P_s(k)$ и $Q_s(k)$ — многочлены степени не больше $s$ с вещественными коэффициентами, а $|\lambda| > 0$ и $\alpha$ — заданные числа.

Заметим, что если $\lambda = |\lambda|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, то $\lambda^k = |\lambda|^k(\cos k\alpha + i\sin k\alpha)$, $\bar\lambda^k = |\bar\lambda|^k\,(\cos k\alpha - i\sin k\alpha)$, $|\lambda|^k \cos k\alpha = \dfrac{1}{2}(\lambda^k + \bar\lambda^k)$, $|\bar\lambda|^k \sin k\alpha = \dfrac{1}{2i}(\lambda^k - \bar\lambda^k)$.

Преобразуем $f_k$ следующим образом:

$$f_k = \frac{1}{2}(\lambda^k + \bar\lambda^k)P_s(k) - \frac{i}{2}(\lambda^k - \bar\lambda^k)Q_s(k) =$$
$$= \frac{1-i}{2}\lambda^k(P_s(k) + Q_s(k)) + \frac{1+i}{2}\bar\lambda^k(P_s(k) + Q_s(k)).$$

В силу теоремы 7.11 и принципа суперпозиции уравнение (7.12) имеет частное решение вида

$$y_k^{(0)} = k^m\lambda^k R_s(k) + k^m\bar\lambda^k \bar R_s(k),$$

где $m = 0$, если $\lambda$ не является корнем характеристического уравнения (7.14). Имеем

$$\begin{aligned} y_k^{(0)} &= k^m[|\lambda|^k\,(\cos k\alpha + i\sin k\alpha)R_s(k) + |\lambda|^k\,\cos k\alpha - i\sin k\alpha)\bar R_s(k)] = \\ &= k^m\,|\lambda|^k\,[(R_s(k) + \bar R_s(k))\cos k\alpha + i(R_s(k) - \bar R_s(k))\sin k\alpha] = \\ &= k^m\,|\lambda|^k\,(T_s(k)\cos k\alpha + U_s(k)\sin k\alpha), \end{aligned}$$

где $T_s(k)$ и $U_s(k)$ — многочлены степени не более $s$ с вещественными коэффициентами.

**Пример 7.12**

Решим уравнение $y_{k+2} + y_k = \sin\dfrac{k\pi}{4}$.

*Решение.* Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Следовательно, общее (вещественное) решение уравнения имеет вид

$$y_k = C_1\cos\frac{k\pi}{2} + C_2\sin\frac{k\pi}{2} + y_k^{(0)},$$



где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные, а $y_k^{(0)}$ — частное решение заданного уравнения. Согласно теореме 7.12 частное решение имеет вид

$$y_k^{(0)} = a\cos\frac{k\pi}{2} + b\sin\frac{k\pi}{2},$$

где $a$ и $b$ — неопределённые коэффициенты. Подставим $y_k^{(0)}$ в заданное уравнение:

$$a\cos(k+2)\frac{\pi}{4} + b\sin(k+2)\frac{\pi}{4} + a\cos\frac{k\pi}{4} + b\sin\frac{k\pi}{4} = \sin\frac{k\pi}{4}.$$

Получаем $a = -b = \dfrac{1}{2}$. Значит, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y_k = C_1\cos\frac{k\pi}{2} + C_2\sin\frac{k\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{k\pi}{4} - \sin\frac{k\pi}{4}\right).$$

## 7.4. Нормальные линейные системы разностных уравнений

**Определение 7.13.** *Нормальной линейной системой разностных уравнений* называется система линейных разностных уравнений вида

$$x_{k+1} = A_k x_k + f_k, \tag{7.18}$$

где при всех $k \in \mathbb{N}_0$

$$x_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ \dots \\ x_{nk} \end{pmatrix};\ x_{k+1} = \begin{pmatrix} x_{1,\,k+1} \\ \dots \\ x_{n,\,k+1} \end{pmatrix};\ f_k = \begin{pmatrix} f_{1k} \\ \dots \\ f_{nk} \end{pmatrix};$$

$A_k = (a_{ijk})$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$, причем матрица $A$ является невырожденной при всех $k$.

Линейная система (7.18) называется линейной однородной системой разностных уравнений (ЛОС), если $f_k = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$, в противном случае линейная система (7.18) называется линейной неоднородной системой разностных уравнений (ЛНС).

Решением нормальной линейной системы (7.18) называется вектор-функция $\varphi_k$ с $n$ компонентами $\varphi_{1k}, \dots, \varphi_{nk}$ заданная на множестве $\mathbb{N}_0$ и удовлетворяющая системе (7.18) для каждого $k \in \mathbb{N}_0$.

Разностная задача Коши формулируется следующим образом: для системы (7.18) найти решение, удовлетворяющее начальным условиям $x_0 = u$, где $u \in \mathbb{R}^n$.

**Теорема 7.13.** *Решение разностной задачи Коши существует и единственно.*

***Доказательство.*** Докажем сначала существование решения. Используя систему (7.18) и начальные условия, будем последовательно выписывать значения $x_k$. Получим

$$\begin{aligned} x_1 &= A_0 u + f_0, \\ x_2 &= A_1 x_1 + f_1 = A_1 A_0 u + A_1 f_0 + f_1, \\ x_3 &= A_2 x_2 + f_2 = A_2 A_1 A_0 u + A_2 A_1 f_0 + A_2 f_1 + f_2. \end{aligned}$$

Методом математической индукции можно убедиться в том, что для каждого $k \in \mathbb{N}_0$ решение нашей разностной задачи Коши находится по формуле

$$x_k = \prod_{j=0}^{k-1} A_j u + \prod_{j=1}^{k-1} A_j f_0 + \prod_{j=2}^{k-1} A_j f_1 + \ldots + A_{k-1} f_{k-2} + f_{k-1}.$$

Докажем единственность решения разностной задачи Коши. Если $x_k^{(1)}$ и $x_k^{(2)}$ — два какие-нибудь решения нашей задачи, то их разность $x_k = x_k^{(1)} - x_k^{(2)}$ является решением задачи Коши вида $x_{k+1} = A_k x_k$, $x_0 = 0$.

Из формулы решения задачи Коши находим, что для $u = 0$ решение $x_k = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$. Наоборот, пусть $x_k = 0$ — решение исходной задачи Коши. Покажем, что для него начальным значением служит $u = 0$. Из формулы решения задачи Коши получаем алгебраическую систему уравнений для $u$ вида $\prod_{j=0}^{k-1} A_j u = 0$.

Поскольку для системы (7.18) всегда $|A_k| \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$, то матрица $\prod_{j=0}^{k-1} A_j$ не вырождена при всех $k \in \mathbb{N}_0$, и решением алгебраической системы является лишь $u = 0$. Тем самым единственность решения разностной задачи Коши установлена.

*Замечание 7.6*. Если начальное значение $u$ не задано, то из доказательства теоремы 7.13 получаем формулу всех решений системы (7.20):

$$x_k = \prod_{j=0}^{k-1} A_j C + \prod_{j=0}^{k-1} A_j f_0 + \prod_{j=0}^{k-1} A_j f_1 + \ldots + A_{k-1} f_{k-2} + f_{k-1},$$

где $C$ — произвольный $n$-мерный числовой вектор. Полученная формула называется *формулой общего решения нормальной линейной системы* (7.18) разностных уравнений порядка $n$.

Рассмотрим линейную однородную систему разностных уравнений $n$-го порядка

$$x_{k+1} = A_k x_k, \tag{7.19}$$

где $A_k$ — $(n \times n)$-матрица, невырожденная при всех $k \in \mathbb{N}_0$. Совершенно очевидно, что множество всех решений линейной однородной системы (7.19) образует линейное пространство.

**Определение 7.14.** Вектор-функции $y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{mk}$ с $n$ компонентами называются *линейно зависимыми* на множестве $\mathbb{N}_0$, если найдутся такие числа $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_m$, не равные нулю одновременно, что $\alpha_1 y_{1k} + \alpha_2 y_{2k} + \ldots + \alpha_m y_{mk} = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$. Если же это равенство для всех $k \in \mathbb{N}_0$ справедливо лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$, то вектор-функции $y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{mk}$ называются *линейно независимыми* на множестве $\mathbb{N}_0$.

**Определение 7.15.** Любая система $n$ линейно независимых решений $\varphi_{1k}, \varphi_{2k}, \ldots, \varphi_{nk}$ однородной системы (7.19) называется ее *фундаментальной системой решений*.

**Теорема 7.14.** *Решения $y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{nk}$* ЛОС (7.19) *линейно независимы тогда и только тогда, когда определитель $D_k \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$.*



***Доказательство.*** Доказательство теоремы 7.11 аналогично соответствующему доказательству для систем дифференциальных уравнений.

## 7.5. Линейные стационарные системы разностных уравнений

**Определение 7.16.** *Линейной стационарной системой разностных уравнений* называется система вида

$$x_{k+1} = Ax_k + f_k, \tag{7.20}$$

где $A$ — заданная квадратная числовая невырожденная $(n \times n)$-матрица; $f_k$ — заданная вектор-функция с $n$ компонентами на множестве $\mathbb{N}_0$; $x_k$ — неизвестная вектор-функция с $n$ компонентами; $k \in \mathbb{N}_0$.

Одновременно с системой (7.20) будем рассматривать линейную однородную стационарную систему разностных уравнений

$$x_{k+1} = Ax_k. \tag{7.21}$$

Система (7.21) всегда имеет тривиальное решение $x_k = 0$. Будем искать нетривиальные решения в виде

$$x_k = \lambda^k h, \tag{7.22}$$

где $\lambda \neq 0$; $h$ — ненулевой вектор с $n$ компонентами. Подставляя $x_k$ из выражения (7.22) в формулу (7.21), получаем алгебраическую систему уравнений $Ah = \lambda h$.

Это означает, что $\lambda$ должно быть собственным числом матрицы $A$, а $h$ — соответствующим собственным вектором. Таким образом, $\lambda$ должно быть корнем характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$.

Аналогично соответствующим теоремам относительно решений систем дифференциальных уравнений доказываются следующие теоремы для разностных уравнений.

**Теорема 7.15.** *Если существует базис пространства $\mathbb{R}^n$ из собственных векторов $h_1, h_2, \ldots, h_n$ матрицы $A$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — соответствующие им собственные числа, то общее решение системы* (7.21) *имеет вид*

$$x_k = C_1 \lambda_1^k h_1 + C_2 \lambda_2^k h_2 + \ldots + C_n \lambda_n^k h_n,$$

*где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.*

***Доказательство.*** Так как $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — базис в $\mathbb{R}^n$, то каждое решение системы (7.21) имеет вид $x_k = \zeta_{1k} h_1 + \zeta_{2k} h_2 + \ldots + \zeta_{nk} h_n$, где координаты $\zeta_{1k}$, $\zeta_{2k}, \ldots, \zeta_{nk}$ находятся подстановкой $x_k$ в систему (7.21). Имеем

$$\begin{aligned}\zeta_{1,\,k+1} h_1 + \zeta_{2,\,k+1} h_2 + \ldots + \zeta_{n,\,k+1} h_n &= \zeta_{1k} A h_1 + \zeta_{2k} A h_2 + \ldots + \zeta_{nk} A h_n = \\ &= \zeta_{1k} \lambda_1 h_1 + \zeta_{2k} \lambda_2 h_2 + \ldots + \zeta_{nk} \lambda_n h_n.\end{aligned}$$

Получаем, что для всех $k \in \mathbb{N}_0$ верно, что $\zeta_{1,\,k+1} = \lambda_1 \zeta_{1k}$, $\zeta_{2,\,k+1} = \lambda_2 \zeta_{2k}$, ..., $\zeta_{n,\,k+1} = \lambda_n \zeta_{nk}$.

Решая эти уравнения, находим, что $\zeta_{1k}=C_1\lambda_1^k, \zeta_{2k}=C_2\lambda_2^k, ..., \zeta_{nk}=C_n\lambda_n^k$, где $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$ — произвольные постоянные. Следовательно, все решения системы (7.21) задаются формулой

$$x_k = C_1\lambda_1^k h_1 + C_2\lambda_2^k h_2 + ... + C_n\lambda_n^k h_n.$$

**Теорема 7.16.** *Общее решение линейной однородной стационарной системы разностных уравнений* (7.21) *имеет вид*

$$x_k = \sum_{j=1}^{s}[C_{1j}\lambda_j^k h_{1j} + C_{2j}(\lambda_j^k h_{2j} + C_k^1\lambda_j^{k-1}h_{1j}) + ... +$$
$$+ C_{r_j,j}(\lambda_j^k h_{r_j,j} + C_k^1\lambda_j^{k-1}h_{r_j-1,j} + ... + C_k^{r_j-1}\lambda_j^{k-r_j+1}h_{1j})]. \qquad (7.23)$$

***Доказательство.*** Как следует из параграфа 7.4, общее решение системы (7.21) имеет вид $x_k = A^kC$, где $C$ — произвольный числовой $n$-вектор. Если жорданов базис состоит из $s$ жордановых цепочек длины $r_j$: $h_{1j}, h_{2j}, ..., h_{r_j j}$, соответствующих собственным значениям $\lambda_j$, $j = 1, 2, ..., s$, $r_1 + r_2 + ... + r_s = n$.

Разложим вектор $C$ по жорданову базису пространства $\mathbb{R}^n$ и подставим это разложение в формулу для $x_k$. Получим

$$x_k = A^k\sum_{j=1}^{s}(C_{1j}h_{1j} + C_{2j}h_{2j} + ... + C_{r_j j}h_{r_j j}),$$

где $C_{1j}, C_{2j}, ..., C_{r_j j}$ — произвольные постоянные, являющиеся компонентами разложения вектора $C$ по жорданову базису, $j = 1, 2, ..., s$. Посмотрим, как действует $A^k$ на векторы жорданова базиса. Пусть собственному числу $\lambda$ матрицы $A$ соответствует жорданова цепочка $h_1, h_2, ..., h_r$. Методом математической индукции можно показать, используя определение собственного и присоединенных векторов, что

$$A^kh_1 = \lambda^kh_1,$$
$$A^kh_2 = \lambda^kh_2 + C_k^1\lambda^{k-1}h_1,$$
$$A^kh_3 = \lambda^kh_3 + C_k^1\lambda^{k-1}h_2 + C_k^2\lambda^{k-2}h_1,$$
$$A^kh_4 = \lambda^kh_4 + C_k^1\lambda^{k-1}h_3 + C_k^2\lambda^{k-2}h_2 + C_k^3\lambda^{k-3}h_1,$$
$$...$$
$$A^kh_r = \lambda^kh_r + C_k^1\lambda^{k-1}h_{r-1} + C_k^2\lambda^{k-2}h_{r-2} + ... + C_k^{r-2}\lambda^{k-r+2}h_2 + C_k^{r-1}\lambda^{k-r+1}h_1,$$

где $C_k^m$ — число сочетаний из $k$ по $m$, $m = 1, 2, ..., r - 1$. Отсюда получаем формулу (7.23), что доказывает теорему 7.16.

*Замечание 7.7.* В формуле (7.23) содержится $n$ произвольных постоянных, так как $r_1 + r_2 + ... + r_s = n$.

**Теорема 7.17.** *Пусть в неоднородной линейной стационарной системе разностных уравнений* (7.20) $f_k = \mu^kP_s(k)$, *где* $\mu$ *— заданное ненулевое вещественное число, а* $P_s(k)$ *— многочлен степени* $s$, *коэффициентами которого являются заданные вещественные* $n$*-мерные числовые векторы. Если число* $\mu$ *не является собственным значением матрицы* $A$, *то существует частное*



*решение системы* (7.20) *вида* $x_k^{(0)} = \mu^kQ_s(k)$, *где* $Q_s(k)$ *— многочлен той же степени* $s$, *что и многочлен* $P_s(k)$, *коэффициенты которого находятся подстановкой* $x_k^{(0)}$ *в систему* (7.20).

***Доказательство.*** Пусть $P_s(k) = k^sp_0 + k^{s-1}p_1 + ... + p_s$, $Q_s(k) = k^sq_0 + k^{s-1}q_1 + ... + q_s$, где $p_0 \neq 0$, $p_1$, $p_2$, ..., $p_s$ — заданные числовые $n$-мерные векторы, а $q_0$, $q_1$, ..., $q_s$ — подлежащие определению из системы уравнений (7.20) неизвестные числовые $n$-мерные векторы.

Подстановка $x_k^{(0)}$ в систему уравнений (7.20) дает равенство

$$\mu^{k+1}[(k+1)^sq_0 + (k+1)^{s-1}q_1 + ... + q_s] =$$
$$= \mu^kA[k^sq_0 + k^{s-1}q_1 + ... + q_s] + \mu^k[p_0k^s + p_1k^{s-1} + ... + p_s].$$

После сокращения на $\mu^k$ видим, что коэффициент при $k^s$ удовлетворяет уравнению

$$\mu q_0 = Aq_0 + p_0.$$

Так как $\mu$ не является собственным значением матрицы $A$, существует обратная матрица $(\mu E - A)^{-1}$, и мы находим $q_0 = (\mu E - A)^{-1}p_0$.

Поскольку $p_0 \neq 0$, то и $q_0 \neq 0$, значит, $Q_s(k)$ — многочлен степени $s$.

**Пример 7.13**

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x_{k+1} = -5x_k - 2y_k - 2z_k, \\ y_{k+1} = 10x_k + 4y_k + 2z_k, \\ z_{k+1} = 2x_k + y_k + 3z_k. \end{cases}$$

*Решение.* Находим собственные числа и собственные векторы матрицы системы

$$\begin{pmatrix} -5 & -2 & -2 \\ 10 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

и получаем: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, $h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Таким образом, общее решение заданной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = C_1(-1)^k\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 2^k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

где $C_1$, $C_2$, $C_3$ — произвольные постоянные.

**Пример 7.14**

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x_{k+1} = -x_k - 5y_k + z_k, \\ y_{k+1} = -x_k + 3y_k - z_k, \\ z_{k+1} = 4x_k + 5y_k + 2z_k. \end{cases}$$

*Решение*. Для матрицы системы находим собственные числа $\lambda_1 = -2$ кратности 1 и $\lambda_2 = 3$ кратности 2. Собственному числу $\lambda_1$ соответствует собственный вектор $h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, а собственному числу $\lambda_2$ — собственный вектор $h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и присоединенный вектор $h_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Следовательно, общее решение заданной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = C_1(-2)^k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 3^k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \left[ 3^k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k3^{k-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$

где $C_1$, $C_2$, $C_3$ — произвольные постоянные.

**Пример 7.15**

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - 2y_k, \\ y_{k+1} = x_k - y_k. \end{cases}$$

*Решение*. Матрица системы имеет собственные числа $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Им соответствуют собственные векторы

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее комплексное решение системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \hat{C}_1 i^k \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} + \hat{C}_2 (-i)^k \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $\hat{C}_1$ и $\hat{C}_2$ — произвольные комплексные постоянные. Выделяя вещественную и мнимую части решения, получаем

$$i^k \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} = \left( \cos\frac{\pi k}{2} + i \sin\frac{\pi k}{2} \right) \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi k}{2} - \sin\frac{\pi k}{2} \\ \cos\frac{\pi k}{2} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi k}{2} + \sin\frac{\pi k}{2} \\ \sin\frac{\pi k}{2} \end{pmatrix}.$$

Общее вещественное решение заданной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi k}{2} - \sin\frac{\pi k}{2} \\ \cos\frac{\pi k}{2} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi k}{2} + \sin\frac{\pi k}{2} \\ \sin\frac{\pi k}{2} \end{pmatrix},$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные вещественные постоянные.

**Пример 7.16**

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - y_k + 3^k, \\ y_{k+1} = -2x_k - 3^k. \end{cases}$$



*Решение*. Матрица системы $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ имеет собственные числа $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Соответствующие им линейно независимые собственные векторы

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение заданной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = C_1(-1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 2^k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_k^{(0)} \\ y_k^{(0)} \end{pmatrix},$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные, а столбец из $x_k^{(0)}$ и $y_k^{(0)}$ задает частное решение заданной системы разностных уравнений. Согласно теореме 7.17 частное решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_k^{(0)} \\ y_k^{(0)} \end{pmatrix} = 3^k \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

где коэффициенты $a$ и $b$ можно найти методом неопределенных коэффициентов. Подставляя это решение в систему разностных уравнений, находим

$$\begin{cases} 3^{k+1} a = 3^k a - 3^k b + 3^k, \\ 3^{k+1} b = -2 \cdot 3^k a - 3^k. \end{cases}$$

Отсюда находим, что $a = 1$, $b = -1$. Следовательно, общее решение заданной системы

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = C_1(-1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 2^k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3^k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Фундаментальная матрица решений.** Понятие фундаментальной матрицы решений в случае системы разностных уравнений вводится точно так же, как и в случае систем дифференциальных уравнений.

Очевидно, что $x_k = A^k$ является решением матричного уравнения (7.21) и матрица $A^k$ является фундаментальной матрицей решений линейной стационарной системы разностных уравнений (7.21). Пусть $J$ — жорданова форма матрицы $A$, $S$ — матрица перехода (невырожденная), тогда $A = SJS^{-1}$, $A^k = SJ^kS^{-1}$, $A^kS = SJ^k$.

Пусть $J = \mathrm{diag}\{\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_m\}$ согласно теореме Жордана каждая клетка $\Lambda_k$ имеет вид

$$\Lambda_k = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & \lambda_k & 1 \\ 0 & ... & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}}_{r_k},$$

где порядок матрицы $r_k$ не превосходит кратности соответствующего собственного числа $\lambda_k$. Тогда очевидно, что

$$J^k = \mathrm{diag}\{\Lambda_1^k, \Lambda_2^k, ..., \Lambda_m^k\} \begin{pmatrix} \Lambda_1^k & 0 & ... & 0 \\ 0 & \Lambda_2^k & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \Lambda_m^k \end{pmatrix}.$$

Посмотрим, что представляет собой один блок $\Lambda_i^k$. Опустим индекс у $\Lambda_i$ и рассмотрим просто жорданову клетку $\Lambda$ порядка $r$. Она представляет собой сумму двух матриц

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & ... & ... \\ ... & ... & ... & 1 \\ 0 & 0 & ... & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + Z,$$

где $Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$

Таким образом, $\Lambda^2 = \lambda^2 E + 2\lambda EZ + Z^2, \Lambda^3 = \lambda^3 E + 3\lambda^2 E^2 Z + 3\lambda EZ^2 + Z^3 = \lambda^3 E + 3\lambda^2 Z + 3\lambda Z^2 + Z^3$ и т.д.,

$$\Lambda^k = \sum_{i=0}^{r-1} C_k^i \lambda^{k-i} Z^i = \begin{pmatrix} \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & C_k^2\lambda^{k-2} & ... & C_k^{r-1}\lambda^{k-r+1} \\ 0 & \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & ... & C_k^{r-2}\lambda^{k-r+2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & C_k^1\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

*Замечание 7.8.* Если $A^k$ — фундаментальная матрица решений системы (7.21), а $S$ — невырожденная матрица, то $A^kS$ — также фундаментальная матрица решений системы (7.21). Но $A^kS = SJ^k$, поэтому самый простой способ решить систему (7.21) — это привести матрицу $A$ к жордановой форме и выписать фундаментальную матрицу решений $SJ^k$. Например, если порядок системы уравнений $n = 3$ и характеристическое уравнение имеет единственный корень кратности 3, которому соответствует система из единственного собственного вектора, то фундаментальная матрица решений выглядит следующим образом:

$$A^kS = SJ^k = (S^1 \quad S^2 \quad S^3)\begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix},$$



где $S^1$, $S^2$, $S^3$ — соответственно собственный и два присоединенных, или корневых, вектора высоты 1 и 2 соответственно, или столбцы матрицы $S$, т.е. решения следующих уравнений: $(A - \lambda E)S^1 = 0$, $(A - \lambda E)S^2 = S^1$, $(A - \lambda E)S^3 = S^2$.

## 7.6. Устойчивость по Ляпунову положений равновесия автономной системы разностных уравнений

**Определение 7.16.** *Автономной системой разностных уравнений порядка $n$* называется система вида

$$x_{i,\,k+1} = f_i(x_{1k}, ..., x_{nk}),\ i = 1, 2, ..., n,\ k \in \mathbb{N}_0,$$

или в векторной форме

$$x_{k+1} = f(x_k),\ k \in \mathbb{N}_0, \tag{7.24}$$

где $x_k$ — вектор-функция на $\mathbb{N}_0$; $f(x_k)$ — вектор-функция на $\mathbb{R}^n$.

**Определение 7.17.** Всякое решение автономной системы разностных уравнений (7.24), являющееся постоянным вектором с $n$ компонентами, называется *положением равновесия* автономной системы (7.24). Положения равновесия называются также неподвижными, или стационарными, точками системы.

**Определение 7.18.** Положение равновесия $x^*$ автономной системы (7.24) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех решений $x_k$ системы (7.24), для которых начальное значение $x_0$ удовлетворяет условию $|x_0 - x^*| < \delta$, верно, что $|x_k - x^*| < \varepsilon$ для всех $k \in N_0$. В противном случае положение равновесия $x^*$ называется *неустойчивым.*

**Определение 7.19.** Устойчивое по Ляпунову положение равновесия $x^*$ автономной системы (7.24) называется *асимптотически устойчивым*, если $\lim\limits_{k\to+\infty} |x_k - x^*| = 0$.

*Замечание 7.9.* Заметим, что $x^* = 0$ — единственное положение равновесия системы (7.21), если 1 не является собственным значением матрицы $A$. Это следует из того, что положение равновесия системы (7.21) является решением линейной алгебраической системы уравнений $x = Ax$.

**Теорема 7.18.** *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, $1 \le m \le n$, — все собственные числа матрицы $A$. Тогда*:

а) *если $|\lambda_i| < 1$ для всех $i = 1, 2, ..., m$, то положение равновесия $x^* = 0$ системы* (7.21) *является асимптотически устойчивым*;

б) *если существует хотя бы одно собственное число $\lambda$, такое что $|\lambda| > 1$, то положение равновесия $x^* = 0$ системы* (7.21) *является неустойчивым.*

***Доказательство.*** Пусть $x_k$ — решение системы (7.21), определяемое начальным условием $x_0 = u$, где $u$ — некоторый $n$-вектор. Тогда оно задается формулой (7.23). В случае а) $x_k \to 0$ при $k \to +\infty$. При этом если $k \le \max\{r_1, r_2, ..., r_s\}$, где $r_1, r_2, ..., r_s$ — длины жордановых цепочек, образующих жорданов базис пространства $\mathbb{R}^n$, то неравенство, требуемое в определении устойчивого по Ляпунову положения равновесия, достигается за счет выбора малого по модулю начального значения $x_0$, т.е. за счет выбора произвольных постоянных в (7.23). В случае б) для любого начального значения $x_0$ из формулы (7.23) следует, что $x_k \to \infty$ при $k \to +\infty$.

**Теорема 7.19.** *Пусть* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, $1 \le m \le n$, *— все собственные числа матрицы* $A$, *и пусть* $|\lambda_i| \le 1$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, m$. *Тогда*:

а) *если для каждого собственного числа* $\lambda$ *матрицы* $A$, *такого что* $|\lambda| = 1$, *число линейно независимых собственных векторов равно кратности* $\lambda$, *то* $x^* = 0$ *является для системы* (7.21) *устойчивым по Ляпунову положением равновесия*;

б) *если существует хотя бы одно собственное число* $\lambda$ *матрицы* $A$, *у которого* $|\lambda| = 1$, *и такое, что число линейно независимых собственных векторов меньше кратности* $\lambda$, *то* $x^* = 0$ *является для системы* (7.21) *неустойчивым положением равновесия.*

***Доказательство.*** В случае а) для тех $\lambda$, для которых $|\lambda| = 1$, отсутствуют присоединенные векторы и поэтому отсутствуют в формуле (7.23) слагаемые, содержащие положительные степени $k$. Если $|\lambda| = 1$ для всех $\lambda$ матрицы $A$, то выполнение неравенства, требуемого в определении устойчивого по Ляпунову положения равновесия, достигается за счет выбора малого по модулю начального значения $x_0$. Если же кроме собственных значений $\lambda$ с $|\lambda| = 1$ имеются и собственные значения $\lambda$ с $|\lambda| < 1$, то соответствующие им слагаемые в формуле (7.23) стремятся к нулю при $k \to +\infty$ и поэтому не могут вывести траекторию $x_k$ из окрестности $x^* = 0$.

В случае б) всегда можно найти решение задачи Коши (7.25) с начальным условием $x_0 = u$, зависящее от положительной степени $k$ и поэтому являющееся неограниченной функцией, $k \in \mathbb{N}$.

*Замечание 7.10.* Так как линейное однородное стационарное уравнение порядка $n$

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \ldots + a_n y_k = 0, \tag{7.25}$$

где $a_n \neq 0$, всегда можно свести к системе (7.21), то теоремы 7.18 и 7.19 имеют место и для уравнения (7.25), если под $\lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, понимать различные корни уравнения $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$.

Например, для уравнения $y_{k+2} + y_k = 0$ нуль является устойчивым по Ляпунову положением равновесия, а для уравнения $y_{k+2} - 4y_k = 0$ — неустойчивым положением равновесия; для уравнения $y_{k+2} + 3y_{k+1} + 2y_k = 0$ нуль является асимптотически устойчивым положением равновесия.

Рассмотрим автономную нелинейную систему (7.24) разностных уравнений порядка $n$. Пусть $x^* = 0$ — ее положение равновесия, т.е. $f(0) = 0$, и пусть вектор-функция $f(x)$ является непрерывно дифференцируемой для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Случай, когда $x^*$ — ненулевое положение равновесия системы (7.24), заменой $x_k = y_k + x^*$ сводится к нулевому положению равновесия для системы вида

$$y_{k+1} = -x^* + f(y_k + x^*).$$



Предположим, что матрица Якоби

$$J = \left(\frac{\partial f_i(0)}{\partial x_j}\right), i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

является невырожденной. Тогда линейная однородная стационарная система порядка $n$

$$x_{k+1} = Jx_k$$

называется *линеаризацией* нелинейной системы (7.24) в окрестности положения равновесия $x^* = 0$.

**Теорема 7.20.** *Если все собственные числа* $\lambda$ *матрицы* $J$ *по модулю меньше единицы, то нулевое решение является асимптотически устойчивым. Если же хотя бы для одного собственного значения* $\lambda$ *матрицы* $J$ *модуль* $\lambda$ *больше единицы, то нулевое положение равновесия для системы* (7.24) *является неустойчивым положением равновесия.*

***Доказательство.*** Доказательство теоремы аналогично соответствующему доказательству для систем дифференциальных уравнений.

# Глава 8
# СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

## 8.1. Предварительные сведения. Винеровский процесс

Для того чтобы перейти к изложению одного из основных методов современного экономического анализа — методу реальных (или экономических, в отличие от финансовых) опционов, напомним основные сведения, касающиеся случайных процессов и стохастических дифференциальных уравнений.

Стохастический процесс развивается во времени таким образом, что хотя бы частично является случайным. Например, температура: ее изменение во времени частично детерминировано (увеличение в течение дня и падение ночью, увеличение летом и уменьшение зимой) и частично случайно и непредсказуемо. Другой пример — цена компьютеров фирмы *IBM*: она колеблется случайным образом, но на длительном промежутке времени имеет ожидаемый положительный темп роста, который компенсирует инвесторам риск держания актива.

Стохастический процесс определяется вероятностным законом развития $x_t$ переменной $x$ во времени $t$. Таким образом, для данных моментов времени $t_1 < t_2 < t_3$ и т.д. имеем или можем вычислить вероятность того, что соответствующие значения $x_1, x_2, x_3$ и т.д. лежат в некотором определенном диапазоне, например $P\{a_1 < x_1 \le b_1, a_2 < x_2 \le b_2, ...\}$. Напомним также строгие определения.

**Определение 8.1.** Пусть $\Omega$ — заданное множество, тогда *σ-алгебра* на $\Omega$ есть семейство $\Im$ подмножеств множества $\Omega$ со следующими свойствами:

1) $\varnothing \in \Im$;
2) $F \in \Im \Rightarrow F^C \in \Im$, где $F^C = \Omega \setminus F$ — дополнение множества $F$ в $\Omega$;
3) $A_1, A_2, ... \in \Im \Rightarrow A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \Im$.

Пара $(\Omega, \Im)$ называется *измеримым пространством*. *Вероятностной мерой* на измеримом пространстве $(\Omega, \Im)$ называется функция $P$: $\Im \to [0; 1]$, такая что:

1) $P(\varnothing) = 0, P(\Omega) = 1$;
2) если $A_1, A_2, ... \in \Im$ и $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — непересекающаяся система (т.е. $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $I \neq j$), то $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.



Тройка $(\Omega, \Im, P)$ называется *вероятностным пространством*.

При любом заданном семействе $U$ подмножеств множества $\Omega$ существует наименьшая σ-алгебра $H_U$, содержащая $U$, а именно $H_U = \cap \{H$: $H$ есть σ-алгебра множества $\Omega$, $U \subset H\}$.

$H_U$ называется *σ-алгеброй, порожденной семейством $U$*.

Например, если $U$ есть набор всех открытых подмножеств топологического пространства $\Omega$ (в частности, $\Omega = \mathbb{R}^n$), то $\mathrm{B} = H_U$ называется *борелевской σ-алгеброй на $\Omega$*, а элементы $B \in \mathrm{B}$ называются *борелевскими множествами*.

Пусть $(\Omega, \Im, P)$ — заданное вероятностное пространство. Тогда функция $Y$: $\Omega \to \mathbb{R}^n$ называется *$\Im$-измеримой*, если $Y^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega$: $Y(\omega) \in U\} \in \Im$ для всех открытых множеств $U \subset \mathbb{R}^n$ (или, что эквивалентно, для всех борелевских множеств $U \subset \mathbb{R}^n$).

**Определение 8.2.** *Случайная величина* $X$ есть $\Im$-измеримая функция $X$: $\Omega \to \mathbb{R}^n$. *Случайный процесс* — это параметрический набор случайных величин $\{X_t\}_{t \in T}$, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, P)$ и принимающих значения в $\mathbb{R}^n$.

Если $X$: $\Omega \to \mathbb{R}^n$ — произвольная функция, то *σ-алгебра $H_X$, порожденная функцией $X$*, есть наименьшая σ-алгебра на $\Omega$, содержащая все множества вида $X^{-1}(U)$, множества $U \subset \mathbb{R}^n$ открыты.

Нетрудно проверить, что $H_X = \{X^{-1}(B)$: $B \in \mathcal{B}\}$, где $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}^n$. Ясно, что функция $X$ является $H_X$-измеримой, а $H_X$ есть наименьшая σ-алгебра, относительно которой $X$ измерима.

Каждая случайная величина $X$ порождает вероятностную меру $\mu_X$ на $\mathbb{R}^n$, определенную равенством $\mu_X(B) = P(X^{-1}(B))$, которая называется *распределением* величины $X$.

*Конечномерные распределения* процесса $X = \{X_t\}_{t \in T}$ — это меры $\mu_{t_1, t_2, ..., t_k}$, определенные на $\mathbb{R}^{nk}$, $k = 1, 2, ...$, формулами

$$\mu_{t_1, t_2, ..., t_k}(F_1 \times F_2 \times ... \times F_k) = P(X_{t_1} \in F_1, X_{t_2} \in F_2, ..., X_{t_k} \in F_k), \quad t_i \in T,$$

где $F_1, F_2, ..., F_k$ — борелевские множества в $\mathbb{R}^n$.

Семейство всех конечномерных распределений определяет многие (но не все) важные свойства процесса $X$.

Зафиксируем $x \in \mathbb{R}^n$ и определим

$$p(t, x, y) = (2\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right)$$

для $y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

Для $0 \le t_1 \le t_2 \le ... \le t_k$ определим меру $\nu_{t_1, t_2, ..., t_k}$ на $\mathbb{R}^{nk}$ соотношением

$$\nu_{t_1, t_2, ..., t_k}(F_1 \times F_2 \times ... \times F_k) =$$
$$= \int\limits_{F_1 \times F_2 \times ... \times F_k} p(t_1, x, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k) dx_1 dx_2 ... dx_k,$$

где используется обозначение $dy = dy_1 ... dy_n$ для меры Лебега и применяется условие $p(0, x, y)dy = \delta_x(y)$ (данная плотность соответствует единичной точечной массе, сосредоточенной в точке $x$).

**Определение 8.3.** Случайный процесс $\{W_t\}_{t\geq 0}$ с конечномерными распределениями, заданными условием

$$P^x(W_{t_1} \in F_{t_1}, ..., W_{t_k} \in F_{t_k}) =$$
$$= \int\limits_{F_1 \times F_2 \times ... \times F_k} p(t_1, x, x_1)p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k)dx_1 dx_2 ... dx_k,$$

называется *броуновским движением*, или *винеровским процессом*, начинающимся в точке $x$ (как очевидно, $P^x(W_0 = x) = 1$).

Существование определяемых в данном параграфе вероятностного пространства $(\Omega, \Im, P)$ и винеровского процесса $\{W_t\}_{t\geq 0}$ на $\Omega$ гарантируется теоремой Колмогорова о продолжении[1].

**Теорема 8.1 (Колмогорова о продолжении).** *Пусть* $\nu_{t_1, t_2, ..., t_k}$ *при всех* $t_1, t_2, ..., t_k \in T$, $k \in \mathbb{N}$, *являются вероятностными мерами на* $\mathbb{R}^{nk}$, *такими что*

$$\nu_{t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, ..., t_{\sigma(k)}}(F_1 \times F_2 \times ... \times F_k) = \nu_{t_1, t_2, ..., t_k}(F_{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2), ..., \sigma^{-1}(k)})$$

*для всех перестановок* $\sigma$ *на* $\{1, 2, ..., k\}$ *и*

$$\nu_{t_1, t_2, ..., t_k}(F_1 \times F_2 \times ... \times F_k) = \nu_{t_1, t_2, ..., t_k, t_{k+1}, ..., t_{k+m}}(F_1 \times F_2 \times ... \times F_k \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n)$$

*для всех* $m \in \mathbb{N}$, *где прямое произведение в правой части имеет* $k + m$ *сомножителей. Тогда существуют вероятностное пространство* $(\Omega, F, P)$ *и случайный процесс* $\{X_t\}$ на $\Omega$, $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^n$, *такие что*

$$\nu_{t_1, t_2, ..., t_k}(F_1 \times F_2 \times ... \times F_k) = P\{X_{t_1} \in F_1, X_{t_2} \in F_2, ..., X_{t_k} \in F_k\}$$

*для всех* $t_i \in T$, $k \in \mathbb{N}$ *и всех борелевских множеств* $F_i$.

Приведем некоторые существенные свойства винеровского процесса.

Винеровский процесс $W_t$ — это стохастический процесс в непрерывном времени, обладающий следующими свойствами.

1. Это процесс с независимыми приращениями, т.е. случайные величины $Y = (W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, ..., W_{t_k} - W_{t_{k-1}})$ независимы в совокупности всякий раз, когда $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_k$.
2. $W_0 = x^2$.
3. $W_t - W_s \in N(0; t - s)$, $t > s$, т.е. приращение процесса за конечный промежуток времени имеет нормальное распределение с дисперсией, которая возрастает пропорционально длине промежутка. Плотность распределения этого приращения

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right).$$

Очевидно, что винеровский процесс является марковским, т.е. распределение вероятности для всех будущих значений процесса зависит только

[1] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Физматлит, 2009.

[2] Если не оговорено противное, мы будем предполагать, что $x = 0$, т.е. будем считать, что $W_0 = 0$.



от его текущего значения и не зависит от прошлых значений данного процесса.

Таким образом, если $Z(t)$ — винеровский процесс, то приращение $Z$ за время $\Delta t$ можно представить в виде $\Delta Z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$, где $\varepsilon$ — нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием 0 и средним квадратическим отклонением 1.

## 8.2. Стохастические интегралы

Случайный процесс удобно рассматривать как функцию двух переменных — времени и случая: $X(t, \omega) = X_t(\omega)$, $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$. Для случайных процессов кроме обычного интеграла Лебега по времени вводится также конструкция стохастических интегралов (Ито, Стратоновича и др.), когда интегрирование ведется по винеровскому процессу. Обычно в экономике рассматриваются интегралы Ито. Наметим в общих чертах один из возможных способов построения.

**Определение 8.4.** Пусть $W_t(\omega)$ есть $n$-мерный броуновский (или винеровский) процесс. Определим $F_t = F_t^{(n)}$ как $\sigma$-*алгебру, порожденную случайными величинами* $W_s(\cdot)$, $s \leq t$. Другими словами, $F_t$ есть наименьшая $\sigma$-алгебра, содержащая все множества вида $\{\omega : W_{t_1}(\omega) \in F_1, W_{t_2}(\omega) \in F_2, ..., W_{t_k}(\omega) \in F_k\}$, где $t_j \leq t$ и $F_j \subset \mathbb{R}^n$ — борелевские множества, $j \leq k = 1, 2, ...$ (предполагается, что все множества меры нуль включены в $F_t$).

Систему множеств $F_t$ часто представляют как «историю процесса $W_s$ вплоть до момента времени $t$». Можно показать, что функция $h(\omega)$ является $F_t$-измеримой тогда и только тогда, когда она может быть представлена почти всюду как поточечный предел сумм функций вида $g_1(W_{t_1})$, $g_2(W_{t_2})$, ..., $g_k(W_{t_k})$, где $g_1, g_2, ..., g_k$ — ограниченные непрерывные функции и $t_j \leq t$ при $j \leq k$, $k = 1, 2, ...$ . На интуитивном уровне тот факт, что функция $h$ является $F_t$-измеримой, означает, что значение величины $h(\omega)$ в принципе может быть вычислено по значениям процесса $W_s(\omega)$ при $s \leq t$. Например, функция $h_1(\omega) = W_{t/2}(\omega)$ является $F_t$-измеримой, в то время как $h_2(\omega) = W_{2t}(\omega)$ не является таковой.

Отметим, что $F_s \subset F_t$ при $s < t$, т.е. $\{F_t\}$ является *возрастающим семейством*, и что $F_t \subset \Im$ для всех $t$.

**Определение 8.5.** Пусть $\{N_t\}_{t\geq 0}$ является возрастающим семейством $\sigma$-алгебр подмножеств множества $\Omega$. Процесс $g(t, \omega)$: $[0; \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется $N_t$-*согласованным*, если для каждого $t \geq 0$ функция $\omega \to g(t, \omega)$ является $N_t$-измеримой.

Таким образом, процесс $h_1(\omega) = W_{t/2}(\omega)$ является $F_t$-согласованным, в то время как процесс $h_2(\omega) = W_{2t}(\omega)$ не является таковым.

Опишем класс функций, для которых интеграл Ито определен.

**Определение 8.6.** *Класс функций, для которых интеграл Ито определен* (обозначим через $\nu = \nu(S, T)$) — это функции $f(t, \omega)$: $[0; \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$, такие что выполняются следующие условия:

1) функция $f(t, \omega)$ является $(\mathcal{B} \times F)$-измеримой, где $\mathcal{B}$ обозначает борелевскую $\sigma$-алгебру на $[0; \infty)$;

2) функция $f(t, \omega)$ является $F_t$-согласованной;

3) $E\left(\int\limits_S^T f(t,\omega)^2 dt\right) < \infty$[1].

**Определение 8.7.** Функция $\varphi \in \nu(S, T)$ называется *ступенчатой*, если она имеет вид

$$\varphi(t,\omega) = \sum_{j\geq 0} e_j(\omega)\chi_{[j\cdot 2^{-n};\,(j+1)2^{-n}]}(t),$$

где $\chi$ обозначает характеристическую (индикаторную) функцию; $n$ — натуральное число.

Отметим, что так как $\varphi \in \nu$, каждая $e_j$ должна быть $F_t$-измеримой. Таким образом, $h_1(\omega) = W_{t/2}(\omega)$ является ступенчатой, а $h_2(\omega) = W_{2t}(\omega)$ — нет.

Для ступенчатой функции $\varphi(t, \omega)$ определим интеграл Ито следующим естественным образом:

$$\int\limits_S^T \varphi(t,\omega)dW_t(\omega) = \sum_{j\geq 0} e_j(\omega)(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})(\omega),$$

$$\text{где } t_k = t_k^{(n)} = \begin{cases} k\cdot 2^{-n} & \text{при } S \leq k2^{-n} \leq T, \\ S & \text{при } k2^{-n} < S, \\ T & \text{при } k2^{-n} > T. \end{cases}$$

Имеет место следующее важное свойство.

**Лемма 8.1 (изометрия Ито).** Если ступенчатая функция $\varphi(t, \omega)$ ограничена, то

$$E\left(\left(\int\limits_S^T \varphi(t,\omega)dW_t(\omega)\right)^2\right) = E\left(\int\limits_S^T \varphi(t,\omega)^2 dt\right). \qquad (8.1)$$

Здесь и в дальнейшем $E$ означает то же, что и $E^0$ — математическое ожидание относительно вероятностного закона $P^0$ для броуновского движения, начинающегося в нуле, а $P$ означает то же, что и $P^0$.

**Определение 8.8.** Пусть $f \in \nu(S, T)$. Тогда *интеграл Ито* функции $f$ (от $S$ до $T$) определяется равенством

$$\int\limits_S^T f(t,\omega)dW_t(\omega) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_S^T \varphi_n(t,\omega)dW_t(\omega) \text{ (предел в } L^2(P)), \qquad (8.2)$$

где $\{\varphi_n\}$ есть последовательность ступенчатых функций, таких что

$$E\left(\int\limits_S^T (f(t,\omega) - \varphi_n(t,\omega))^2 dt\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty. \qquad (8.3)$$

[1] Здесь и далее буквой $E$ обозначено математическое ожидание (обычно в русскоязычной математической литературе принято обозначать математическое ожидание символом $M$, однако поскольку в данной главе буква «M» используется для обозначения мартингалов, то для матетического ожидания используется обозначение $E$, принятое в англоязычной литературе).



Доказывается, что для любой функции $f \in \nu(S, T)$ такая последовательность $\{\varphi_n\}$, удовлетворяющая условию (8.3), существует. Более того, в силу равенства (8.1) предел в $L^2(P)$ существует и не зависит от конкретного выбора $\{\varphi_n\}$, если выполняется условие (8.3).

***Следствие* (изометрия Ито).** Для всех $f \in \nu(S, T)$ имеет место равенство

$$E\left(\left(\int\limits_S^T f(t,\omega)dW_t(\omega)\right)^2\right) = E\left(\int\limits_S^T f(t,\omega)^2 dt\right).$$

**Пример 8.1**

Непосредственно исходя из определения, покажем, что

$$\int\limits_a^b W_t\,dW_t = \frac{W_b^2 - W_a^2}{2} - \frac{b-a}{2}.$$

*Решение.* Если $\tau$ — разбиение интервала, то через $|\tau|$ обозначим ранг разбиения. Разобьем отрезок $[a; b]$ на $n$ равных частей длины $t/n$, где $t = b - a$. Тогда

$$\int\limits_a^b w_t dw_t = \lim_{|\tau|\downarrow 0}\sum_{i=0}^{n-1} w_{t_i}(w_{t_{i+1}} - w_{t_i}) = \lim_{|\tau|\to 0}\sum_i\left(\frac{w_{t_{i+1}} + w_{t_i}}{2} - \frac{w_{t_{i+1}} - w_{t_i}}{2}\right)(w_{t_{i+1}} - w_{t_i}) =$$

$$= \lim_{|\tau|\to 0}\frac{1}{2}\sum_i(w_{t_{i+1}}^2 - w_{t_i}^2) - \lim_{|\tau|\to 0}\frac{1}{2}\sum_i(w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2 = \frac{w_b^2 - w_a^2}{2} - \frac{1}{2}\lim_{|\tau|\to 0}\sum(\Delta w_{t_i})^2.$$

Рассмотрим суммы вида $\sum\limits_i (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2$. Имеем $z_i = \dfrac{w_{t_{i+1}} - w_{t_i}}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \sim N(0,1)$ — последовательность независимых одинаково (стандартно нормально) распределенных случайных величин.

Мы предположили, что разбиение равномерное. Тогда

$$w_{t_{i+1}} = w\frac{t(i+1)}{n},\ w_{t_i} = w\frac{ti}{n},\ z_i = \frac{w\frac{t(i+1)}{n} - w\frac{ti}{n}}{\sqrt{t/n}};$$

$$\sum_i (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2 = t\sum_{i=0}^{n-1}\frac{z_i^2}{n};\ E(z_i^2) = V(z_i) = 1.$$

По закону больших чисел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} z_i^2 \overset{\text{п.н.}}{=} 1$ (обозначение «п.н.» означает «почти наверное», т.е. с вероятностью единица, или за исключением множества случаев вероятностной меры нуль). Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1}(w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2 \overset{\text{п.н.}}{=} t$, поэтому

$$\int\limits_a^b w_t dw_t \overset{\text{п.н.}}{=} \frac{w_b^2 - w_a^2}{2} - \frac{b-a}{2}.$$

Как ясно из примера, определение интеграла Ито не очень эффективно для вычисления конкретных интегралов. Это напоминает ситуацию с обычным интегралом Римана, когда для непосредственных вычислений не пользуются его формальным определением, а вместо этого используют формулу Ньютона — Лейбница и правило дифференцирования сложных функций. При вычислении интегралов Ито аналогичную роль играет некий вариант Ито правила дифференцирования сложной функции, называемый формулой Ито, или формулой замены переменной в стохастическом интеграле (интеграле Ито).

**Определение 8.9.** *Поток* (на $(\Omega, \Im)$) есть семейство $N = \{N_t\}_{t\geq 0}$ σ-алгебр $N_t \subset \Im$, таких что $0 \leq s < t \Rightarrow N_s \subset N_t$ (т.е. семейство $\{N_t\}$ является возрастающим). Случайный $n$-мерный процесс $\{M_t\}_{t\geq 0}$ на $(\Omega, \Im, P)$ называется *мартингалом* относительно потока $\{N_t\}_{t\geq 0}$ (и относительно $P$), если выполнены следующие условия:

1) $M_t$ является $N_t$-измеримым для всех $t$;
2) $E(|M_t|) < \infty$ для всех $t$;
3) $E(M_s|N_t) = M_t$ для всех $s \geq t$

(математическое ожидание в условии 2) и условное математическое ожидание в условии 3) берутся относительно $P = P^0$).

Интеграл Ито $\int f dW$ может быть определен для более широкого класса функций $f$, чем ν. Во-первых, условие 2) из определения 8.6 может быть ослаблено следующим образом.

2′) Существует возрастающее семейство σ-алгебр $H_t$, $t \geq 0$, такое что:
а) $W_t$ является мартингалом относительно $H_t$;
б) процесс $f_t$ является $H_t$-согласованным.

Отметим, что из а) следует: $F_t \subset H_t$. Суть данного обобщения состоит в том, что можно допустить зависимость $f_t$ от большего разнообразия событий, чем события из $F_t$, если только $W_t$ остается мартингалом относительно истории процессов $f_s$, $s \leq t$. Нетрудно заметить, что в этом случае, как и ранее, можно произвести построение интеграла Ито.

Рассмотрим наиболее важный случай, в котором применимо условие 2′), а условие 2) из определения 8.6 неприменимо.

Предположим, что $W_t(\omega) = W_k(t, \omega)$ есть $k$-я координата $n$-мерного броуновского движения $(W_1, W_2, ..., W_n)$. Пусть $F_t^{(n)}$ — σ-алгебра, порожденная $W_1(s_1, \cdot), ..., W_n(s_n, \cdot)$, $s_k \leq t$. Тогда $W_k(t, \omega)$ есть мартингал относительно $F_t^{(n)}$, потому что приращения $W_k(s, \cdot) - W_k(t, \cdot)$ не зависят от $F_t^{(n)}$ при $s > t$. Таким образом, мы определили $\int\limits_0^t f(s,\omega)dW_k(s,\omega)$ для $F_t^{(n)}$-согласованных интегрантов $f(t, \omega)$. Эта конструкция включает в себя такие интегралы, как $\int W_2 dW_1$ или $\int \sin(W_1^2 + W_2^2)dW_2$, содержащие несколько компонент $n$-мерного броуновского движения (здесь использовано обозначение $dW_1 = dW_1(t, \omega)$ и т.д.). Этот подход позволяет определить многомерный интеграл Ито следующим образом.

**Определение 8.10.** Пусть $W = (W_1, W_2, ..., W_n)$ — $n$-мерное броуновское движение. Обозначим через $\nu_H^{m\times n}(S,T)$ множество $(m \times n)$-матриц $v = [v_{ij}(t, \omega)]$, в которых каждый элемент $v_{ij}(t, \omega)$ удовлетворяет условиям 1) и 2) определения 8.6 и условию 2′) относительно некоторого потока $H = \{H_i\}_{t\geq 0}$.

Если $v \in \nu_H^{m\times n}(S,T)$, то, используя матричные обозначения, определим *многомерный интеграл Ито*

$$\int\limits_S^T v dW = \int\limits_S^T \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{m1} & \dots & v_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_1 \\ \dots \\ dW_n \end{pmatrix}$$



как $(m \times 1)$-матрицу (вектор-столбец), $i$-я компонента которой есть следующая сумма (обобщенных) одномерных интегралов Ито: $\sum\limits_{j=1}^n \int\limits_S^T v_{ij}(s,\omega)dW_j(s,\omega)$.

Если $H = F^{(n)} = \{F_t^n\}_{t\geq 0}$, то опускаем индекс $H$ в обозначении $\nu_H^{m\times n}(S,T)$ и пишем $\nu^{m\times n}(S, T)$, а если $m = 1$, то пишем просто $\nu_H^n(S,T)$ вместо $\nu_H^{1\times n}(S,T)$ и, соответственно, $\nu^n(S, T)$ вместо $\nu^{1\times n}(S, T)$. Положим также

$$\nu^{m\times n} = \nu^{m\times n}(0,\infty) = \bigcap_{T>0} \nu^{m\times n}(0,T).$$

Следующее обобщение интеграла Ито состоит в ослаблении условия 3) определения 8.6 и замене его условием

3′) $P\left(\int\limits_S^T f(s,\omega)^2 ds < \infty\right) = 1.$

**Определение 8.11.** Через $w_H(S, T)$ обозначим *класс процессов* $f(t, \omega) \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию 1) определения 8.6 и условиям 2′) и 3′). Аналогично тому как вводилось обозначение для $v$, мы полагаем $w_H = \bigcap\limits_{T>0} w_H(0,T)$ и пишем в матричном случае $w_H^{m\times n}(S,T)$ и т.д. Если $H = F^{(n)}$, то вместо $w_{F^{(n)}}(S,T)$ пишем $w(S, T)$ и т.д. Будем также иногда опускать верхний индекс и писать просто $F$ вместо $F^{(n)}$, когда размерность ясна из контекста.

Нетрудно заметить, что в этом случае также можно определить интеграл Ито как предел (по вероятности) интегралов от ступенчатых функций.

## 8.3. Процесс Ито. Формула Ито

**Определение 8.12.** Пусть $W_t$ — одномерное броуновское движение на $(\Omega, \Im, P)$. *Одномерный процесс Ито*, или *стохастический интеграл*, — это случайный процесс $X_t$ на $(\Omega, \Im, P)$ вида

$$X_t = X_0 + \int\limits_0^t u(s,\omega)ds + \int\limits_0^t v(s,\omega)dW_s, \qquad (8.4)$$

где $v \in w_H$ — такая функция, что $P\left(\int\limits_0^t v(s,\omega)^2 ds < \infty \text{ для всех } t \geq 0\right) = 1$. Также будем считать, что функция $u$ является $H_t$-согласованной (где $H_t$ — такое же семейство, как и в условии 2′), см. предыдущий параграф) и что $P\left(\int\limits_0^t |u(s,\omega)| ds < \infty \text{ для всех } t \geq 0\right) = 1.$

Если $X_t$ — процесс Ито вида (8.4), то уравнение (8.4) иногда записывают в более краткой форме — в форме дифференциалов:

$dX_t = u(t, \omega)dt + v(t, \omega)dW_t$ (8.5)

(именно эта дифференциальная запись процессов Ито особенно привлекательна для экономистов).

**Теорема 8.2 (одномерная формула Ито).** *Пусть* $X_t$ *— процесс Ито, задаваемый дифференциалом* (8.5), *и пусть* $g(t, x) \in C^2([0; \infty) \times \mathbb{R})$. *Тогда* $Y_t = g(t, X_t)$ *снова есть процесс Ито и*

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2, \tag{8.6}$$

*где* $(dX_t)^2 = (dX_t)(dX_t)$ *вычисляется по следующим правилам*:

$$dt \cdot dt = dt \cdot dW_t = dW_t \cdot dt = 0, dW_t \cdot dW_t = dt. \tag{8.7}$$

***Доказательство формулы Ито.*** Сначала заметим, что если подставить равенство $dX_t = udt + vdW_t$ в формулу (8.6) и использовать правила (8.7), то получим эквивалентное выражение

$$g(t, X_t) = g(0, X_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) + u_s \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) + \frac{1}{2}v_s^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s)\right)ds +$$

$$+\int_0^t v_s \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)dW_s, \tag{8.8}$$

где $u_s = u(s, \omega)$, $v_s = v(s, \omega)$. Отметим, что полученное выражение (8.8) представляет собой процесс Ито в соответствии с определением (8.4).

Можно допустить, что функции $g$, $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ ограничены, так как если доказать равенство (8.8) для этого случая, то общий случай можно получить с помощью аппроксимации функции $g$ функциями $g_n$ класса $C^2$, такими что $g_n$, $\frac{\partial g_n}{\partial t}$, $\frac{\partial g_n}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 g_n}{\partial x^2}$ ограничены для каждого $n$ и равномерно сходятся на компактных подмножествах множества $[0; +\infty) \times \mathbb{R}$ к $g$, $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ соответственно. Более того, из формулы (8.2) очевидно, что функции $u_s = u(s, \omega)$, $v_s = v(s, \omega)$ можно считать ступенчатыми. Используя разложение Тейлора, получаем

$$g(t, X_t) = g(0, X_0) + \sum_j \Delta g(t_j, X_j) = g(0, X_0) + \sum_j \frac{\partial g}{\partial t}\Delta t_j + \sum_j \frac{\partial g}{\partial x}\Delta X_j +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(\Delta t_j)^2 + \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x}(\Delta t_j)(\Delta X_j) + \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\Delta X_j)^2 + \sum_j R_j,$$

где $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$ и т.д. вычисляются в точках $(t_j, X_j)$; $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, $\Delta X_j = X_{j+1} - X_j$; $\Delta g(t_j, X_j) = g(t_{j+1}, X_{j+1}) - g(t_j, X_j)$, а $R_j = o(|\Delta t_j|^2 + o|\Delta X_j|^2)$ для всех $j$. Если $\Delta t_j \to 0$, то

$$\sum_j \frac{\partial g}{\partial t}\Delta t_j = \sum_j \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, X_j)\Delta t_j \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s)ds;$$

$$\sum_j \frac{\partial g}{\partial x}\Delta X_j = \sum_j \frac{\partial g}{\partial x}(t_j, X_j)\Delta X_j \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)dX_s.$$

Поскольку $u$ и $v$ являются ступенчатыми функциями, получаем, что

$$\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\Delta X_j)^2 = \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}u_j^2(\Delta t_j)^2 + 2\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}u_j v_j(\Delta t_j)(\Delta W_j) + \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}v_j^2(\Delta W_j)^2,$$



где $u_j = u(t_j, \omega), v_j = v(t_j, \omega)$. Здесь первые два члена стремятся к нулю при $\Delta t_j \to 0$. Например,

$$E\left(\left(\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}u_j v_j(\Delta t_j)(\Delta W_j)\right)^2\right) = \sum_j E\left(\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}u_j v_j\right)^2\right)(\Delta t_j)^3 \to 0$$

при $\Delta t_j \to 0$.

Докажем, что третий член формулы, т.е. $\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}v_j^2(\Delta W_j)^2$, стремится к $\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}v^2 ds$ в $L^2(P)$ при $\Delta t_j \to 0$.

Для того чтобы доказать это утверждение, положим

$$a(t) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)v^2(t, \omega);\ a_j = a(t_j)$$

и рассмотрим

$$E\left(\left[\sum_j a_j(\Delta W_j)^2 - \sum_j a_j \Delta t_j\right]^2\right) = \sum_i \sum_j E(a_i a_j[(\Delta W_i)^2 - \Delta t_i][(\Delta W_j)^2 - \Delta t_j]).$$

Если $i < j$, то величины $a_i a_j((\Delta W_i)^2 - \Delta t_i)$ и $(\Delta W_j)^2 - \Delta t_j$ независимы, так что соответствующие члены обращаются в нуль. То же самое верно, если $i > j$. Таким образом, остается сумма

$$\sum_j E(a_j^2[(\Delta W_j)^2 - \Delta t_j]^2) =$$

$$= \sum_j E(a_j^2)E((\Delta W_j)^4 - 2(\Delta W_j)^2\Delta t_j + (\Delta t_j)^2) =$$

$$= \sum_j E(a_j^2)[3(\Delta t_j)^2 - 2(\Delta t_j)^2 + (\Delta t_j)^2] = 2\sum_j E(a_j^2)(\Delta t_j)^2 \to 0$$

при $\Delta t_j \to 0$. Другими словами, установлено, что $\sum_j a_j(\Delta W_j)^2 \to \int_0^t a(s)ds$ в $L^2(P)$ при $\Delta t_j \to 0$. Часто это кратко выражается замечательной формулой

$$(dW_t)^2 = dt. \tag{8.9}$$

Из рассмотренных рассуждений следует также, что $\sum_j R_j \to 0$ при $\Delta t_j \to 0$.

Это завершает доказательство формулы Ито.

*Замечание 8.1.* Отметим, что для справедливости теоремы достаточно, чтобы функция $g(t, x)$ принадлежала классу $C^2$ на $[0; +\infty) \times U$, где $U \subset \mathbb{R}$ — открытое множество, такое что $X_t(\omega) \in U$ для всех $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$. Более того, достаточно, чтобы функция $g(t, x)$ принадлежала классу $C^1$ по $t$ и классу $C^2$ по $x$.

*Замечание 8.2.* Формула Ито является основным инструментом решения стохастических дифференциальных уравнений, поэтому теорему 8.2 часто называют *леммой Ито*.

**Определение 8.13.** Пусть функция $f$ задана на промежутке $[a; b]$. Пусть $\tau$ — разбиение данного промежутка, $\tau$: $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. *Вариацией* функции $f$ по разбиению $\tau$ называется

$$V_a^b(f,\tau)=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|.$$

*Полной вариацией* функции $f$ называется

$$V_a^b(f)=\sup_\tau V(f,\tau).$$

Функция $f$ называеся *функцией ограниченной вариации*, если $V_a^b(f)<+\infty$.

Применение формулы Ито приводит к следующей теореме.

**Теорема 8.3 (формула интегрирования по частям).** *Предположим, что функция $f(s, \omega) = f(s)$ зависит лишь от $s$ и что $f$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию на $[0; t]$. Тогда*

$$d(f(s)W_t)=f(s)dW_t+W_tdf_t,$$

или

$$\int_0^t f(s)dW_s=f(t)W_t-\int_0^t W_sdf_s.$$

***Доказательство.*** Пусть $Y_t = g(t, W_t) = f(t)W_t$. Тогда по формуле Ито

$$d(f(t)W_t) = dY_t = W_tdf(t) + f(t)dW_t + 0,$$

отсюда следует, что

$$f(t)W_t=\int_0^t f(s)dW_s+\int_0^t W_sdf_s,$$

или

$$\int_0^t f(s)dW_s=f(t)W_t-\int_0^t W_sdf_s.$$

*Замечание 8.3.* Отметим, что условие «$f$ не зависит от $\omega$» здесь существенно.

Обратимся к случаю большей размерности. Пусть $W(t, \omega) = (W_1(t, \omega), ..., .W_m(t, \omega))$ обозначает $m$-мерное броуновское движение. Если каждый из процессов $u_i(t, \omega)$ и $v_{ij}(t, \omega)$ удовлетворяет условиям, заданным в определении 8.4 ($1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$), то можно построить следующие $n$ процессов Ито:

$$\begin{cases} dX_1=u_1dt+v_{11}dW_1+...+v_{1m}dW_m,\\ ...\\ dX_n=u_ndt+v_{n1}dW_1+...+v_{nm}dW_m, \end{cases}$$

или в матричной форме

$$dX(t) = udt + vdW(t),$$

где

$$X(t)=\begin{pmatrix}X_1(t)\\ ...\\ X_n(t)\end{pmatrix};\ u=\begin{pmatrix}u_1\\ ...\\ u_n\end{pmatrix};$$

$$v=\begin{pmatrix}v_{11} & ... & v_{1m}\\ ... & ... & ...\\ v_{n1} & ... & v_{nm}\end{pmatrix};\ dW(t)=\begin{pmatrix}dW_1(t)\\ ...\\ dW_m(t)\end{pmatrix}.$$

Такой процесс $X(t)$ называется *n-мерным процессом Ито* (или просто процессом Ито).

**Теорема 8.4 (формула Ито для общего случая)**. *Пусть $dX(t) = udt + vdW(t)$ — n-мерный процесс Ито и пусть $g(t, x) = (g_1(t, x), ..., g_p(t, x))$ — отображение класса $C^2$ из $[0; \infty) \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^p$. Тогда процесс $Y(t, \omega) = g(t, X(t))$ снова является процессом Ито, k-я компонента $Y_k$ которого задается формулой*

$$dY_k=\frac{\partial g_k}{\partial t}(t,X)dt+\sum_i\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t,X)dX_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i\partial x_j}(t,X)dX_idX_j,$$

*где $dW_idW_j = \delta_{ij}dt$, $dW_idt = dtdW_i = 0$.*

Доказательство. Доказательство теоремы полностью аналогично одномерному случаю.

**Теорема 8.5 (общая формула интегрирования по частям).** *Пусть $X_t$, $Y_t$ — процессы Ито. Тогда*

$$d(X_tY_t) = X_tdY_t + Y_tdX_t + dX_t \cdot dY_t;$$

$$\int_0^t X_sdY_s=X_tY_t-X_0Y_0-\int_0^t Y_sdX_s-\int_0^t dX_s\cdot dY_s.$$

***Доказательство.*** Пусть $Z_t = g(t, X_t, Y_t) = X_tY_t$. Применим многомерную формулу Ито (или формулу Ито для общего случая):

$$dZ_t=0+Y_tdX_t+X_tdY_t+\frac{1}{2}dX_t\cdot dY_t+\frac{1}{2}dY_t\cdot dX_t.$$

Итак, мы получили $d(X_tY_t) = X_tdY_t + Y_tdX_t + dX_t \cdot dY_t$.

Интегрируя, находим

$$X_tY_t-X_0Y_0=\int_0^t X_sdY_s+\int_0^t Y_sdX_s+\int_0^t dX_s\cdot dY_s,$$

или

$$\int_0^t X_sdY_s=X_tY_t-X_0Y_0-\int_0^t Y_sdX_s-\int_0^t dX_s\cdot dY_s.$$

Теорема доказана.

## 8.4. Примеры использования формулы Ито

Простейшим обобщением броуновского движения является следующий процесс Ито, называемый *броуновским движением со сносом* (*drift*):

$$dX_t = \alpha dt + \sigma dW_t,$$

где $\alpha$ и $\sigma$ — константы, причем $\alpha$ называется параметром сноса, а $\sigma$ — параметром дисперсии (или волатильностью).

За любой временной интервал $\Delta t$ изменение $X_t$, обозначаемое $\Delta X_t$, нормально распределено, имеет математическое ожидание $E(\Delta X) = \alpha\Delta t$ и дисперсию $D(\Delta X) = \sigma^2\Delta t$.

Переходя к рассуждениям на физическом уровне строгости, столь популярном в литературе по экономическому анализу, и полагая, что $\Delta t$ становится бесконечно малым приращением времени $dt$, можно представить приращение винеровского процесса как $dW = \varepsilon\sqrt{dt}$, $\varepsilon$ — стандартная нормальная случайная величина.

Рассмотрим *процесс Ито общего вида*

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t. \tag{8.10}$$

Считая $dW_t$ приращением винеровского процесса за бесконечно малый промежуток времени $dt$, получаем $E(dX_t) = a(X_t, t)dt$, $D(dX_t) = b^2(X_t, t)dt$. Будем называть $a(X_t, t)$ ожидаемым мгновенным темпом сноса, $b^2(X_t, t)$ — мгновенной нормой дисперсии.

Очень важный для экономики случай процесса (8.10) — *геометрическое броуновское движение со сносом*. Здесь $a(X_t, t) = \alpha X_t$, $b(X_t, t) = \sigma X_t$, где $\alpha$ и $\sigma$ — константы. В этом случае уравнение (8.10) принимает вид

$$dX_t = \alpha X_t d\,t + \sigma X_t d\,W_t.$$

Таким образом, относительное изменение $X_t$, т.е. $dX_t/X_t$, нормально распределено. Так как это есть изменение натурального логарифма от $X_t$, то абсолютные изменения $X_t$, т.е. $\Delta X_t$, являются *логнормально распределенными*.

**Пример 8.2**

Запишем процесс Ито $e^{W_t}$ в дифференциальной форме.
*Решение*. Положим $dX = 0 \cdot dt + 1 \cdot dW$.
По формуле Ито $de^W = e^W \cdot 1 \cdot dW + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot e^W dt = e^W dW + \frac{1}{2} \cdot e^W dt$.

**Пример 8.3**

Запишем процесс $\varphi = W_t e^{-qW_t - 1/2q^2t}$ в дифференциальной форме.
*Решение*. Пусть

$$F(t, x) = xe^{-qx - 1/2q^2t}; \quad dX_t = 1 \cdot dW_t + 0 \cdot dt.$$

Тогда $\varphi = F(t, X_t)$.



Имеем:

$$F'_x = e^{-qx_t - 1/2q^2t}(1 - qx);$$
$$F''_{xx} = e^{-qx_t - 1/2q^2t}[(1 - qx)(-q) - q] = e^{-qx_t - 1/2q^2t}(q^2x - 2q);$$
$$F'_t = xe^{-qx_t - 1/2q^2t}\left(-\frac{1}{2}q^2\right).$$

По формуле Ито:

$$d\varphi = e^{-qW_t - 1/2q^2t}(1 - qW)dW_t + e^{-qW_t - 1/2q^2t}\left(-\frac{1}{2}q^2x + \frac{1}{2!}(q^2x - 2q)\right)dt =$$
$$= e^{-qW_t - 1/2q^2t}[(1 - qW_t)dW_t - qdt].$$

**Пример 8.4**

Рассмотрим геометрическое броуновское движение

$$dX_t = \alpha X_t dt + \tau X_t dW_t.$$

Рассмотрим случайный процесс $Y_t = \ln X_t$. Получим

$$F(x) = \ln x; Y_t = F(X_t);$$

$$F'_x = \frac{1}{x}; \quad F''_{xx} = -\frac{1}{x^2}; \quad F'_t = 0;$$

$$dY_t = \frac{1}{X_t}dX_t - \frac{1}{X^2}(dX_t)^2 = 2dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt = \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t.$$

Следовательно, для любого конечного промежутка времени $T$ приращение $\ln X_t$ нормально распределено с математическим ожиданием $\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T$ и дисперсией $\sigma^2 T$.

**Пример 8.5**

Рассмотрим случайный процесс $Y_t = W_t^2$.
Имеем $dX_t = 1 \cdot dW_t + 0 \cdot dt$; $F(x, t) = x^2$; $Y_t = F(X_t, t)$;

$$F'_t = 0; \; F'_x = 2x; \; F''_{xx} = 2; \; dY_t = dW_t^2 = 2W_t dW_t + \frac{1}{2} \cdot 2dt;$$

$$W_t^2 - W_0^2 = 2\int_0^T W_t dW + \int_0^T dt; \; \int_0^T W_t dW_t = \frac{W_T^2}{2} - \frac{W_0^2}{2} - \frac{T}{2}.$$

**Пример 8.6**

Рассмотрим модель роста популяции $dN_t = rN_t dt + \alpha N_t dW_t$, или $\frac{dN_t}{N_t} = rdt + \alpha dW_t$ и

$$\int_0^t \frac{dN_s}{N_s} = rt + \alpha W_t \;\; (W_0 = 0). \tag{9.26}$$

*Решение*. Чтобы вычислить интеграл в левой части, используем формулу Ито для функции $g(t, x) = \ln x$, $x > 0$, и получим, что

$$d(\ln N_t) = \frac{1}{N_t}dN_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{N_t^2}\right)(dN_t)^2 = \frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2N_t^2}\alpha^2 N_t^2 dt = \frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2}\alpha^2 dt.$$

Тогда

$$\frac{dN_t}{N_t} = d(\ln N_t) + \frac{1}{2}\alpha^2 dt$$

и мы заключаем из формулы (9.26), что

$$\ln\frac{N_t}{N_0} + \frac{1}{2}\alpha^2 t = rt + \alpha W_t,$$

т.е.

$$\ln\frac{N_t}{N_0} = \left(r - \frac{1}{2}\alpha^2\right)t + \alpha W_t, \text{ или } N_t = N_0 \exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\alpha^2\right)t + \alpha W_t\right].$$

**Пример 8.7**

Пусть $X = W$ (одномерное броуновское движение), а $g(t, x) = e^{ix} = (\cos x, \sin x) \in \mathbb{R}^2$ для $x \in \mathbb{R}$. Тогда $Y = g(t, X) = e^{iW} = \begin{pmatrix} \cos W \\ \sin W \end{pmatrix}$ снова есть процесс Ито (двумерный). Его координаты $Y_1$, $Y_2$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} dY_1(t) = -\sin(W)dW - \dfrac{1}{2}\cos(W)dt, \\ dY_2(t) = \cos(W)dW - \dfrac{1}{2}\sin(W)dt. \end{cases}$$

Таким образом, процесс $Y = (Y_1, Y_2)$, который можно назвать *броуновским движением на единичной окружности*, есть решение системы стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} dY_1 = -\dfrac{1}{2}Y_1 dt - Y_2 dW, \\ dY_2 = -\dfrac{1}{2}Y_2 dt + Y_1 dW, \end{cases}$$

или в матричных обозначениях

$$dY = -\frac{1}{2}Ydt + RYdW,$$

где $K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

## 8.5. Задачи теоретических основ электротехники на решение стохастических дифференциальных уравнений

Рассмотрим последовательный $RLC$-контур, подключенный к источнику напряжения $E(t)$. Заряд на емкостном элементе в момент времени $t$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L\,Q''(t) + R\,Q'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = E(t),\ Q(0) = Q_0,\ Q'(0) = I_0,$$

где $L$ — индуктивность; $R$ — сопротивление; $C$ — емкость; $I_0$ — ток в начальный момент; а $E(t)$ — напряжение источника в момент $t$.



Предположим, что некоторые коэффициенты — скажем, правая часть уравнения — не являются детерминированными, а имеют вид

$$E(t) = G(t) + «\text{шум}» = G(t) + \alpha W_t,$$

где «шум» представляет собой броуновское движение $W_t$ с постоянным множителем $\alpha = \text{const}$. Дифференциальное уравнение, коэффициенты которого могут быть случайными величинами, называется *стохастическим дифференциальным уравнением*. Введем вектор

$$\mathbf{X} = X(t, \omega) = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_t \\ Q'_t \end{pmatrix}$$

и получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} X'_1 = X_2, \\ LX'_2 = -RX_2 - \dfrac{1}{C}X_1 + G_t + \alpha W_t, \end{cases}$$

или в матричных обозначениях

$$dX = dX(t) = AX(t)dt + H(t)dt + KdW_t, \tag{8.11}$$

где $dX = \begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{CL} & -\dfrac{R}{L} \end{pmatrix}$; $H(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L}G_t \end{pmatrix}$; $K = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\alpha}{L} \end{pmatrix}$, а $W_t$ — одномерное броуновское движение.

Перепишем полученное двумерное стохастическое дифференциальное уравнение (8.11) в следующем виде:

$$\exp(-At)dX(t) - \exp(-At)AX(t)dt = \exp(-At)(H(t)dt + KdW_t), \tag{8.12}$$

где для произвольной $(n \times n)$-матрицы $F$ определяем $\exp(F)$ как $(n \times n)$-матрицу, задаваемую рядом $\exp(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}F^n$.

Для решения дифференциального уравнения (8.12) воспользуемся двумерным вариантом формулы Ито (теорема 8.4). Применим его к функции $g$: $[0; \infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, задаваемой равенством $g(t, X_1, X_2) = \exp(-At)\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$.

Получим

$$d(\exp(-At)X(t)) = (-A)\exp(-At)X(t)dt + \exp(-At)dX(t). \tag{8.13}$$

Подстановка выражения (8.13) в формулу (8.12) дает

$$d[\exp(-At)X(t)] = \exp(-At)(H(t)dt + KdW_t),$$

или

$$\exp(-At)X(t) - X(0) = \int_0^t \exp(-As)H(s)ds + \int_0^t \exp(-As)KdW_s.$$

Интегрируя по частям (теорема 8.3), получаем

$$X(t) = \exp(At)\left(X(0) + \exp(-At)KW_t + \int_0^t \exp(-As)(H(s) + AKW_s)ds\right).$$

Мы получили выражение для двумерного процесса $X(t)$, первая компонента которого представляет собой заряд на емкости (на конденсаторе), а вторая компонента — ток в контуре в момент времени $t$. Как и в детерминистском случае, и заряд, и ток имеют как свободную, определяемую собственными частотами цепи, так и вынужденную составляющую, определяемую входным воздействием. Однако в нашем случае вынужденная составляющая реакции имеет как детерминированную, так и стохастическую составляющие.

## 8.6. Цена опциона. Формула Блэка — Шоулза

Дадим основные определения.

*Опцион*[1] *как экономическое явление — это оформленное договором право купить, продать (или отказаться от сделки) на протяжении договорного срока и по фиксированной договорной цене определенный объем валюты, любых товаров, ценных бумаг (включая производные бумаги) либо получить определенный доход от финансового вложения или денежного займа (в виде разностной величины, фиксированного размера, процента).*

*Покупатель опциона* — сторона договора, приобретающая право на покупку, продажу либо на отказ от сделки. Другими словами, это держатель опциона.

*Продавец опциона* — сторона договора, обязанная поставить или принять предмет сделки по требованию покупателя. Другими словами, это лицо, подписавшее опцион.

*Опцион на покупку* («колл», *call*) — это право, но отнюдь не обязанность, держателя опциона получить от лица, подписавшего опцион, определенную имущественную ценность (акцию, заем, фьючерсный контракт и т.д.) в заданный будущий момент времени (или в любой момент определенного промежутка времени) по заранее установленной цене.

*Опцион на продажу* («пут», *put*) — данное право, но отнюдь не обязанность, продать имущественную ценность в определенный будущий момент (или промежуток) времени по заранее оговоренной цене.

Различают *европейский опцион*, при котором это право (на покупку или на продажу) может быть реализовано только в момент наступления срока истечения опционного контракта, и *американский опцион*, при котором это право (соответственно, покупки или продажи) может быть реализовано в любое время в пределах опционного срока.

[1] *Die Option* (*нем.*) — первоначально юридический термин, означающий оптацию, т.е. выбор подданства или гражданства.



Обозначим:

$S$ — спот-цена базисного актива, т.е. сегодняшний биржевой курс того продукта, на покупку или продажу которого заключается опционный контракт;

$K$ — страйк, т. е. та цена купли-продажи, которая оговорена в опционе;

$T$ — оставшийся срок (в годах) до даты истечения контракта;

$\sigma$ — волатильность биржевого курса базисного актива, т.е. среднее квадратическое отклонение изменения в единицу времени цены того блага, на которое заключается опционный контракт;

$r_F$ — безрисковая ставка процента (годовая).

Теоретическая (равновесная) цена европейского *call*-опциона согласно формуле Блэка — Шоулза равна

$$C = S\Phi(d_1) - K(1 + r_F)^{-T}\Phi(d_2),$$

где $d_1 = \dfrac{\ln(S/K) + [\ln(1 + r_F) + 0{,}5\sigma^2]T}{\sigma\sqrt{T}}$; $\Phi$ — функция распределения стандартного нормального закона; $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$.

Теоретическая (равновесная) цена европейского *put*-опциона согласно формуле Блэка — Шоулза равна

$$P = K(1 + r_F)^{-T}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1)$$

где $d_1 = \dfrac{\ln(S/K) + [\ln(1 + r_F) + 0{,}5\sigma^2]T}{\sigma\sqrt{T}}$; $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$.

Часто вместо безрисковой годовой процентной ставки $r_F$ в формулах Блэка — Шоулза используется более удобная для теоретического рассмотрения номинальная годовая безрисковая процентная ставка при условии непрерывного начисления процентов, другими словами — сила роста непрерывно начисляемых процентов $R_F$, связанная с $r_F$ соотношением $1 + r_F = e^{R_F}$, или $R_F = \ln(1 + r_F)$. Тогда все формулы Блэка — Шоулза очевидным образом модифицируются заменой $\ln(1 + r_F)$ на $R_F$ и $(1 + r_F)^{-T}$ на $\exp(-R_FT)$.

Цена, по которой можно купить опцион, называется его *премией*.

Рассмотрим вывод дифференциального уравнения Блэка — Шоулза. Предположим, что цена актива $S$ подчинена закону геометрического броуновского движения

$$dS = \mu Sdt + \sigma SdW.$$

Предположим, что $f$ — цена производного финансового инструмента на $S$. Тогда $f$ должна быть некой функцией от $S$ и $f$. Следовательно, по формуле Ито

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma SdW.$$

Построим динамический портфель, состоящий из короткой позиции по одной единице производного инструмента $f$ и длинной позиции по $\dfrac{\partial f}{\partial S}$

единицам актива $S$. Тогда ценность портфеля $\prod$ равна $\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S$, а ее изменение за короткий промежуток времени $dt$ есть

$$d\Pi = -df + \frac{\partial f}{\partial S} dS = -\left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt - \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dW +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial S} \mu S dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dW = -\left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt.$$

Так как полученное выражение не содержит члена с $dW$, портфель $\prod$ остается безрисковым в течение короткого промежутка времени $dt$ и должен поэтому из условия отсутствия арбитража приносить за время $dt$ такую же доходность на вложенный капитал, как и любой другой краткосрочный безрисковый финансовый актив, т.е.

$$d\prod = r \prod dt,$$

где $r$ — безрисковая процентная ставка. Таким образом, получаем

$$-\left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt = r \left( -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \right) dt,$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf.$$

Получено дифференциальное уравнение Блэка — Шоулза. Оно имеет множество решений, соответствующих всем различным производным финансовым инструментам, которые можно определить на основе актива $S$. Получаемые частные решения зависят от различных граничных условий, соответствующих тому или иному производному инструменту. Для европейского *call*-опциона основное граничное условие имеет вид $f = \max(K - X, 0)$, если $t = T$, где $K$ — страйк, а $T$ — срок исполнения опциона. В случае же европейского *put*-опциона оно принимает вид $f = \max(X - S, 0)$, если $t = T$.

## 8.7. Приложение метода реальных опционов к задаче об инвестициях

**Постановка задачи.** Фирма должна решить, следует ли ей делать вложения в некоторый проект и когда именно. Затраты инвестирования известны и постоянны, но ценность проекта следует закону геометрического броуновского движения.

Простое правило *NPV* (*net present value* — чистой приведенной стоимости) требует инвестировать, если $V > I$, т.е. если ценность рассматриваемого проекта превосходит затраты на инвестиции.

Однако поскольку будущая ценность проекта неизвестна, имеются альтернативные издержки того, чтобы инвестировать сегодня. Следовательно,



оптимальное инвестиционное правило состоит в том, чтобы инвестировать, если $V$ по меньшей мере достигает некоторого критического значения $V^*$, превосходящего $I$. Как увидим в дальнейшем, для разумных значений параметров эта критическая величина $V^*$ может в два и три раза превосходить $I$.

Ценность проекта $V$ развивается в соответствии со следующим геометрическим броуновским движением:

$$dV = \alpha V d t + \sigma V dW, \tag{8.14}$$

где $dW$ — приращение винеровского процесса.

Возможность инвестировать для фирмы равносильна обладанию *call*-опционом — правом, но отнюдь не обязанностью приобрести акцию с указанной ценой. Следовательно, решение инвестировать равносильно решению выполнить такой опцион.

Обозначим ценность инвестиционной возможности (т.е. ценность такого *call*-опциона) через $F(V)$. Установим правило, которое максимизирует это значение. Так как чистый доход от инвестирования в течение времени $t$ равен $Vt - I$, будем максимизировать ожидаемую сегодняшнюю стоимость

$$F(V) = \max_t E((V_t - I)e^{-\rho t}) = E((V_T - I)e^{-\rho T}),$$

где $E$ — математическое ожидание; $T$ — (неизвестный) будущий момент времени, когда делаются инвестиции; $\rho$ — ставка дисконтирования, и максимизация подчинена условию (8.14) для $V$.

Нужно предположить, что $\alpha < \rho$, в противном случае $F(V)$ может быть сделано сколь угодно большим за счет выбора $T$. Тогда ожидание было бы всегда наилучшей стратегией и оптимальный момент для инвестирования не существовал бы.

**Детерминированный случай.** Рассмотрим сначала случай, когда неопределенность отсутствует, т.е. в уравнении (8.14) $\sigma = 0$. Тогда

$$\frac{dV}{dt} = \alpha V; \; V(t) = V_0 e^{\alpha t},$$

где $V_0 = V(0)$.

Таким образом, если дано текущее $V$, ценность инвестиционной возможности в предположении, что мы инвестируем в некоторый будущий момент $T$, равна

$$F(V) = (V_0 e^{\alpha T} - I)e^{-\rho T}. \tag{8.15}$$

Предположим, что $\alpha \le 0$. Тогда $V(t)$ будет оставаться постоянной или падать с течением времени, так что, очевидно, нужно инвестировать немедленно если $V > I$, или не инвестировать никогда, если $V \le I$. Следовательно, $F(V) = \max(V - I, 0)$ (т.е. совпадает с простым критерием *NPV*, который исходит из $\alpha = 0$, вернее, просто не рассматривает изменение $V(t)$ во времени).

Что если $0 < \alpha < \rho$? Тогда $F(V) > 0$, даже если текущее значение $V < I$, потому что в конечном счете $V$ будет превосходить $I$. Точно так же, если даже $V$ сейчас превосходит $I$, может быть, все же лучше ждать, чем инвестировать немедленно. Чтобы это увидеть, максимизируем $F(V)$ по отношению к $T$:

$$\frac{dF(V)}{dT} = -(\rho-\alpha)Ve^{-(\rho-\alpha)T} + \rho I e^{-\rho T} = 0; \; \frac{d^2F(V)}{dT^2} < 0 \Leftrightarrow \alpha > 0;$$

$$T^* = \frac{1}{\alpha}\max\left\{\log\left(\frac{\rho I}{(\rho-\alpha)V}\right), 0\right\}. \tag{8.16}$$

Заметим, что если $V$ немного больше $I$, то получаем $T^* > 0$. Причина для инвестиций в этом случае в терминах $PV$ состоит в том, что затраты на инвестиции убывают с множителем $e^{-\rho T}$, а доходы — с меньшим множителем.

Для каких значений $V$ оптимально инвестировать немедленно? Полагая $T^* = 0$, видим, что нужно инвестировать немедленно, если $V \geq V^*$, где $V^* = \frac{\rho}{\rho-\alpha}I > I$.

Подставив выражение для $T^*$ (8.16) вместо $T$ в формулу (8.15), получаем

$$F(V) = \begin{cases} \dfrac{\alpha I}{\rho-\alpha}\left(\dfrac{(\rho-\alpha)V}{\rho I}\right)^{\rho/\alpha} & \text{для } V \leq V^*, \\ V - I & \text{для } V > V^*. \end{cases}$$

График $F(V)$ от $V$ для $I = 1$; $\rho = 0{,}10$; $\alpha = 0$; $0{,}03$; $0{,}06$ представлен на рис. 8.1.

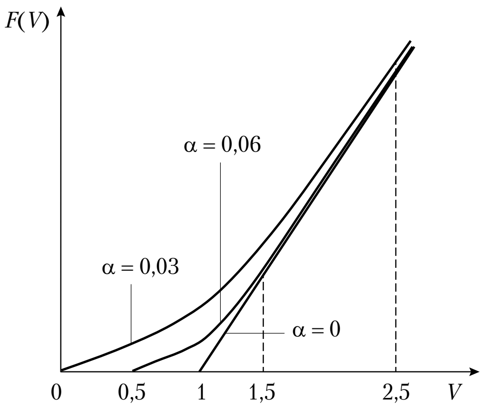



*Рис. 8.1*

В каждом случае точка касания $F(V)$ прямой $V - I$ есть критическое значение $V^* = \frac{\rho I}{\rho-\alpha}$.

Заметим, что $F(V)$ растет с ростом $\alpha$, как и $V^*$. Рост $V$ увеличивает ценность ожидания и ценность инвестиционной возможности. Если $V \geq V^*$, то следует инвестировать немедленно (рис. 8.2), а если $V < V^*$ — ждать (рис. 8.3).



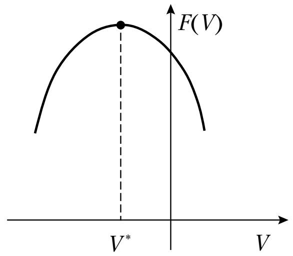



*Рис. 8.2*

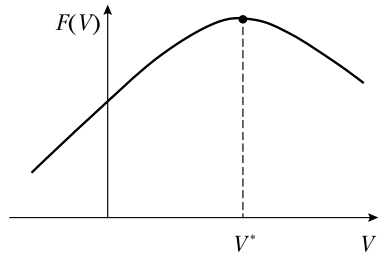



*Рис. 8.3*

**Стохастический случай.** Вернемся теперь к общему случаю, когда $\sigma > 0$. Так как $V$ развивается стохастически, нельзя определить время $T$, как это делалось в детерминистском случае. Вместо этого наше инвестиционное правило примет форму критической ценности $V^*$, такой что оптимально инвестировать, когда $V \geq V^*$.

Предположим, что стохастические изменения в $V$ должны реплицироваться (т.е. копироваться, воспроизводиться, англоязычный аналог — *spanned*) существующими активами в экономике. Это значит, что на рынке капитала должны найтись такие финансовые активы, из которых можно было бы составить динамический портфель (т.е. портфель, содержимое которого непрерывно меняется в соответствии с изменением цены актива), цена которого полностью коррелировала бы (т.е. имела бы коэффициент корреляции, равный единице) со случайным процессом $V$. Другими словами, рынок капитала должен быть достаточно «полным», для того чтобы по крайней мере в принципе можно было найти актив или построить динамический портфель активов, цена которого полностью коррелировала бы с $V$.

Данное предположение должно выполняться для большей части товаров, которые торгуются на спот- и фьючерсных рынках. Таким образом, предполагается, что неопределенность будущих значений $V$ может быть в принципе реплицирована существующими активами.

С этим предположением можно определить инвестиционное правило, которое максимизирует рыночную ценность фирмы без каких-либо предположений относительно предпочтений, связанных с риском, или ставки дисконтирования.

Пусть $x$ — цена некоторого актива или динамического портфеля активов, полностью коррелированная с $V$, и обозначим через $\rho_{xm}$ коэффициент корреляции $x$ с рыночным портфелем. Так как $x$ полностью коррелирована с $V$, то $\rho_{xm} = \rho_{xV}$. Будем предполагать, что данный актив или портфель не приносит дивидендов, таким образом, его полная доходность состоит из увеличения (прироста) капитала (*capital gains*). Тогда $x$ развивается в соответствии с дифференциальным уравнением

$$dx = \mu x dt + \sigma x dW,$$

где $\mu$ — темп роста (снос) — это ожидаемая норма доходности от владения этим активом или портфелем активов.

В соответствии с моделью оценки цены финансовых активов *CAPM* (*capital asset pricing model*) μ должна отражать систематический (недиверсифицируемый) риск данного актива. Из условия равновесия в модели *CAPM* следует:

$$\mu = r + \varphi\sigma_x\rho_{xm},$$

где $r$ — безрисковая норма доходности; φ — рыночная плата за риск; $\rho_{xm}$ — коэффициент корреляции между доходностью частного актива $x$ и всего рыночного портфеля $m$.

Таким образом, μ есть скорректированная на риск ожидаемая норма доходности, которую инвесторы потребовали бы, если бы они обладали этим проектом (т.е. $\varphi = \frac{r_m - r}{\sigma_m}$, где $r_m$ — ожидаемая доходность рынка; $\sigma_m$ — стандартное отклонение этой доходности; если взять индекс Нью-Йоркской фондовой биржи в качестве рыночного индекса, то $r_m$ $r_m - r \approx \approx 0{,}08$, $\sigma_m \approx 0{,}2$; так что $\varphi \approx 0{,}4$).

Будем предполагать, что α — ожидаемый процентный темп изменения $V$ — меньше, чем скорректированная на риск доходность μ (как мы увидим, фирма никогда не стала бы инвестировать, если бы это не было так. Независимо от текущего уровня $V$ фирме тогда было бы всегда лучше ждать и просто держать опцион, т.е. право, на то, чтобы инвестировать).

Обозначим разность между μ и α через δ: $\delta = \mu - \alpha$.

Проведем аналогию с финансовым *call*-опционом. Если бы $V$ была ценой акции, δ была бы ставкой дивидендов этой акции, общая ожидаемая доходность этой акции равнялась бы $\mu = \delta + \alpha$, т.е. ставка дивидендов плюс ожидаемая норма увеличения капитала. Если бы δ была равна нулю, *call*-опцион всегда бы держали до срока исполнения и никогда бы не исполняли раньше. Причина состоит в том, что в этом случае полная доходность акции содержится в движении ее цены, так что отсутствуют издержки сохранения опциона. Однако если ставка дивидендов положительна, существуют альтернативные издержки держания опциона по сравнению с тем, чтобы его исполнить. Эти альтернативные издержки состоят в потоке дивидендов, от которого держатель опциона отказывается, владея опционом вместо акции. Так как δ — пропорциональная ставка дивидендов, то чем выше цена акции, тем больше поток дивидендов. При некоторой достаточно высокой цене альтернативные издержки, состоящие в отказе от дивидендов, становятся настолько высокими, что целесообразно исполнить опцион.

В данной инвестиционной задаче μ — ожидаемая норма доходности от владения проектом в целом. Это равновесная норма, которая устанавливается с помощью рынка капитала и включает в себя премию за риск. Если $\delta > 0$, то ожидаемый темп прироста капитала (*rate of capital gain*) проекта меньше, чем μ. Следовательно, δ — альтернативные издержки отсрочки принятия проекта и сохранения опциона инвестировать. Если бы δ была равна нулю, отсутствовали бы альтернативные издержки сохранения опциона, и никто бы никогда не делал инвестиций, как бы высока ни была *NPV* проекта. Вот почему предполагается $\delta > 0$. С другой стороны, если δ очень велика, ценность опциона была бы очень мала, так как велики альтернативные издержки ожидания. При δ, стремящейся к ∞, ценность опциона стремится к нулю, и единственный выбор тогда состоит в следующем: «инвестировать сейчас или никогда», т.е. применимо стандартное правило *NPV*.



Параметр δ может интерпретироваться различными способами. Например, он может отражать процесс входа в отрасль и экспансию со стороны конкурентов. Наиболее естественно считать его потоком платежей от проекта. Если проект бесконечно живет, то уравнение (8.14) представляет развитие $V$ во время выполнения проекта, а $\delta V$ — поток платежей, который порождает данный проект.

**Вывод дифференциального уравнения.** Итак, $F(V)$ — ценность инвестиционной возможности. Рассмотрим следующий портфель: один опцион на то, чтобы инвестировать $F(V)$; короткая позиция по $n = F'(V)$ единицам данного проекта (или, что равносильно, актива или портфеля $x$, который полностью коррелирован с $V$). Ценность такого портфеля: $\Phi = F - F'(V)V$.

Заметим, что портфель динамический. Когда $V$ меняется, $F'(V)$ также может меняться от одного короткого интервала времени к другому, так что структура портфеля будет меняться. Однако на протяжении каждого короткого интервала длины $dt$ $n$ считается постоянным.

Короткая позиция в этом портфеле требует платежа в размере $\delta VF'(V)$ в единицу времени за короткий временной период; в противном случае ни один рациональный инвестор не стал бы входить в длинную позицию данной транзакции.

Инвестор, который держит длинную позицию в данном проекте, будет требовать скорректированный на риск доход $\mu V$, который равен приросту капитала $dV$ плюс поток дивидендов $\delta V$. Так как короткая позиция включает $F'(V)$ единиц проекта, она будет требовать выплаты $\delta VF'(V)$. Принимая этот платеж во внимание, видим, что полный доход от держания портфеля за короткий временной интервал $dt$ равен

$$d\Phi - \delta VF'(V)\,dt = dF - F'(V)dV - \delta VF'(V)dt \tag{8.17}$$

(так как $n = F'(V)$ остается постоянным в течение этого короткого интервала $dt$, член $VdF'(V) = 0$).

Чтобы получить выражение для $dF$, используем формулу Ито:

$$dF = F'(V)dV + + 1/2F''(V)(dV)2.$$

Подставляя полученное выражение в выражение для полного дохода портфеля, видим, что он равен

$$F'(V)dV + 1/2F''(V)(dV)2 - F'(V)dV - \delta VF'(V)dt =$$
$$= 1/2F''(V)(dV)2 - \delta VF'(V)dt.$$

Из формулы (8.14) следует, что $(dV)2 = \sigma 2V2dt$, поэтому доход портфеля равен

$$1/2\sigma 2V2F''(V)dt - \delta VF'(V)dt.$$

Заметим, что этот доход безрисковый (выбрано $n = F'(V)$, чтобы сделать портфель безрисковым). Следовательно, чтобы исключить арбитражные возможности, полный доход за время $d\ t$ должен равняться $\Phi rdt = r(F - F'(V)V)dt$, т.е. $1/2\sigma 2V2F''(V)dt - \delta VF'(V)dt = r(F - F'(V)V)dt$.

Деля обе части равенства на $dt$ и переупорядочивая слагаемые, получаем следующую формулу для $F(V)$:

$$1/2\sigma 2V2F''(V) + (r - \delta)VF'(V) - rF = 0. \tag{8.18}$$

Дальнейшие рассуждения этого параграфад проведем в несколько большей общности, используя вместо безрисковой ставки $r$ любой коэффициент дисконтирования $\rho$ (совпадающий в нашей задаче с $r$).

**Получение общего и частного решений.** $F(V)$ должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$F(0) = 0; \tag{8.19}$$

$$F(V^*) = V^* - I; \tag{8.20}$$

$$F'(V^*) = 1. \tag{8.21}$$

Условие (8.19) возникает из наблюдения, что если $V = 0$, то она будет оставаться нулем (см. формулу (8.14)). Следовательно, если $V = 0$, то опцион на то, чтобы инвестировать, не будет иметь никакой ценности.

Условия (8.20), (8.21) возникают из рассмотрения оптимальных инвестиций. $V^*$ — цена, при которой оптимально инвестировать. Условие (8.20) — это условие непрерывности ценности. При инвестировании фирма получает чистый доход $V^* - I$. Условие (8.21) есть условие гладкости. Если бы $F(V)$ не была непрерывная и гладкая в критической точке $V^*$, то лучше было бы осуществить инвестиции в другой точке.

Уравнение (8.20) имеет другую интерпретацию: $V^* - F(V^*) = I$. Когда фирма инвестирует, она получает доход $V^*$, но теряет возможность инвестирования, ценность которого $F(V)$. Другими словами, ее выигрыш, чистый от альтернативных издержек, равен $V - F(V)$. Критическое значение $V^*$ — это величина, при которой чистый выигрыш равен прямым затратам инвестирования $I$.

Наконец, можно записать $V^* = F(V^*) + I$, полагая, что ценность проекта равна полным издержкам (прямым затратам плюс альтернативным издержкам) наших инвестиций.

Можно заметить, что уравнение (8.18) второго порядка является однородным и линейным относительно зависимой переменной $F$ и ее производных, поэтому его общее решение может быть выражено как линейная комбинация любых двух независимых решений. Если взять функцию $AV^\beta$, то увидим, что она удовлетворяет уравнению (8.18) при условии, что $\beta$ есть корень уравнения

$$1/2\ \sigma 2\beta(\beta - 1) + (\rho - \delta)\beta - \rho = 0. \tag{8.22}$$

Найдем корни этого уравнения: $\beta_{1,\,2} = \frac{1}{2} - \frac{\rho-\delta}{\sigma^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho-\delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\rho}{\sigma^2}}$.



При этом $\beta_1 > 1$, $\beta_2 < 0$, поэтому общее решение уравнения (8.18) может быть записано как $F(V) = A_1V^{\beta_1} + A_2V^{\beta_2}$, где $A_1$, $A_2$ — константы, которые нужно определить. Из условия (8.19) $A_2 = 0$, поэтому

$$F(V) = A_1V^{\beta_1}. \tag{8.23}$$

Подставляя выражение (8.23) в формулы (8.20) и (8.21), находим:

$$\begin{cases} AV^{\beta_1} = V - I, \\ A\beta V^{\beta_1 - 1} = 1; \end{cases}$$

$$A\beta V^{\beta_1} = V;\ AV^{\beta_1} = A\beta V^{\beta_1} - I;\ AV^{\beta_1}(\beta - 1) = I;$$

$$A = \frac{I}{(\beta-1)V^{\beta_1}};$$

$$\frac{IV^{\beta_1}}{(\beta-1)V^{\beta_1}} = V - I;$$

$$V^* = \frac{I + \beta I - I}{(\beta - 1)} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}I; \tag{8.24}$$

$$A = \frac{(\beta_1 - 1)^{\beta_1 - 1}}{\beta_1^{\beta_1}\ I^{\beta - 1}}. \tag{8.25}$$

Уравнения (8.23) — (8.25) дают ценность инвестиционной возможности и оптимальное инвестиционное правило. Фирма должна инвестировать в рассматриваемый проект, если и только если ценность этого проекта $V$ превосходит величину затрат не менее, чем в $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$ раз:

$$V \ge V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}I.$$

Так как $\beta_1 > 1$, то $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} > 1$ и $V^* > I$, таким образом, простое правило $NPV$ является некорректным. Неопределенность и необратимость приводят к наличию клина между критическими значениями $V^*$ и $I$. Размер этого клина — множитель $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$, поэтому важно изучить его величину для реальных значений параметров и изменение величины этого множителя в ответ на изменения этих параметров.

Проверим строго, что $\beta_1 > 1$, исходя из условия $0 < \alpha < \rho$. Мы хотим доказать, что

$$\sqrt{\left(\frac{\rho-\delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\rho}{\sigma^2}} > \frac{\rho-\delta}{\sigma^2} + \frac{1}{2}.$$

Выпишем цепочку равносильных преобразований:

$$\frac{(\rho-\delta)^2}{\sigma^4} - \frac{\rho-\delta}{\sigma^2} + \frac{1}{4} + \frac{2\rho}{\sigma^2} > \frac{(\rho-\delta)^2}{\sigma^4} + \frac{\rho-\delta}{\sigma^2} + \frac{1}{4};$$

$$\frac{2\rho}{\sigma^2} > \frac{2(\rho-\delta)}{\sigma^2};$$

$$\rho > \rho - \delta;\ \delta = \rho - \alpha;\ \rho > \alpha.$$

Все преобразования обратимы, поэтому неравенство доказано.

**Исследование решения.** Обозначим левую часть уравнения (8.22) через $Q$. Таким образом, $Q$ — функция $\beta$.

Коэффициент при $\beta^2$ положителен, поэтому парабола имеет такой вид, как на рис. 8.4. $Q(1) = -\delta < 0$, $Q(0) = -\rho < 0$, т.е. график пересекает горизонтальную ось справа от единицы и слева от нуля. Один корень, назовем его $\beta_1$, больше единицы, а другой, назовем его $\beta_2$, отрицательный.

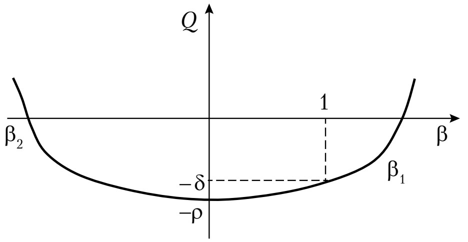



*Рис. 8.4*

Рассмотрим поведение $\beta_1$ при изменении $\sigma^2$:

$$\frac{dQ}{d\sigma} = \frac{\partial Q}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial \sigma} + \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \equiv 0.$$

С другой стороны, непосредственно $\frac{\partial Q}{\partial \sigma} = \sigma\beta(\beta-1) > 0$ при $\beta = \beta_1 > 1$.

Из графика рис. 8.4 ясно, что $\frac{\partial Q}{\partial \beta} > 0$ при $\beta = \beta_1$.

Следовательно, $\frac{\partial \beta_1}{\partial \sigma} < 0$. Другими словами, с ростом $\sigma$ значение $\beta_1$ уменьшается и, следовательно, $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$ увеличивается. Чем больше неопределенность относительно будущего значения $V$, тем больше клин между $V^*$ и $I$, т.е. тем бóльшую избыточную доходность фирма будет требовать, прежде чем она захочет сделать необратимые инвестиции.

Проверим это строго. Проверим, что $\left.\frac{\partial \beta}{\partial \sigma}\right|_{\beta=\beta_1} < 0.$

$$Q(\beta) = \frac{1}{2}\sigma^2\beta_1(\beta_1 - 1) + (\rho-\delta)\beta_1 - \rho = 0;$$

$$\lim_{\beta\to\pm\infty} Q = +\infty;$$

$$Q(1) = -\delta < 0;\ Q(0) = -\rho < 0;$$



Имеем:

1) $\frac{dQ}{d\sigma} = \frac{\partial Q}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial \sigma} + \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \equiv 0;$

2) $\frac{\partial Q}{\partial \sigma} = \sigma\beta(\beta-1)\big|_{\beta=\beta_1>1} = \sigma\beta_1(\beta_1 - 1) > 0;$

3) $\beta_1\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma^2 - (\rho-\delta) + \sqrt{\left(\rho-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 + 2\rho\sigma^2} = \sqrt{\left(\rho-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 + 2\rho\sigma^2} - \left(\rho-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2\right) > 0;$

тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta} = \sigma^2\beta - \frac{1}{2}\sigma^2 + \rho - \delta\Big|_{\beta=\beta_1} = \sqrt{\left(\rho-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 + 2\rho\sigma^2} > 0.$$

Поэтому из (1), (2) и (3) получаем, что $\left.\frac{\partial \beta}{\partial \sigma}\right|_{\beta=\beta_1} < 0.$

Таким образом, при увеличении неопределенности величина клина возрастает.

Если $\sigma \to +\infty$, имеем $\beta_1 \to 1$ и $V^* \to \infty$, т.е. фирма никогда не будет инвестировать, если неопределенность $\sigma$ бесконечна.

Действительно, так как

$$\beta_1 = \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 - (\rho-\delta) + \sqrt{\left(\rho-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 + 2\rho\sigma^2}}{\sigma^2},$$

то очевидно, что $\lim_{\sigma\to+\infty} \beta_1 = 1.$

Рассмотрим поведение $\beta_1$ при стремлении $\sigma$ к 0. Поскольку $\delta = \rho - \alpha$, имеем:

- Если $\alpha > 0$, то $\beta_1 \to \frac{\rho}{\rho-\delta}$ и $V^* \to \frac{\rho}{\delta}I$.

Действительно, если $\alpha > 0$, то $\delta < \rho$, тогда вычислим $\lim_{\sigma\to 0}\beta_1$ по правилу Лопиталя:

$$\lim_{\sigma\to 0}\beta_1 = \lim_{\sigma\to 0}\frac{\sigma}{2\sigma} + \frac{\frac{1}{2}\left[2\left(\rho-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(-\sigma) + 4\rho\sigma\right]}{2\sigma\sqrt{\left(\rho-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 + 2\rho\sigma^2}} =$$

$$= \lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{2} + \frac{2\rho - \left(\rho-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{2\sqrt{\left(\rho-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 + 2\rho\sigma^2}} = \frac{\rho-\delta+2\rho-\rho+\delta}{2(\rho-\delta)} = \frac{\rho}{\rho-\delta}$$

и $\lim_{\sigma\to 0} V^* = \lim_{\sigma\to 0}\frac{\beta_1 I}{\beta_1 - 1} = \frac{\rho I}{\rho-\rho+\delta} = \frac{\rho}{\delta}I.$

- Если $\alpha \le 0$, то $\beta_1 \to \infty$ и $V^* \to I$.

Действительно, если $\alpha \le 0$, то $\delta \ge \rho$ и $\lim\limits_{\sigma\to 0}\beta_1 = +\infty$.

Таким образом, результаты совпадают с детерминистским случаем.

Проверим, что:

- $\beta_1$ возрастает, когда $\delta$ возрастает, т.е. более высокие альтернативные издержки отсрочки принятия проекта $\delta$ означают меньший клин $\dfrac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$.

Действительно, проверим, что $\left.\dfrac{\partial\beta}{\partial\delta}\right|_{\beta=\beta_1} > 0$:

$$\frac{dQ}{d\delta} = \frac{\partial Q}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial\delta} + \frac{\partial Q}{\partial\delta};\ \left.\frac{\partial Q}{\partial\beta}\right|_{\beta=\beta_1} > 0;\ \frac{\partial Q}{\partial\delta} = -\left.\beta\right|_{\beta=\beta_1} < 0,\text{ следовательно } \frac{\partial\beta_1}{\partial\delta} > 0.$$

Следовательно, при увеличении альтернативных издержек отсрочки принятия проекта величина $\beta_1$ возрастает и поэтому величина клина уменьшается.

- $\beta_1$ уменьшается, когда $\rho$ возрастает, т.е. более высокий коэффициент дисконтирования $\rho$ ведет к увеличению клина.

Проверим, что $\left.\dfrac{\partial\beta}{\partial\rho}\right|_{\beta=\beta_1} < 0$:

$$\frac{dQ}{d\rho} = \frac{\partial Q}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial\rho} + \frac{\partial Q}{\partial\rho};\ \frac{\partial Q}{\partial\beta}(\beta_1) > 0;\ \frac{\partial Q}{\partial\rho} = \left.\beta - 1\right|_{\beta=\beta_1} > 0,\text{ следовательно } \frac{\partial\beta_1}{\partial\rho} < 0.$$

Следовательно, при увеличении коэффициента дисконтирования величина $\beta_1$ уменьшается и поэтому величина клина увеличивается.

## 8.8. Задача об инвестициях с переменной функцией затрат

Рассмотрим более общую ситуацию, когда и затраты на проект (первоначальные вложения) $I$, и поток платежей, связанный с проектом (релевантный, инкрементальный денежный поток) $P$ являются неопределенными и следуют геометрическому броуновскому движению. Предположим, что неопределенность этих двух случайных процессов коррелирована из-за некоторых общих макроэкономических воздействий. Таким образом, предположим, что

$$dP = \alpha_P P dt + \sigma_P P dW_P;\ dI = \alpha_I I dt + \sigma_I I dW_I,$$

причем $dW_P^2 = dt$; $dW_I^2 = dt$; $dW_P dW_I = \rho dt$, где $W$ обозначает винеровский процесс.

Денежный поток инвестиционного проекта $P$ следует геометрическому броуновскому движению:

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dW_P,$$

и его ожидаемое значение растет с темпом $\alpha$. Если будущие доходы дисконтируются по ставке $\mu$, то ожидаемая сегодняшняя ценность $V$ проекта, когда текущее значение денежного потока (платеж в настоящий момент) есть $P$, равняется

$$V = E\int_t^\infty P_s e^{-\mu_P(s-t)}ds = \int_t^\infty P_t e^{\alpha_P(s-t)}e^{-\mu_P(s-t)}ds = \int_t^\infty P_t e^{-\delta_P(s-t)}dt = \frac{P_t}{\delta_P},$$

потому что $E(dP) = \alpha_P E(P)dt$, откуда $E(P) = E(P_0)\,e^{\alpha_P t}$, и в частности $E(P_s) = E(P_t)e^{\alpha_P(s-t)}$, $\delta_P = \mu_P - \alpha_P$.

Величина $P_t/\delta$ есть ожидаемая в момент времени $t$ сегодняшняя стоимость потока платежей $P_s\,(s \ge t)$, когда начальный уровень равен $P_t$, потому что $E(P_s) = P_t e^{\alpha(s-t)}$, а дисконтирование производится по подходящей скорректированной на риск ставке $\mu$.

Модель оценки доходности финансовых активов (*CAPM*) позволяет нам определить скорректированную на риск ставку дисконтирования $\mu$. Для этого нужно, чтобы стохастические флуктуации $P$ реплицировались финансовыми рынками, т.е. чтобы существовал торгуемый на финансовом рынке актив или чтобы можно было построить динамический портфель из торгуемых на финансовом рынке активов, полностью коррелированный с $P$. Для простоты рассмотрения можно предположить, что выпуск данного проекта непосредственно торгуется. В этом случае ставка дисконтирования $\mu$ будет рыночной скорректированной на риск ожидаемой нормой доходности $P$.

Имеем, как и ранее, $\mu = r + \varphi\sigma\rho_{pm}$, где $r$ — ставка дисконтирования, соответствующая безрисковому денежному потоку; $\varphi = \dfrac{r_m - r}{\sigma_m}$ — рыночная премия за риск ($r_m$ — ожидаемая доходность рынка, $\sigma_m$ — стандартное отклонение этой доходности); $\rho_{pm}$ — коэффициент корреляции между данным активом, который отслеживает $P$, и всем рыночным портфелем.

Инвесторы согласятся держать выпуск проекта или актив, полностью коррелированный с $P$, только если они получают ожидаемую полную норму доходности $\mu$. Отсюда $\alpha$ принимает форму ожидаемого увеличения капитала (*capital gain*). Остаток $\delta$ должен представлять собой некоторый род дивиденда. Если, например, выпуск является складируемым товаром (нефть или медь), то $\delta$ представляет собой чистую предельную доходность от удобства хранения, т.е. поток выгод за вычетом затрат на хранение, которую производит последняя единица хранения. Эти выгоды могут включать в себя увеличение возможности бесперебойного производства, избежание остановок, облегчение планирования производства и сбыта.

«Доходы от удобства» являются причиной того, что фирмы держат предметы, внесенные в инвентарь, даже если ожидаемый прирост капитала от них ниже скорректированной на риск ставки или даже отрицательный. Обычно ожидают, что для большинства товаров предельная доходность хранения обратно пропорционально зависит от полного количества запаса.

Будем считать $\delta$ экзогенно заданным параметром, хотя на практике он может меняться, и мы также можем учесть это в нашей модели.

Когда некоторые основные параметры меняются, равновесное соотношение $\mu - \alpha = \delta$ по-прежнему должно выполняться, но какие из трех величин изменить для восстановления равновесия, зависит от лежащей в основе технологии. Мы предполагаем, что безрисковая ставка $r$ и рыночная цена риска $\varphi$, будучи свойствами всего рынка, являются экзогенными для нашего анализа.

Когда $\sigma$ цены актива, приносящего $P$, возрастает, $\mu$ также должно возрасти. Если $\sigma$ есть фундаментальная рыночная постоянная, тогда $\alpha$ должно меняться в соответствии с изменением $\mu$. Однако если $\alpha$ — фундаментальная рыночная постоянная, то $\sigma$ должна меняться, например может измениться полное количество запасов. Когда исследуются воздействия изменений $\delta$ на инвестиционное решение фирмы, ответ будет зависеть от того, какая из этих точек зрения принимается. Вообще говоря, $\delta$ будем рассматривать как основной параметр и допускать изменения $\alpha$.

Ценность опциона, т.е. права на то, чтобы инвестировать, зависит от $P_t$ и от $I$. Интуитивно ожидаем, что этот опцион будут держать на руках, когда $P_t$ низкая или $I$ высокие, и будут исполнять, когда $P_t$ становится достаточно высокой для данной $I$ или же $I$ становятся достаточно низкими для данной $P_t$.

Рисунок 8.5 показывает предполагаемые области на плоскости $(I, P)$, соответствующие ожиданию и принятию инвестиционного проекта, и границ, разделяющих их.

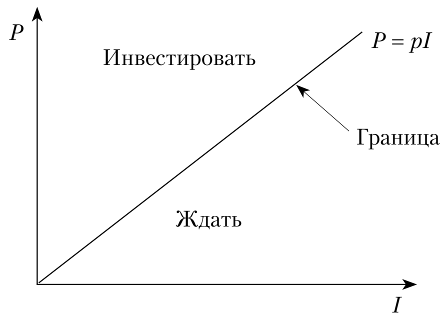



*Рис. 8.5*

Здесь важно сделать свои интуитивные представления более точными и развить аналитический метод нахождения границы двух областей и тем самым — определения оптимального инвестиционного правила.

Дальнейшие шаги должны быть привычными. Пусть $F(P, I)$ — ценность опциона на то, чтобы инвестировать. Надо найти уравнение для него. Предполагаем, что и утопленные, т.е. невозвратные, затраты, и цена выпуска потока платежей покрываются (*spanned*), или реплицируются, существующими активами, и поэтому работаем с активами, цены которых равны соответственно $P$ и $I$. Назовем эти активы для краткости «выпуск» и «капитал». Рассмотрим портфель, состоящий из одной единицы нашего опциона $F$, короткой позиции относительно $m$ единиц выпуска и короткой же позиции относительно $n$ единиц капитала. Ценность такого портфеля

$$\Phi = F(P, I) - mP - nI.$$



Рассмотрим изменение ценности портфеля за короткий временной интервал $dt$. С помощью формулы Ито получаем

$$d\Phi = F'_P dP + F'_I dI + \frac{1}{2}(F''_{PP}\sigma_P^2 P^2 + 2F''_{PI}\rho\sigma_P\sigma_I PI + F''_{II}\sigma_I^2 I^2)dt,$$

откуда

$$d(F - mP - nI) =$$
$$= (F'_P - m)dP + (F'_I - n)dI + \frac{1}{2}(F''_{PP}\sigma_P^2 P^2 + 2F''_{PI}\rho\sigma_P\sigma_{\mathrm{I}} PI + F''_{II}\sigma_{\mathrm{I}}^2 I^2)dt.$$

Заметим, что $dP$ и $dI$ в правой части уравнения стохастические, однако положив $m = F'_P$, $n = F'_I$, избавимся от этих слагаемых и сделаем наш портфель безрисковым. Тогда держатель портфеля за интервал времени $(t; t + dt)$ будет иметь безрисковое увеличение капитала

$$\frac{1}{2}(F''_{PP}\sigma_P^2 P^2 + 2F''_{PI}\rho\sigma_P\sigma_{\mathrm{I}} PI + F''_{II}\sigma_{\mathrm{I}}^2 I^2)dt.$$

Держатель портфеля также должен выполнить платеж, соответствующий доходности от удобства выпуска и капитала, держателям длинной позиции. Таким образом, доход от портфеля равен

$$\frac{1}{2}(F''_{PP}\sigma_P^2 P^2 + 2F''_{PI}\rho\sigma_P\sigma_I PI + F''_{II}\sigma_I^2 I^2)dt - \delta_P PF'_P dt - \delta_I IF'_I dt.$$

Доход от нашего портфеля по безрисковой ставке за короткий временной промежуток $dt$ равняется $\Phi r dt$.

Из условия отсутствия арбитража следует, что

$$\frac{1}{2}(F''_{PP}\sigma_P^2 P^2 + 2F''_{PI}\rho\sigma_P\sigma_I PI + F''_{II}\sigma_I^2 I^2)dt - \delta_P PF'_P dt - \delta_{\mathrm{I}} IF'_I dt =$$
$$= r(F - F'_P P - F'_I I)dt,$$

откуда, группируя слагаемые, получаем следующее основное уравнение:

$$\frac{1}{2}(F''_{PP}\sigma_P^2 P^2 + 2F''_{PI}\rho\sigma_P\sigma_I PI + F''_{II}\sigma_I^2 I^2) + (r - \delta_P)PF'_P + (r - \delta_{\mathrm{I}})IF'_I - rF = 0.$$

Это уравнение в частных производных, так как есть две неизвестные переменные $P$ и $I$. Оно справедливо в той области плоскости $(P, I)$, где оптимально держать опцион неисполненным. На границе данной области, где опцион немедленно исполняется,

$$F(P, I) = V(P) - I = \frac{P}{\delta_P} - I.$$

Должны также выполняться условия гладкого склеивания (касательные плоскости на границе должны совпадать): $F'_P(P, I) = V'(P) = \dfrac{1}{\delta_P}$; $F'_I(P, I) = -1$.

Данное дифференциальное уравнение вместе с граничными условиями должно определить положение самой границы и породить решение для функции $F$ в области ожидания. Тот факт, что граница является неизвестной, делает задачу очень трудной. Теория дифференциальных уравнений в частных производных очень мало что может сказать о задачах со свободной границей. Аналитическое решение существует редко, а численные методы разрабатываются для каждой частной ситуации в отдельности. В принципе ситуация не отличается от этой задачи, даже когда только цена является неопределенной; инвестиционный порог $P^*$ неизвестен и является точкой свободной границы, которая отделяет одномерную область значений $P$, где инвестиции делаются, от области, где они не делаются. К счастью, в рассматриваемом случае естественная однородность задачи позволяет свести ее к одному измерению.

Если текущие значения $P$ и $I$ удвоить, то удвоятся ценность проекта и, таким образом, затраты на инвестирование. Оптимальное решение, следовательно, должно зависеть только от отношения $p = P/I$ и, следовательно, граница на рисунке должна представлять собой луч из начала координат. Соответственно, ценность опциона должна быть однородной степени 1 от $(P, I)$, позволяя записать: $F(P, I) = If(P/I) = If(p)$, где $f$ — функция, подлежащая определению. Последовательно дифференцируя, получаем

$$F'_P(P,I) = f'(P); F'_I(P,I) = f(p) - pf''(p)$$

$$F''_{PP}(P,I) = \frac{f''(p)}{I}; F''_{PI} = -\frac{pf''(p)}{I}; F''_{II} = \frac{p^2 f''(p)}{I}.$$

Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение и группируя слагаемые, получаем

$$\frac{1}{2}(\sigma_p^2 - 2\rho\sigma_p\sigma_I + \sigma_I^2)p^2 f''(p) + (\delta_I - \delta_p)pf'(p) - \delta_I f(p) = 0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение для неизвестной функции $f(p)$ от скалярной независимой переменной $p$.

Граничные условия принимают вид

$$f(p) = p/\delta_p - 1, f'(p) = 1/\delta_p,\ f(p) - pf'(p) = -1.$$

Любое из этих трех условий можно вывести из двух других. Характеристическое уравнение (*fundamental quadratic*) нашего дифференциального уравнения имеет вид

$$Q = \frac{1}{2}(\delta_p^2 - 2\rho\delta_p\delta_I + \delta_I^2)\beta(\beta - 1) + (\delta_I - \delta_p)\beta - \delta_I = 0.$$

Пусть $\beta_1$ — больший корень. Если $\delta_I$ и $\delta_P$ больше нуля (как мы предполагали), то $\beta_1 > 1$. Тогда находим

$$\frac{P^*}{I^*} = p^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\delta_P.$$

Этот луч, проходя через начало координат, разделяет области ожидания и инвестирования в плоскости $(P, I)$. Если $\delta_P$ и $\delta_I$ увеличиваются, $\beta_1$ будет



убывать и множитель $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$ возрастать. Однако множитель будет убывать, если $\rho$ возрастает; при сохранении постоянными вариаций $P$ и $I$ чем больше будет ковариация между изменениями в $P$ и $I$, тем меньше неопределенность в их отношении и, следовательно, ценность ожидания будет уменьшаться.

## 8.9. Задача о поглощении

**Синергетический эффект слияния/поглощения.** Слиянием называют любую форму объединения двух или большего числа существующих фирм в единую фирму. Именно здесь специалисты по теории финансов чаще всего говорят о синергетическом эффекте: «Синергия — условие, состоящее в том, что общий результат превосходит сумму сложенных эффектов; при синергетическом слиянии стоимость после слияния превосходит сумму отдельных фирм до слияния. Если существует синергия, то целое — это больше, чем сумма его частей. Синергией также называют: 2 плюс 2 равняется 5»[1].

Ю. Бригхэм и Л. Гапенски[2] выделяют четыре основных источника синергетического эффекта:

1) операционная экономия, возникающая в результате возрастающей отдачи от масштаба в управлении, маркетинге, производстве и распределении;

2) финансовая экономия, проявляющаяся в снижении издержек по обслуживанию долга, увеличении способности компании по привлечению заемных средств, лучшей подготовке сделок аналитиками;

3) дифференциальная эффективность, означающая, что управление одной из фирм было неэффективным и после слияния ее активы станут более производительными;

4) возросшая рыночная мощь как результат ослабления конкуренции.

**Постановка задачи о поглощении.** Предположим, что поведение фирмы-поглотителя и фирмы-мишени рационально, обе стороны обладают совершенной информацией и одинаково прогнозируют будущее, и попробуем рассмотреть процесс слияния/поглощения с позиций известного метода реальных опционов[3]. Пусть фирма $A$ собирается поглотить фирму $B$ и $V_A$ — ценность фирмы $A$, $V_B$ — ценность фирмы $B$, $V_C$ — ценность объединенной фирмы, $V_D = V_C - V_A$ — ценность для фирмы $A$ проекта поглощения фирмы $B$, $I$ — плата фирмы $A$ акционерам фирмы $B$ за покупку их фирмы. Таким образом сделка возможна, только если $V_B \le I \le V_D$.

Предположим, что ценность фирмы $V_B$ и ценность инвестиционного проекта $V_D$, как обычно, представляют собой геометрические броуновские движения:

$$dV_D = \alpha_D V_D dt + \sigma_D V_D dw_D; dV_B = \alpha_B V_B dt + \sigma_B V_B dw_B,$$

где $\alpha$ и $\sigma$ — темпы роста и волатильности соответствующих процессов; $dw$ — приращение винеровского случайного процесса.

---

1 *Бригхэм Ю.* Энциклопедия финансового менеджера. М. : Экономика, 1998.

2 *Бригхэм Ю., Гапенски Л.* Финансовый менеджмент. СПб. : Экономическая школа, 2004.

3 *Dixit A. K., Pindyck R. S.* Investment under uncertainty. Princeton, 1993.

Анализ проведем в три этапа. Сначала будем считать, что каждая сторона рассматривает цену, которую предлагает другая сторона, как данную. Рассмотрим поведение акционеров фирмы $B$, которые получили предложение о продаже, и установим, какой должна быть предлагаемая цена, чтобы акционеры фирмы $B$ согласились на данное предложение. Построим безрисковый портфель $\Phi$, состоящий из одного опциона $F(V_B)$ продажи фирмы $B$ за общую сумму $I$ и из короткой позиции по $F'(V_B)$ единицам актива, который является репликой $V_B$.

Реплика для $V_B$ — это такой финансовый актив, цена которого реплицирует, т.е. копирует, воспроизводит стохастические изменения процесса $V_B$. Другими словами, коэффициент корреляции этих двух случайных процессов ($V_B$ и цены реплицирующего актива) в любой момент времени должен быть равен единице.

Ценность такого портфеля

$$\Phi = F(V_B) - F'(V_B)V_B.$$

Держатель длинной позиции будет требовать скорректированной на риск отдачи $\mu V_B$ от актива $V_B$, которая равна приросту капитала $\alpha V_B$ плюс поток дивидендов $\delta_B V_B$. Следовательно, за эту короткую позицию, включающую $F'(V_B)$ единиц актива $V_B$, должны за короткий интервал времени $dt$ заплатить $\delta_B V_B F'(V_B)dt$. Поэтому общая отдача от нашего портфеля за короткий временной промежуток $dt$ равна

$$d\Phi = dF - F'(V_B)dV_B - \delta_B V_B F'(V_B)dt.$$

По формуле Ито $dF = F'(V_B)dV_B + \frac{1}{2}F''(V_B)(dV_B)^2$, поэтому

$$d\Phi = \frac{1}{2}F''(V_B)(dV_B)^2 - \delta_B V_B F'(V_B)dt = \frac{1}{2}F''(V_B)V_B^2\sigma_B^2 dt - \delta_B V_B F'(V_B)dt$$

и можно увидеть, что портфель действительно безрисковый. Так как портфель безрисковый, условие отсутствия арбитража имеет вид $d\Phi = r\Phi dt$, где $r$ — безрисковая ставка процента, и получаем

$$\frac{1}{2}F''(V_B)\sigma_B^2 V_B^2 dt - \delta_B F'(V_B)V_B dt = r(F - F'(V_B)V_B)dt,$$

откуда

$$\frac{1}{2}\sigma_B^2 V_B^2 F''(V_B) + (r - \delta_B)V_B F'(V_B) - rF = 0. \qquad (8.26)$$

Общее решение уравнения (8.26) имеет вид $F(V) = B_1 V_B^{\beta_1} + B_2 V_B^{\beta_2}$, где $\beta_1$, $\beta_2$ — корни квадратного уравнения $\frac{1}{2}\sigma_B^2\beta(\beta-1) + (r-\delta_B)\beta - r = 0$, таким образом,

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{2} - \frac{r-\delta_B}{\sigma_B^2} \pm \sqrt{\left(\frac{r-\delta_B}{\sigma_B^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma_B^2}}, \text{ т.е. } \beta_1 > 1, \beta_2 < 0.$$



Так как $\lim\limits_{V_B \to \infty} F(V_B) = 0$, получаем $B_1 = 0$ и $F(V_B) = B_2 V_B^{\beta_2}$.

Граничные условия имеют вид $F(V_B^*) = I - V_B^*$, $F'(V_B^*) = -1$, где $V_B^*$ — критическая ценность фирмы $B$, т.е. такая ценность данной фирмы, что оптимальное правило продажи требует продавать фирму $B$, если $V_B \le V_B^*$, и отказаться от предложения со стороны фирмы $A$, если $V_B > V_B^*$.

Тогда получаем

$$B_2(V_B^*)^{\beta_2} = I - V_B^*;\ B_2\beta_2(V_B^*)^{\beta_2 - 1} = -1,$$

откуда $\frac{V_B^*}{\beta_2} = V_B^* - I$, т.е. $I = V_B^* \frac{\beta_2 - 1}{\beta_2}$.

Акционерам фирмы $B$ следует принять предложение фирмы $A$ относительно продажи фирмы $B$, если

$$I \ge V_B \frac{\beta_2 - 1}{\beta_2}, \qquad (8.27)$$

и отвергнуть его в противном случае.

Теперь, зная, что цена $I$, на которую может согласиться фирма $B$, равна произведению некоторой константы $k_B$ на ценность фирмы $B$, рассмотрим поведение фирмы $A$. Очевидно, что, определяя для себя оптимальное правило инвестирования, фирма $A$ рассматривает не только изменение во времени своей собственной ценности и ценности фирмы $B$, но и изменение во времени цены продажи фирмы $B$. Точно так же и фирма $B$ при определении своего оптимального инвестиционного правила рассматривает изменение во времени не только своей собственной ценности и ценности фирмы $A$, но и цены покупки, предлагаемой фирмой $A$.

Теперь ценность опциона инвестировать является функцией $F(V_D, V_B)$ обеих переменных $V_D$ и $V_B$, и притом однородной первой степени: ясно, что если $V_D$ и $V_B$ увеличить вдвое, то вдвое же увеличится и $F(V_D, V_B)$.

Предполагая, что на рынке существуют реплики для $V_D$ и $V_B$, построим безрисковый портфель $\Phi$, содержащий один опцион $F(V_D, V_B)$, а также короткую позицию по $m$ единицам $V_D$ и короткую позицию по $n$ единицам $V_B$. С помощью формулы Ито находим

$$d\Phi = d(F - mV_D - nV_B) = \frac{1}{2}(F''_{DD}\sigma_D^2 V_D^2 + 2F''_{DB}\rho\sigma_D\sigma_B V_D V_B + F''_{BB}\sigma_B^2 V_B^2) + \\ + (F'_D - m)dV_D + (F'_B - n)dV_B,$$

где $\rho$ — коэффициент корреляции между $V_D$ и $V_B$.

Для того чтобы портфель $\Phi$ был безрисковым, выберем $m = F'_D$, $n = F'_B$. Держатель короткой позиции должен платить держателю длинной позиции поток дивидендов

$$(m\delta_D V_D + n\delta_B V_B)dt.$$

С другой стороны, доходность портфеля $\Phi$ должна равняться безрисковой доходности

$$r(F - mV_D - nV_B)dt,$$

и поэтому получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{2}(\sigma_D^2 V_D^2 F''_{DD} + 2\rho\sigma_D\sigma_B V_D V_B F''_{DB} + \sigma_B^2 V_B^2 F''_{BB}) +$$
$$+(r-\delta_D)V_D F'_D + (r-\delta_B)V_B F'_B - rF = 0. \qquad (8.28)$$

Граничные условия имеют следующий вид:

$$F(V_D^*, V_B^*) = V_D^* - I = V_D^* - k_B V_B^*;$$
$$F'_{V_B}(V_D^*, V_B^*) = -k_B;$$
$$F'_{V_D}(V_D^*, V_B^*) = 1.$$

Теперь воспользуемся однородностью и сведем дифференциальное уравнение в частных производных (8.28) к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Обозначим $p = V_D/V_B$. Тогда

$$F(V_D, V_B) = V_B F(V_D/V_B, 1) = V_B f(p),$$

где $f(p) = F(p, 1)$.

Поэтому

$$F'_{V_D} = f'(p); F'_{V_B} = f(p) - pf'(p); F''_{V_D V_D} = f''(p)/V_B;$$

$$F''_{V_D V_B} = -\frac{V_D}{V_B^2} f''(p) = -\frac{p}{V_B} f''(p);$$

$$F''_{V_B V_B} = -\frac{V_D}{V_B} f'(p) + \frac{V_D}{V_B} f'(p) + pf''(p)\frac{V_D}{V_B^2} = \frac{p^2}{V_B} f''(p).$$

Подставляя данные выражения в уравнение (8.28), получаем

$$\frac{1}{2}\left(\sigma_D^2 V_D^2 \frac{1}{V_B} f'' - 2\rho\sigma_D\sigma_B V_D V_B \frac{p}{V_B} f'' + \sigma_B^2 V_B^2 \frac{p^2}{V_B} f''\right) +$$
$$+(r-\delta_D)V_D f' + (r-\delta_B)V_B f - (r-\delta_B)V_B p f' - rV_B f = 0,$$

откуда, приводя подобные и деля на $V_B$, находим

$$\frac{1}{2}(\sigma_D^2 - 2\rho\sigma_D\sigma_B + \sigma_B^2)p^2 f'' + (\delta_B - \delta_D)pf' - \delta_B f = 0. \qquad (8.29)$$

Граничные условия принимают вид

$$f(p) = p - k_B; f'(p) = 1; f(p) - pf'(p) = -k_B.$$

Любое из данных трех граничных условий может быть выведено из двух остальных. Общее решение уравнения (8.29) имеет вид

$$f(p) = A_1 p^{\beta_1} + A_2 p^{\beta_2},$$

где $\beta_1$, $\beta_2$ — корни квадратного уравнения

$$\frac{1}{2}(\sigma_D^2 - 2\rho\sigma_D\sigma_B + \sigma_B^2)\beta(\beta-1) + (\delta_B - \delta_D)\beta - \delta_B = 0.$$



Поэтому

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{2} - \frac{\delta_B - \delta_D}{\sigma^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta_B - \delta_D}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\delta_B}{\sigma^2}}, \qquad (8.30)$$

где $\sigma^2 = \sigma_D^2 - 2\rho\sigma_D\sigma_B + \sigma_B^2$. Таким образом $\beta_1 > 1$; $\beta_2 < 0$. Так как $f(0) = 0$, имеем $A_2 = 0$. Воспользуемся граничными условиями:

$$A_1 p^{\beta_1} = p - k_B; A_1\beta_1 p^{\beta_1 - 1} = 1.$$

Разделив первое из этих равенств на второе, видим, что $\frac{p^*}{\beta_1} = p^* - k_B$, т.е.

$$p^*(\beta_1 - 1) = \beta_1 k_B.$$

Иными словами, $\frac{V_D^*}{V_B^*} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} k_B$.

Оптимальное инвестиционное правило для фирмы $A$ выглядит следующим образом. Фирма $A$ должна покупать фирму $B$ тогда и только тогда, когда

$$V_D \geq \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I, \qquad (8.31)$$

где $\beta_1$ определяется выражением (8.30).

Зная теперь, что цена покупки, на которую может согласиться фирма $A$, равна произведению некоторой константы $k_D$ на ценность $V_D$ для фирмы $A$ проекта покупки фирмы $B$, рассмотрим поведение фирмы $B$. Задавшись вопросом, когда же акционерам фирмы $B$ следует продавать свою фирму, мы, очевидно, получим то же самое дифференциальное уравнение (8.29), а граничные условия теперь примут вид

$$f(p) = k_D p - 1; f'(p) = k_D; f(p) - pf'(p) = -1,$$

и мы придем к решению

$$\frac{V_D^*}{V_B^*} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\frac{1}{k_D},$$

где $\beta_1$ — положительный корень уравнения (8.30). Таким образом, оптимальное правило продажи для фирмы $B$ выглядит следующим образом. Фирме $B$ следует откликнуться на предложение фирмы $A$ тогда и только тогда, когда

$$V_B \leq \frac{\beta_1 - 1}{\beta_1} I. \qquad (8.32)$$

Из формулы (8.31) видим, что $k_D = \frac{\beta_1 - 1}{\beta_1}$, а из формулы (8.32) — что $k_B = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$. При этом $I = \sqrt{V_B^* V_D^*}$. Введем в рассмотрение величину $\theta = \frac{I}{V_B^*} - 1$.

Это та доля рыночной стоимости фирмы $B$, которую получат ее собственники в качестве премии. Имеем

$$I=(1+\theta)V_B^*,\ V_D^*=(1+\theta)I=(1+\theta)^2V_B^*,$$

т.е. собственники фирмы $B$ получают $\theta V_B^*$, а фирме $A$ достается $\theta I=\theta(1+\theta)V_B^*$ от суммарного синергетического эффекта слияния $V_D^*-V_B^*=(2\theta+\theta^2)V_B^*$.

Таким образом, если собственники фирмы $B$ немедленно получают кроме рыночной стоимости своей фирмы еще и процент $\theta$ ее рыночной стоимости в виде премии за продажу, т.е. получают $(1+\theta)V_B^*$ сегодня же, то собственники фирмы $A$ получают от поглощения фирмы $B$ в течение всей будущей деятельности фирмы $A$ инкрементальный денежный поток, чистая приведенная стоимость которого равна $\theta(1+\theta)V_B^*=\theta V_B^*+\theta^2V_B^*$, но сегодня и в ближайшем будущем они, скорее всего, терпят одни лишь убытки.

# ПРАКТИКУМ

## П.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

### П.1.1. Линейное однородное уравнение первого порядка

Рассмотрим линейное однородное уравнения первого порядка

$$y'+p(t)y=0,$$

где $p\colon I\to\mathbb{R}$, $I$ — некоторый интервал.

Пусть $y$ уже обозначает решение. Тогда имеет место тождество

$$y'(t)+p(t)y(t)\equiv 0.$$

Умножим обе части уравнения на $e^{\int p(t)dt}$.

Получим $(y(t)e^{\int p(t)dt})'\equiv 0$, т.е. $y(t)e^{\int p(t)dt}\equiv C$, или

$$y(t)=Ce^{-\int p(t)dt},\ t\in I. \qquad (\text{П}.1)$$

**Пример П.1**

Решим задачу Коши $y'=-2ty$, $y(1)=2$.

*Решение.* По формуле (П.1) получаем

$$y=Ce^{-2\int tdt}=Ce^{-t^2}.$$

Учитывая начальные условия, находим $2=Ce^{-1}$, $C=2e$ и окончательно получаем

$$y=2e^{1-t^2}.$$

### П.1.2. Линейное неоднородное уравнение первого порядка

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение первого порядка

$$y'(t)+p(t)y(t)=q(t),$$

где $p$, $q\colon I\to\mathbb{R}$, $I$ — некоторый интервал.

Умножим обе части уравнения на $e^{\int p(t)dt}$:

Получим

$$(y(t)e^{\int p(t)dt})'=q(t)e^{\int p(t)dt},$$

т.е.

$$y(t)e^{\int p(t)dt}=\int q(t)e^{\int p(t)dt}dt+C,$$

или

$$y(t)=e^{-\int p(t)dt}(\int q(t)e^{\int p(t)dt}dt+C),\ t\in I. \qquad (\text{П.2})$$

**Пример П.2**

Найдем все решения уравнения $y' + 2ty = t^2$.

*Решение.* Умножим обе части на $e^{t^2}$, так как $\int 2tdt = t^2 + C$. Получим

$$(ye^{t^2})' = t^2e^{t^2},$$

или

$$y = e^{-t^2}(\int t^2e^{t^2}dt + C).$$

### П.1.3. Метод вариации произвольной постоянной

Дано линейное неоднородное уравнение

$$y'(t) + p(t)y(t) = q(t).$$

Мы ищем решение абсолютно в том же виде, как и для однородного линейного уравнения $y'(t) + p(t)y(t) = 0$, т.е. в виде

$$y(t) = Ce^{-\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau}, \qquad (\text{П.3})$$

но только $C$ теперь не константа, а может зависеть от $t$. Продифференцируем обе части равенства (П.3):

$$y'(t) = C'e^{-\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau} - Cp(t)e^{-\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau}. \qquad (\text{П.4})$$

Умножая равенство (П.3) на $p(t)$ и складывая с равенством (П.4), получаем

$$C'(t)e^{-\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau} = q(t). \qquad (\text{П.5})$$

Отсюда находим $C(t)$ и, следовательно, $y(t)$.

*Замечание 1.* Решая уравнение первого порядка методом вариации, естественно, необязательно каждый раз повторять вывод этого метода, а можно начинать решение, сразу выписывая формулу (П.5) для конкретных функций $p(t)$ и $q(t)$. Затем, интегрируя уравнение (П.5), мы находим $C(t)$ и подставляем в формулу (П.3), получая решение.

*Замечание 2.* Применяя метод вариации и выписывая формулу (П.5), естественно, совершенно необязательно использовать определенный интеграл с переменным верхним пределом, а можно использовать неопределенный интеграл. В этом случае при вычислении неопределенного интеграла мы можем положить константу интегрирования равной нулю, потому что нам для проведения метода подходит любая первообразная.



**Пример П.3**

Требуется решить задачу Коши

$$y' = \frac{2(y + x^4)}{x} = \frac{2}{x}y + 2x^3,\ y(1) = 1.$$

*Решение.* Соответствующее однородное уравнение

$$y' = \frac{2}{x}y.$$

Решение однородного уравнения

$$y = Ce^{2\int \frac{1}{x}dx} = Ce^{2\ln x} = Cx^2.$$

Тогда $C'(x)x^2 = 2x^3$, $C'(x) = 2x$, $C(x) = x^2 + C_0$.
Таким образом, $y = x^4 + C_0x^2$.
Из начальных условий $1 = 1 + C_0$, $C_0 = 0$.
Значит, $y = x^4$.

### П.1.4. Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(t)y = q(t)y^{\alpha},\ \alpha \neq 0, 1.$$

Умножим обе части уравнения на $y^{1-\alpha}$. При этом может потеряться решение $y \equiv 0$, надо его отдельно проверять. Получим

$$y^{-\alpha}y' + py^{1-\alpha} = q.$$

Обозначим

$$z = y^{1-\alpha}. \qquad (\text{П.6})$$

Нам надо выразить $y'$ через $z$. Продифференцируем равенство (П.6) почленно:

$$z' = (1 - \alpha)y^{-\alpha}y'.$$

Тогда получим уравнение

$$\frac{z'}{1-\alpha} + pz = q.$$

Умножив обе части уравнения на $1 - \alpha$, получим линейное неоднородное уравнение.

**Пример П.4**

Требуется решить уравнение Бернулли $y' + 2y = y^2e^x$.

*Решение.* Умножим обе части уравнения на $y^{-2}$. При этом теряется решение $y \equiv 0$. Имеем

$$\frac{y'}{y^2} = -2\frac{1}{y} + e^x. \qquad (\text{П.7})$$

Обозначим $z=\dfrac{1}{y}$. Тогда $z'=-\dfrac{y'}{y^2}$. Подставляя $z$ и $z'$ в формулу (П.7) вместо соответствующих выражений, получаем уравнение

$$-z' = -2z + e^x, \text{ или } z' - 2z = -e^x.$$

Решением соответствующего однородного уравнения является, очевидно, $z = Ce^{2x}$.

Применим метод вариации произвольной постоянной. Считаем, что $C$ — это функция от $x$:

$$z = C(x)e^{2x}. \qquad \text{(П.8)}$$

Согласно методу вариации произвольной постоянной имеем

$$C'(x)e^{2x} = -e^x.$$

Отсюда $C'(x) = -e^{-x}$ и, следовательно,

$$C(x) = e^{-x} + C. \qquad \text{(П.9)}$$

Подставляя выражение (П.9) в формулу (П.8), находим

$$z = e^x + Ce^{2x}.$$

Таким образом, множество решений нашего уравнения Бернулли — это $y=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{e^x+Ce^{2x}}$, $C \in \mathbb{R}$, и решение $y \equiv 0$.

---

### П.1.5. Примеры решения задач на метод вариации и уравнение Бернулли

**Пример П.5**

Найдем все решения уравнения $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=\dfrac{1}{\cos x}$.

*Решение*. Решим сначала методом вариации, т.е. ищем решение в виде

$$y = C(x)e^{-\int \mathrm{tg}\,x dx}. \qquad \text{(П.10)}$$

Так как

$$-\int \mathrm{tg}\,x dx = \int \frac{d\cos x}{\cos x} = \ln|\cos x|,$$

имеем $e^{-\int \mathrm{tg}\,x dx} = |\cos x|$.

Запишем для нашей задачи уравнение (П.5):

$$C'(x)|\cos x| = \frac{1}{\cos x},$$

откуда получаем

$$C'(x) = \frac{\mathrm{sign}(\cos x)}{\cos^2 x}.$$

Интегрируя, находим

$$C(x) = \mathrm{sign}(\cos x)\mathrm{tg}x + C$$

и подставляем в формулу (П.10), получая решение

$$y = (\mathrm{sign}(\cos x)\mathrm{tg}\,x + C)|\cos x| = \sin x + C|\cos x| = \sin x + C\cos x.$$

Теперь решим по формуле (П.2). Имеем

$$y(t) = e^{-\int \mathrm{tg}\,x dx}\left(\int \frac{1}{\cos x} e^{\int \mathrm{tg}\,x dx} dx + C\right) = |\cos x|\left(\int \frac{\mathrm{sign}(\cos x)}{\cos^2 x} dx + C\right) =$$
$$= |\cos x|(\mathrm{sign}(\cos x)\,\mathrm{tg}\,x + C) = \sin x + C|\cos x| = \sin x + C\cos x.$$

Сделаем проверку:

$$y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos x - C\sin x + \frac{\sin^2}{\cos x} + C\cos x\,\mathrm{tg}\,x = \cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

---

**Пример П.6**

Решим уравнение $y' - y = \dfrac{e^x}{x}$.

*Решение*. Умножим левую и правую части уравнения на $e^{-\int dx} = e^{-x}$. Получим

$$y'e^{-x} - ye^{-x} = \frac{1}{x},$$

или $(ye^{-x})' = \dfrac{1}{x}$, откуда находим

$$ye^{-x} = \ln|x| + C.$$

Окончательно получаем

$$ye^{-x} = (\ln|x| + C)e^x.$$

---

**Пример П.7**

Решим уравнение $y' = y^4\cos x + y\,\mathrm{tg}x$.

*Решение*. Это уравнение Бернулли. Перенося член $y\,\mathrm{tg}x$ в левую часть и умножая обе части уравнения на $y^{-4}$, приходим к уравнению

$$y^{-4}y' - y^{-3}\mathrm{tg}x = \cos x.$$

Введем обозначение $z = y^{-3}$. Тогда $z' = -3y^{-4}y'$. Делая подстановку, приходим к уравнению

$$-\frac{z'}{3} - z\,\mathrm{tg}\,x = \cos x,$$

или $z' + 3z\mathrm{tg}\,x = -3\cos x$.

Пользуясь методом вариации, ищем решение в виде

$$y = C(x)e^{-3\int \operatorname{tg} x\,dx} = C(x)e^{3\ln|\cos x|} = C(x)\,|\cos x\,|^3. \qquad (\text{П}.11)$$

Записывая формулу (П.5) для нашего уравнения, получаем

$$C'(x)|\cos x|^3 = -3\cos x,$$

откуда $C'(x) = \dfrac{-3\operatorname{sign}(\cos x)}{\cos^2(x)}$.

Интегрируя, находим

$$C(x) = -3\operatorname{sign}(\cos x)\operatorname{tg}x + C.$$

Подставляя найденное для $C(x)$ выражение в формулу (П.11), получаем

$$z = (-3\operatorname{sign}(\cos x)\operatorname{tg}x + C)|\cos x|^3 = -3\sin x\cos^2 x + C\cos^3 x$$

и окончательно получаем

$$y = z^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{C\cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x}}.$$

И еще в процессе решения уравнения Бернулли мы потеряли решение $y \equiv 0$.

---

**Пример П.8**

Решим уравнение $y' = \dfrac{4y + 2x^2\sqrt{y}}{x}$.

*Решение*. Это также уравнение Бернулли. Преобразуем его к виду

$$y' - \frac{4y}{x} = 2x\sqrt{y}$$

и умножим обе части на $y^{-1/2}$. Получим уравнение

$$y^{-1/2}y' - \frac{4y^{-1/2}}{x} = 2x.$$

Обозначим $z = -4y^{1/2}$. Тогда $z' = -2y^{-1/2}y'$. Таким образом, наше уравнение приводится к виду

$$-\frac{z'}{2} + \frac{z}{x} = 2x, \text{ или } z' - \frac{2}{x}z = -4x.$$

Умножая обе части уравнения на $e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln|x|} = \dfrac{1}{x^2}$, приходим к уравнению

$$\frac{z'}{x^2} - \frac{2}{x^3}z = -\frac{4}{x}, \text{ или } \left(z\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{4}{x}.$$



Интегрируя данное выражение, приходим к равенству

$$\frac{z}{x^2} = -\int \frac{4}{x}dx = -4\ln|x| + C,$$

откуда $z = -4x^2\ln|x| + Cx^2$.

Окончательно получаем

$$y = \frac{1}{16}z^2 = \left(\frac{1}{4}z\right)^2 = (Cx^2 - x^2\ln|x|)^2 = (C - \ln|x|)^2 x^4.$$

И еще мы потеряли решение $y \equiv 0$.

---

### П.1.6. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (\text{П}.12)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $F(x, y)$. Это имеет место, если

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Чтобы решить уравнение (П.12), надо найти такую функцию $F(x, y)$, полный дифференциал которой $dF(x, y) = F'_x dx + F'_y dy$ равен левой части уравнения (П.12). Тогда общее решение уравнения (П.12) можно записать в виде $F(x, y) = C$, где $C$ — произвольная постоянная.

Интегрирующим множителем для уравнения вида (П.12) называется такая функция $m(x, y)$, не равная тождественно нулю, после умножения на которую уравнение (П.12) превращается в уравнение в полных дифференциалах. Если функции $M$ и $N$ в уравнении (П.12) имеют непрерывные частные производные и не обращаются в нуль одновременно, то интегрирующий множитель существует.

Для решения некоторых уравнений можно применять метод выделения полных дифференциалов, используя известные формулы:

$$d(xy) = y\,dx + x\,dy,\ d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2},$$

$$d(y^n) = ny^{n-1}dy,\ d(\ln x) = \frac{dx}{x},\ de^x = e^x dx \text{ и т.д.}$$

**Пример П.9**

Решим уравнение $y' = \dfrac{y^5 + 3x^2\cos y}{x^3\sin y - 3y^2 - 5xy^4}$.

*Решение*. Имеем

$$(x^3\sin y - 3y^2 - 5xy^4)dy = (y^5 + 3x^2\cos y)dx.$$

Перегруппируем наши слагаемые:

$$(y^5dx + 5xy^4dy) + (3x^2\cos y\, dx - x^3\sin y\, dy) + 3y^2dy = 0. \qquad (П.13)$$

Воспользуемся известными формулами:

$$d(xy^5) = y^5dx + 5xy^4dy;\ d(x^3\cos y) = 3x^2\cos y\, dx - x^3\sin y\, dy;\ d(y^3) = 3y^2dy.$$

Тогда формула (П.13) преобразуется к виду

$$d(xy^5) + d(x^3\cos y) + d(y^3) = 0.$$

Интегрируя непосредственно, получаем решение

$$xy^5 + x^3\cos y + y^3 = C,$$

где $C$ — постоянная интегрирования.

**Пример П.10**

Решим уравнение $2xy\, y' - y'\ln y + y^2 + \ln x = 0$.

*Решение.* Преобразуем наше уравнение к виду

$$(2xy - \ln y)dy + (y^2 + \ln x)dx = 0$$

и перегруппируем члены следующим образом:

$$(2xy\, dy + y^2dx) + (\ln x\, dx - \ln y\, dy) = 0. \qquad (П.14)$$

Заметим, что $d(y^2x) = 2xy\, dy + y^2dx$; $d(x\ln x - x - y\ln y + y) = \ln x\, dx - \ln y\, dy$.

Подставляя данные выражения в уравнение (П.14), получаем

$$d(y^2x) + d(x\ln x - x - y\ln y + y) = 0.$$

Непосредственно интегрируя, находим решение

$$y^2x + x\ln x - x - y\ln y + y = C.$$

**Пример П.11**

Решим уравнение $2xy\, dx + (x^2 - y^2)dy = 0$.

*Решение.* Сгруппируем члены:

$$(2xy\, dx + x^2dy) - y^2dy = 0.$$

Заметим, что $d(x^2y) = 2xy\, dx + x^2dy$; $d\left(\frac{y^3}{3}\right) = y^2dy$.

Таким образом, имеем

$$d(x^2y) - d\left(\frac{y^3}{3}\right) = 0.$$



Интегрируя, находим решение

$$x^2y - \frac{y^3}{3} = C.$$

**Пример П.12**

Решим уравнение $\frac{3x^2+y^2}{y^2}dx - \frac{2x^3+5y}{y^3}dy = 0$.

*Решение.* Заметим, что

$$d\left(\frac{x^3}{y^2}\right) = \frac{3x^2}{y^2}dx - \frac{2x^3}{y^3}dy;\ d\left(x + \frac{5}{y}\right) = dx - \frac{5}{y^2}dy.$$

Поэтому имеем

$$d\left(\frac{x^3}{y^2}\right) + d\left(x + \frac{5}{y}\right) = 0.$$

Интегрируя, получаем решение

$$\frac{x^3}{y^2} + x + \frac{5}{y} = C.$$

### П.1.7. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения с разделяющимися переменными могут быть записаны в виде

$$y' = f(x)g(y),$$

а также в виде

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0.$$

Для решения такого уравнения нужно обе его части умножить или разделить на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входила только переменная $x$, а в другую — только переменная $y$, и затем проинтегрировать обе части.

При делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестные $x$ и $y$, могут быть потеряны решения, обращающие это выражение в нуль.

**Пример П.13**

Решим уравнение с разделяющимися переменными $xy\, dx + (x + 1)dy = 0$.

*Решение.* Разделим данное уравнение на $(x + 1)y$. При этом мы теряем решения $x \equiv -1$ и $y \equiv 0$. Получаем

$$\frac{x}{x+1}dx = -\frac{dy}{y}.$$

Интегрируем левую часть уравнения:

$$\int \frac{xdx}{x+1} = \int \frac{x+1-1}{x+1}dx = \int dx - \int \frac{dx}{x+1} = x - \ln|x+1| + C.$$

Интегрируем правую часть уравнения:

$$-\int \frac{dy}{y} = -\ln|y| + \ln|C|.$$

Таким образом, $x - \ln|x+1| = -\ln|y| + \ln|C|$.

Потенцируя, находим

$$\frac{1}{|y|} = \frac{e^x}{|x+1|}|C|, \text{ или } y = C\frac{x+1}{e^x}.$$

Полученное семейство решений содержит полученное ранее частное решение $y \equiv 0$ при $C = 0$. Итак, все решения заданного уравнения: $x \equiv -1$ и $y = C\dfrac{x+1}{e^x}$.

**Пример П.14**

Решим уравнение $\sqrt{y^2+1}\,dx = xy\,dy$.

*Решение*. Разделим обе части уравнения на $x\sqrt{y^2+1}$. При этом мы теряем решение $x \equiv 0$. Получим

$$\frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем левую часть уравнения:

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dy^2}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{y^2+1} + C.$$

Проинтегрируем правую часть:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln|C|.$$

Таким образом, имеем

$$\ln|x| = \sqrt{y^2+1} + C.$$

Итак, все решения заданного уравнения: $x \equiv 0$ и $\ln|x| = \sqrt{y^2+1} + C$.

### П.1.8. Однородные уравнения

Функция $M(x, y)$ называется однородной функцией степени $n$, если для любого числа $k > 0$ верно, что $M(kx, ky) \equiv k^n M(x, y)$. Уравнение называется однородным, если оно может быть записано в виде $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, а также в виде $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — однородные функции одной и той же степени. Чтобы решить однородное уравнение, можно сделать замену $y = zx$, после чего получается уравнение с разделяющимися переменными.

**Пример П.15**

Решим однородное уравнение $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$.

*Решение*. Сделаем замену $y = zx$. Тогда $y' = z'x + z$. Подставим выражения для $y$ и $y'$ в заданное уравнение. Тогда получится

$$2x^3(z'x + z) = zx(2x^2 - z^2x^2).$$

Сокращая левую и правую части на $x^3$, получаем

$$2z'x + 2z = 2z - z^3, \text{ или } 2z'x = -z^3.$$

Получилось уравнение с разделяющимися переменными. Разделим обе части уравнения на $xz^3$. При этом мы теряем решение $y \equiv 0$. Получилось

$$\frac{2dz}{z^3} = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя левую и правую части нашего уравнения, находим

$$\frac{1}{z^2} = \ln|x| + C.$$

Подставляя вместо $z$ выражение $\dfrac{y}{x}$, приходим к равенству

$$\frac{x^2}{y^2} = \ln(Cx).$$

Таким образом, все решения заданного уравнения — это $y \equiv 0$ и $x = \pm y\sqrt{\ln(Cx)}$.

**Пример П.16**

Решим задачу Коши $(y - x)y' = y$, $y(0) = 0$.

*Замечание*. Условия локальной теоремы существования и единственности решения задачи Коши в данном примере не выполнены. Производная по $y$ от функции $\dfrac{y}{y-x}$ не является непрерывной ни в какой окрестности точки $(0; 0)$.

*Решение*. Сделаем замену $y = xz$. Тогда $y' = z + xz'$. Исходное уравнение принимает вид

$$(zx - x)(z + xz') = zx.$$

Сокращая на $x$, получаем уравнение

$$(z - 1)(z + xz') = z, \text{ или } z^2 - z + xzz' - xz' = z, \text{ или } z^2 - 2z = z'x(1 - z).$$

И мы пришли к уравнению с разделяющимися переменными. Разделим обе части на $x(z^2 - 2z)$. При этом мы могли потерять два решения: $z \equiv 0$ и $z \equiv 2$, т.е. $y \equiv 0$ и $y = 2x$. Нетрудно проверить, что обе функции $y \equiv 0$ и $y = 2x$ удовлетворяют исходному уравнению и начальным условиям.

После деления получается

$$\frac{(1-z)dz}{z^2-2z}=\frac{dx}{x}.$$

Представим левую часть в виде суммы простых дробей:

$$\frac{1-z}{z(z-2)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-2},$$

Решая, получаем $A=-\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}$.

Тогда, интегрируя левую часть уравнения, получаем

$$\int\frac{1-z}{z^2-2z}dz=-\frac{1}{2}\left(\int\frac{dz}{z}+\int\frac{dz}{z-2}\right)=-\frac{1}{2}\ln|z(z-2)|+\ln|C|,$$

интегрируя правую часть —

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+\ln|C|.$$

Таким образом, имеем

$$-\frac{1}{2}\ln|z(z-2)|=\ln|x|+\ln|C|.$$

Потенцируя, находим

$$\frac{1}{\sqrt{|z(z-2)|}}=|x|\cdot|C|, C\neq 0.$$

Возводя в квадрат обе части, получаем

$$\frac{1}{z(z-2)}=Cx^2, C\neq 0.$$

Заменяя $z=\frac{y}{x}$, приходим к уравнению

$$\frac{x^2}{y(y-2x)}=Cx^2, C\neq 0, \text{ или } \frac{1}{y(y-2x)}=C, C\neq 0.$$

Полученное уравнение не удовлетворяет начальным условиям.

Итак, наша задача Коши имеет два решения (так как условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши не выполнены): $y \equiv 0$ и $y = 2x$.



### П.1.9. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Если в уравнение не входит искомая функция $y$, т.е. оно имеет вид

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0,$$

то порядок уравнения можно понизить, взяв в качестве новой неизвестной функции низшую из производных, входящих в уравнение, т.е. сделав замену $y^{(k)} = z$.

2. Если в уравнение не входит независимая переменная $x$, т.е. уравнение имеет вид

$$F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0,$$

то порядок уравнения можно понизить, приняв за новую независимую переменную $y$, а за неизвестную функцию $y' = p(y)$.

3. Если уравнение однородно относительно $y$ и ее производных, т.е. не меняется при одновременной замене $y, y', y''$, ... на $ky, ky', ky''$, ..., то порядок уравнения понижается подстановкой $y' = yz$, где $z$ — новая неизвестная функция.

4. Уравнение называется однородным относительно переменных $x$ и $y$ в обобщенном смысле, если оно не меняется от замены $x$ на $kx$, $y$ на $k^m y$, $y'$ — на $k^{m-1}y'$, $y''$ — на $k^{m-2}y''$ и т.д. Чтобы узнать, будет ли уравнение однородным, и найти $m$, нужно приравнять друг другу показатели степеней при $k$ для каждого члена уравнения после такой замены. Если же полученные уравнения окажутся несовместными, значит, дифференциальное уравнение не является однородным относительно переменных $x$ и $y$ в обобщенном смысле. Если число $m$ найдено, нужно сделать замену переменных $x = e^t$, $y = ze^{mt}$, где $t$ — новая независимая переменная, а $z = z(t)$ — новая неизвестная функция. Мы получим уравнение, в которое не входит независимая переменная $t$. После этого порядок полученного уравнения понижается одним из рассмотренных ранее способов.

5. Порядок уравнения легко понижается, если удается преобразовать уравнение к такому виду, чтобы обе его части являлись полными производными по $x$ от каких-нибудь функций.

**Пример П.17**

Решим уравнение $yy'' = y'^2$, используя полные производные обеих частей.

*Решение.* Деля обе части на $yy'$ (при этом мы теряем решения $y \equiv C$), мы получаем уравнение

$$\frac{y''}{y'}=\frac{y'}{y}, \text{ или } (\ln y')' = (\ln y)'.$$

Решая его, получаем

$$\ln|y'|=\ln|y|+\ln|C_1|.$$

Потенцируя, находим $|y'| = |yC_1|$, или $y' = yC_1$.

Порядок уравнения понизился. Мы получили уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, получаем

$$\frac{dy}{y} = C_1 dx,$$

откуда находим

$$\ln|y| = C_1 x + C_2.$$

Потенцируя, получаем $|y| = e^{C_1 x + C_2}$, или $y = C_1 e^{C_2 x}$.

Итак, все решения заданного уравнения: $y \equiv C$ и $y = C_1 e^{C_2 x}$.

---

**Пример П.18**

Решим уравнение $yy''' + 3y'y'' = 0$, используя полные производные обеих частей.

*Решение*. Разделим уравнение на $yy''$. При этом мы теряем решения $y \equiv C$ и $y = C_1 x + C_2$. Получилось уравнение

$$\frac{y'''}{y''} + 3\frac{y'}{y} = 0, \text{ или } (\ln|y''|)' + 3(\ln|y|)' = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln|y''| = -3(\ln|y|) + \ln|C_1|.$$

Потенцируя, находим

$$y'' = \frac{C_1}{y^3}.$$

В полученное уравнение не входит независимая переменная $x$, поэтому мы можем понизить его порядок, приняв за новую независимую переменную $y$, а за неизвестную функцию $z = y'(y)$. Тогда $y'' = z'y' = z'z$. Делая подстановку в наше уравнение, приводим уравнение к виду

$$z'z = \frac{C_1}{y^3}.$$

Умножим обе части уравнения на $dy$ и получим

$$zdz = \frac{C_1 dy}{y^3}.$$

Интегрируя обе части уравнения, приводим его к виду

$$\frac{z^2}{2} = \left(-\frac{1}{2}\right) C_1 \frac{1}{y^2} + C_2,$$

т.е. $y'^2 = \dfrac{C_2 y^2 - C_1}{y^2}$



Извлечем из обеих частей уравнения квадратный корень:

$$y' = \pm\sqrt{\frac{C_2 y^2 - C_1}{y^2}}.$$

Умножая и деля на соответствующие множители, приведем уравнение к виду

$$\frac{ydy}{\sqrt{C_2 y^2 - C_1}} = dx.$$

Проинтегрируем левую часть уравнения:

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{C_2 y^2 - C_1}} = \frac{1}{2C_2} \int \frac{d(C_2 y^2)}{\sqrt{C_2 y^2 - C_1}} = \frac{1}{C_2}\sqrt{C_2 y^2 - C_1} + C_3.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{1}{C_2}\sqrt{C_2 y^2 - C_1} = x + C_3.$$

Возводя обе части уравнения в квадрат, имеем

$$C_2 y^2 - C_1 = C_2^2 (x + C_3)^2.$$

Данное решение включает в себя найденное ранее решение $y = C_1 x + C_2$, поэтому все решения заданного уравнения: $C_2 y^2 - C_1 = C_2^2 (x + C_3)^2$ и $y \equiv C$.

---

**Пример П.19**

Решим уравнение $xyy'' - xy'^2 = yy'$, используя однородность относительно $y$ и ее производных.

*Решение*. Это уравнение однородно относительно $y$ и ее производных, поэтому сделаем замену переменных $y' = zy$, тогда $y'' = z'y + zy' = z'y + z^2 y$. Сделаем подстановку в исходное уравнение, тогда получим

$$xy^2 z' + xy^2 z^2 - xy^2 z^2 = y^2 z, \text{ или } xz' = z.$$

Решаем уравнение с разделяющимися переменными. Делим обе части уравнения на $xz$ и умножаем на $dx$. При этом мы теряем решение $z \equiv 0$, т.е. $y \equiv C$. Имеем

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, находим

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln|C|, \text{ или } z = Cx.$$

Делаем замену $z = \dfrac{y'}{y}$ и получаем $y' = C_1 xy$.

Делим обе части на $y$ и умножаем на $dx$. Решение $y \equiv 0$, которое мы теряем, уже содержится в семействе решений $y \equiv C$.

Получаем

$$\frac{dy}{y} = C_1 x dx.$$

Интегрируя, находим $\ln|y| = C_1x^2 + \ln|C_2|$, откуда получаем

$$y = C_2 e^{C_1 x}.$$

Таким образом, все решения заданного уравнения: $y \equiv C$ и $y = C_2 e^{C_1 x}$.

---

**Пример П.20**

Решим уравнение $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$, используя однородность относительно $y$ и ее производных.

*Решение*. Это уравнение однородно относительно $y$ и его производных, поэтому сделаем замену переменных $y' = zy$, тогда $y'' = z'y + zy' = z'y + z^2y$. Сделаем подстановку в исходное уравнение и получим

$$y^2z' + y^2z^2 = y^2z^2 + 15y^2\sqrt{x}, \text{ или } z' = 15\sqrt{x},$$

откуда находим

$$z = \frac{15\cdot 2}{3}x^{3/2} + C_1 = 10x^{3/2} + C_1.$$

Тогда

$$y' = y(10x^{3/2} + C_1).$$

Разделим обе части полученного уравнения на $y$ и умножим на $dx$. При этом мы теряем решение $y \equiv 0$. Имеем

$$\frac{dy}{y} = (10x^{3/2} + C_1)dx.$$

Интегрируя обе части данного уравнения, находим

$$\ln|y| = \frac{10\cdot 2}{5}x^{5/2} + C_1x + \ln|C_2| = 4x^{5/2} + C_1x + \ln|C_2|.$$

Потенцируя, получим

$$y = C_2 e^{4x^{5/2} + C_1 x}.$$

Итак, все решения заданного уравнения: $y \equiv 0$ и $y = C_2 e^{4x^{5/2} + C_1 x}$.

---

**Пример П.21**

Решим уравнение $y'' = \left(2xy - \frac{5}{x}\right)y' + 4y^2 - \frac{4y}{x^2}$, используя понижение порядка уравнения, однородного в обобщенном смысле.



*Решение*. Чтобы узнать, является ли рассматриваемое уравнение однородным в обобщенном смысле, сделаем подстановку

$$x \to kx,\ y \to k^m y,\ y' \to k^{m-1}y,\ y'' \to k^{m-2}y.$$

Получим уравнение

$$k^{m-2}y = \left(2kxk^m y - \frac{5}{kx}\right)k^{m-1}y + 4k^{2m}y^2 - \frac{4k^m y}{k^2x^2}.$$

Приравняем друг другу показатели степеней при $k$ для каждого члена уравнения после такой замены: $m - 2 = 2m = m - 2 = 2m = m - 2$.

Таким образом, рассматриваемое уравнение является однородным относительно переменных $x$ и $y$ в обобщенном смысле и $m = -2$.

Сделаем замену $|x| = e^t$, тогда $t = \ln x$, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}$, $y = ze^{mt} = ze^{-2t}$,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = (z'e^{-2t} - 2ze^{-2t})e^{-t} = z'e^{-3t} - 2ze^{-3t},$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx\,dt}\cdot\frac{dt}{dx} = (z''e^{-3t} - 3z'e^{-3t} - 2z'e^{-3t} + 6ze^{-3t})e^{-t} =$$
$$= z''e^{-4t} - 3z'e^{-4t} - 2z'e^{-4t} + 6ze^{-4t}.$$

После подстановки в исходное уравнение получаем

$$z''e^{-4t} - 3z'e^{-4t} - 2z'e^{-4t} + 6ze^{-4t} =$$
$$= (2e^t ze^{-2t} - 5e^{-t})(z'e^{-3t} - 2ze^{-3t}) + 4z^2e^{-4t} - 4e^{-2t}ze^{-2t}.$$

Сокращаем на $e^{-4t}$ и раскрываем скобки:

$$z'' - 5z' + 6z = 2zz' - 5z' - 4z^2 + 10z + 4z^2 - 4z.$$

Приводим подобные, получаем $z'' - 2zz'$.

В данное уравнение не входит независимая переменная, поэтому мы можем понизить его порядок стандартным способом, т.е. приняв $z$ за новую независимую переменную, а в качестве зависимой функции взяв первую производную от $z$ по $t$: $w = z'(z)$.

Тогда $z'' = w' \cdot z' = w'w$ и, подставляя в наше уравнение, приводим его к виду

$$w'w - 2zw = 0.$$

Одно из его решений $w \equiv 0$, т.е. $z' \equiv 0$, что равносильно выражению

$$y = Ce^{-2t} = Ce^{-2\ln|x|} = \frac{C}{x^2}.$$

Если же $w$ не равно тождественно нулю, то, сокращая на $w$, получаем $w' = 2z$.

Интегрирование данного уравнения дает $w = 2z + C$.

Таким образом, мы получили уравнение с разделяющимися переменными

$$z' = z^2 + C.$$

Разделим обе части на $z^2 + C$ и умножим на $dt$. При этом мы можем потерять решение $z' \equiv 0$, которое, как мы видели, равносильно $y = \frac{C}{x^2}$. Имеем

$$\frac{dz}{z^2+C} = dt.$$

Теперь мы должны рассмотреть три случая.

1. Случай $C > 0$, т.е. $C = C_1^2$. Тогда, интегрируя левую часть уравнения, получаем

$$\int \frac{dz}{z^2+C_1^2} = \frac{1}{C_1}\int \frac{d\left(\frac{z}{C_1}\right)}{\left(\frac{z}{C_1}\right)^2+1} = \frac{1}{C_1}\operatorname{arctg}\frac{z}{C_1} + \ln|C_2|$$

и приходим к равенству

$$\frac{1}{C_1}\operatorname{arctg}\frac{z}{C_1} = t + \ln|C_2|.$$

Делая замену $t = \ln|x|$, $z = ye^{2t} = yx^2$, получаем равенство

$$\frac{1}{C_1}\operatorname{arctg}\frac{yx^2}{C_1} = \ln|x| + \ln|C_2| = \ln(C_2x),$$

или

$$x^2y = C_1\operatorname{tg}(C_1\ln(C_2x)).$$

2. Случай $C < 0$, т.е. $C = -C_1^2$. Тогда разложим выражение, стоящее в левой части уравнения, на простые дроби:

$$\frac{1}{z^2-C_1^2} = \frac{A}{z-C_1} + \frac{B}{z+C_1}, \quad A = \frac{1}{2C_1}, \quad B = -\frac{1}{2C_1}.$$

Интегрируя левую часть уравнения, находим

$$\int\frac{dz}{z^2-C_1^2} = \frac{1}{2C_1}\int\frac{dz}{z-C_1} - \frac{1}{2C_1}\int\frac{dz}{z+C_1} = \frac{1}{2C_1}\ln\left|\frac{z-C_1}{z+C_1}\right| + \ln|C_2|.$$

Тогда имеем

$$\frac{1}{2C_1}\ln\left|\frac{z-C_1}{z+C_1}\right| + \ln|C_2| = t.$$

Делая подстановку $z = x^2y$ и $t = \ln|x|$, получаем

$$\frac{1}{2C_1}\ln\left|\frac{x^2y-C_1}{x^2y+C_1}\right| + \ln|C_2| = \ln|x|.$$

Преобразуем полученное выражение:

$$\ln\left|\frac{x^2y-C_1}{x^2y+C_1}\right| + \ln|C_2| = 2C_1\ln|x|.$$



Потенцируя обе части равенства, получаем

$$C_2\frac{x^2y-C_1}{x^2y+C_1} = |x|^{2C_1},$$

или

$$C_2(x^2y+C_1)|x|^{2C_1} = x^2y - C_1.$$

3. Случай $C = 0$. Тогда, интегрируя левую часть уравнения, получаем

$$\int\frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} + C_2,$$

и наше уравнение преобразуется к виду

$$-\frac{1}{z} = t + \ln|C_2|.$$

Подставляя $z = x^2y$ и $t = \ln|x|$, приходим к уравнению

$$-\frac{1}{x^2y} = \ln|x| + \ln|C_2| = \ln(C_2x),$$

и окончательный вид решения $x^2y\ln(Cx) = -1$.

Полученное ранее решение $y = \frac{C}{x^2}$, очевидно, содержится в решении для второго случая.

Итак, все решения заданного уравнения: $x^2y = C_1\operatorname{tg}(C_1\ln(C_2x))$, $C_2(x^2y+C_1)|x|^{2C_1} = x^2y - C_1$, $x^2y\ln(Cx) = -1$.

**Пример П.22**

Решим уравнение $x^2(yy'' - y'^2) + xyy' = (2xy' - 3y)\sqrt{x^3}$, используя понижение порядка уравнения, однородного в обобщенном смысле.

*Решение*. Чтобы узнать, является ли рассматриваемое уравнение однородным в обобщенном смысле, сделаем подстановку

$$x \to kx,\ y \to k^m y,\ y' \to k^{m-1}y,\ y'' \to k^{m-2}y.$$

Получим уравнение

$$k^2x^2(k^m yk^{m-2}y - k^{2m-2}y^2) + kxk^m yk^{m-1}y = (2kxk^{m-1}y - 3k^m y)\sqrt{k^3x^3}.$$

Приравняем друг другу показатели степеней при $k$ для каждого члена уравнения после такой замены:

$$2m = 2m = 2m = m + \frac{3}{2} = m + \frac{3}{2}.$$

Таким образом, рассматриваемое уравнение является однородным относительно переменных $x$ и $y$ в обобщенном смысле и $m = \frac{3}{2}$.

Сделаем замену $|x| = e^t$, тогда $t = \ln x$, $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x} = e^{-t}$, $y = ze^{mt} = ze^{-2t}$,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \left(z'e^{\frac{3}{2}t} + \frac{3}{2}ze^{\frac{3}{2}t}\right)e^{-t},$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \left(z''e^{\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}z'e^{\frac{1}{2}t} + \frac{3}{2}z'e^{\frac{1}{2}t} + \frac{3}{4}ze^{\frac{1}{2}t}\right)e^{-t}.$$

После подстановки в исходное уравнение получаем

$$e^{2t}\left[ze^{\frac{3}{2}t}\left(z''e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}z'e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{3}{2}z'e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{3}{4}ze^{-\frac{1}{2}t}\right) - \left(z'e^{\frac{1}{2}t} + \frac{3}{2}ze^{\frac{1}{2}t}\right)^2\right] +$$

$$+e^t ze^{\frac{3}{2}t}\left(z'e^{\frac{1}{2}t} + \frac{3}{2}ze^{\frac{1}{2}t}\right) = \left[2e^t\left(z'e^{\frac{1}{2}t} + \frac{3}{2}ze^{\frac{1}{2}t}\right) - 3ze^{\frac{3}{2}t}\right]\sqrt{e^{3t}}.$$

Сокращаем на $e^{3t}$ и раскрываем скобки:

$$zz'' + \frac{1}{2}zz' + \frac{3}{2}zz' + \frac{3}{4}z^2 - z'^2 - 3zz' - \frac{9}{4}z^2 + zz' + \frac{3}{2}z^2 = 2z' + 3z - 3z.$$

Приводя подобные, получаем

$$zz'' - z'^2 - 2z' = 0.$$

В данное уравнение не входит независимая переменная, поэтому мы можем понизить его порядок стандартным способом, т.е. приняв $z$ за новую независимую переменную, а в качестве зависимой функции взяв первую производную от $z$ по $t$: $w = z'(z)$.

Тогда $z'' = w'z' = w'w$. Подставляя эти выражения в наше уравнение, приводим его к виду

$$zw'w - w^2 - 2w = 0.$$

Одно из решений $w \equiv 0$, т.е. $z' \equiv 0$, значит, $z \equiv C$, тогда $y = Ce^{\frac{3}{2}t} = Cx^{\frac{3}{2}}$. Если же $w$ не равно нулю тождественно, то сокращаем на $w$ и получаем

$$zw' = w + 2. \qquad (\text{П}.15)$$

Разделим обе части уравнения на $z(w + 2)$ и умножим на $dz$. При этом мы могли потерять решения $z \equiv 0$ и $w \equiv -2$. Если $z \equiv 0$, т.е. $ye^{-\frac{3}{2}t} \equiv 0$, тогда $y \equiv 0$, и это, очевидно, является решением исходного уравнения, однако оно содержится в найденном ранее решении $y = Cx^{\frac{3}{2}}$. Если же $w \equiv -2$, т.е. $z' \equiv -2$, то, интегрируя, видим, что $z = -2t + C$. Делая замены $t = \ln|x|$ и $z = ye^{-\frac{3}{2}t} = yx^{-\frac{3}{2}}$, приходим к равенству

$$yx^{-\frac{3}{2}} = -2(\ln|x| + \ln|C|), \text{ или } y = -2x^{\frac{3}{2}}\ln(Cx).$$



Непосредственно проверяется, что данная функция является решением исходного уравнения.

Разделив левую и правую части уравнения (П.15) на $z(w + 2)$ и умножив на $dz$, мы получим уравнение

$$\frac{dw}{w+2} = \frac{dz}{z},$$

интегрируя которое, приходим к равенству

$$\ln|w + 2| = \ln|z| + \ln|C_1|.$$

Потенцируя, находим $w + 2 = C_1z$, или

$$z' = C_1z - 2. \qquad (\text{П}.16)$$

Разделим обе части уравнения на $C_1z - 2$ и умножим на $dt$. При этом мы можем потерять решение $C_1z - 2 \equiv 0$, т.е. $z \equiv \dfrac{2}{C}$. Подставляя $z = yx^{-\frac{3}{2}}$, получаем

$$yx^{-\frac{3}{2}} \equiv \frac{2}{C}, \text{ или } y = \frac{2}{C}x^{\frac{3}{2}}.$$

Но такое решение содержится в уже найденном ранее решении $y = Cx^{\frac{3}{2}}$. Разделив левую и правую части уравнения (П.16) на $C_1z - 2$ и умножив на $dt$, получим выражение

$$\frac{dz}{C_1z - 2} = dt,$$

откуда следует, что

$$\ln|C_1z - 2| = t + \ln|C_2|.$$

Делая подстановку $z = yx^{-\frac{3}{2}}$ и $t = \ln|x|$, приходим к уравнению

$$\ln\left|C_1yx^{-\frac{3}{2}} - 2\right| = \ln|x| + \ln|C_2|,$$

из которого получаем

$$C_1yx^{-\frac{3}{2}} - 2 = C_2x,$$

или

$$C_1y = (C_2x + 2)x^{\frac{3}{2}}.$$

Итак, все решения исходного уравнения:

$$C_1y = (C_2x + 2)x^{\frac{3}{2}},\ y = -2x^{\frac{3}{2}}\ln(Cx),\ y = Cx^{\frac{3}{2}}.$$

**Пример П.23**

Решим уравнение $x^2y'' = y'^2$, используя, что в него не входит функция $y$.

*Решение*. Сделаем замену $y' = z$, тогда $y'' = z'$ и получим уравнение с разделяющимися переменными

$$x^2z' = z^2.$$

Разделим обе части уравнения на $x^2z^2$ и умножим на $dx$. При этом мы теряем решение $z \equiv 0$, т.е. $y \equiv C$. Получаем

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2}.$$

Интегрируя, находим

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} + C_1 = \frac{C_1x-1}{x}, \text{ или } z = \frac{x}{1-C_1x}.$$

Итак, $y' = \dfrac{x}{1-C_1x}$, тогда

$$y = \int\frac{xdx}{1-C_1x} = -\frac{1}{C_1}\int\frac{-C_1xdx}{1-C_1x} = -\frac{1}{C_1}\int\frac{1-C_1xdx}{1-C_1x} + \frac{1}{C_1}\int\frac{dx}{1-C_1x} =$$
$$= -\frac{1}{C_1}\int\frac{1-C_1xdx}{1-C_1x} - \frac{1}{C_1^2}\int\frac{dC_1x}{1-C_1x} =$$
$$= -\frac{x}{C_1} - \frac{1}{C_1^2}\ln|1-C_1x| + C_2 = -\frac{x}{C_1} - \frac{1}{C_1^2}\ln|1+C_1x| + C_2.$$

Итак, все решения заданного уравнения: $y = -\dfrac{x}{C_1} - \dfrac{1}{C_1^2}\ln|1+C_1x| + C_2$ и $y \equiv C$.

**Пример П.24**

Решим уравнение $2xy'y'' = y'^2 - 1$, используя, что в него не входит функция $y$.

*Решение*. Сделаем замену $y' = z$, тогда $y'' = z'$ и получим уравнение с разделяющимися переменными

$$2xzz' = z^2 - 1.$$

Разделим обе части уравнения на $x(z^2 - 1)$ и умножим на $dx$. При этом мы можем потерять решение $z^2 - 1 \equiv 0$, т.е. $z \equiv \pm1$, или $y' \equiv \pm1$, тогда $y = \pm x + C$. Очевидно, что эта функция действительно является решением нашего уравнения.

После деления на $x(z^2 - 1)$ и умножения на $dx$ получаем

$$\frac{2zdz}{z^2-1} = \frac{dx}{x}.$$



Интегрируя, находим

$$\ln|z^2-1| = \ln|x| + \ln|C_1|.$$

Потенцируя, приходим к уравнению $z^2 - 1 = C_1x$.

Таким образом, имеем $y'^2 = C_1x + 1$. Тогда

$$y' = \pm\sqrt{C_1x+1}.$$

Интегрируя, находим

$$y = \pm\int\sqrt{C_1x+1}\,dx = \pm\frac{1}{C_1}\cdot\frac{2}{3}(C_1x+1)^{3/2} + C_2 = \pm\frac{2}{3C_1}(C_1x+1)^{3/2} + C_2,$$

или, что то же самое,

$$9C_1^2(y-C_2)^2 = 4(C_1x+1)^3.$$

Итак, все решения заданного уравнения: $9C_1^2(y-C_2)^2 = 4(C_1x+1)^3$ и $y = \pm x + C$.

**Пример П.25**

Решим уравнение $y^3y'' = 1$, используя, что в него не входит переменная $x$.

*Решение*. Понизим порядок уравнения, приняв за новую независимую переменную $y$, а за неизвестную функцию $y' = z(y)$. Тогда $y'' = z'y' = z'z$ и наше уравнение приводится к виду

$$y^3z'z = 1.$$

Разделим обе части уравнения на $y^3$ и умножим на $dx$. Ясно, что $y \equiv 0$ не является решением нашего уравнения. Мы приходим к уравнению

$$zdz = \frac{dy}{y^3}.$$

Интегрируя, находим

$$\frac{z^2}{2} = -\frac{1}{2y^2} + C_1.$$

Подставляя $z = y'$, получаем уравнение

$$y'^2 = -\frac{1}{y^2} + C,$$

или, что то же самое, $y^2y'^2 - C_1y^2 = -1$.

Сделаем замену $y^2 = w$, тогда $w' = 2yy'$. Подставляя в наше уравнение, получаем

$$\frac{w'^2}{4} = C_1w - 1,$$

или, что то же самое,

$$w' = \pm 2\sqrt{C_1 w - 1}.$$

Разделим обе части уравнения на $2\sqrt{C_1 w - 1}$ и умножим на $dx$. Ясно, что $C_1 w - 1$ не даст нам решения исходного уравнения. Получим уравнение

$$\frac{dw}{2\sqrt{C_1 w - 1}} = \pm dx.$$

Умножим обе части нашего уравнения на $C_1$:

$$\frac{d(C_1 w)}{2\sqrt{C_1 w - 1}} = \pm d(C_1 x).$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{2}{2}\sqrt{C_1 w - 1} = \pm C_1 x + C_2, \text{ или } \pm\sqrt{C_1 w - 1} = C_1 x + C_2.$$

Возводя обе части в квадрат, получаем

$$C_1 w - 1 = (C_1 x + C_2)^2.$$

Подставляя $w = y^2$, приходим к равенству

$$C_1 y^2 - 1 = (C_1 x + C_2)^2.$$

Итак, все решения заданного уравнения: $C_1 y^2 - 1 = (C_1 x + C_2)^2$.

---

**Пример П.26**

Решим уравнение $y'^2 + 2yy'' = 0$, используя, что в него не входит переменная $x$.

*Решение*. Понизим порядок уравнения, приняв за новую независимую переменную $y$, а за неизвестную функцию $y' = z(y)$. Тогда $y'' = z'y' = z'z$ и наше уравнение приводится к виду

$$z^2 + 2yz'z = 0.$$

Одно из решений нашего уравнения $z \equiv 0$, т.е. $y \equiv C$. Если же $z$ не равно нулю тождественно, то, сокращая на $z$, приходим к уравнению

$$2yz' = -z.$$

Разделим это уравнение на $yz$ и умножим на $dy$. Решение $y \equiv 0$ уже содержится в найденном решении $y \equiv C$. В результате деления получаем

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dy}{2y}.$$

Интегрируя, находим

$$\ln|z| = -\frac{1}{2}\ln|y| + \ln|C_1|.$$



Потенцируя, получаем

$$|z| = \frac{|C_1|}{\sqrt{|y|}},$$

или, что то же самое,

$$z = \frac{C_1}{\sqrt{|y|}}.$$

Сделав замену $z = y'$, приходим к уравнению

$$y' = \frac{C_1}{\sqrt{|y|}}.$$

Рассмотрим отдельно случаи $y > 0$ и $y < 0$ (случай $y = 0$ уже рассмотрен).

1. Случай $y > 0$. Тогда $\sqrt{|y|} = \sqrt{y}$. Умножая обе части уравнения на $\sqrt{y}dx$, получаем $y^{1/2}dy = C_1 dx$.

Интегрируя, находим

$$\frac{2}{3}y^{3/2} = C_1 x + C_2,$$

или, что то же самое,

$$y^3 = C_1(x + C_2)^2,\ C_1 > 0.$$

2. Случай $y < 0$. Тогда $\sqrt{|y|} = \sqrt{-y}$. Умножая обе части уравнения на $\sqrt{-y}dx$, получаем

$$(-y)^{1/2}dy = C_1 dx, \text{ или } (-y)^{1/2}d(-y) = (-C_1)dx.$$

Интегрируя, находим

$$\frac{2}{3}(-y)^{3/2} = C_1 x + C_2,$$

или, что то же самое,

$$(-y)^3 = C_1(x + C_2)^2,\ C_1 > 0,$$

т.е. $y^3 = C_1(x + C_2)^2$, $C_1 < 0$.

Итак, все решения заданного уравнения: $y^3 = C_1(x + C_2)^2$ и $y \equiv C$.

---

### П.1.10. Существование и единственность решения

При решении задач подобного типа (см. гл. 2) мы будем пользоваться следующим вариантом локальной теоремы существования и единственности задачи Коши.

**Теорема П.1.** *Пусть задана система уравнений $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$, где $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$. Пусть в замкнутой области $D = \{(x, y): |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$ функция $f$ и все частные производные $f'_y$ непрерывны.*

*Тогда на некотором отрезке $x_0 - d \le x \le x_0 + d$ существует единственное решение данной системы, удовлетворяющее заданному начальному условию.*

Данная теорема следует из локальной теоремы существования и единственности решения задачи Коши, доказанной в параграфе 2.4, потому что из условия непрерывности частных производных, очевидно, следуют условия Липшица.

**Пример П.27**

Требуется решить задачу Коши $xdy = ydx$, $y(0) = 0$.

*Решение.* Решая уравнение с разделяющимися переменными, находим

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|, \; y = Cx,$$

т.е. задача имеет континуум решений, проходящих через точку (0; 0). Через любую другую начальную точку проходит единственное решение задачи Коши.

**Пример П.28**

Рассмотрим задачу Коши $xdy = -ydx$, $y(0) = 0$.

*Решение.* Решая уравнение с разделяющимися переменными, находим

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|, \; y = \frac{C}{x}.$$

Начальным условиям удовлетворяет только решение $y \equiv 0$, проходящее через точку (0; 0). Ни для какой начальной точки вида $(0; a)$, $a \ne 0$, задача Коши решений не имеет. Для всех остальных начальных точек задача имеет единственное решение.

**Пример П.29**

Рассмотрим задачу Коши $ydy = xdx$, $y(0) = 0$.

*Решение.* Решая уравнение с разделяющимися переменными, находим

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C,$$

$$y^2 - x^2 = C, \; y = \pm\sqrt{x^2 + C}.$$

Задача имеет два решения, проходящие через точку (0; 0). Через все остальные начальные точки проходит единственное решение.



**Пример П.30**

Рассмотрим задачу Коши $ydy = -xdx$, $y(0) = 0$.

*Решение.* Решая уравнение с разделяющимися переменными, находим

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C,$$

$$y^2 + x^2 = C, \; y = \pm\sqrt{C - x^2}.$$

Таким образом, не существует решения задачи Коши, проходящего через точку (0; 0). Через все другие точки проходит единственное решение задачи Коши.

**Пример П.31**

Определим, при каких начальных условиях существует единственное решение уравнения $y'' = \operatorname{tg} y + \sqrt[3]{x}$.

*Решение.* Преобразуем наше уравнение в линейную нормальную систему уравнений:

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = \operatorname{tg} y + \sqrt[3]{x}. \end{cases}$$

По локальной теореме существования и единственности решения задачи Коши (теорема 2.5), единственное решение задачи Коши существует при любых $x_0$, $y_0'$ и $y_0 \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ .

**Пример П.32**

Определим, при каких начальных условиях существует единственное решение уравнения $(x+1)y'' = y + \sqrt{y}$.

*Решение.* Преобразуем наше уравнение в линейную нормальную систему уравнений:

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = \dfrac{y + \sqrt{y}}{x+1}. \end{cases}$$

По локальной теореме существования и единственности решения задачи Коши (теорема 2.5), единственное решение задачи Коши существует при любом $y_0'$, $y_0 > 0$, $x_0 \ne -1$.

**Пример П.33**

Определим, при каких начальных условиях существует единственное решение уравнения $(x - y)y'y''' = \ln xy$.

*Решение*. Преобразуем наше уравнение в линейную нормальную систему уравнений:

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = w, \\ w' = \dfrac{\ln xy}{(x-y)z}. \end{cases}$$

По локальной теореме существования и единственности решения задачи Коши (теорема 2.5), единственное решение задачи Коши существует при $y_0' \neq 0$, $x_0 y_0 > 0$, $x_0 \neq y_0$ и при любом $y_0''$.

---

**Пример П.34**

Определим, при каких начальных условиях существует единственное решение уравнения $y'' - yy''' = \sqrt[5]{y' - x}$.

*Решение*. Преобразуем наше уравнение в линейную нормальную систему уравнений:

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = w, \\ w' = \dfrac{w - \sqrt[5]{z - x}}{y}. \end{cases}$$

По локальной теореме существования и единственности решения задачи Коши (теорема 2.5), единственное решение задачи Коши существует при $y_0 \neq 0$, $x_0 \neq y_0'$ и при любом $y_0''$.

---

**Пример П.35**

Решим задачу Коши $(2y - x)y' = y$, $y(0) = 0$.

*Замечание*. Условия локальной теоремы существования и единственности решения задачи Коши не выполняются. Производная по $y$ от функции $\dfrac{y}{2y - x}$ не является непрерывной ни в какой окрестности точки (0; 0).

*Решение*. Сделаем замену $y = xz$. Тогда $y' = z + xz'$. Исходное уравнение принимает вид

$$(2zx - x)(z + xz') = zx.$$

Сокращая на $x$, получаем уравнение

$$(2z - 1)(z + xz') = z,$$
$$\text{или } 2z^2 - z + 2xzz' - xz' = z,$$
$$\text{или } 2z^2 - 2z = z'x(1 - 2z).$$

И мы пришли к уравнению с разделяющимися переменными. Разделим обе части на $2xz(z - 1)$.



При этом мы могли потерять два решения: $z \equiv 0$ и $z \equiv 1$, т.е. $y \equiv 0$ и $y = x$. Нетрудно проверить, что обе функции $y \equiv 0$ и $y = x$ удовлетворяют исходному уравнению и начальным условиям.

После деления получаем

$$\frac{(1-2z)dz}{2z(z-1)} = \frac{dx}{x}.$$

Представим левую часть в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1-2z}{2z(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1}, \ A = -\frac{1}{2}, \ B = -\frac{1}{2}.$$

Тогда, интегрируя левую часть уравнения, получаем

$$\int \frac{1-z}{2z(z-1)} dz = -\frac{1}{2}\left(\int \frac{dz}{z} + \int \frac{dz}{z-1}\right) = -\frac{1}{2}\ln|z(z-1)| + \ln|C|,$$

интегрируя правую часть —

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln|C|.$$

Таким образом, имеем

$$-\frac{1}{2}\ln|z(z-1)| = \ln|x| + \ln|C|.$$

Потенцируя, находим

$$\frac{1}{\sqrt{|z(z-1)|}} = |x| \cdot |C|, \ C \neq 0.$$

Возводя в квадрат обе части равенства, получаем

$$\frac{1}{z(z-1)} = Cx^2, \ C \neq 0.$$

Делая замену $z = \dfrac{y}{x}$, приходим к уравнению

$$\frac{x^2}{y(y-x)} = Cx^2, \ C \neq 0,$$

или

$$\frac{1}{y(y-x)} = C, \ C \neq 0.$$

Полученное уравнения не удовлетворяет начальным условиям ни при каком $C$.

Итак, наша задача Коши имеет два решения (так как условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши не выполнены): $y \equiv 0$, $y = x$.

### П.1.11. Уравнение Риккати

Говорят, что дифференциальное уравнение *решается в квадратурах*, если его общее решение выражается в виде комбинации элементарных функций и интегралов.

Уравнение Риккати, т.е. уравнение вида

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x),$$

в общем случае не решается в квадратурах. Но если известно одно частное решение $y_1(x)$ то заменой $y = y_1(x) + z$ уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли (или к уравнению с разделяющимися переменными) и таким образом может быть решено в квадратурах. Иногда частное решение удается подобрать исходя из вида свободного члена уравнения (члена, не содержащего $y$).

**Пример П.36**

Решим уравнение Риккати

$$y' + y^2 = x^2 - 2x. \qquad (П.17)$$

*Решение.* Естественно, что в левой части будут члены, подобные правой части, если взять, например, $y = ax + b$. Подставляя $y = ax + b$ в уравнение (П.17) и приравнивая коэффициенты при подобных членах, найдем $a$ и $b$ (если частное решение указанного вида существует, что вовсе не всегда бывает). Получим

$$a + a^2x^2 + 2abx + b^2 = x^2 - 2x,$$

откуда находим $a^2 = 1$, $a = -b^2$, $ab = -1$. Следовательно, нам подходит пара $a = -1$, $b = 1$, и мы нашли одно частное решение

$$y_1 = 1 - x.$$

Сделаем теперь замену переменной $y = 1 - x + z$ и подставим в уравнение (П.17). Мы получим

$$-1 + z' + 1 + x^2 + z^2 - 2xz - 2x + 2z = x^2 - 2x, \text{ или } z' + 2(1 - x)z = - z^2.$$

Умножим обе части на $-z^{-2}$ и сделаем замену $w = z^{-1}$. Тогда $w' = -z^{-2}z'$ и мы приходим к уравнению

$$w' - 2(1 - x)w = 1.$$

Применяем метод вариации, т.е. ищем решение в виде

$$w = C(x)\exp(\int 2(1-x)dx) = C(x)e^{-(1-x)^2},$$

где $C(x)$ удовлетворяет условию

$$C'(x)e^{-(1-x)^2} = 1.$$

Таким образом,

$$C(x) = \int e^{(1-x)^2}dx,$$



поэтому

$$w(x) = (\int e^{(1-x)^2}dx)\cdot e^{-(1-x)^2}.$$

Тогда

$$z(x) = \frac{e^{(1-x)^2}}{\int e^{(1-x)^2}dx},$$

значит,

$$y(x) = 1 - x + \frac{e^{(1-x)^2}}{\int e^{(1-x)^2}dx}.$$

Итак, решения нашего уравнения — это

$$y = 1 - x \text{ и } y(x) = 1 - x + \frac{e^{(1-x)^2}}{\int e^{(1-x)^2}dx}.$$

**Пример П.37**

Решим уравнение Риккати

$$3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0. \qquad (П.18)$$

*Решение.* Исходя из вида свободного члена попробуем найти частное решение в виде $y_1 = \frac{a}{x}$. Подставляя $y_1 = \frac{a}{x}$ в уравнение вместо $y$, получаем

$$-\frac{3a}{x^2} + \frac{a}{x^2} + \frac{2}{x^2} = 0,$$

значит, $a = 1$ и мы нашли одно частное решение уравнения (П.18): $y_1 = \frac{1}{x}$.

Сделаем замену $y = \frac{1}{x} + z$, тогда $y' = -\frac{1}{x^2} + z'$. Подставим эти выражения в уравнение (П.18):

$$-\frac{3}{x^2} + 3z' + \frac{1}{x^2} + \frac{2z}{x} + z^2 + \frac{2}{x^2} = 0,$$

или

$$z' + \frac{2z}{3x} = -\frac{z^2}{3}.$$

Умножим обе части полученного уравнения на $-z^{-2}$:

$$-z'z^{-2} - \frac{2}{3x}z^{-1} = \frac{1}{3}.$$

Сделаем замену $w = z^{-1}$, тогда $w' = -z^{-2}z'$, и мы получаем уравнение

$$w' - \frac{2}{3x}w = \frac{1}{3}.$$

Применяем метод вариации произвольной постоянной, т.е. ищем решение в виде

$$w(x)=C(x)\exp\left(\int\frac{2dx}{3x}\right)=C(x)\exp\left(\frac{2}{3}\ln|x|\right)=C(x)x^{2/3},$$

где $C(x)$ определяется из условия

$$C'(x)\exp\left(\int\frac{2dx}{3x}\right)=C'(x)x^{2/3}=\frac{1}{3}.$$

Определяем $C(x)$:

$$C(x)=\frac{1}{3}\int x^{-2/3}dx=x^{1/3}+C.$$

Таким образом,

$$w(x)=(x^{1/3}+C)x^{2/3}=x+Cx^{2/3}.$$

Тогда

$$z=w^{-1}=(x+Cx^{2/3})^{-1}$$

и, значит,

$$y=\frac{1}{x}+(x+Cx^{2/3})^{-1}.$$

Итак, решения уравнения (П.18) $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x}+(x+Cx^{2/3})^{-1}$.

---

**Пример П.38**

Решим уравнение Риккати

$$y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x. \tag{П.19}$$

*Решение*. Исходя из вида свободного члена попробуем найти частное решение в виде экспоненты. Подставляя $y_1 = e^x$ в уравнение вместо $y$, получаем

$$e^x + 2e^{2x} - e^{2x} = e^{2x} + e^x,$$

значит, одно частное решение уравнения (П.19) имеет вид $y_1 = e^x$.

Сделаем замену переменной $y = e^x + z$, тогда $y' = e^x + z'$. Подставим эти выражения в уравнение (П.19):

$$e^x + z' + 2e^{2x} + 2e^xz - e^{2x} - 2e^xz - z^2 = e^{2x} + e^x, \text{ или } z' - z^2 = 0.$$

Мы получили уравнение с разделяющимися переменными. Деля обе части уравнения на $z^2$ и умножая на $dx$, получаем

$$\frac{dz}{z^2}=dx.$$



При этом решение $z \equiv 0$ совпадает с частным решением, полученным нами ранее. Интегрируя, находим

$$-\frac{1}{z}=x+C, \text{ или } z=-\frac{1}{x+C}.$$

Значит, $y=e^x-\frac{1}{x+C}$.

Итак, решения уравнения (П.19) $y = e^x$, $y=e^x-\frac{1}{x+C}$.

---

### П.1.12. Разные уравнения

Пусть задано уравнение вида

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right).$$

Если $\Delta = a_1b - ab_1 \neq 0$, т.е. прямые $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $ax + by + c = 0$ пересекаются, то с помощью переноса начала координат в точку пересечения этих прямых уравнение приводится к однородному. Другими словами, подстановка

$$u=x+\frac{b_1c-bc_1}{\Delta},\ v=y+\frac{ac_1-a_1c}{\Delta}$$

приводит исходное уравнение к виду

$$\frac{du}{dv}=f\left(\frac{a_1u+b_1v}{au+bv}\right).$$

Если же $\Delta = a_1b - ab_1 = 0$, т.е. прямые $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $ax + by + c = 0$ не пересекаются, то $a_1x + b_1y = k(ax + by)$. Следовательно, уравнение имеет вид

$$y' = F(ax + by).$$

Такое уравнение приводится к уравнениям с разделяющимися переменными заменой $z = ax + by$ или $z = ax + by + d$, где $d$ — любое.

---

**Пример П.39**

Найдем общее решение уравнения

$$(x + 2y + 4)dx + (2y - 5x + 16)dy = 0. \tag{П.20}$$

*Решение*. Приведем уравнение к виду

$$y'=-\frac{x+2y+4}{2y-5x+16}=\frac{x+2y+4}{5x-2y-16}.$$

Поскольку $\Delta = 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 5 = -12 \neq 0$, сделаем замену переменных

$$x=u+\frac{2\cdot(-16)-4\cdot(-2)}{-12}=u+2;$$

$$y=v+\frac{4\cdot 5-1\cdot(-16)}{-12}=v-3.$$

Получим однородное уравнение

$$v' = \frac{u+2+2v-6+4}{5u+10-2v+6-16} = \frac{u+2v}{5u-2v}.$$

Сделаем замену $v = tu$. Тогда $v' = t + t'u$ и мы приходим к равенству

$$t + t'u = \frac{u+2tu}{5u-2tu} = \frac{1+2t}{5-2t},$$

из которого получаем

$$t'u = \frac{1+2t}{5-2t} - t = \frac{1+2t-5t+2t^2}{5-2t} = \frac{2t^2-3t+1}{5-2t}.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{(5-2t)dt}{2t^2-3t+1} = \frac{du}{u}. \qquad (\text{П.21})$$

Разложим рациональную дробь $\dfrac{5-2t}{2t^2-3t+1}$ на простейшие. Корни квадратного трехчлена $2t^2 - 3t + 1$ равны $t_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \dfrac{3 \pm 1}{4}$, $t_1 = \dfrac{1}{2}$, $t_2 = 1$.

Таким образом,

$$\frac{5-2t}{2t^2-3t+1} = \frac{5-2t}{2\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)} = \frac{A}{t-\frac{1}{2}} + \frac{B}{t-1},\ A = -4,\ B = 3.$$

Мы должны проверить, не теряем ли мы решения, когда делим обе части уравнения на $t - 1$ и на $t - \dfrac{1}{2}$. Если $t = 1$, то $u = v$, т.е. $x - 2 = y + 3$. Подстановка $y = x - 5$ в уравнение (П.20) дает

$$x + 2x - 10 + 4 = (2x - 10 - 5x + 16) \cdot 1 = 3x - 6 - 3x + 6 = 0.$$

Итак, $y = x - 5$ — одно из решений уравнения (П.20).

Если $t = \dfrac{1}{2}$, то $v = \dfrac{1}{2}u$, т.е. $y + 3 = \dfrac{x}{2} - 1$. Подстановка $y = \dfrac{x}{2} - 4$ в уравнение (П.20) не обращает его в тождество.

Интегрируем уравнение (П.21) почленно. Интеграл от левой части равен

$$\int \frac{(5-2t)dt}{2t^2-3t+1} = -4\int \frac{dt}{t-\frac{1}{2}} + 3\int \frac{dt}{t-1} = -4\ln\left|t-\frac{1}{2}\right| + 3\ln|t-1| + \ln|C|.$$

Интеграл от правой части равен

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + \ln|C|.$$



Таким образом,

$$u = \frac{(t-1)^3}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^4} C. \qquad (\text{П.22})$$

Вернемся к исходным переменным, сделав замены $v = 3 + y$, $u = x - 2$, $t = \dfrac{v}{u} = \dfrac{3+y}{x-2}$. Подставляя эти выражения в равенство (П.22), получим

$$x - 2 = C\frac{\left(\frac{3+y}{x-2} - 1\right)^3}{\left(\frac{3+y}{x-2} - \frac{1}{2}\right)^4} = C\frac{(3+y-x+2)^3 \cdot 2^4}{(6+2y-x+2)^4}(x-2),$$

или $(8 + 2y - x)^4 = C(y + 5 - x)^3$.

Итак, решения уравнения (П.20) — это $y = x - 5$ и $(8 + 2y - x)^4 = C(y + 5 - x)^3$.

## Пример П.40

Решим задачу Коши $xy^4y'' + 4x^4y'^5 = xy^3y'^2 + 3y^4y'$, $y(1) = -1$, $y'(1) = 1$, используя однородность относительно $y$ и ее производных

*Решение.* Это уравнение однородно относительно $y$ и его производных, поэтому сделаем замену переменных $y' = uy$, тогда $y'' = u'y + uy' = u'y + u^2y$. Сделаем подстановку в исходное уравнение:

$$xy^4(u'y + u^2y) + 4x^4u^5y^5 = xy^3u^2y^2 + 3y^4uy.$$

Раскрывая скобки, получим

$$xy^5u' + xy^5u^2 + 4x^4u^5y^5 = xy^5u^2 + 3y^5u.$$

Приводя и взаимно уничтожая подобные члены и сокращая на $y^5$, приходим к уравнению

$$xu' + 4x^4u^5 = 3u, \text{ или } u' - \frac{3}{x}u = -4x^3u^5.$$

Это уравнение Бернулли. Умножим обе части уравнения на $u^{-5}$:

$$u'u^{-5} - \frac{3}{x}u^{-4} = -4x^3.$$

Обозначим $z = u^{-4}$, тогда $z' = -4u^{-5}u'$, $u'u^{-5} = -\dfrac{z'}{4}$ и наше уравнение принимает вид

$$-\frac{z'}{4} - \frac{3}{x}z = -4x^3, \text{ или } z' + \frac{12}{x}z = 16x^3.$$

Это линейное неоднородное уравнение. Решим его методом вариации произвольной постоянной. Сначала решаем линейное однородное уравнение

$$z' + \frac{12}{x} z = 0,$$

разделяя переменные:

$$\frac{dz}{z} = -12\frac{dx}{x}$$

($z \equiv 0$, очевидно, не является решением). Получаем

$$\ln|z| = -12\ln|xC|, \text{ или } z = \frac{C}{x^{12}}.$$

Тогда найдем функцию $C(x)$ из условия $\frac{C'(x)}{x^{12}} = 16x^3$.

Имеем

$$C'(x) = 16x^{15}, C(x) = 16\int x^{15}dx = x^{16} + C.$$

Значит,

$$z(x) = \frac{x^{16}+C}{x^{12}} = x^4 + \frac{C}{x^{12}}.$$

Тогда

$$u = z^{-1/4} = \frac{1}{\pm\sqrt[4]{x^4 + \frac{C}{x^{12}}}} = \frac{\pm x^3}{\sqrt[4]{x^{16}+C}} = \frac{y'}{y}.$$

Подставив в полученное выражение начальные условия, находим

$$\frac{\pm 1}{\sqrt[4]{1+C}} = \frac{1}{-1},$$

откуда получаем $C = 0$, значит,

$$u(x) = \frac{-x^3}{\sqrt[4]{x^{16}}} = -\frac{1}{x}.$$

Итак, имеем $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$ ($y \equiv 0$ не является решением, так как не удовлетворяет начальным условиям). Решаем уравнение методом разделения переменных:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = -\ln|Cx|, y = \frac{C}{x}.$$



Подставим в полученное равенство начальные условия: $-1 = \frac{C}{1}$, отсюда следует, что $C = -1$. Таким образом, решение задачи Коши

$$y = -\frac{1}{x}.$$

## П.2. Линейные уравнения

### П.2.1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью в виде суммы обобщенных полиномов

В соответствии с теорией, изложенной в параграфах 1.2, 1.3, каждое слагаемое в правой части будет иметь вид $P_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ или $Q_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ (обобщенный полином), где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ — полиномы. Для каждого такого слагаемого в правой части уравнения через $\gamma$ мы будем обозначать число, в общем случае комплексное, $\alpha + \beta i$.

**Пример П.41**

Решим уравнение

$$y''' - 2y' - 4y = 75\sin x. \qquad (\text{П.23})$$

*Решение.* Найдем общее решение однородного уравнения методом Эйлера. Выпишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 2\lambda - 4 = 0.$$

Один корень виден сразу: $\lambda_1 = 2$. Для того чтобы найти другие два корня, разделим характеристическое уравнение на $\lambda - 2$:

$$\begin{array}{l|l}
\lambda^3 - 2\lambda - 4 & \lambda - 2 \\
\cline{2-2}
\underline{\lambda^3 - 2\lambda^2} & \lambda^2 + 2\lambda + 2 \\
\quad 2\lambda^2 - 2\lambda - 4 & \\
\quad \underline{2\lambda^2 - 4\lambda} & \\
\qquad\quad 2\lambda - 4 & \\
\qquad\quad \underline{2\lambda - 4} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Квадратный трехчлен $\lambda^2 + 2\lambda + 2$ имеет, очевидно, корни $\lambda_{2,3} = -1 \pm i$. Поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}\sin x + C_3e^{-x}\cos x.$$

Поскольку $\gamma = i$ и не совпадает ни с одним корнем характеристического полинома, частное решение уравнения мы будем искать в виде

$$y_1 = A\sin x + B\cos x.$$

Подставив в формулу (П.23) $y = y_1$, получаем

$$-A\cos x + B\sin x - 2A\cos x + 2B\sin x - 4A\sin x - 4B\cos x = 75\sin x,$$

откуда следует система

$$\begin{cases} 3B-4A=75, \\ -4B-3A=0. \end{cases}$$

Решая данную систему уравнений, находим $A = -12$, $B = 9$. Таким образом, общее решение уравнения (П.23) имеет вид

$$y = y_0 + y_1 = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}\cos x + C_3e^{-x}\sin x - 12\sin x + 9\cos x.$$

## Пример П.42

Решим уравнение

$$y'' + 2y' - 3y = x^2e^x.$$

*Решение.* Найдем общее решение однородного уравнения методом Эйлера. Выпишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = C_1e^{-3x} + C_2e^x.$$

Поскольку $\gamma = 1$, а 1 — корень кратности 1, то частное решение для нашей неоднородной системы будем искать в виде

$$y_1 = (Ax^2 + Bx + C)xe^x = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^x.$$

Найдем первую и вторую производные от $y_1$:

$$y_1' = (3Ax^2 + 2Bx + C)e^x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^x =$$
$$= [Ax^3 + (3A + B)x^2 + (2B + C)x + C]e^x;$$
$$y_1'' = [3Ax^2 + 2(3A + B)x + 2B + C + Ax^3 + (3A + B)x^2 + (2B + C)x + C]e^x =$$
$$= [Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B + C)x + (2B + 2C)]e^x.$$

Подставляя функцию $y = y_1$ и ее производные в исходное уравнение, получаем равенство

$$Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B + C)x + (2B + 2C) + 2Ax^3 + (6A + 2B)x^2 +$$
$$+ (4B + 2C)x + 2C - 3Ax^3 - 3Bx^2 - 3Cx = x^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в левой и правой частях уравнения, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 12A = 1, \\ 6A + 8B = 0, \\ 2B + 4C = 0, \end{cases}$$

решая которую, находим $A = \frac{1}{12}, B = -\frac{1}{16}, C = \frac{1}{32}$.



Итак, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y = y_0 + y_1 = C_1e^{-3x} + C_2e^x + \left(\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{16} + \frac{x}{32}\right)e^x.$$

## Пример П.43

Решим уравнение

$$y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x.$$

*Решение.* Найдем общее решение однородного уравнения методом Эйлера. Выпишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0.$$

Его корни $\lambda_{1,\,2} = 2\pm 2i$, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

В правой части два слагаемых, для первого из них $\gamma = 2$, а для второго $\gamma = 2i$, т.е. оба значения $\gamma$ не равны ни одному из корней характеристического полинома. Частные решения мы ищем по отдельности для каждого из слагаемых в правой части. Сначала рассматриваем неоднородное уравнение

$$y'' - 4y' + 8y = e^{2x}.$$

Частное решение ищем в виде $y_1 = Ae^{2x}$. Подставляя $y = y_1$ в уравнение и сокращая на $e^{2x}$, получаем $4A - 8A + 8A = 1$ и, следовательно, $A = \frac{1}{4}$. Таким образом, $y_1 = \frac{1}{4}e^{2x}$. Теперь рассмотрим неоднородное уравнение

$$y'' - 4y' + 8y = \sin 2x.$$

Частное решение будем искать в виде $y_2 = A\sin 2x + B\cos 2x$. Тогда первая и вторая производные равны, соответственно, $y_2' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$, $y_2'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$.

Подставляя в уравнение $y_2$ и его производные, получаем

$$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x - 8A\cos 2x + 8B\sin 2x +$$
$$+ 8A\sin 2x + 8B\cos 2x = \sin 2x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой частях уравнения, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} -4A + 8B + 8A = 1, \\ -4B - 8A + 8B = 0. \end{cases}$$

Решая ее, находим $A = \frac{1}{20}, B = \frac{1}{10}$, таким образом, $y_2 = \frac{1}{20}\sin 2x + \frac{1}{10}\cos 2x$.

Итак, общее решение нашего неоднородного уравнения

$$y = y_0 + y_1 + y_2 = e^{2x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) +$$
$$+ 0{,}25e^{2x} + 0{,}05\sin 2x + 0{,}1\cos 2x.$$

## Пример П.44

Решим уравнение

$$y^{VI} + 64y = 0.$$

*Решение*. Запишем характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\lambda^6 + 64 = 0.$$

Тогда $\lambda^6 = -64$. Найдем все шесть корней из числа $-64$. Имеем:

$$\lambda = |\lambda| e^{i\varphi},\ -64 = 2^6 e^{i(\pi+2\pi k)},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Тогда $|\lambda|^6 e^{i6\varphi} = 2^6 e^{i(\pi+2\pi k)}$, следовательно,

$$|\lambda| = 2,\ \varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k,\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Выпишем все шесть корней, изображенных на рис. П.1, по форме $\lambda = |\lambda|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$:

$$\lambda_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i;$$

$$\lambda_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i;$$

$$\lambda_3 = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i;$$

$$\lambda_4 = 2\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i;$$

$$\lambda_5 = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right) = -2i;$$

$$\lambda_6 = 2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i.$$

Мы получили три пары комплексно-сопряженных корней: $\sqrt{3 \pm i}$, $\pm 2i$, $-\sqrt{3} \pm 2i$. Поэтому общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y = e^{x\sqrt{3}}(C_1\cos x + C_2\sin x) + C_3\cos x + $$
$$+ C_4\sin x + e^{-x\sqrt{3}}(C_5\cos x + C_6\sin x).$$



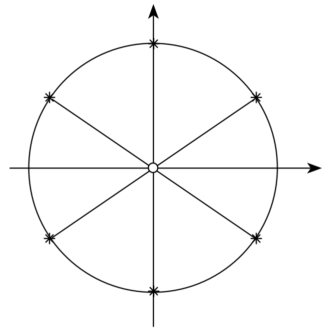


*Рис. П.1*

## Пример П.45

Решим уравнение

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x.$$

*Решение*. Запишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Корни данного уравнения $\lambda_{1,\,2} = 1$. Поэтому общее решение уравнения имеет вид

$$y_0 = (C_1 + C_2x)e^x.$$

Для обобщенного полинома в правой части $\gamma = 1$, что совпадает с корнем $\lambda_{1,\,2} = 1$ характеристического полинома кратности 2. Поэтому частное решение нашего уравнения мы будем искать в виде

$$y_1 = (Ax + B)x^2e^x = (Ax^3 + Bx^2)e^x.$$

Вычислим первую и вторую производные:

$$y_1' = (3Ax^2 + 2Bx + Ax^3 + Bx^2)e^x = [Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx]e^x;$$

$$y_1'' = (6Ax + 2B + 3Ax^2 + 2Bx + 3Ax^2 + 2Bx + Ax^3 + Bx^2)e^x =$$
$$= [Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B)x + 2B]e^x.$$

Подставляя в исходное уравнение $y_1$ и его производные и сокращая на $e^x$, получаем

$$Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B)x + 2B - 2Ax^3 -$$
$$- 2(3A + B)x^2 - 4Bx + Ax^3 + Bx^2 = 6x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в левой и правой частях уравнения, приходим к системе

$$\begin{cases} 6A + 4B - 4B = 6, \\ 2B = 0, \end{cases}$$

из которой следует, что $A = 1$, $B = 0$. Таким образом, частное решение исходного уравнения $y_1 = x^3e^x$.

Итак, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y = y_0 + y_1 = (C_1 + C_2x + x^3)e^x.$$

---

**Пример П.46**

Требуется написать общее решение неоднородного уравнения

$$y'' + 6y' + 10y = 3xe^{3x} - 2e^{-3x}\cos x$$

с неопределенными коэффициентами, не вычисляя числовых значений коэффициентов.

*Решение*. Выпишем характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0,\ \lambda_{1,\,2} = -3 \pm i.$$

Для первого слагаемого в правой части $\gamma = 3$, а для второго $\gamma = -3 + i$, что совпадает с простым корнем характеристического полинома. Поэтому общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y = e^{-3x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + (Ax + B)e^{3x} + xe^{-3x}(D\cos x + E\sin x).$$

---

**Пример П.47**

Требуется написать общее решение неоднородного уравнения

$$y'' - 8y' + 17y = e^{4x}(x^2 - 3x\sin x)$$

с неопределенными коэффициентами, не вычисляя числовых значений коэффициентов.

*Решение*. Выпишем характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 17 = 0,\ \lambda_{1,\,2} = 4 \pm i.$$

Для первого слагаемого в правой части $\gamma = 4$, а для второго слагаемого $\gamma = 4 + i$, что совпадает с простым корнем характеристического полинома. Поэтому общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$\begin{gathered} y = e^{4x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + e^{4x}(Ax^2 + Bx + C) + \\ + xe^{4x}[(Dx + E)\cos x + (Fx + G)\sin x] = \\ = e^{4x}[C_1\cos x + C_2\sin x + Ax^2 + Bx + C + x(Dx + E)\cos x + x(Fx + G)\sin x]. \end{gathered}$$

---

**Пример П.48**

Требуется написать общее решение неоднородного уравнения

$$y''' - y'' - y' + y = 3e^x + 5x\sin x$$

с неопределенными коэффициентами, не вычисляя числовых значений коэффициентов.



*Решение*. Найдем корни характеристического уравнения

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$$

Имеем

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = \lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 1),$$

т.е. $\lambda_{1,\,2} = 1$, $\lambda_3 = -1$. Для первого слагаемого в правой части $\gamma = 1$, что совпадает с корнем кратности 2 характеристического полинома, а для второго слагаемого $\gamma = i$, что не совпадает ни с одним корнем характеристического полинома. Поэтому общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$\begin{gathered} y = (C_1 + C_2x)e^x + C_3e^{-x} + Ax^2e^x + (Cx + D)\sin x + (Ex + F)\cos x = \\ = (C_1 + C_2x + Ax^2)e^x + C_3e^{-x} + (Cx + D)\sin x + (Ex + F)\cos x. \end{gathered}$$

---

**Пример П.49**

Требуется написать общее решение неоднородного уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = 2^x$$

с неопределенными коэффициентами, не вычисляя числовых значений коэффициентов.

*Решение*. Выпишем характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2.$$

В правой части $2^x = e^{x\ln 2}$, т.е. $\gamma = \ln 2$, что не совпадает ни с одним из корней характеристического полинома. Поэтому общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + Ae^{x\ln 2} = C_1e^x + C_2e^{2x} + A \cdot 2^x.$$

---

**Пример П.50**

Требуется написать общее решение неоднородного уравнения

$$y'' + 4y' + 3y = \mathrm{ch}\,x$$

с неопределенными коэффициентами, не вычисляя числовых значений коэффициентов.

*Решение*. Выпишем характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0,\ \lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -1.$$

В правой части $\mathrm{ch}\,x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$. Для первого слагаемого $\gamma = 1$, что не совпадает ни с одним из корней характеристического полинома, а для второго слагаемого $\gamma = -1$, что совпадает с простым корнем характеристического полинома. Поэтому общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-x} + Ae^x + Bxe^{-x} = C_1e^{-3x} + (C_2 + Bx)e^{-x} + Ae^x.$$

**Пример П.51**

Требуется написать общее решение неоднородного уравнения

$$y'' - 2y' + 2y = (x + e^x)\sin x$$

с неопределенными коэффициентами, не вычисляя числовых значений коэффициентов.

*Решение*. Выпишем характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0, \lambda_{1,2} = 1 \pm i.$$

Для первого слагаемого в правой части $\gamma = i$, что не совпадает ни с одним из корней характеристического полинома, а для второго слагаемого $\gamma = 1 + i$, что совпадает с простым корнем характеристического полинома. Поэтому общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y = (C_1\cos x + C_2\sin x)e^x + (Ax + B)\cos x + (Dx + F)\sin x +$$
$$+ x(G\cos x + H\sin x)e^x = [C_1\cos x + C_2\sin x + x(G\cos x + H\sin x)]e^x +$$
$$+ (Ax + B)\cos x + (Dx + F)\sin x.$$

**Пример П.52**

Требуется написать общее решение неоднородного уравнения

$$y'' + 2y' + 2y = \operatorname{ch}x \cdot \sin x$$

с неопределенными коэффициентами, не вычисляя числовых значений коэффициентов.

*Решение*. Выпишем характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0, \lambda_{1,2} = -1 \pm i.$$

В правой части $\operatorname{ch}x \cdot \sin x = \frac{1}{2}e^x \sin x + \frac{1}{2}e^{-x} \sin x$. Для первого слагаемого $\gamma = 1 + i$, что не совпадает ни с одним из корней характеристического полинома, а для второго слагаемого $\gamma = -1 + i$, что совпадает с простым корнем характеристического полинома. Поэтому общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y = (C_1\cos x + C_2\sin x)e^{-x} + Ae^x\cos x + Be^x\sin x +$$
$$+ x(D\cos x + F\sin x)e^{-x} = = [C_1\cos x + C_2\sin x +$$
$$+ x(D\cos x + F\sin x)]e^{-x} + (A\cos x + B\sin x)e^x.$$



**Пример П.53**

Требуется построить линейное однородное дифференциальное уравнение (насколько возможно низкого порядка), имеющее данное частное решение

$$y_1 = x^2e^x.$$

*Решение*. Данному частному решению соответствует корень характеристического полинома $\lambda = 1$ кратности 3 (поскольку частное решение содержит множитель $x^2$). Следовательно, так как характеристический полином наименьшей степени, имеющий корень $\lambda = 1$ кратности 3, это

$$(\lambda - 1)^3 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1,$$

уравнение наименьшего порядка, имеющее заданное частное решение, имеет вид

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

**Пример П.54**

Требуется построить линейное однородное дифференциальное уравнение (насколько возможно низкого порядка), имеющее данное частное решение

$$y_1 = e^{2x}\cos x.$$

*Решение*. Данному частному решению соответствует пара комплексно сопряженных корней характеристического полинома $\lambda = 2 \pm i$. Характеристический полином наименьшей степени, имеющий такие корни, имеет вид

$$(\lambda - 2 - i)(\lambda - 2 + i) = \lambda^2 - 4\lambda^2 + 5.$$

Следовательно, уравнение наименьшего порядка, имеющее заданное частное решение, имеет вид

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

**Пример П.55**

Требуется построить линейное однородное дифференциальное уравнение (насколько возможно низкого порядка), имеющее данное частное решение

$$y_1 = x\sin x.$$

*Решение*. Данному частному решению соответствует пара комплексно-сопряженных корней характеристического полинома $\lambda = \pm i$ кратности 2 (поскольку частное решение содержит множитель $x$). Характеристический полином наименьшей степени, имеющий такие корни кратности 2, имеет вид

$$[(\lambda - i)(\lambda + i)]^2 = (\lambda^2 + 1)^2 = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1.$$

Следовательно, уравнение наименьшего порядка, имеющее заданное частное решение, имеет вид

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0.$$

**Пример П.56**

Требуется построить линейное однородное дифференциальное уравнение (насколько возможно низкого порядка), имеющее данное частное решение

$$y_1 = xe^x \cos x.$$

*Решение.* Данному частному решению соответствует пара комплексно-сопряженных корней $\lambda = 1 \pm i$ кратности 2 (поскольку частное решение содержит множитель $x$). Характеристический полином наименьшей степени, имеющий такие корни кратности 2, имеет вид

$$[(\lambda - 1 - 2i)(\lambda - 1 + 2i)]^2 = (\lambda^2 - 2\lambda + 5)^2 =$$
$$= \lambda^4 + 4\lambda^2 + 25 - 4\lambda^3 - 20\lambda + 10\lambda^2 = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 14\lambda^2 - 20\lambda + 25.$$

Следовательно, уравнение наименьшего порядка, имеющее заданное частное решение, имеет вид

$$y^{IV} - 4y''' + 14y'' - 20y' + 25y = 0.$$

**Пример П.57**

Требуется построить линейное однородное дифференциальное уравнение (насколько возможно низкого порядка), имеющее данные частные решения:

$$y_1 = xe^x, y_2 = e^{-x}.$$

*Решение.* Первому из заданных частных решений соответствует корень характеристического полинома $\lambda_1 = 1$ кратности 2 (поскольку данное частное решение содержит множитель $x$). Второму частному решению соответствует простой корень $\lambda_2 = -1$. Характеристический полином наименьшей степени, имеющий такие корни, имеет вид

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = (\lambda^2 - 1)(\lambda - 1) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1.$$

Следовательно, уравнение наименьшего порядка, имеющее заданные частные решения, имеет вид

$$y''' - y'' - y' + y = 0.$$



**Пример П.58**

Требуется построить линейное однородное дифференциальное уравнение (насколько возможно низкого порядка), имеющее данные частные решения:

$$y_1 = x\,, y_2 = \sin x.$$

*Решение.* Первому из заданных частных решений соответствует корень характеристического полинома $\lambda_1 = 0$ кратности 2 (поскольку данное частное решение содержит множитель $x$). Второму частному решению соответствует пара комплексно сопряженных корней $\lambda_{2,\,3} = \pm i$. Характеристический полином наименьшей степени, имеющий такие корни, имеет вид

$$(\lambda - 0)^2(\lambda - i)(\lambda + i) = \lambda^2(\lambda^2 + 1) = \lambda^4 + \lambda^2.$$

Следовательно, уравнение наименьшего порядка, имеющее заданные частные решения, имеет вид

$$y^{IV} + y'' = 0.$$

### П.2.2. Уравнения Эйлера

Уравнение Эйлера

$$a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_ny = f(x)$$

сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами заменой независимой переменной $x = e^t$ при $x > 0$ (или $x = -e^t$ при $x < 0$). Заметим, что данный метод позволяет находить только решения, не пересекающие ось ординат. Мы должны производные по $x$ выразить через производные по $t$. Производную от функции $y$ по $x$ мы обозначаем $y'$, а производную от функции $y$ по $t$ будем обозначать $\dot{y}$. Мы получаем:

$$y' = \dot{y}e^{-t},\ xy' = e^t\dot{y}e^{-t} = \dot{y},$$
$$y'' = \frac{\partial y'}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = (\ddot{y}e^{-t} - \dot{y}e^{-t})e^{-t} = \ddot{y}e^{-2t} - \dot{y}e^{-2t},$$
$$x^2y'' = e^{2t}(\ddot{y}e^{-2t} - \dot{y}e^{-2t}) = \ddot{y} - \dot{y},$$
$$y''' = \frac{\partial y''}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = (\dddot{y}e^{-2t} - 2\ddot{y}e^{-2t} - \ddot{y}e^{-2t} + 2\dot{y}e^{-2t})e^{-t} = \left(\dddot{y} - 2\ddot{y} - \ddot{y} + 2\dot{y}\right)e^{-3t},$$
$$x^3y''' = e^{3t}(\dddot{y} - 2\ddot{y} - \ddot{y} + 2\dot{y})e^{-3t} = \dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y} \text{ и т.д.}$$

Таким образом, мы приходим к уравнению с постоянными коэффициентами. При составлении его характеристического уравнения произведение $xy'$, естественно, заменяется на $\lambda$, произведение $x^2y''$ — на $\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$, произведение $x^3y'''$ — на $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = \lambda^2(\lambda - 1) - 2\lambda(\lambda - 1) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$ и т.д. Ясно, что при составлении характеристического уравнения для полученного нами уравнения с постоянными коэффициентами каждое произведение $x^k y^{(k)}$ в исходном уравнении Эйлера заменяется на произведение $k$ убывающих на единицу чисел: $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)...(\lambda-k+1)$. Таким образом, характеристическое уравнение для полученного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a_0\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)...(\lambda-n+1)+...+a_{n-2}\lambda(\lambda-1)+a_{n-1}\lambda+a_n=0.$$

Уравнение вида

$$a_0(\alpha x+\beta)^n y^{(n)}+a_1(\alpha x+\beta)^{n-1}y^{(n-1)}+...+a_{n-1}(\alpha x+\beta)y'+a_n y=f(x)$$

заменой $\xi=\alpha x+\beta$ сводится к уравнению Эйлера.

## Пример П.59

Решим уравнение

$$x^3y'''-x^2y''+2xy'-2y=x^3. \qquad (П.24)$$

*Решение.* Пусть сначала $x>0$. Выписываем сразу характеристическое уравнение:

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)-\lambda(\lambda-1)+2\lambda-2=0,$$

или

$$(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+2)=0. \qquad (П.25)$$

Корни данного уравнения $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=2$. При таких значениях $\lambda$ общее решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y_0=(C_1+C_2t)e^t+C_3e^{2t}.$$

Чтобы решить неоднородное уравнение, сначала раскроем скобки в формуле (П.25):

$$\lambda^3-\lambda^2+5\lambda-2=0.$$

По этому характеристическому уравнению составим левую часть дифференциального уравнения, а правую часть получим из правой части уравнения (П.24) заменой $x=e^t$:

$$\dddot{y}-4\ddot{y}+5\dot{y}-2y=e^{3t}.$$

Так как число 3 не является корнем характеристического уравнения, частное решение ищем в виде $y_1=ae^{3t}$ методом неопределенных коэффициентов. Подставляя в уравнение, получаем

$$27ae^{3t}-4\cdot 9ae^{3t}+5\cdot 3ae^{3t}-2ae^{3t}=e^{3t},$$

откуда находим $a=1/4$. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y=y_0+y_1=(C_1+C_2t)e^t+C_3e^{2t}+\frac{1}{4}e^{3t}=(C_1+C_2\ln x)x+C_3x^2+\frac{1}{4}x^3 \quad (x>0).$$



В случае $x<0$ мы делаем замену $x=-e^t$ и, очевидно, получаем в точности такой же вид общего и частного решений уравнения с постоянными коэффициентами. При переходе к решению исходного уравнения в случае $x<0$ мы должны будем сделать замену не $t=\ln x$, как мы делаем в случае $x>0$, а $t=\ln|x|$, и получим общее решение в виде

$$y=y_0+y_1=(C_1+C_2t)e^t+C_3e^{2t}+\frac{1}{4}e^{3t}=(C_1+C_2\ln|x|)x+C_3x^2+\frac{1}{4}x^3 \quad (x<0).$$

## Пример П.60

Решим уравнение

$$(2x+3)^3y'''+(2x+3)y'-6y=0.$$

*Решение.* Сделаем замену $2x+3=z$, тогда $y'''=8y_z'''$, $y'=2y_z'$ и наше уравнение принимает вид

$$8z^3y_z'''+6zy_z'-6y=0.$$

Выписываем сразу характеристическое уравнение для того уравнения с постоянными коэффициентами, которое получится в результате замены $|z|=e^t$:

$$8\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)+6\lambda-6=0,$$

или

$$(\lambda-1)(8\lambda^2-16\lambda+6)=0.$$

Корни данного характеристического уравнения $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\frac{1}{2}$, $\lambda_3=\frac{3}{2}$. При таких значениях $\lambda$ общее решение нашего однородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y=C_1e^t+C_2e^{t/2}+C_3e^{3t/2}=C_1|z|+C_2|z|^{1/2}+C_3|z|^{3/2}=$$
$$=C_1(2x+3)+C_2|2x+3|^{1/2}+C_3|2x+3|^{3/2},$$

или, что то же самое,

$$y=C_1\left(x+\frac{3}{2}\right)+C_2\left|x+\frac{3}{2}\right|^{\frac{1}{2}}+C_3\left|x+\frac{3}{2}\right|^{\frac{3}{2}}.$$

## Пример П.61

Решим уравнение

$$(x-2)^2y''-3(x-2)y'+4y=x.$$

*Решение.* Сделаем замену $x-2=z$, тогда $y''=y_z''$, $y'=y_z'$ и наше уравнение принимает вид

$$z^2y_z''-3zy_z'+4y=z+2. \qquad (П.26)$$

Сделаем замену $|z| = e^t$, т.е. $z = e^t$, если $z > 0$, и $z = -e^t$, если $z < 0$. Пусть сначала $z > 0$.

Выписываем сразу характеристическое уравнение для того уравнения с постоянными коэффициентами, которое получится в результате замены $z = e^t$:

$$\lambda(\lambda - 1) - 3\lambda + 4 = 0,$$

или

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0. \qquad (\text{П.27})$$

Корни этого уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. При таких значениях $\lambda$ общее решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y_0 = (C_1 + C_2 t)e^{2t} = [C_1 + C_2 \ln(x-2)](x-2)^2.$$

Чтобы решить неоднородное уравнение, сначала по формуле (П.27) составим левую часть дифференциального уравнения, а правую часть получим из правой части уравнения (П.26) заменой $z = e^t$:

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = e^t + 2.$$

Отдельно ищем методом неопределенных коэффициентов частное решение в виде $y_1 = ae^t$ для уравнения $\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = e^t$ и отдельно — частное решение в виде $y_2 = b$ для уравнения $\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 2$. В первом случае получаем $a = 1$, т.е. $y_1 = e^t$, а во втором $b = \frac{1}{2}$, т.е. $y_2 = \frac{1}{2}$. Таким образом, общее решение исходного уравнения для случая $x > 2$ имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 t)e^{2t} + e^t + 0{,}5 = [C_1 + C_2 \ln(x-2)](x-2)^2 + x - 2 + 0{,}5 =$$
$$= [C_1 + C_2 \ln(x-2)](x-2)^2 + x - 1{,}5.$$

Пусть теперь $z < 0$. Очевидно, что мы получаем точно такое же характеристическое уравнение, как и в случае $z > 0$, и общее решение, полностью аналогичное решению для случая $z > 0$, с единственным отличием: вместо $\ln(x - 2)$ теперь будет $\ln|x - 2|$:

$$y_0 = (C_1 + C_2 t)e^{2t} = (C_1 + C_2 \ln|x-2|)(x-2)^2.$$

Что же касается неоднородного уравнения, то его левая часть, очевидно, будет иметь совершенно тот же вид, что и для случая $z > 0$, а правая часть теперь примет вид $-e^t + 2$, т.е. уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = -e^t + 2.$$

Отыскивая частное решение методом неопределенных коэффициентов точно так же, как мы это делали в случае $x > 2$, мы, очевидно, получим $a = -1$; $b = 0{,}5$. Таким образом, общее решение исходного уравнения для случая $x < 2$ имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 t)e^{2t} - e^t + 0{,}5 = (C_1 + C_2 \ln|x-2|)(x-2)^2 + x - 2 + 0{,}5 =$$
$$= (C_1 + C_2 \ln|x-2|)(x-2)^2 + x - 1{,}5.$$



Итак, независимо от того, $x > 2$ или $x < 2$, решение исходного уравнения может быть записано в виде $y = (C_1 + C_2 \ln|x - 2|)(x - 2)^2 + x - 1{,}5$.

### П.2.3. Метод вариации произвольных постоянных

Для решения примеров данного раздела практикума будем руководствоваться теорией, изложенной в подпараграфе 1.3.1.

**Пример П.62**

Решим уравнение

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

*Решение*. Выпишем характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \lambda_{1,2} = 1.$$

Тогда фундаментальная система решений однородного уравнения:

$$\varphi_1(x) = e^x, \varphi_2(x) = xe^x.$$

Производные равны, соответственно,

$$\varphi_1'(x) = e^x, \quad \varphi_2'(x) = (x+1)e^x.$$

Решение исходного уравнения мы ищем в виде

$$y(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x).$$

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяем из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)\varphi_1(x) + C_2'(x)\varphi_2(x) = 0, \\ C_1'(x)\varphi_1'(x) + C_2'(x)\varphi_2'(x) = \dfrac{e^x}{x}. \end{cases}$$

В нашем случае она имеет вид

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0, \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(x+1)e^x = \dfrac{e^x}{x}. \end{cases}$$

Решаем данную систему алгебраических уравнений методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix} = (x+1)e^{2x} - xe^{2x} = e^{2x},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ e^x / x & (x+1)e^x \end{vmatrix} = -e^{-2x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^x / x \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{x},$$

$$C_1'(x) = -1, C_2'(x) = \frac{1}{x}.$$

Тогда $C_1(x) = -x + C_1$, $C_2(x) = \ln|x| + C_2$.

Итак, решение исходного уравнения имеет вид

$$y = (C_1 - x)e^x + (\ln|x| + C_2)xe^x = C_1e^x + C_2xe^x - xe^x + xe^x\ln|x| = \\ = e^x(C_1 + C_2x + x\ln|x|).$$

---

**Пример П.63**

Решим уравнение

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}.$$

*Решение*. Выпишем характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2.$$

Тогда фундаментальная система решений однородного уравнения:

$$\varphi_1(x) = e^{-x}, \varphi_2(x) = e^{-2x}.$$

Производные равны, соответственно,

$$\varphi_1'(x) = -e^{-x},\ \varphi_2'(x) = -2e^{-2x}.$$

Решение исходного уравнения мы ищем в виде

$$y(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x).$$

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяем из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{-2x} = 0, \\ -C_1'(x)e^{-x} - C_2'(x)e^{-2x} = \dfrac{1}{e^x + 1}. \end{cases}$$

Решение данной системы алгебраических уравнений найдем методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -e^{-3x}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \dfrac{1}{e^x + 1} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -\frac{e^{-2x}}{e^x + 1},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \dfrac{1}{e^x + 1} \end{vmatrix} = \frac{e^{-x}}{e^x + 1}, C_1'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}, C_2'(x) = -\frac{e^{2x}}{e^x + 1}.$$

Тогда

$$C_1(x) = \int \frac{e^x dx}{e^x + 1} = \int \frac{de^x}{e^x + 1} = \ln(e^x + 1) + C_1,$$

$$C_2(x) = -\int \frac{e^{2x} dx}{e^x + 1} = -\int \frac{e^x + 1}{e^x + 1} de^x + \int \frac{de^x}{e^x + 1} = -e^x + \ln(e^x + 1) + C_2.$$



Итак, решение исходного уравнения имеет вид

$$y(x) = [\ln(e^x + 1) + C_1]e^{-x} + [\ln(e^x + 1) + C_2 - e^x]e^{-2x} = \\ = (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x + 1) + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}.$$

---

**Пример П.64**

Решим уравнение

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$$

*Решение*. Выпишем характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\lambda^2 + 1 = 0, \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Тогда фундаментальная система решений однородного уравнения:

$$\varphi_1(x) = \cos x, \varphi_2(x) = \sin x.$$

Производные равны, соответственно,

$$\varphi_1'(x) = -\sin x,\ \varphi_2'(x) = \cos x.$$

Решение исходного уравнения мы ищем в виде

$$y(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x).$$

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяем из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Решение данной системы алгебраических уравнений найдем методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\sin x} & \cos x \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\sin x} \end{vmatrix} = \operatorname{ctg} x, C_1'(x) = -1, C_2'(x) = \operatorname{ctg} x.$$

Тогда $C_1(x) = -x + C_1$,

$$C_2(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C_2.$$

Итак, решение исходного уравнения имеет вид

$$y(x) = (C_1 - x)\cos x + (\ln|\sin x| + C_2)\sin x.$$

---

**Пример П.65**

Решим уравнение

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}.$$

*Решение*. Выпишем характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0, \lambda_{1,2} = -1.$$

Тогда фундаментальная система решений однородного уравнения:

$$\varphi_1(x) = e^{-x}, \varphi_2(x) = xe^{-x}.$$

Производные равны, соответственно,

$$\varphi_1'(x) = -e^{-x}, \quad \varphi_2'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}.$$

Решение исходного уравнения мы ищем в виде

$$y(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x).$$

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяем из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)xe^{-x} = 0, \\ -C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)(1-x)e^{-x} = 3e^{-x}\sqrt{x+1}. \end{cases}$$

Решение данной системы алгебраических уравнений найдем методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix} = (1-x)e^{-2x} + xe^{-2x} = e^{-2x},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{-x} \\ 3e^{-x}\sqrt{x+1} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix} = -3x\sqrt{x+1}\,e^{-2x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & 3e^{-x}\sqrt{x+1} \end{vmatrix} = 3\sqrt{x+1}\,e^{-2x},$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -3x\sqrt{x+1}, C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3\sqrt{x+1}.$$

Тогда

$$C_1(x) = -3\int x\sqrt{x+1}\,dx = -3\int x d\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} =$$
$$= -2x(x+1)^{3/2} + 2\int (x+1)^{3/2}dx =$$
$$= -2x(x+1)^{3/2} + 2\cdot\frac{2}{5}(x+1)^{5/2} + C_1;$$

$$C_2(x) = \int 3\sqrt{x+1}\,dx = 3\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C_2 = 2(x+1)^{3/2} + C_2.$$



Итак, решение исходного уравнения имеет вид

$$y(x) = -2x(x+1)^{3/2}e^{-x} + \frac{4}{5}(x+1)^{5/2}e^{-x} + C_1e^{-x} + 2(x+1)^{3/2}xe^{-x} + C_2xe^{-x} =$$
$$= e^{-x}\left(\frac{4}{5}(x+1)^{5/2} + C_1 + C_2x\right).$$

## П.3. Линейные системы с постоянной матрицей

Сделаем некоторые практические выводы из материала параграфа 3.4, полезные при решении систем уравнений с постоянными коэффициентами.

Каждой клетке порядка $p \geq 1$ жордановой формы матрицы $A$ линейной системы уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax \tag{П.28}$$

соответствует серия $S_1, S_2, ..., S_p$ векторов базиса, удовлетворяющих уравнениям

$$AS_1 = \lambda S_1, S_1 \neq 0,$$
$$AS_2 = \lambda S_2 + S_1,$$
$$AS_3 = \lambda S_3 + S_2,$$
$$\ldots$$
$$AS_p = \lambda S_p + S_{p-1}.$$

Вектор $S_1$ является собственным, а векторы $S_2, ..., S_p$ — присоединенными векторами матрицы $A$. При этом вектор $S_2$ мы будем называть присоединенным вектором высоты 1, вектор $S_3$ — присоединенным вектором высоты 2 и т.д., вектор $S_p$ — присоединенным вектором высоты $p - 1$. Каждой такой серии векторов $S_1, S_2, ..., S_p$ соответствует $p$ линейно независимых решений $x_1, x_2, ..., x_p$ нашей системы:

$$x_1 = e^{\lambda t}S_1,$$
$$x_2 = e^{\lambda t}\left(\frac{t}{1!}S_1 + S_2\right),$$
$$x_3 = e^{\lambda t}\left(\frac{t^2}{2!}S_1 + \frac{t}{1!}S_2 + S_3\right),$$
$$\ldots$$
$$x_p = e^{\lambda t}\left(\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}S_1 + \frac{t^{p-2}}{(p-2)!}S_2 + \ldots + \frac{t}{1!}S_{p-1} + S_p\right).$$

Общее число всех таких решений равно сумме порядков всех клеток жордановой формы, т.е. порядку матрицы $A$. Эти решения составляют фундаментальную систему решений рассматриваемой системы уравнений (П.28).

Частное решение линейной неоднородной системы с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + f_i(t),\ i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (\text{П}.29)$$

в случае, когда функции $f_i(t)$ состоят из сумм и произведений многочленов $b_0 + b_1t + \ldots + b_mt^m$ и функций $e^{\alpha t}$, $\cos\beta t$, $\sin\beta t$, можно искать методом неопределенных коэффициентов. Это делается так же, как и для одного линейного уравнения с постоянными коэффициентами, со следующими изменениями. Как и в случае одного уравнения, если $f_i(t)$ является суммой произведений многочленов $b_0 + b_1t + \ldots + b_mt^m$ и функции $e^{\alpha t}$, то мы полагаем $\gamma = \alpha$. Если же $f_i(t)$ является суммой произведений многочленов $b_0 + b_1t + \ldots + b_mt^m$ и функций $\cos\beta t$ и $\sin\beta t$, то мы полагаем $\gamma = i\beta$. Если же $f_i(t)$ является суммой произведений многочленов $b_0 + b_1t + \ldots + b_mt^m$ и функций $e^{\alpha t}\cos\beta t$ и $e^{\alpha t}\sin\beta t$, то мы полагаем $\gamma = \alpha + i\beta$. Обозначим через $s$ кратность $\gamma$ как корня характеристического полинома (при этом если $\gamma$ — не корень характеристического полинома, тогда мы полагаем $s = 0$). Если $f_i(t) = P_{m_i}(t)e^{\gamma t}$, где $P_{m_i}(t)$ — многочлен степени $m_i$, то частное решение системы (П.29) ищется не в виде $x_i = t^sQ^i_{m_i}(t)e^{\gamma t}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, как это было бы в случае одного линейного уравнения с постоянными коэффициентами, а в виде

$$x_i = Q^i_{m+s}(t)e^{\gamma t},\ i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (\text{П}.30)$$

где $Q^i_{m+s}(t)$ — многочлены степени $m + s$ с неизвестными коэффициентами, а $m = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} m_i$. Неизвестные коэффициенты многочленов определяются путем подстановки выражений (П.30) в данную систему (П.29) и сравнения коэффициентов при подобных членах.

**Пример П.66**

Решить систему уравнений ($\dot{x}$ означает $\dfrac{dx}{dt}$ и т.д.)

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = 3x + y - z, \\ \dot{z} = x + z. \end{cases}$$

*Решение.* Составим характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)(1-\lambda)^2 + [3(1-\lambda) + 1] =$$

$$= 4 - 8\lambda + 4\lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 4 - 3\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = -(\lambda - 2)^3 = 0.$$

Имеем $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Найдем жорданов базис. Для нахождения собственного вектора (собственных векторов) выпишем систему уравнений

$$AS_1 = \lambda S_1,\ S_1 \neq 0.$$



Матрица этой системы

$$(A - 2E) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решаем систему уравнений, выполняя элементарные преобразования над ее матрицей. Поставим третью строчку на первое место. Теперь умножим новую первую строчку на 2 и вычтем из второй строчки. Умножим первую строчку на 3 и вычтем из третьей строчки. Вычтем из третьей строчки вторую. Имеем

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в качестве собственного вектора мы можем взять, например, $S^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Найдем присоединенный вектор высоты 1. Выпишем систему уравнений

$$AS_2 = \lambda S_2 + S_1.$$

Расширенная матрица этой системы имеет вид $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$. Решаем систему, выполняя элементарные преобразования над ее расширенной матрицей. Поставим третью строчку на первое место. Теперь умножим новую первую строчку на 2 и вычтем из второй строчки. Умножим первую строчку на 3 и вычтем из третьей строчки. Вычтем из третьей строчки вторую. Имеем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Получилось: $x_1 = x_3 + 1$, $x_2 = 2x_3 + 1$. В качестве присоединенного вектора мы можем выбрать, например, $S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Будем искать присоединенный вектор высоты 2. Выпишем систему уравнений

$$AS_3 = \lambda S_3 + S_2.$$

Расширенная матрица этой системы имеет вид $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$. Решаем систему, выполняя элементарные преобразования над ее расширенной матрицей. Поставим третью строчку на первое место. Теперь умножим новую первую строчку на 2 и вычтем из второй строчки. Умножим первую строчку на 3 и вычтем из третьей строчки. Вычтем из третьей строчки вторую. Имеем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Получилось $x_1 = x_3 - 1$, $x_2 = -2 + 2x_3$. Таким образом, в качестве присоединенного вектора мы можем выбрать, например, $S_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Итак, матрица перехода $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, жорданова форма нашей исходной матрицы системы уравнений $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому матричная экспонента $e^{tJ} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, фундаментальная матрица решений нашей системы $Se^{tJ}$. Другими словами, фундаментальная система решений нашей системы уравнений

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t},\ \varphi_2(t) = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} e^{2t},\ \varphi_3(t) = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} e^{2t},$$

а общее решение имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = \left(C_1 + C_2 t + C_3 \dfrac{t^2}{2}\right) e^{2t}, \\ y(t) = [2C_1 + (2t-1)C_2 + (t^2 - t)C_3] e^{2t}, \\ z(t) = \left\{C_1 + (t-1)C_2 + \left(\dfrac{t^2}{2} - t + 1\right) C_3\right\} e^{2t}. \end{cases}$$



**Пример П.67**

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^t \sin t. \end{cases}$$

*Решение*. Выпишем характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0.$$

Таким образом, собственные числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Для нахождения собственного вектора $S_1$, соответствующего первому собственному числу, выпишем систему уравнений

$$AS_1 = \lambda_1 S_1,\ S_1 \neq 0.$$

Матрица этой системы $(A - E) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, так что в качестве собственного вектора $S_1$ можно взять, например, $S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Для нахождения собственного вектора $S_2$, соответствующего второму собственному числу, выпишем систему уравнений

$$AS_2 = \lambda_2 S_2,\ S_2 \neq 0.$$

Матрица этой системы $(A - E) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, так что в качестве собственного вектора $S_2$ можно взять, например, $S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Таким образом, общее решение линейной однородной системы имеет вид

$$\begin{cases} x_0(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t}, \\ y_0(t) = C_1 e^t - C_2 e^{3t}. \end{cases}$$

Найдем частное решение нашей линейной неоднородной системы. Поскольку показатель степени обобщенной экспоненты в правой части второго из уравнений системы, равный $1 + i$, не является корнем характеристического уравнения и наибольшая из степеней обобщенных полиномов в правой части системы равна нулю, частное решение ищется в виде

$$\begin{cases} x(t) = pe^t \sin t + qe^t \cos t, \\ yt = re^t \sin t + se^t \cos t. \end{cases}$$

Константы $p$, $q$, $r$, $s$ найдем методом неопределенных коэффициентов. Имеем

$$\begin{cases} pe^t \sin t + pe^t \cos t + qe^t \cos t - qe^t \sin t = 2pe^t \sin t + 2qe^t \cos t - re^t \sin t - se^t \cos t, \\ re^t \sin t + re^t \cos t + se^t \cos t - se^t \sin t = \\ \qquad = 2re^t \sin t + 2se^t \cos t - pe^t \sin t - qe^t \cos t - 5e^t \sin t. \end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях, получаем систему

$$\begin{cases} p-q=2p-r, \\ p+q=2q-s, \\ r-s=2r-p-5, \\ r+s=2s-q. \end{cases}$$

Выразим из первых двух уравнений $r$ и $s$: $r = p + q$, $s = q - p$, тогда $r + s = 2q$, $r - s = 2p$. Подставим найденные выражения в третье и четвертое уравнения:

$$\begin{cases} 2p=2(p+q)-p-5, \\ 2q=2(q-p)-q, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2q-p-5=0, \\ -q-2p=0, \end{cases},$$

откуда находим $p = -1$, $q = -2p = 2$, $r = 1$, $s = 3$. Таким образом, частное решение неоднородной системы

$$\begin{cases} x(t)=-e^t\sin t+2e^t\cos t, \\ y(t)=e^t\sin t+3e^t\cos t. \end{cases}$$

Найдем частное решение нашей неоднородной системы более рационально. Обобщенная экспонента в правой части второго из уравнений системы является коэффициентом при мнимой части комплексной экспоненты $e^{i(1+t)}$. Поэтому найдем сначала комплексное частное решение как реакцию системы на такую правую часть с комплексной экспонентой у второго уравнения, а потом возьмем от найденного решения коэффициенты при мнимых частях. Это и будет частным решением нашей исходной неоднородной системы. Итак, мы имеем комплексную систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}=2x-y, \\ \dot{y}=2y-x-5e^{(1+i)t}. \end{cases}$$

Комплексное частное решение данной системы имеет вид

$$\begin{cases} \tilde{x}=ae^{(1+i)t}, \\ \tilde{y}=be^{(1+i)t}, \end{cases}$$

где $a$, $b$ — комплексные числа. Найдем их методом неопределенных коэффициентов:

$$\begin{cases} a(1+i)=2a-b, \\ b(1+i)=2b-a-5. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{cases} (i-1)a=-b, \\ (i-1)b=-a-5, \end{cases}$$



поэтому $(i-1)^2a = a+5$, или $-2ia = a+5$, откуда находим $a=-\dfrac{5}{1+2i}=2i-1$. Тогда $b = (1-i)(2i-1) = 1+3i$. Значит,

$$\tilde{x}=(2i-1)e^{(1+i)t},\ x=\operatorname{Im}\tilde{x}=2e^t\cos t-e^t\sin t,$$

$$\tilde{y}=(1+3i)e^{(1+i)t},\ y=\operatorname{Im}\tilde{y}=e^t\sin t+3e^t\cos t.$$

Итак, общее решение нашей неоднородной системы имеет вид

$$\begin{cases} x(t)=C_1e^t+C_2e^{3t}-e^t\sin t+2e^t\cos t, \\ y(t)=C_1e^t-C_2e^{3t}+e^t\sin t+3e^t\cos t. \end{cases}$$

---

**Пример П.68**

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}=x+y, \\ \dot{y}=3y-2x. \end{cases}$$

*Решение*. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+5=0,\ \lambda=2\pm i.$$

Для корня $\lambda = 2 + i$ найдем собственный вектор $(a, b)$:

$$\begin{cases} (-1-i)a+b=0, \\ -2a+(1-i)b=0. \end{cases}$$

Можно положить $a = 1$, $b = 1 + i$. Имеем частное решение

$$\begin{cases} x=e^{(2+i)t}, \\ y=(1+i)e^{(2+i)t}. \end{cases}$$

Так как система уравнений имеет только вещественные коэффициенты, то решение, соответствующее собственному числу $\lambda = 2 - i$, будет комплексно сопряженным с найденным решением для $\lambda = 2 + i$. Чтобы получить два вещественных решения, надо взять вещественную и мнимую части найденного комплексного решения. Так как $e^{(2+i)t}=e^{2t}(\cos t+i\sin t)$, то

$$\begin{cases} x_1=\operatorname{Re}e^{(2+i)t}=e^{2t}\cos t, \\ y_1=\operatorname{Re}(1+i)e^{(2+i)t}=e^{2t}(\cos t-\sin t); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2=\operatorname{Im}e^{(2+i)t}=e^{2t}\sin t, \\ y_2=\operatorname{Im}(1+i)e^{(2+i)t}=e^{2t}(\sin t+\cos t). \end{cases}$$

Общее решение выражается через два найденных линейно независимых решения следующим образом:

$$\begin{cases} x(t)=C_1x_1+C_2x_2=C_1e^{2t}\cos t+C_2e^{2t}\sin t, \\ y(t)=C_1y_1+C_2y_2=C_1e^{2t}(\cos t-\sin t)+C_2e^{2t}(\sin t+\cos t). \end{cases}$$

---

**Пример П.69**

Решим систему неоднородных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x + e^{-t}(t + \sin t), \\ \dot{y} = y - 2x + te^{-t}\cos t + e^{2t}\cos 2t. \end{cases} \quad (\text{П.31})$$

*Решение*. Сначала для однородной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x, \\ \dot{y} = y - 2x \end{cases} \quad (\text{П.32})$$

с матрицей $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ находим корни характеристического полинома:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 = 0,\ \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Находим собственный вектор из условия $AS_1 = -S_1$, т.е. решаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -2a + 2b = 0, \\ -2a + 2b = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $b = a$ и в качестве собственного вектора можем взять $S_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Находим присоединенный вектор из условия $AS_2 = -S_2 + S_1$, т.е. решаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -2a + 2b = 2, \\ -2a + 2b = 2. \end{cases}$$

Таким образом, $b = a + 1$, например $a = 0$, $b = 1$. В качестве присоединенного вектора можем взять $S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Линейно независимыми решениями линейной однородной системы являются $e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $e^{-t}\left(\frac{t}{1!}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Таким образом, общее решение однородной системы (П.32) имеет вид

$$\begin{cases} x_0(t) = (C_1 + 2tC_2)e^{-t}, \\ y_0(t) = (C_1 + C_2 + 2tC_2)e^{-t}. \end{cases}$$

В системе (П.31) числа $\gamma$ соответственно равны $-1$, $-1 + i$, $-1 + i$, $2 + 2i$. Поэтому надо отдельно найти частные решения неоднородных систем

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x + te^{-t}, \\ \dot{y} = y - 2x, \end{cases} \quad (\text{П.33})$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x + e^{-t}\sin t, \\ \dot{y} = y - 2x + te^{-t}\cos t, \end{cases} \quad (\text{П.34})$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x, \\ \dot{y} = y - 2x + e^{2t}\cos 2t. \end{cases} \quad (\text{П.35})$$

Для системы (П.33) $\gamma = -1 = \lambda_1 = \lambda_2$, $s = 2$, $m = 1$. Поэтому частное решение можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1 = (at^3 + bt^2 + ct + d)e^{-t}, \\ y_1 = (ft^3 + gt^2 + ht + j)e^{-t}. \end{cases}$$

Для системы (П.34) $\gamma = -1 + i \neq \lambda_{1,2}$, $s = 0$, $m = 1$. Частное решение имеет вид

$$\begin{cases} x_2 = (kt + l)e^{-t}\sin t + (mt + n)e^{-t}\cos t, \\ y_2 = (pt + q)e^{-t}\sin t + (rt + s)e^{-t}\cos t. \end{cases}$$

Для системы (П.35) $\gamma = 2 + 2i \neq \lambda_{1,2}$, $s = 0$, $m = 0$. Частное решение имеет вид

$$\begin{cases} x_3 = ue^{2t}\sin 2t + ve^{2t}\cos 2t, \\ y_3 = we^{2t}\sin 2t + ze^{2t}\cos 2t. \end{cases}$$

Отыскав значения коэффициентов $a, b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, u, v, w, z$ методом неопределенных коэффициентов, решение системы (П.31) запишем в виде

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + x_1 + x_2 + x_3, \\ y(t) = y_0 + y_1 + y_2 + y_3. \end{cases}$$

**Пример П.70**

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 2y + 4z, \\ \dot{z} = x - z. \end{cases}$$

*Решение*. Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(-1-\lambda) - (-4) =$$

$$= -4 + 4\lambda - \lambda^2 - 4\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 + 4 = -\lambda^3 + 3\lambda^2 = 0,$$

поэтому $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Для простого корня $\lambda_1 = 3$ находим собственный вектор $(a, b, c)$, решая систему

$$\begin{cases} -a + b = 0, \\ -b + 4c = 0, \\ a - 4c = 0. \end{cases}$$

Матрица данной системы имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. Решаем систему уравнений, выполняя элементарные преобразования над ее матрицей. Умножим первые две строчки на $-1$, затем вычтем из третьей строчки первую. После этого вычтем из третьей строчки вторую, а к первой строчке прибавим вторую. Имеем

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в качестве собственного вектора можем взять, например, $S_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Для кратного корня $\lambda = 0$ найдем жорданов базис. Для нахождения собственного вектора (собственных векторов) выпишем систему уравнений

$$AS_1 = \lambda S_1,\ S_1 \neq 0.$$

Матрица этой системы $(A - 0 \cdot E) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Решаем систему уравнений, выполняя элементарные преобразования над ее матрицей. Поменяем местами первую и третью строки и разделим вторую строку на 2. Теперь вычтем из третьей строки первую, умноженную на 2. После этого вычтем из третьей строки вторую. Имеем

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в качестве собственного вектора мы можем выбрать, например, $S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Найдем присоединенный вектор. Выпишем систему уравнений

$$AS_2 = \lambda S_2 + S_1.$$

Расширенная матрица этой системы имеет вид $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$. Решаем систему, выполняя элементарные преобразования над ее расширенной матрицей. Поменяем местами первую и третью строчки, а вторую строчку разделим на 2. Теперь вычтем из третьей строчки первую строчку, умноженную на два. После этого вычтем из третьей строчки вторую. Имеем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Получилось $x_1 = 1 + x_3$, $x_2 = -1 - 2x_3$. Таким образом, в качестве присоединенного вектора мы можем выбрать, например, $S_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Итак, матрица перехода $S = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, жорданова форма нашей исходной матрицы системы уравнений $J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, поэтому матричная экспонента $e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{0t} & te^{0t} \\ 0 & 0 & e^{0t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, фундаментальная матрица решений нашей системы $Se^{tJ}$. Другими словами, фундаментальная система решений нашей системы уравнений:

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t},\ \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0\cdot t},\ \varphi_3(t) = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} e^{0\cdot t},$$

или

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t},\ \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \varphi_3(t) = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

а общее решение имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = 4C_1e^{3t} + [C_2 + C_3(t+1)]e^{0\cdot t} = 4C_1e^{3t} + C_2 + C_3(t+1), \\ y(t) = 4C_1e^{3t} + [-2C_2 - (2t+1)C_3]e^{0\cdot t} = 4C_1e^{3t} - 2C_2 - (2t+1)C_3, \\ z(t) = (C_2 + tC_3)e^{0\cdot t} = C_2 + tC_3. \end{cases}$$

## П.4. Точки покоя автономной системы

Для решения примеров данного раздела практикума будем руководствоваться теорией, изложенной в гл. 4.

**Пример П.71**

Найдем и исследуем особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln\dfrac{y^2 - y + 1}{3}, \\ \dot{y} = x^2 - y^2. \end{cases}$$

*Решение*. Найдем стационарные точки. Обозначим $f_1(x, y) = \ln\dfrac{y^2 - y + 1}{3}$, $f_2(x, y) = x^2 - y^2$. Для нахождения особых точек мы решаем систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем $y^2 - y + 1 = 3$, или $y^2 - y - 2 = 0$, $y_1 = -1$, $y_2 = 2$.

Из второго уравнения получаем $x = \pm y$. Таким образом, мы имеем четыре стационарные точки: $(-1; -1)$, $(1; -1)$, $(-2; 2)$, $(2; 2)$.

Найдем частные производные от функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$:

$$\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} = \frac{2y - 1}{y^2 - y + 1}, \quad \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} = -2y.$$

Рассмотрим первую из особых точек $(-1; -1)$. Вычислим матрицу Якоби для функций $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ в этой точке:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\det(J - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 2$. Собственные числа матрицы $J$ (корни уравнения $\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$) вещественны и имеют разные знаки. Таким образом, особая точка $(-1; -1)$ — седло.

Рассмотрим вторую особую точку $(1; -1)$. Вычислим матрицу Якоби для функций $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ в этой точке:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\det(J - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2$. Собственные числа матрицы $J$ (корни уравнения $\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$) комплексно-сопряженные и имеют положительную вещественную часть. Таким образом, особая точка $(1; -1)$ — неустойчивый фокус.

Рассмотрим третью особую точку $(-2; 2)$. Вычислим матрицу Якоби для функций $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ в этой точке:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}.$$



Тогда $\det(J - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$. Уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ имеет один отрицательный вещественный корень кратности 2. Таким образом, особая точка $(-2; 2)$ — устойчивый вырожденный узел.

Рассмотрим четвертую особую точку $(2; 2)$. Вычислим матрицу Якоби для функций $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ в этой точке:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\det(J - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda - 4$. Собственные числа матрицы $J$ (корни уравнения $\lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$) вещественны и имеют разные знаки. Таким образом, особая точка $(2; 2)$ — седло.

**Пример П.72**

Найдем и исследуем особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = \ln(1 - x + x^2) - \ln 3. \end{cases}$$

*Решение*. Найдем стационарные точки. Обозначим $f_1(x, y) = x^2 - y$, $f_2(x, y) = \ln(1 - x + x^2) - \ln 3$. Для нахождения особых точек мы решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем $1 - x + x^2 = 3$, или $x^2 - x - 2 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Из первого уравнения получаем $y = x^2$. Таким образом, мы имеем две стационарные точки: $(-1; 1)$, $(2; 4)$.

Найдем частные производные от функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$:

$$\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}, \quad \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Рассмотрим первую из особых точек $(-1; 1)$. Вычислим матрицу Якоби для функций $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ в этой точке:

$$J = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\det(J - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & -1 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 3$. Собственные числа матрицы $J$ (корни уравнения $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$) вещественны и имеют разные знаки. Таким образом, особая точка $(-1; 1)$ — седло.

Рассмотрим вторую особую точку (2; 4). Вычислим матрицу Якоби для функций $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ в этой точке:

$$J = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\det(J - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 1$. Собственные числа матрицы $J$ (корни уравнения $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$) равны $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$. Они вещественные и оба положительные. Таким образом, особая точка (2; 4) — неустойчивый узел (источник).

## Пример П.73

Исследуем на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = e^x - e^{-3z}, \\ \dot{y} = 4z - 3\sin(x+y), \\ \dot{z} = \ln(1+z-3x). \end{cases}$$

*Решение.* Обозначим $f_1(x, y, z) = e^x - e^{-3z}$, $f_2(x, y, z) = 4z - 3\sin(x + y)$, $f_3(x, y, z) = \ln(1 + z - 3x)$.

Найдем частные производные от функций $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ и $f_3(x,y)$:

$$\frac{\partial f_1(x,y,z)}{\partial x} = e^x, \quad \frac{\partial f_1(x,y,z)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_1(x,y,z)}{\partial z} = 3e^{-3z},$$

$$\frac{\partial f_2(x,y,z)}{\partial x} = -3\cos(x+y), \quad \frac{\partial f_2(x,y,z)}{\partial y} = -3\cos(x+y), \quad \frac{\partial f_2(x,y,z)}{\partial z} = 4,$$

$$\frac{\partial f_3(x,y,z)}{\partial x} = -3, \quad \frac{\partial f_3(x,y,z)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_3(x,y,z)}{\partial z} = \frac{1}{1+z-3x}.$$

Вычислим матрицу Якоби для функций $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$ и $f_3(x, y, z)$ в точке (0; 0; 0):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\det(J - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ -3 & -3-\lambda & 4 \\ -3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(1-\lambda)^2(3+\lambda) - 3(3+\lambda) = (\lambda+3)(\lambda^2 + 2\lambda - 4).$$

Собственные числа матрицы Якоби: $\lambda_1 = -3 < 0$, $\lambda_2 = 1 + \sqrt{5} > 0$, $\lambda_3 = 1 - \sqrt{5} < 0$. Итак, нулевое решение исходной системы уравнений неустойчиво.



## Пример П.74

Найдем и исследуем особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(1-y+y^2), \\ \dot{y} = 3 - \sqrt{x^2+8y}. \end{cases}$$

*Решение.* Найдем стационарные точки. Обозначим $f_1(x, y) = \ln(1 - y + y^2)$, $f_2(x,y) = 3 - \sqrt{x^2+8y}$. Для нахождения особых точек мы решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 0, \\ f_2(x,y) = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем $1 - y + y^2 = 1$, или $y^2 - y = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$.

Из второго уравнения получаем $x^2 + 8y = 9$. Поэтому если $y = 0$, то $x = \pm 3$, а если $y = 1$, то $x = \pm 1$.

Таким образом, мы имеем четыре стационарные точки: (3; 0), (–3; 0), (1; 1), (–1; 1).

Найдем частные производные от функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$:

$$\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} = \frac{2y-1}{y^2-y+1},$$

$$\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+8y}}, \quad \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} = -\frac{4}{\sqrt{x^2+8y}}.$$

Рассмотрим первую из особых точек (3; 0). Вычислим матрицу Якоби для функций $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ в этой точке:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Тогда $\det(J - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\frac{4}{3}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{4}{3}\lambda - 1 = 0$, или $3\lambda^2 + 4\lambda - 3 = 0$.

Собственные числа матрицы $J$ (корни уравнения $3\lambda^2 + 4\lambda - 3 = 0$) вещественны и имеют разные знаки. Таким образом, особая точка (3; 0) — седло.

Рассмотрим вторую из особых точек (–3; 0). Вычислим матрицу Якоби для функций $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ в этой точке:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Тогда $\det(J - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\frac{4}{3}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{4}{3}\lambda + 1 = 0$, или $3\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$.

Собственные числа матрицы $J$ (корни уравнения $3\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$) комплексно-сопряженные и имеют отрицательную вещественную часть. Таким образом, особая точка (–3; 0) — устойчивый фокус.

Рассмотрим третью особую точку (1; 1). Вычислим матрицу Якоби для функций $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ в этой точке:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Тогда $\det(J - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{3} = 0$, или $3\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$.

Собственные числа матрицы $J$ (корни уравнения $3\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$) вещественны и оба отрицательны. Таким образом, особая точка (1; 1) — устойчивый узел (сток).

Рассмотрим четвертую особую точку (–1; 1). Вычислим матрицу Якоби для функций $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ в этой точке:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Тогда $\det(J - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{4}{3}\lambda - \frac{1}{3} = 0$, или $3\lambda^2 + 4\lambda - 1 = 0$.

Собственные числа матрицы $J$ (корни уравнения $3\lambda^2 + 4\lambda - 1 = 0$) вещественны и имеют разные знаки. Таким образом, особая точка (–1; 1) — седло.

**Пример П.75**

Найдем и исследуем особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - e^{y-x}, \\ \dot{y} = x^3 - x. \end{cases}$$

*Решение.* Найдем стационарные точки. Обозначим $f_1(x, y) = x^2 - e^{y-x}$, $f_2(x, y) = x^3 - x$. Для нахождения особых точек мы решаем систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем $x(x^2 - 1) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

Из первого уравнения получаем $x^2 = e^{y-x}$. Поэтому если $x = 0$, то решений нет, если $x = 1$, то $y = 1$, а если $x = -1$, то $y = -1$.



Таким образом, мы имеем две стационарные точки: (1; 1), (–1; –1).

Найдем частные производные от функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$:

$$\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} = 2x + e^{y-x}, \quad \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} = -e^{y-x}, \quad \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} = 3x^2 - 1, \quad \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Рассмотрим первую из особых точек (1; 1). Вычислим матрицу Якоби для функций $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ в этой точке:

$$J = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\det(J - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Собственные числа матрицы $J$ (корни уравнения $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$) вещественны и оба положительны. Таким образом, особая точка (1; 1) — неустойчивый узел (источник).

Рассмотрим вторую особую точку (–1; –1). Вычислим матрицу Якоби для функций $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ в этой точке:

$$J = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\det(J - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 2 = 0$. Собственные числа матрицы $J$ (корни уравнения $\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$) комплексно-сопряженные и имеют отрицательную вещественную часть. Таким образом, особая точка (–1; –1) — устойчивый фокус.

## П.5. Операционный метод

Для решения примеров данного раздела практикума будем руководствоваться теорией, изложенной в гл. 6.

**Пример П.76**

В цепи, изображенной на рис. П.2, при $t = 0$ происходит коммутация. Требуется рассчитать ток через индуктивный элемент $i_L(t)$ и напряжение на емкостном элементе $u_C(t)$ как функции времени $t$ при $t \geq 0$.

*Решение.* Мы видим, что до коммутации ток через индуктивный элемент равнялся нулю, а напряжение на емкостном элементе равнялось напряжению на резисторе $R_4$, т.е. $i_3 R_4 = 3$ В. Пользуясь непрерывность тока на индуктивном элементе и непрерывностью напряжения на емкостном элементе, мы можем утверждать, что

$$i_L(0+) = i_L(0-) = 0, \ u_C(0+) = u_C(0-) = 3.$$

Перечертим схему для $t \geq 0$, заменяя источник тока $i_3$ эквивалентным источником напряжения $i_3 R_4$ (рис. П.3).

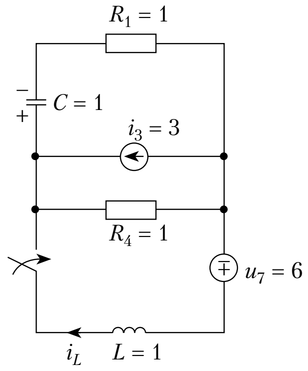



*Рис. П.2*

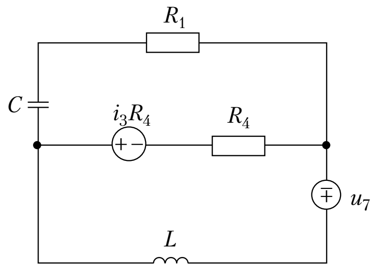



*Рис. П.3*

Запишем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u_C + R_1C\dfrac{du_C}{dt} + R_4\left(C\dfrac{du_C}{dt} - i_L\right) = i_3R_4, \\ L\dfrac{di_L}{dt} + R_4\left(i_L - C\dfrac{du_C}{dt}\right) = u_7 - i_3R_4. \end{cases}$$

Пусть $i_L(t) \mapsto I_L(s)$, $u_C(t) \mapsto U_C(s)$. Используя теорему о дифференцировании оригинала, получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (1 + sCR_1 + sCR_4)U_C(s) - R_4I_L(s) = \dfrac{i_3R_4}{s} + C(R_1 + R_4)u_C(0+), \\ -sCR_4U_C(s) + (sL + R_4)I_L(s) = \dfrac{u_7}{s} - \dfrac{i_3R_4}{s} + CR_4u_C(0+), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (1+2s)U_C - I_L = \dfrac{3}{s} + 6, \\ -sU_C + (1+s)I_L = \dfrac{3}{s} + 3. \end{cases}$$



Решим систему алгебраических уравнений методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+2s & -1 \\ -s & 1+s \end{vmatrix} = 2s^2 + 2s + 1;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{3+6s}{s} & -1 \\ \dfrac{3+3s}{s} & 1+s \end{vmatrix} = \frac{1}{s}(6s^2 + 9s + 3 + 3 + 3s) = \frac{6s^2 + 12s + 6}{s};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1+2s & \dfrac{3+6s}{s} \\ -s & \dfrac{3+s}{s} \end{vmatrix} = \frac{1}{s}(2s^2 + 7s + 3 + 6s^2 + 3s) = \frac{8s^2 + 10s + 3}{s};$$

$$U_C(s) = \frac{6s^2 + 12s + 6}{s(2s^2 + 2s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}, \ A = 6;$$

$$\frac{6s^2 + 12s + 6}{s(2s^2 + 2s + 1)} - \frac{6}{s} = \frac{6s^2 + 12s + 6 - 12s^2 - 12s - 6}{s(2s^2 + 2s + 1)} =$$

$$= \frac{6s^2}{s(2s^2 + 2s + 1)} = \frac{6s}{2s^2 + 2s + 1}, \ B = 3, C = 0;$$

$$I_L(s) = \frac{8s^2 + 10s + 3}{s(2s^2 + 2s + 1)} = \frac{D}{s} + \frac{Fs + G}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}, \ D = 3;$$

$$\frac{8s^2 + 10s + 3}{s(2s^2 + 2s + 1)} - \frac{3}{s} = \frac{8s^2 + 10s + 3 - 6s^2 - 6s - 3}{s(2s^2 + 2s + 1)} =$$

$$= \frac{2s^2 + 4}{s(2s^2 + 2s + 1)} = \frac{2(s + 2)}{2s^2 + 2s + 1}, \ F = 1, G = 2.$$

Таким образом,

$$U_C(s) = \frac{6}{s} + \frac{3s}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \frac{6}{s} + \frac{3\left(s + \frac{1}{2}\right)}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} - \frac{3 \cdot \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}};$$

$$I_L(s) = \frac{3}{s} + \frac{s + 2}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{s} + \frac{s + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} + \frac{3 \cdot \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}},$$

поэтому

$$u_C(t) = 6 + 3e^{-0,5t}\cos(0,5t) - 3e^{-0,5t}\sin(0,5t) \text{ при } t \geq 0;$$

$$i_L(t) = 3 + e^{-0,5t}\cos(0,5t) + 3e^{-0,5t}\sin(0,5t) \text{ при } t \geq 0.$$

**Пример П.77**

Найдем решение задачи Коши $x'' + 4x = 3\sin t$, $x(0) = 3$, $x'(0) = -3$.

*Решение.* Пусть $x(t) \mapsto X(s)$, тогда получим следующее уравнение в изображениях:

$$s^2X(s) - 3s + 3 + 4X(s) = \frac{3}{s^2+1},$$

отсюда находим

$$(s^2+4)X(s) = \frac{3}{s^2+1} + 3(s-1);$$

$$X(s) = \frac{3(1+s^3+s-s^2-1)}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{3(s^3-s^2+s)}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4}.$$

Тогда

$$3s^3 - 3s^2 + 3s = As^3 + Bs^2 + 4As + 4B + Cs^3 + Ds^2 + Cs + D,$$

откуда получаем систему

$$\begin{cases} A + C = 3, \\ B + D = -3, \\ 4A + C = 3, \\ 4B + D = 0. \end{cases}$$

Из этой системы находим: $B = 1$, $D = -4$, $A = 0$, $C = 3$. Таким образом,

$$X(s) = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{3s-4}{s^2+4} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{3s}{s^2+4} - \frac{4}{s^2+4}.$$

Тогда $x(t) = \sin t + 3\cos(2t) - 2\sin(2t)$.

**Пример П.78**

Найдем решение задачи Коши

$$\begin{cases} x'(t) = -7x(t) + y(t), \\ y'(t) = -2x(t) - 5y(t), \end{cases} x(0) = 1,\ y(0) = 1.$$

*Решение.* Пусть $x(t) \mapsto X(s)$, $y(t) \mapsto Y(s)$, тогда система уравнений в изображениях имеет вид

$$\begin{cases} sX(s) - 1 = -7X(s) + Y(s), \\ sY(s) - 1 = -2X(s) - 5Y(s), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (s+7)X(s) - Y(s) = 1, \\ 2X(s) + (s+5)Y(s) = 1. \end{cases}$$



Решим систему алгебраических уравнений методом Крамера:

$$\Delta = s^2 + 12s + 37,\ \Delta_1 = s + 6,\ \Delta_2 = s + 5,$$

$$X(s) = \frac{s+6}{(s+6)^2+1},\ Y(s) = \frac{s+5}{(s+6)^2+1} = \frac{s+6}{(s+6)^2+1} - \frac{1}{(s+6)^2+1}.$$

Тогда решение заданной системы имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = e^{-6t}\cos t, \\ y(t) = e^{-6t}\cos t - e^{-6t}\sin t. \end{cases}$$

**Пример П.79**

Найдем решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 6y - 2z - 2e^{2t}, \\ \dot{y} = -2x - 5y + z + 5e^{2t}, \\ \dot{z} = -2x - 6y + 2z + 6e^{2t}, \end{cases} x(0) = -1,\ y(0) = 2,\ z(0) = 2.$$

*Решение.* Пусть $x(t) \mapsto X(s)$, $y(t) \mapsto Y(s)$, $z(t) \mapsto Z(s)$, тогда система уравнений в изображениях имеет вид

$$\begin{cases} sX(s) + 1 = 2X(s) + 6Y(s) - 2Z(s) - \dfrac{2}{s-2}, \\ sY(s) - 2 = -2X(s) - 5Y(s) + Z(s) + \dfrac{5}{s-2}, \\ sZ(s) - 2 = -2X(s) - 6Y(s) + 2Z(s) + \dfrac{6}{s-2}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (s-2)X(s) - 6Y(s) + 2Z(s) = -\dfrac{s}{s-2}, \\ 2X(s) + (s+5)Y(s) - Z(s) = \dfrac{2s+1}{s-2}, \\ 2X(s) + 6Y(s) + (s-2)Z(s) = \dfrac{2s+2}{s-2}. \end{cases}$$

Решение данной системы алгебраических уравнений найдем методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} s-2 & -6 & 2 \\ 2 & s+5 & -1 \\ 2 & 6 & s-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s-2 & -6 & 2 \\ 2 & s+5 & -1 \\ 0 & -s+1 & s-1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} s-2 & -4 & 2 \\ 2 & s+4 & -1 \\ 0 & 0 & s-1 \end{vmatrix} = (s-1)(s^2+2s-8+8) = s(s-1)(s+2);$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-\frac{s}{s-2} & -6 & 2\\ \frac{2s+1}{s-2} & s+5 & -1\\ \frac{2s+2}{s-2} & 6 & s-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{s+2}{s-2} & 0 & s\\ \frac{2s+1}{s-2} & s+5 & -1\\ \frac{2s+2}{s-2} & 6 & s-2\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{s+2}{s-2}(s^2+3s-10+6)+\frac{s}{s-2}(12s+6-2s^2-12s-10)=$$

$$=\frac{1}{s-2}(s^3+5s^2+2s-8-2s^3-4s)=\frac{-s^3+5s^2-2s-8}{s-2};$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}s-2 & -\frac{s}{s-2} & 2\\ 2 & \frac{2s+1}{s-2} & -1\\ 2 & \frac{2s+2}{s-2} & s-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}s-2 & -\frac{s}{s-2} & 2\\ 2 & \frac{2s+1}{s-2} & -1\\ 0 & \frac{1}{s-2} & s-1\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{s-2}(s-2+4)+\frac{s-1}{s-2}(2s^2-3s-2+2s)=\frac{2s^3-3s^2+4}{s-2};$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}s-2 & -6 & -\frac{s}{s-2}\\ 2 & s+5 & \frac{2s+1}{s-2}\\ 2 & 6 & \frac{2s+2}{s-2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}s-2 & -6 & -\frac{s}{s-2}\\ 2 & s+5 & \frac{2s+1}{s-2}\\ 0 & -s+1 & \frac{1}{s-2}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{s-1}{s-2}(2s^2-3s-2+2s)+\frac{1}{s-2}(s^2+3s-10+12)=\frac{2s^3-2s^2+2s+4}{s-2};$$

$$X(s)=\frac{-s^3+5s^2-2s-8}{s(s-1)(s+2)(s-2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{s-2}+\frac{D}{s+2},$$

$$A=-2,\ B=2,\ C=0,\ D=-1;$$

$$Y(s)=\frac{2s^3-3s^2+4}{s(s-1)(s+2)(s-2)}=\frac{F}{s}+\frac{G}{s-1}+\frac{H}{s-2}+\frac{K}{s+2},$$

$$F=1,\ G=-1,\ H=1,\ K=1;$$

$$Z(s)=\frac{2s^3-2s^2+2s+4}{s(s-1)(s+2)(s-2)}=\frac{L}{s}+\frac{P}{s-1}+\frac{Q}{s-2}+\frac{R}{s+2},$$

$$L=1,\ P=-2,\ Q=2,\ R=1.$$

Следовательно, решение имеет вид

$$\begin{cases}x(t)=-2+2e^t-e^{-t},\\ y(t)=1-e^t+e^{2t}+e^{-2t},\\ z(t)=1-2e^t+2e^{2t}+e^{-2t}.\end{cases}$$



## Пример П.80

Найдем общее решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x}+2\dot{x}+10x=2te^{-t}. \qquad (\text{П.36})$$

*Решение*. Для нахождения общего решения рассмотрим задачу Коши для уравнения (П.36) с начальными условиями

$$x(0)=C_1,\ x'(0)=C_2, \qquad (\text{П.37})$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные. Уравнение в изображениях, соответствующее задаче Коши (П.36) — (П.37), имеет вид

$$s^2X(s)-C_1s-C_2+2sX(s)-2C_1+10X(s)=\frac{2}{(s+1)^2},$$

или

$$[(s+1)^2+9]X(s)=C_1s+C_2+2C_1+\frac{2}{(s+1)^2},$$

откуда находим

$$X(s)=C_1\frac{s+1}{(s+1)^2+9}+(C_1+C_2)\frac{1}{(s+1)^2+9}+\frac{2}{[(s+1)^2+9](s+1)^2}. \qquad (\text{П.38})$$

Найдем оригинал последнего слагаемого в правой части равенства (П.38). Разложим это дробно-рациональное выражение на простейшие рациональные дроби:

$$\frac{2}{[(s+1)^2+9](s+1)^2}=\frac{As+B}{(s+1)^2+9}+\frac{D}{s+1}+\frac{E}{(s+1)^2},\ E=\frac{2}{9},$$

$$\frac{2}{[(s+1)^2+9](s+1)^2}-\frac{2}{9(s+1)^2}=\frac{18-2s^2-4s-2-18}{9[(s+1)^2+9](s+1)^2}=-\frac{2}{9[(s+1)^2+9]}.$$

Таким образом,

$$\frac{2}{[(s+1)^2+9](s+1)^2}=-\frac{2}{9[(s+1)^2+9]}+\frac{2}{9(s+1)^2}.$$

Найдем теперь оригинал выражения (П.38):

$$x(t)=C_1e^{-t}\cos 3t+(C_1+C_2)e^{-t}\sin 3t-\frac{2}{27}e^{-t}\sin 3t+\frac{2}{9}te^{-t}.$$

Итак, получаем общее решение уравнения (П.36):

$$x(t)=e^{-t}C_1\cos 3t+e^{-t}C_2^*\sin 3t+\frac{2}{9}te^{-t}=e^{-t}(C_1\cos 3t+C_2^*\sin 3t)+\frac{2}{9}te^{-t},$$

где $C_2^*=\dfrac{C_1+C_2}{3}-\dfrac{2}{27}$.

## П.6. Разностные уравнения

### П.6.1. Метод вариации произвольной постоянной

Для решения примеров данного раздела практикума будем руководствоваться теорией, изложенной в параграфе 7.1.

**Пример П.81**

Методом вариации произвольной постоянной решим линейное разностное уравнение

$$y_{k+1}-\frac{k+2}{k+1}y_k=\frac{2}{k+3}.$$

*Решение.* Имеем $a_j=-\dfrac{j+2}{j+1}$, тогда

$$A_k=(-1)^k\prod_{j=0}^{k-1}a_j=(-1)^k\prod_{j=0}^{k-1}(-1)\frac{j+2}{j+1}=(-1)^k(-1)^k\frac{k+1}{1}=k+1;$$

$$\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f_j}{A_{j+1}}=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{2}{(j+3)(j+2)}.$$

Разложим дробь $\dfrac{2}{(j+3)(j+2)}$ на простейшие:

$$\frac{2}{(j+3)(j+2)}=\frac{A}{j+3}+\frac{B}{j+2},\ A=-2,\ B=2.$$

Тогда

$$\sum_{j=0}^{k-1}\frac{2}{(j+3)(j+2)}=2\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1}{j+2}-\frac{1}{j+3}\right)=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{k}{k+2}.$$

По формуле (7.5)

$$y_k=\left(C+\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f_j}{A_{j+1}}\right)A_k=(k+1)\left(C+\frac{k}{k+2}\right).$$

**Пример П.82**

Методом вариации произвольной постоянной решим линейное разностное уравнение

$$y_{k+1}=\left(\frac{k+3}{k+4}\right)^2y_k+\frac{1}{k+4}.$$

*Решение.* Имеем $a_j=-\left(\dfrac{k+3}{k+4}\right)^2$, тогда

$$A_k=(-1)^k\prod_{j=0}^{k-1}a_j=(-1)^k\prod_{j=0}^{k-1}(-1)\left(\frac{j+3}{j+4}\right)^2=(-1)^k(-1)^k\frac{9}{(k+3)^3}=\frac{9}{(k+3)^3};$$



$$\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f_j}{A_{j+1}}=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(j+4)^2}{9(j+4)}=\frac{1}{9}\sum_{j=0}^{k-1}(j+4)=\frac{1}{9}\cdot\frac{4+k+3}{2}=\frac{(k+7)k}{18}.$$

По формуле (7.5)

$$y_k=\left(C+\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f_j}{A_{j+1}}\right)A_k=\left(C+\frac{k(k+7)}{18}\right)\frac{9}{(k+3)^2}=\frac{18C+k(k+7)}{18}\cdot\frac{9}{(k+3)^2}=$$

$$=\frac{2C+k(k+7)}{2(k+3)^2}=\frac{C+k(k+7)}{2(k+3)^2}.$$

**Пример П.83**

Методом вариации произвольной постоянной решим линейное разностное уравнение $y_{k+1}=(k+2)y_k+(k+2)!$.

*Решение.* Имеем $a_j=-(k+2)$, тогда

$$A_k=(-1)^k\prod_{j=0}^{k-1}a_j=(-1)^k\prod_{j=0}^{k-1}(-1)(j+2)=(-1)^k(-1)^k(k+1)!=(k+1)!;$$

$$\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f_j}{A_{j+1}}=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(j+2)!}{(j+2)!}=k.$$

По формуле (7.5)

$$y_k=\left(C+\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f_j}{A_{j+1}}\right)A_k=(k+1)!(C+k).$$

**Пример П.84**

Методом вариации произвольной постоянной решим линейное разностное уравнение

$$y_{k+1}=y_k+\frac{1}{(3k+4)(3k+1)}.$$

*Решение.* Имеем $a_j=-1$, тогда

$$A_k=(-1)^k\prod_{j=0}^{k-1}a_j=(-1)^k(-1)^k=1;$$

$$\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f_j}{A_{j+1}}=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{(3j+4)(3j+1)}.$$

Разложим рациональную дробь $\dfrac{2}{(j+3)(j+2)}$ на простейшие рациональные дроби:

$$\frac{2}{(3j+4)(3j+1)}=\frac{A}{3j+4}+\frac{B}{3j+1},\quad A=-\frac{1}{3},\quad B=\frac{1}{3}.$$

Тогда

$$\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{(3j+4)(3j+1)}=\frac{1}{3}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1}{3j+1}-\frac{1}{3j+4}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3k+1}\right)=\frac{k}{3k+1}.$$

По формуле (7.5)

$$y_k=\left(C+\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f_j}{A_{j+1}}\right)A_k=C+\frac{k}{3k+1}.$$

**Пример П.85**

Методом вариации произвольной постоянной решим линейное разностное уравнение

$$y_{k+1}=y_k+\frac{1}{25k^2+5k-6}.$$

*Решение*. Имеем $a_j=-1$, тогда

$$A_k=(-1)^k\prod_{j=0}^{k-1}a_j=(-1)^k(-1)^k=1;$$

$$\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f_j}{A_{j+1}}=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{k^2+5k-6}.$$

Разложим рациональную дробь $\frac{1}{25k^2+5k-6}$ на простейшие рациональные дроби. Найдем корни многочлена $25k^2+5k-6$. Считая $k$ вещественной переменной, решаем уравнение $25k^2+5k-6=0$. Имеем $k_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+600}}{50}=\frac{-5\pm 25}{50}$, $k_1=-\frac{3}{5}$, $k_2=\frac{2}{5}$. Поэтому

$$\frac{1}{25k^2+5k-6}=\frac{1}{(5k+3)(5k-2)}=\frac{A}{5k+3}+\frac{B}{5k-2},\quad A=-\frac{1}{5},\quad B=\frac{1}{5}.$$

Тогда

$$\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j^2+5j-6}=\frac{1}{5}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1}{5j-2}-\frac{1}{5j+3}\right)=\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{5k-2}\right)=-\frac{k}{2(5k-2)}.$$

По формуле (7.5)

$$y_k=\left(C+\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f_j}{A_{j+1}}\right)A_k=C-\frac{k}{2(5k-2)}.$$

**Пример П.86**

Методом вариации произвольной постоянной решим линейное разностное уравнение

$$y_{k+1}=y_k+\frac{1}{36k^2-24k-5}.$$



*Решение*. Имеем: $a_j=-1$, тогда

$$A_k=(-1)^k\prod_{j=0}^{k-1}a_j=(-1)^k(-1)^k=1;$$

$$\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f_j}{A_{j+1}}=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{36k^2-24k-5}.$$

Разложим рациональную дробь $\frac{1}{36k^2-24k-5}$ на простейшие рациональные дроби. Найдем корни многочлена $36k^2-24k-5$. Считая $k$ вещественной переменной, решаем уравнение $36k^2-24k-5=0$. Имеем $k_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{144+180}}{36}=\frac{12\pm 18}{36}$, $k_1=-\frac{1}{6}$, $k_2=\frac{5}{6}$. Поэтому

$$\frac{1}{36k^2-24k-5}=\frac{1}{(6k+1)(6k-5)}=\frac{A}{6k+1}+\frac{B}{6k-5},\quad A=-\frac{1}{6},\quad B=\frac{1}{6}.$$

Тогда

$$\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{36j^2-24j-5}=\frac{1}{6}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1}{6j-5}-\frac{1}{6j+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{5}-\frac{1}{6k-5}\right)=-\frac{k}{5(6k-5)}.$$

По формуле (7.5)

$$y_k=\left(C+\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f_j}{A_{j+1}}\right)A_k=C-\frac{k}{5(6k-5)}.$$

### П.6.2. Линейные разностные стационарные уравнения

Для решения примеров данного раздела практикума будем руководствоваться теорией, изложенной в параграфе 7.3.

**Пример П.87**

Решим уравнение $y_{k+2}+y_k=\sin\frac{k\pi}{4}$.

*Решение*. Характеристическое уравнение $\lambda^2+1=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=$ $=\pm i$. Тогда

$$\lambda=i=e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, общее (вещественное) решение уравнения имеет вид

$$y_k=C_1\cos\frac{k\pi}{2}+C_2\sin\frac{k\pi}{2}+y_k^{(0)},$$

где $C_1$ и $C_2$ — постоянные интегрирования, $y_k^{(0)}$ — какое-нибудь частное решение заданного неоднородного уравнения. Согласно теореме 7.12 из параграфа 7.3 существует частное решение вида

$$y_k^{(0)} = A\cos\frac{k\pi}{4} + B\sin\frac{k\pi}{4},$$

где $A$ и $B$ — неопределенные коэффициенты, которые находятся подстановкой $y_k^{(0)}$ в заданное уравнение. Имеем

$$A\cos\left((k+2)\frac{\pi}{4}\right) + B\sin\left((k+2)\frac{\pi}{4}\right) + A\cos\frac{k\pi}{4} + B\sin\frac{k\pi}{4} = \sin\frac{k\pi}{4}.$$

Воспользуемся тем, что

$$\cos\left((k+2)\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{k\pi}{4},$$
$$\sin\left((k+2)\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{k\pi}{4}.$$

Тогда получим

$$-A\sin\frac{k\pi}{4} + B\cos\frac{k\pi}{4} + A\cos\frac{k\pi}{4} + B\sin\frac{k\pi}{4} = \sin\frac{k\pi}{4}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой частях уравнения, приходим к системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -A + B = 1, \\ B + A = 0, \end{cases}$$

решая которую, находим $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$.

Значит, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y_k = C_1\cos\frac{k\pi}{2} + C_2\sin\frac{k\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{k\pi}{4} - \cos\frac{k\pi}{4}\right).$$

## Пример П.88

Найдем решение разностной задачи Коши $y_{k+1} = 4y_k - 9k^2 + 5$, $y_0 = 0$.

*Решение*. Характеристическое уравнение $\lambda - 4 = 0$ имеет корень $\lambda = 4$. Следовательно, общее (вещественное) решение уравнения имеет вид

$$y_k = C \cdot 4^k + y_k^{(0)},$$

где $C$ — постоянная интегрирования, $y_k^{(0)}$ — какое-нибудь частное решение заданного неоднородного уравнения. Согласно теореме 7.10 из параграфа 7.3 существует частное решение вида $y_k^{(0)} = Ak^2 + Bk + D$, где $A$, $B$, $D$ — неопределенные коэффициенты, которые находятся подстановкой $y_k^{(0)}$ в заданное уравнение. Имеем

$$A(k+1)^2 + B(k+1) + D - 4Ak^2 - 4Bk - 4D = -9k^2 + 5,$$

или

$$Ak^2 + 2Ak + A + Bk + B + D - 4Ak^2 - 4Bk - 4D = -9k^2 + 5.$$



Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $k$ в левой и правой частях уравнения, приходим к системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3A = -9, \\ 2A - 3B = 0, \\ A + B - 3D = 5, \end{cases}$$

откуда находим $A = 3$, $B = 2$, $D = 0$.

Значит, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y_k = C \cdot 4^k + 3k^2 + 2k.$$

Подставим в уравнение начальные условия: $y_0 = C = 0$.

Значит, решение задачи Коши $y_k = 3k^2 + 2k$.

## Пример П.89

Решим уравнение $y_{k+2} + 3y_{k+1} + 9y_k = 0$.

*Решение*. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 3\lambda + 9 = 0$ имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-36}}{2} = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}.$$

Тогда

$$\lambda_1 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i = 3\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right).$$

Следовательно, общее (вещественное) решение уравнения имеет вид

$$y_k = C_1 \cdot 3^k\cos\frac{2k\pi}{3} + C_2 \cdot 3^k\sin\frac{2k\pi}{3},$$

где $C_1$ и $C_2$ — постоянные интегрирования.

## Пример П.90

Решим уравнение $y_{k+3} - 2y_{k+1} - 4y_k = 51 \cdot 3^k + 2^{k+1}(20k + 14)$.

*Решение*. Запишем характеристическое уравнение: $\lambda^3 - 2\lambda + 2 = 0$. Один из его корней сразу виден: $\lambda_1 = 2$. Для нахождения остальных корней разделим характеристический полином на $\lambda - 2$:

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3 - 2\lambda - 4 = 0 & \lambda - 2 \\ \cline{2-2} \underline{\lambda^3 - 2\lambda^2} & \lambda^2 + 2\lambda + 2 \\ \quad 2\lambda^2 - 2\lambda - 4 & \\ \quad \underline{2\lambda^2 - 4\lambda} & \\ \qquad\quad 2\lambda - 4 & \\ \qquad\quad \underline{2\lambda - 4} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Найдем корни квадратного трехчлена $\lambda^2 + 2\lambda + 2$: $\lambda_{2,3} = -1 \pm i$. Таким образом,

$$\lambda_2 = -1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right).$$

Следовательно, общее (вещественное) решение однородного уравнения имеет вид

$$y_k = C_1 \cdot 2^k + C_2 \cdot 2^{k/2}\cos\frac{3\pi k}{4} + C_3 \cdot 2^{k/2}\sin\frac{3\pi k}{4}.$$

Найдем частные решения неоднородного уравнения отдельно для первого слагаемого в правой части и отдельно для второго слагаемого. Другими словами, сначала мы ищем частное решение уравнения

$$y_{k+3} - 2y_{k+1} - 4y_k = 51 \cdot 3^k.$$

Согласно теореме 7.10 из параграфа 7.3 существует частное решение вида

$$y_k^{(1)} = A \cdot 3^k.$$

Подставляем $y = y_k^{(1)}$ в уравнение и получаем

$$A \cdot 3^{k+3} - 2A \cdot 3^{k+1} - 4A \cdot 3^k = 51 \cdot 3^k,$$

или

$$27A - 6A - 4A = 51,$$

откуда находим $A = 3$. Следовательно, $y_k^{(1)} = 3 \cdot 3^k = 3^{k+1}$.

Найдем теперь частное решение уравнения

$$y_{k+3} - 2y_{k+1} - 4y_k = 2^{k+1}(20k + 14).$$

Согласно теореме 7.10 существует частное решение вида

$$y_k^{(2)} = (Ak + B)2^k k$$

(поскольку число 2 — простой корень характеристического полинома). Подставляем $y = y_k^{(2)}$ в уравнение и получаем

$$[A(k+3) + B]2^{k+3}(k+3) - 2[A(k+1) + B]2^{k+1}(k+1) - 4(Ak + B)2^k k = \\ = 2^{k+1}(20k + 14).$$

После сокращения на $2^k$ и преобразований получим

$$8A(k^2 + 6k + 9) + 8B(k+3) - 4A(k^2 + 2k + 1) - 4B(k+1) = \\ = 4Ak^2 + 4Bk + 40k + 28,$$

или

$$8Ak^2 + 48Ak + 72A + 8Bk + 24B - 4Ak^2 - 8Ak - 4A - \\ - 4Bk - 4B = 4Ak^2 + 4Bk + 40k + 28.$$



Приводя подобные и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $k$ в левой и правой частях, получаем систему

$$\begin{cases} 40A = 40, \\ 68A + 20B = 28. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений находим $A = 1$, $B = -\frac{40}{20} = -2$. Следовательно,

$$y_k^{(2)} = (k-2)2^k k.$$

Итак, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y_k = 3^{k+1} + k(k-2)2^k + C_1 2^k + (\sqrt{2})^k\left(C_2\cos\frac{3\pi k}{4} + C_3\sin\frac{3\pi k}{4}\right).$$

**Пример П.91**

Построим линейное однородное разностное стационарное уравнение насколько возможно низкого порядка, имеющее данные частные решения: $y_k^1 = 1$, $y_k^2 = 3^k$.

*Решение.* Характеристический полином имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, следовательно, характеристический полином наименьшей степени имеет вид

$$(\lambda - 1)(\lambda - 3) = \lambda^2 - 4\lambda + 3,$$

а разностное уравнение наименьшего порядка

$$y_{k+2} - 4y_{k+1} + 3y_k = 0.$$

**Пример П.92**

Построим линейное однородное разностное стационарное уравнение насколько возможно низкого порядка, имеющее данные частные решения:

$$y_k^1 = -1,\ y_k^2 = (\sqrt{2})^k\cos\frac{\pi k}{4}.$$

*Решение.* Характеристический полином имеет корни

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \pm i,$$

следовательно, характеристический полином наименьшей степени имеет вид

$$(\lambda - 1)(\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 1) = \\ = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2,$$

а разностное уравнение наименьшего порядка

$$y_{k+3} - 3y_{k+2} + 4y_{k+1} - 2y_k = 0.$$

### Пример П.93

Построим линейное однородное разностное стационарное уравнение насколько возможно низкого порядка, имеющее данные частные решения:

$$y_k^1 = 3k,\ y_k^2 = 2^k \sin\frac{\pi k}{3}.$$

*Решение*. Характеристический полином имеет корни

$$\lambda_{1,2} = 1,\ \lambda_{3,4} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 \pm i\sqrt{3},$$

следовательно, характеристический полином наименьшей степени имеет вид

$$(\lambda-1)^2(\lambda-1-\sqrt{3}i)(\lambda-1+\sqrt{3}i) = (\lambda^2-2\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda+1+4) =$$
$$= \lambda^4 - 4\lambda^3 + 9\lambda^2 - 10\lambda + 4,$$

а разностное уравнение наименьшего порядка

$$y_{k+4} - 4y_{k+3} + 9y_{k+2} - 10y_{k+1} + 4y_k = 0.$$

### Пример П.94

Требуется написать общее решение линейного неоднородного разностного уравнения $y_{k+2} - 4y_{k+1} + 5y_k = 3k - 4 + 10 \cdot (-1)^k$ с неопределенными коэффициентами, не вычисляя числовых значений коэффициентов.

*Решение*. Найдем корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$:

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i = \sqrt{5}(\cos\varphi \pm i\sin\varphi),\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

Поэтому общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_k = (C_1\cos\varphi + C_2\sin\varphi)\sqrt{5} + Ak + B + D(-1)^k.$$

### Пример П.95

Требуется написать общее решение линейного неоднородного разностного уравнения $y_{k+3} - 3y_{k+2} + 4y_{k+1} - 2y_k = 50 \cdot 3^k + 6k + 11$ с неопределенными коэффициентами, не вычисляя числовых значений коэффициентов.

*Решение*. Найдем корни характеристического уравнения $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0$. Один корень виден сразу: $\lambda_1 = 1$. Для нахождения двух других корней разделим характеристический полином на $\lambda - 1$:

$$\begin{array}{l|l}
\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 & \lambda - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{\lambda^3 - \lambda^2} & \lambda^2 - 2\lambda + 2 \\
\quad -2\lambda^2 + 4\lambda - 2 & \\
\quad \underline{-2\lambda^2 + 2\lambda} & \\
\qquad\quad 2\lambda - 2 & \\
\qquad\quad \underline{2\lambda - 2} & \\
\qquad\qquad\ 0 &
\end{array}$$



Находим корни уравнения $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$: $\lambda_{2,3} = 1 \pm i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

В правой части имеем $6k + 11 = (6k + 11) \cdot 1^k$. Следовательно, общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_k = C_1 + \left(C_2\cos\frac{\pi k}{4} + C_3\sin\frac{\pi k}{4}\right)(\sqrt{2})^k + A\cdot 3^k + (Bk + D)k.$$

### Пример П.96

Требуется написать общее решение линейного неоднородного разностного уравнения $y_{k+3} - y_{k+2} + 4y_{k+1} - 4y_k = 26 \cdot 3^k + 10k + 9$ с неопределенными коэффициентами, не вычисляя числовых значений коэффициентов.

*Решение*. Найдем корни характеристического уравнения $\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$. Для этого разложим характеристический полином на множители:

$$-\lambda^2 + 4\lambda - 4 = \lambda^2(\lambda - 1) + 4(\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4).$$

Таким образом, корни нашего многочлена

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = \pm 2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

В правой части имеем $10k + 9 = (10k + 9) \cdot 1^k$. Следовательно, общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_k = C_1 + 2^k\left(C_2\cos\frac{\pi k}{2} + C_3\sin\frac{\pi k}{2}\right) + A\cdot 3^k + (Bk + D)k.$$

### Пример П.97

Требуется написать общее решение линейного неоднородного разностного уравнения $y_{k+3} + y_{k+2} + 4y_{k+1} + 4y_k = 52 \cdot (-3)^k + 6(k + 2)(-1)^k$ с неопределенными коэффициентами, не вычисляя числовых значений коэффициентов.

*Решение*. Найдем корни характеристического уравнения $\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$. Для этого разложим характеристический полином на множители:

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 4 = \lambda^2(\lambda + 1) + 4(\lambda + 1) = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 4).$$

Таким образом, корни нашего многочлена

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_{2,3} = \pm 2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно, общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_k = C_1(-1)^k + 2^k\left(C_2\cos\frac{\pi k}{2} + C_3\sin\frac{\pi k}{2}\right) + A\cdot(-3)^k + (Bk + D)k(-1)^k.$$

### П.6.3. Линейные стационарные системы разностных уравнений

Для решения примеров данного раздела практикума будем руководствоваться теорией, изложенной в параграфах 7.5, 7.6.

**Пример П.98**

Решим систему разностных уравнений

$$\begin{cases} x_{k+1} = 4x_k - y_k, \\ y_{k+1} = 3x_k + y_k - z_k, \\ z_{k+1} = x_k + z_k. \end{cases}$$

*Решение*. Составим характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda)^2 + [3(1-\lambda)+1] =$$

$$= 4 - 8\lambda + 4\lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 4 - 3\lambda = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = -(\lambda - 2)^3 = 0.$$

Итак, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Найдем жорданов базис. Для нахождения собственных векторов выпишем систему уравнений $AS_1 = \lambda S_1$, $S_1 \neq 0$.

Матрица этой системы

$$(A - 2E) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решаем систему уравнений, выполняя элементарные преобразования над ее матрицей. Поставим третью строчку на первое место. Теперь умножим новую первую строчку на 2 и вычтем из второй строчки. Умножим первую строчку на 3 и вычтем из третьей строчки. Вычтем из третьей строчки вторую. Имеем

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в качестве собственного вектора мы можем взять, например, $S^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Найдем присоединенный вектор высоты 1, т.е. присоединенный вектор $S_2$, координаты которого удовлетворяют системе уравнений $AS_2 = \lambda S_2 + S_1$, где $S_1$ — собственный вектор. Расширенная матрица этой системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$



Решаем систему, выполняя элементарные преобразования над ее расширенной матрицей. Поставим третью строчку на первое место. Теперь умножим новую первую строчку на 2 и вычтем из второй строчки. Умножим первую строчку на 3 и вычтем из третьей строчки. Вычтем из третьей строчки вторую. Имеем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Получилось $x_1 = x_3 + 1$, $x_2 = 2x_3 + 1$. В качестве присоединенного вектора мы можем выбрать, например, $S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Будем искать присоединенный вектор высоты 2, т.е. присоединенный вектор $S_3$, координаты которого удовлетворяют системе уравнений $AS_3 = \lambda S_3 + S_2$, где $S_2$ — присоединенный вектор высоты 1. Расширенная матрица этой системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Решаем систему, выполняя элементарные преобразования над ее расширенной матрицей. Поставим третью строчку на первое место. Теперь умножим новую первую строчку на 2 и вычтем из второй строчки. Умножим первую строчку на 3 и вычтем из третьей строчки. Вычтем из третьей строчки вторую. Имеем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Получилось $x_1 = x_3 - 1$, $x_2 = -2 + 2x_3$. Таким образом, в качестве присоединенного вектора мы можем выбрать, например, $S_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Итак, матрица перехода $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, жорданова форма нашей исходной матрицы системы уравнений $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому

$$J^k=\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^k & k2^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}2^{k-2}\\ 0 & 2^k & k2^{k-1}\\ 0 & 0 & 2^k\end{pmatrix},$$

а фундаментальная матрица решений нашей системы $SJ^k$. Другими словами, фундаментальная система решений нашей системы уравнений:

$$\varphi_1(t)=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}2^k,\ \varphi_2(t)=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}k2^{k-1}+\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}2^k,$$

$$\varphi_3(t)=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\frac{k(k-1)}{2}2^{k-2}+\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}k2^{k-1}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}2^k,$$

а общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}2^kC_1+\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}k2^{k-1}+\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}2^k\right)C_2+\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\frac{k(k-1)}{2}2^{k-2}+\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}k2^{k-1}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}2^k\right)C_3,$$

или

$$\begin{cases}x_k=C_12^k+C_2k2^{k-1}+C_3\dfrac{k(k-1)}{2}2^{k-2},\\ y_k=2C_12^k+(2k2^{k-1}-2^k)C_2+\left(2\dfrac{k(k-1)}{2}2^{k-2}-k2^{k-1}\right)C_3,\\ z_k=C_12^k+\left(k2^{k-1}-2^k\right)C_2+\left(\dfrac{k(k-1)}{2}2^{k-2}-k2^{k-1}+2^k\right)C_3.\end{cases}$$

---

**Пример П.99**

Решим систему разностных уравнений

$$\begin{cases}x_{k+1}=2x_k-y_k,\\ y_{k+1}=2y_k-x_k-5\cdot 3^k\sin\left(\dfrac{\pi}{2}k\right).\end{cases}$$

*Решение*. Выпишем характеристическое уравнение:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2-1=0.$$

Таким образом, собственные числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Для нахождения собственного вектора $S_1$, соответствующего первому собственному числу, выпишем систему уравнений $AS_1 = \lambda_1 S_1$, $S_1 \neq 0$. Матрица этой системы

$$(A-E)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

так что в качестве собственного вектора $S_1$ можно взять, например, $S_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Для нахождения собственного вектора $S_2$, соответствующего второму собственному числу, выпишем систему уравнений $AS_2 = \lambda_2 S_2$, $S_2 \neq 0$. Матрица этой системы

$$(A-E)=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix},$$

так что в качестве собственного вектора $S_2$ можно взять, например, $S_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Таким образом, общее решение линейной однородной системы имеет вид

$$\begin{cases}x_k^0=C_1+C_2\cdot 3^k,\\ y_k^0=C_1-C_2\cdot 3^k.\end{cases}$$

Найдем частное решение нашей линейной неоднородной системы. Поскольку $3\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=3i$ не является корнем характеристического полинома и степень полинома от $k$ в правой части второго из уравнений системы равна нулю (полином в данном случае — это константа 5), частное решение будем искать в виде

$$\begin{cases}x_k=3^k\left[a\cos\left(\dfrac{\pi}{2}k\right)+b\sin\left(\dfrac{\pi}{2}k\right)\right],\\ y_k=3^k\left[c\cos\left(\dfrac{\pi}{2}k\right)+d\sin\left(\dfrac{\pi}{2}k\right)\right].\end{cases}$$

Константы $a$, $b$, $c$, $d$ найдем методом неопределенных коэффициентов. Имеем

$$\begin{cases}3^{k+1}\left[a\cos\left(\dfrac{\pi}{2}(k+1)\right)+b\sin\left(\dfrac{\pi}{2}(k+1)\right)\right]=\\ =2\cdot 3^k\left[a\cos\left(\dfrac{\pi}{2}k\right)+b\sin\left(\dfrac{\pi}{2}k\right)\right]-3^k\left[c\cos\left(\dfrac{\pi}{2}k\right)+d\sin\left(\dfrac{\pi}{2}k\right)\right],\\ 3^{k+1}\left[c\cos\left(\dfrac{\pi}{2}(k+1)\right)+d\sin\left(\dfrac{\pi}{2}(k+1)\right)\right]=\\ =2\cdot 3^k\left[c\cos\left(\dfrac{\pi}{2}k\right)+d\sin\left(\dfrac{\pi}{2}k\right)\right]-3^k\left[a\cos\left(\dfrac{\pi}{2}k\right)+b\sin\left(\dfrac{\pi}{2}k\right)\right]-5\cdot 3^k\sin\left(\dfrac{\pi}{2}k\right).\end{cases}$$

Сокращая на $3^k$, делая подстановку

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}(k+1)\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)\text{ и }\sin\left(\frac{\pi}{2}(k+1)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой частях, получаем систему

$$\begin{cases} 3b = 2a - c, \\ -3a = 2b - d, \\ 2d = 2c - a, \\ -3c = 2d - b - 5. \end{cases}$$

Решая данную систему уравнений, находим $a = \dfrac{1}{3},\ b = -\dfrac{1}{6},\ c = \dfrac{7}{6},\ d = \dfrac{2}{3}.$

Таким образом, общее решение нашей неоднородной разностной системы имеет вид

$$\begin{cases} x_k = C_1 + C_2 \cdot 3^k + 3^k\left[\dfrac{1}{3}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}k\right) - \dfrac{1}{6}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}k\right)\right], \\ y_k = C_1 - C_2 \cdot 3^k + 3^k\left[\dfrac{7}{6}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}k\right) + \dfrac{2}{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}k\right)\right]. \end{cases}$$

## Пример П.100

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + y_k, \\ y_{k+1} = 3y_k - 2x_k. \end{cases}$$

*Решение.* Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0,\ \lambda = 2 \pm i.$$

Для корня $\lambda = 2 + i$ найдем собственный вектор $(a, b)$:

$$\begin{cases} (-1-i)a + b = 0, \\ -2a + (1-i)b = 0. \end{cases}$$

Можно положить $a = 1$, $b = 1 + i$. Имеем собственный вектор $S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$.
Так как наша разностная система уравнений имеет только вещественные коэффициенты, то собственный вектор $S_2$, соответствующий собственному числу $\lambda = 2 - i$, будет комплексно-сопряженным с найденным собственным вектором $S_1$: $S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$. Общее комплексное решение системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \hat{C}_1(2+i)^k\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} + \hat{C}_2(2-i)^k\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix},$$

где $\hat{C}_1$ и $\hat{C}_2$ — произвольные комплексные постоянные. Чтобы получить два вещественных решения, надо взять вещественную и мнимую части найденного комплексного решения. Имеем



$$(2+i)^k\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = (\sqrt{5})^k\left[\cos\left(k\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) + i\sin\left(k\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} =$$

$$= (\sqrt{5})^k\begin{pmatrix} \cos\left(k\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) \\ \cos\left(k\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) - \sin\left(k\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} + i(\sqrt{5})^k\begin{pmatrix} \sin\left(k\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) \\ \cos\left(k\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) + \sin\left(k\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Общее вещественное решение заданной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \left(C_1\begin{pmatrix} \cos\left(k\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) \\ \cos\left(k\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) - \sin\left(k\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + C_2\begin{pmatrix} \sin\left(k\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) \\ \cos\left(k\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) + \sin\left(k\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}\right)(\sqrt{5})^k,$$

или

$$\begin{cases} x_k = C_1(\sqrt{5})^k\cos\left(k\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) + C_2(\sqrt{5})^k\sin\left(k\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right), \\ y_k = C_1(\sqrt{5})^k\left[\cos\left(k\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) - \sin\left(k\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\right] + \\ + C_2(\sqrt{5})^k\left[\cos\left(k\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) + \sin\left(k\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\right], \end{cases}$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные вещественные постоянные.

## Пример П.101

Решим неоднородную систему разностных уравнений

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - y_k + 3^k, \\ y_{k+1} = -2x_k - 3^k. \end{cases}$$

*Решение.* Сначала для однородной системы

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - y_k, \\ y_{k+1} = -2x_k \end{cases}$$

с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ находим корни характеристического полинома:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 2 = 0,\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2.$$

Находим собственный вектор, соответствующий первому собственному числу, для этого решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2a-b=0, \\ -2a+b=0. \end{cases}$$

Исходя из данной системы в качестве собственного вектора можем взять $S_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Найдем собственный вектор, соответствующий второму собственному числу, для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} -a-b=0, \\ -2a-2b=0. \end{cases}$$

Исходя из данной системы в качестве собственного вектора можем взять $S_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

Линейно независимыми решениями линейной однородной системы являются

$$(-1)^k\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \text{ и } 2^k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Частное решение нашей неоднородной системы будем искать в виде

$$\begin{cases} x_k=a\cdot 3^k, \\ y_k=b\cdot 3^k \end{cases}$$

методом неопределенных коэффициентов. Получаем

$$\begin{cases} a\cdot 3^{k+1}=a\cdot 3^k-b\cdot 3^k+3^k, \\ b\cdot 3^{k+1}=-2a\cdot 3^k-3^k. \end{cases}$$

Сокращая на $3^k$ и преобразовывая уравнения, находим

$$\begin{cases} 2a+b=1, \\ 2a+3b=-1, \end{cases}$$

откуда $b=-1$, $a=1$. Таким образом, общее решение заданной неоднородной разностной системы

$$\begin{pmatrix}x_k\\y_k\end{pmatrix}=C_1\cdot(-1)^k\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+C_2\cdot 2^k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+3^k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} x_k=(-1)^kC_1+2^kC_2+3^k, \\ y_k=2\cdot(-1)^kC_1-2^kC_2-3^k. \end{cases}$$



**Пример П.102**

Решим систему разностных уравнений

$$\begin{cases} x_{k+1}=2x_k+y_k, \\ y_{k+1}=2y_k+4z_k, \\ z_{k+1}=x_k-z_k. \end{cases}$$

*Решение*. Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)^2(-1-\lambda)-(-4)=$$

$$=-4+4\lambda-\lambda^2-4\lambda+4\lambda^2-\lambda^3+4=-\lambda^3+3\lambda^2=0,$$

откуда $\lambda_1=3$, $\lambda_2=\lambda_3=0$. Для простого корня $\lambda_1=3$ находим собственный вектор $(a, b, c)$, решая систему

$$\begin{cases} -a+b=0, \\ -b+4c=0, \\ a-4c=0. \end{cases}$$

Матрица данной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решаем систему уравнений, выполняя элементарные преобразования над ее матрицей. Умножим первые две строчки на $-1$, затем вычтем из третьей строчки первую. После этого вычтем из третьей строчки вторую, а к первой строчке прибавим вторую. Имеем

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в качестве собственного вектора можем взять, например, $S_1=\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}$. Для кратного корня $\lambda=0$ найдем жорданов базис. Для нахождения собственных векторов выпишем систему уравнений $AS_1=\lambda S_1$, $S_1\neq 0$. Матрица этой системы

$$(A-0\cdot E)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решаем систему уравнений, выполняя элементарные преобразования над ее матрицей. Поменяем местами первую и третью строки и разделим вторую строку на 2. Теперь вычтем из третьей строки первую, умноженную на 2. После этого вычтем из третьей строки вторую. Имеем

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в качестве собственного вектора мы можем выбрать, например, $S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Найдем присоединенный вектор. Выпишем систему уравнений $AS_2 = \lambda S_2 + S_1$.

Расширенная матрица этой системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Решаем систему, выполняя элементарные преобразования над ее расширенной матрицей. Поменяем местами первую и третью строчки, а вторую строчку разделим на 2. Теперь вычтем из третьей строчки первую строчку, умноженную на два. После этого вычтем из третьей строчки вторую. Имеем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Получилось $x_1 = 1 + x_3$, $x_2 = -1 - 2x_3$. Таким образом, в качестве присоединенного вектора мы можем выбрать, например, $S_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Итак, матрица перехода $S = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, жорданова форма нашей исходной матрицы системы уравнений $J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, поэтому

$$J^k = \begin{pmatrix} 3^k & 0 & 0 \\ 0 & 0^k & k \\ 0 & 0 & 0^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$



фундаментальная матрица решений нашей системы $SJ^k$. Другими словами, фундаментальная система решений нашей системы уравнений

$$\varphi_1(t) = 3^k \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_2(t) = 0^k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_3(t) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} t + 0^k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

или

$$\varphi_1(t) = 3^t \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_3(t) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} t \right\},$$

а общее решение имеет вид

$$\begin{cases} x_k = 4 \cdot 3^k C_1 + tC_3, \\ y_k = 4 \cdot 3^k C_1 - 2tC_3, \\ z_k = tC_3. \end{cases}$$

**Пример П.103**

Исследуем устойчивость нулевого положения равновесия линейной однородной стационарной системы разностных уравнений

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - 10y_k, \\ y_{k+1} = \dfrac{1}{4}x_k - 2y_k. \end{cases}$$

*Решение*. Найдем собственные числа матрицы системы $A = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ \frac{1}{4} & -2 \end{pmatrix}$.

Запишем характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -10 \\ \frac{1}{4} & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 + \frac{10}{4} = \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{2} = 0,$$

или $2\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$.

Тогда собственные числа матрицы $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-2}}{2} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{i}{2}$.

Таким образом, $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$. Следовательно, нулевое положение равновесия асимптотически устойчиво.

**Пример П.104**

Исследуем устойчивость нулевого положения равновесия линейной однородной стационарной системы разностных уравнений

$$\begin{cases} x_{k+1} = 8x_k - 3y_k, \\ y_{k+1} = 2x_k + 3y_k. \end{cases}$$

*Решение.* Найдем собственные числа матрицы системы $A = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Запишем характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -3 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 11\lambda + 24 + 6 = \lambda^2 - 11\lambda + 30 = 0.$$

Тогда собственные числа матрицы

$$\lambda_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-120}}{2} = \frac{11 \pm 1}{2}, \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 6.$$

Таким образом, $|\lambda_1| > 1$, $|\lambda_2| > 1$. Следовательно, нулевое положение равновесия неустойчиво.

**Пример П.105**

Требуется найти все значения параметра $b \neq 1$, при которых асимптотически устойчиво нулевое положение равновесия линейной системы разностных уравнений

$$\begin{cases} x_{k+1} = bx_k - y_k, \\ y_{k+1} = x_k - y_k. \end{cases}$$

*Решение.* Матрица системы имеет вид $A = \begin{pmatrix} b & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Тогда характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} b-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - b\lambda - b + 1 = .$$

$$= \lambda^2 - (b-1)\lambda - (b-1) = 0$$

Собственные числа матрицы

$$\lambda_{1,2} = \frac{b - 1 \pm \sqrt{b^2 - 2b + 1 + 4b - 4}}{2} = \frac{b - 1 \pm \sqrt{b^2 + 2b - 3}}{2}.$$

Посмотрим, при каких значениях параметра $b$ квадратный трехчлен $b^2 + 2b - 3$ положителен, а при каких отрицателен. Корни этого трехчлена: $b_1 = -3$, $b_2 = 1$. Значит, при $-3 < b < 1$ трехчлен отрицателен, а при $b < -3$ и $b > 1$ — положителен.

Пусть сначала $-3 < b < 1$. Тогда мы имеем пару комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения. Посмотрим, при каких значениях $b$ собственные числа матрицы $A$ по модулю меньше единицы:

$$(b-1)^2 + b^2 + 2b - 3 < 4, \; 4 - 4b < 4, \; b > 0.$$

Итак, если $0 < b < 1$, то собственные числа матрицы $A$ комплексно-сопряжены и по модулю меньше единицы.

Пусть теперь $b \le -3$ или $b > 1$. Посмотрим, при каких значениях $b$ собственные числа матрицы $A$ по модулю меньше единицы:

$$-2 < b - 1 \pm \sqrt{b^2 + 2b - 3} < 2,$$

$$-1 - b < \pm\sqrt{b^2 + 2b - 3} < 3 - b,$$

$$1 - 2b + b^2 < b^2 + 2b - 3 < 9 - 6b + b^2.$$

Получаем два неравенства: $4 < 4b$, т.е. $b > 1$, и $8b < 12$, т.е. $b < \frac{3}{2}$. Таким образом, если $1 < b < \frac{3}{2}$, то собственные числа матрицы $A$ вещественны и по модулю меньше единицы.

Итак, нулевое решение асимптотически устойчиво при $b \in (0;1) \cup \left(1;\frac{3}{2}\right)$.

## П.7. Стохастические дифференциальные уравнения

Для решения примеров данного раздела практикума будем руководствоваться теорией, изложенной в гл. 8[1].

Мы рассматриваем возможные решения $X_t(\omega)$ стохастического дифференциального уравнения

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot \text{«шум»}.$$

Интерпретация Ито состоит в том, что процесс $X_t$ должен удовлетворять стохастическому интегральному уравнению

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s,$$

или в форме дифференциалов

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t.$$

**Пример П.106**

Докажем с помощью формулы Ито, что

$$\int_0^t W_s^2 dW_s = \frac{1}{3}W_t^3 - \int_0^t W_s ds.$$

[1] Подробное описание методов решения одномерных стохастических дифференциальных уравнений см. также в книге: *Gard T. C.* Introduction to stochastic differential equations. Dekker, 1988.

*Решение*. Пусть $Y_t = W_t^3$. Тогда по формуле Ито

$$dY_t = d(W_t^3 = 3W_t^2 dW_t + \frac{1}{2} \cdot 6W_t dt,$$

следовательно,

$$\int_0^t W_s^2 dW_s = \frac{1}{3} W_t^3 - \int_0^t W_s ds.$$

---

**Пример П.107**

Пусть $W_t$ — одномерное броуновское движение, $W_0 = 0$. Определим

$$\beta_k(t) = E(W_t^k),\ t \geq 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{П.39}$$

Требуется доказать с помощью формулы Ито, что

$$\beta_k(t) = \frac{1}{2} k(k-1) \int_0^t \beta_{k-2}(s) ds, \quad k \geq 2.$$

*Решение*. Требуется показать, что $E(W_t^4) = 3t^2$, и найти $E(W_t^6)$. Применяя формулу Ито, находим

$$d(W_t^k) = kW_t^{k-1} dW_t + \frac{k(k-1)}{2} W_t^{k-2} dt, \quad k \geq 2.$$

Интегрируя данное равенство, получим

$$k\int_0^t W_s^{k-1} dW_s = W_t^k - \frac{k(k-1)}{2} \int_0^t W_s^{k-2} ds, \quad k \geq 2.$$

Возьмем от обеих частей математическое ожидание:

$$0 = E(W_t^k) - \frac{k(k-1)}{2} \int_0^t E(W_s^{k-2}) ds, \quad k \geq 2.$$

Используя обозначения (П.39), находим

$$\beta_k(t) = E(W_t^k) = \frac{k(k-1)}{2} \int_0^t \beta_{k-2}(s) ds, \quad k \geq 2.$$

Таким образом, имеем:

$$\beta_2 = E(W_t^2) = \int_0^t ds = t = D(W_t),$$

$$\beta_4 = E(W_t^4) = \frac{4 \cdot 3}{2} \int_0^t s\, ds = 3t^2,$$

$$\beta_6 = E(W_t^6) = \frac{6 \cdot 5}{2} \int_0^t 3s^2 ds = 15t^3.$$

---



**Пример П.108**

Решим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = X_t dt + dW_t.$$

*Решение*. Умножим обе части уравнения на интегрирующий множитель $e^{-t}$:

$$e^{-t} dX_t = e^{-t} X_t dt + e^{-t} dW_t.$$

По теореме 8.3

$$d(e^{-t} X_t) = -e^{-t} X_t dt + e^{-t} dX_t = -e^{-t} X_t dt + e^{-t} X_t dt + e^{-t} dW_t = e^{-t} dW_t,$$

или

$$e^{-t} X_t = X_0 + \int_0^t e^{-s} dW_s,$$

следовательно,

$$X_t = e^t X_0 + \int_0^t e^{t-s} dW_s.$$

---

**Пример П.109**

Решим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = -X_t dt + e^{-t} dW_t.$$

*Решение*. Умножим обе части уравнения на интегрирующий множитель $e^t$:

$$e^t dX_t = -e^t X_t dt + dW_t.$$

По теореме 8.3

$$d(e^t X_t) = e^t X_t dt + e^t dX_t = e^t X_t dt - e^t X_t dt + dW_t = dW_t.$$

Интегрируя, получаем

$$e^t X_t = X_0 + W_t, \text{ или } X_t = e^{-t} X_0 + e^{-t} W_t$$

(мы предполагаем, что $W_0 = 0$).

---

**Пример П.110**

а) Требуется решить уравнение Орнштейна — Уленбека (или уравнение Ланжевена)

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dW_t,$$

где $\mu$, $\sigma$ — вещественные константы, $W_t \in \mathbb{R}$ (решение этого уравнения называется *процессом Орнштейна — Уленбека*).

б) Найти $E(X_t)$ и $D(X_t) = E((X_t - E(X_t))^2)$.

*Решение*. Умножим уравнение Орнштейна — Уленбека на интегрирующий множитель $e^{-\mu t}$:

$$e^{-\mu t}dX_t = \mu e^{-\mu t}X_t dt + \sigma e^{-\mu t}dW_t.$$

По теореме 8.3

$$d(X_t e^{-\mu t}) = -\mu e^{-\mu t}X_t dt + e^{-\mu t}dX_t =$$
$$= -\mu e^{-\mu t}X_t dt + \mu e^{-\mu t}X_t dt + \sigma e^{-\mu t}dW_t = \sigma e^{-\mu t}dW_t.$$

Тогда

$$X_t e^{-\mu t} = X_0 + \sigma\int_0^t e^{-\mu s}dW_s, \text{ или } X_t = e^{\mu t}X_0 + \sigma\int_0^t e^{\mu(t-s)}dW_s.$$

Математическое ожидание, очевидно, равно $E(X_t) = e^{\mu t}X_0$, а дисперсия

$$D(X_t) = \sigma^2\int_0^t e^{2\mu(t-s)}ds = -\frac{\sigma^2}{2\mu}e^{2\mu(t-s)}\Big|_{s=0}^{s=t} = \frac{\sigma^2}{2\mu}(e^{2\mu t}-1).$$

**Пример П.111**

Требуется решить стохастическое дифференциальное уравнение

$$dY_t = rdt + \alpha Y_t dW_t,$$

где $r$, $\alpha$ — вещественные константы, $W_t \in \mathbb{R}$.

*Решение*. Умножим уравнение на интегрирующий множитель $F_t = e^{Z_t}$, где $Z_t = -\alpha W_t + \alpha^2 t$:

$$e^{Z_t}dY_t = e^{Z_t}rdt + e^{Z_t}\alpha Y_t dW_t.$$

По теореме 8.5 находим

$$d(e^{Z_t}Y_t) = e^{Z_t}(rdt + \alpha Y_t dW_t) + Y_t e^{Z_t}(-\alpha dW_t + \alpha^2 dt) +$$
$$+ e^{Z_t}(rdt + \alpha Y_t dW_t)(-\alpha dW_t + \alpha^2 dt) =$$
$$= e^{Z_t}(rdt + \alpha Y_t dW_t - \alpha Y_t dW_t + \alpha^2 Y_t dt - \alpha^2 Y_t dt) = e^{Z_t}rdt.$$

Таким образом,

$$e^{Z_t}Y_t = Y_0 + r\int_0^t e^{Z_s}ds,$$

или

$$Y_t = \exp(\alpha W_t - \alpha^2 t)\left(Y_0 + r\int_0^t \exp(-\alpha W_t + \alpha^2 t)ds\right).$$

**Пример П.112**

*Средневозвратным процессом Орнштейна — Уленбека* называется решение $X_t$ стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t = (m - X_t)dt + \sigma dW_t,$$

где $m$, $\sigma$ — вещественные константы, $W_t \in \mathbb{R}$. Требуется:



а) решить это уравнение;
б) найти $E(X_t)$ и $D(X_t) = E((X_t - E(X_t))^2)$.

*Решение*. Умножим уравнение на интегрирующий множитель $e^t$:

$$e^t dX_t = e^t(m - X_t)dt + e^t\sigma dW_t.$$

По теореме 8.3 получаем

$$d(e^t X_t) = e^t X_t dt + e^t dX_t = e^t X_t dt + e^t(m - X_t)dt + e^t\sigma dW_t = e^t m dt + e^t\sigma dW_t.$$

Поэтому

$$e^t X_t = X_0 + m\int_0^t e^s ds + \sigma\int_0^t e^s dW_s = X_0 + m(e^t - 1) + \sigma\int_0^t e^s dW_s.$$

Следовательно,

$$X_t = m + e^{-t}(X_0 - m) + \sigma\int_0^t e^{s-t}dW_s.$$

Очевидно, что математическое ожидание и дисперсия равны, соответственно,

$$E(X_t) = m + (X_0 - m)e^{-t};$$

$$D(X_t) = \sigma^2\int_0^t e^{2(s-t)}ds = \frac{\sigma^2}{2}e^{2(s-t)}\Big|_{s=0}^{s=t} = \frac{\sigma^2}{2}(1 - e^{-2t}).$$

**Пример П.113**

Требуется решить двумерное стохастическое дифференциальное уравнение

$$\begin{cases} dX_1 = X_2(t)dt + \alpha dW_1(t), \\ dX_2 = -X_1(t)dt + \beta dW_2(t), \end{cases}$$

где $(W_1(t), W_2(t))$ — двумерное броуновское движение; $\alpha$, $\beta$ — константы (это уравнение вибрирующей струны под действием случайной силы).

*Решение*. Запишем наше двумерное стохастическое дифференциальное уравнение в матричном виде:

$$dX(t) = JX(t)dt + MdW(t),$$

где

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, dW(t) = \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{pmatrix}.$$

В качестве интегрирующего множителя будем использовать матричную экспоненту $e^{-tJ}$. Имеем

$$d(e^{-tJ}X(t)) = -Je^{-tJ}X(t)dt + e^{-tJ}dX(t) =$$
$$= -Je^{-tJ}X(t)dt + Je^{-tJ}X(t)dt + e^{-tJ}MdW(t) = e^{-tJ}MdW(t).$$

Следовательно,

$$e^{-tJ}X(t)=X(0)+\int_0^t e^{-sJ}MdW(s),$$

или

$$X(t)=e^{tJ}X(0)+e^{tJ}\int_0^t e^{-sJ}MdW(s),$$

где

$$e^{tJ}=E+tJ+\frac{t^2}{2}J^2+\ldots+\frac{t^n}{n!}J^n+\ldots\in\mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Пользуясь тем, что $J^2 = -E$, полученное решение можно переписать в виде

$$X_1(t)=X_1(0)\cos t+X_2(0)\sin t+\int_0^t\alpha\cos(t-s)dW_1(s)+\int_0^t\beta\sin(t-s)dW_2(s);$$

$$X_2(t)=-X_1(0)\sin t+X_2(0)\cos t-\int_0^t\alpha\sin(t-s)dW_1(s)+\int_0^t\beta\cos(t-s)dW_2(s).$$

---

# Задачи для самостоятельного решения

Нумерация задач дана в соответствии с параграфами практикума.

## 1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Решить дифференциальные уравнения.

**1.1.** $xy' - 2y = 2x^4$.
**1.2.** $(2x + 1)y' = 4x + 2y$.
**1.3.** $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sec x$.
**1.4.** $(xy + e^x)dx - xdy = 0$.
**1.5.** $x^2y' + xy + 1 = 0$.
**1.6.** $xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x}$.
**1.7.** $(2x + y)dy = ydx + 4\ln y dy$.
**1.8.** $(x + 1)(y' + y^2) = -y$.
**1.9.** $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.
**1.10.** $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$.
**1.11.** $(2x^2y\ln y - x)y' = y$.
**1.12.** $(x^2 - 1)y'\sin y + 2x\cos y = 2x - 2x^3$.
**1.13.** $y(x)=\int_0^x y(t)dt+x+1.$
**1.14.** $\int_0^x (x-t)y(t)dt=2x+\int_0^x y(t)dt.$
**1.15.** $xy^2y' = x^2 + y^3$.
**1.16.** $2y'-\frac{x}{y}=\frac{xy}{x^2-1}.$
**1.17.** $y'x^3\sin y = xy' - 2y$.
**1.18.** $xdx = (x^2 - 2y + 1)dy$.
**1.19.** $(x + 1)(yy' - 1) = y^2$.
**1.20.** $x(e^y - y') = 2$.

Проверить, что данные уравнения являются уравнениями в полных дифференциалах, и решить их.

**1.21.** $(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0$.
**1.22.** $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$.
**1.23.** $\frac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0.$
**1.24.** $2x(1+\sqrt{x^2-y})dx-\sqrt{x^2-y}dy=0.$
**1.25.** $(1 + y^2\sin 2x)dx - 2y\cos^2 x\, dy = 0$.

**1.26.** $3x^2(1+\ln y)dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy.$

**1.27.** $\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y - 1}dy = 0.$

Решить уравнения, найдя каким-либо способом интегрирующий множитель или сделав замену переменных.

**1.28.** $(x^2 + y^2 + z^2)dx + ydy = 0.$

**1.29.** $\left(y - \frac{1}{x}\right)dx + \frac{dy}{y} = 0.$

**1.30.** $y^2dx + [xy + \mathrm{tg}(xy)]dy = 0.$

**1.31.** $(x^2 + 2x + y)dx = (x - 3x^2y)dy.$

**1.32.** $ydx - xdy = 2x^3\mathrm{tg}\frac{y}{x}dx.$

**1.33.** $(x^2 - y^2 + y)dx + x(2y - 1)dy = 0.$

**1.34.** $(2x^2y^2 + y)dx + (x^3y - x)dy = 0.$

**1.35.** $x(\ln y + 2\ln x - 1)dy = 2ydx.$

**1.36.** $(x^2 + 1)(2xdx + \cos ydy) = 2x\sin ydx.$

**1.37.** $(x^2 - y)dx + x(y + 1)dy = 0.$

**1.38.** $y^2(ydx - 2xdy) = x^3(xdy - 2ydx).$

**1.39.** $ydy = (xdy + ydx)\sqrt{1+y^2}.$

**1.40.** $xy^2(xy' + y) = 1.$

Решить уравнения с разделяющимися переменными.

**1.41.** $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0,\ y(0) = 1.$

**1.42.** $y'\mathrm{ctg}\, x + y = 2,\ y(x) \to -1$ при $x \to 0.$

**1.43.** $y' - y = 2x - 3.$

**1.44.** $(x + 2y)y' = 1,\ y(0) = -1.$

**1.45.** $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}.$

Решить однородные или приводящиеся к однородным уравнения.

**1.46.** $y^2 + x^2y' = xyy'.$

**1.47.** $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}.$

**1.48.** $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0.$

**1.49.** $y' = \frac{y+2}{x+1} + \mathrm{tg}\frac{y-2x}{x+1}.$

**1.50.** $2y' + x = 4\sqrt{y}.$

Решить уравнения, в которые не входит искомая функция $y$.

**1.51.** $y''(e^x + 1) + y' = 0.$

**1.52.** $y''' = y''^2.$

**1.53.** $y''' = 2(y'' - 1)\mathrm{ctg}\, x.$

**1.54.** $y''^2 = y'^2 + 1.$

**1.55.** $y'' - xy''' + y'''^3 = 0.$

**1.56.** $xy'' = y' + x\sin\frac{y'}{x}.$

**1.57.** $y''^2 + y' = xy''.$

**1.58.** $xy''' = y'' - xy''.$

**1.59.** $2y'(y'' + 2) = xy''^2.$

**1.60.** $y''^2 - 2y'y''' + 1 = 0.$

Решить уравнения, в которые не входит независимая переменная $x$.

**1.61.** $y'' = 2yy'.$

**1.62.** $yy'' + 1 = y'^2.$

**1.63.** $yy'' = y'^2 - y'^3.$

**1.64.** $2yy'' = y^2 + y'^2.$

**1.65.** $y'' = e^y.$

**1.66.** $y^4 - y^3y'' = 1.$

**1.67.** $y''^2 - 2y'y''' + 1 = 0.$

**1.68.** $yy'' - 2yy'\ln y = y'^2.$

**1.69.** $(y' + 2y)y'' = y'^2.$

**1.70.** $yy'' + y = y'^2.$

Понизить порядок данных уравнений, пользуясь их однородностью, и решить эти уравнения.

**1.71.** $(x^2 + 1)(y'^2 - yy'') = xyy'.$

**1.72.** $xyy'' + xy'^2 = 2yy'.$

**1.73.** $x^2yy'' = (y - xy')^2.$

**1.74.** $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{y'^2}{y}.$

**1.75.** $y(xy'' + y') = xy'^2(1 - x).$

**1.76.** $x^2yy'' + y'^2 = 0.$

**1.77.** $x^2(y'^2 - 2yy'') = y^2.$

**1.78.** $xyy'' = y'(y + y').$

**1.79.** $4x^2y^3y'' = x^2 - y^4.$

**1.80.** $x^3y'' = (y - xy')(y - xy' - x).$

**1.81.** $\frac{y^2}{x^2} + y'^2 = 3xy'' + \frac{2yy'}{x}.$

**1.82.** $x^2(2yy'' - y'^2) = 1 - 2xyy'.$

**1.83.** $x^4(y'^2 - 2yy'') = 4x^3yy' + 1.$

**1.84.** $yy' + xyy'' - xy'^2 = x^3.$

Решить уравнения, преобразовав их к такому виду, чтобы обе части уравнения являлись полными производными.

**1.85.** $y'y''' = 2y''^2.$

**1.86.** $yy'' = y'(y' + 1).$

**1.87.** $5y'''^2 - 3y''y^{IV} = 0.$

**1.88.** $yy'' + y'^2 = 1.$

**1.89.** $y'' = xy' + y + 1.$

**1.90.** $xy'' - y' = x^2yy'.$

Выделить области на плоскости $x, y$, в которых через каждую точку проходит единственное решение уравнения.

**1.91.** $y' = 2xy + y^2.$

**1.92.** $y' = 2 + \sqrt[3]{y - 2x}.$

**1.93.** $(x - 2)y' = \sqrt{y} - x.$

**1.94.** $y' = 1 + \operatorname{tg} y$.
**1.95.** $(y - x)y' = y\ln x$.
**1.96.** $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.
Определить, при каких начальных условиях существует единственное решение следующих систем.

**1.97.** $\begin{cases} \dot{x} = y^2 + \sqrt[3]{t}, \\ \dot{y} = \sqrt[3]{x}. \end{cases}$

**1.98.** $\begin{cases} \dot{x} = y^3 + \ln(t+1), \\ x\dot{y} = \sqrt[3]{y-t}. \end{cases}$

Найдя путем подбора частное решение, привести данные уравнения Риккати к уравнениям Бернулли и решить их.
**1.99.** $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$.
**1.100.** $xy' - (2x + 1)y + y^2 = -x^2$.
**1.101.** $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$.

## 2. Линейные уравнения

Решить линейные уравнения с постоянными коэффициентами.
**2.1.** $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$.
**2.2.** $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$.
**2.3.** $y'' + y = x\sin x$.
**2.4.** $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$.
**2.5.** $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$.
**2.6.** $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$.
**2.7.** $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$.
**2.8.** $y'' + y = 4\sin x$.
**2.1.** $y'' - 3y' + 2y = \sin x$.
**2.10.** $y'' + y' - 2y = 3xe^x$.
**2.11.** $y'' - y = 2e^x - x^2$.
**2.12.** $y^{IV} + 4y'' + 3y = 0$.
**2.13.** $y^V + 8y''' + 16y' = 0$.
**2.14.** $y^V - 6y^{IV} + 9y''' = 0$.
**2.15.** Электрическая цепь состоит из последовательно включенных источника постоянного напряжения $V$, сопротивления $R$, катушки индуктивности $L$ и выключателя, который включается при $t = 0$. Найти зависимость силы тока от времени (при $t > 0$).
**2.16.** Решить предыдущую задачу, заменив катушку индуктивности конденсатором емкости $C$. Конденсатор до замыкания цепи не заряжен.
**2.17.** Последовательно включены сопротивление $R$ и конденсатор емкости $C$, заряд которого при $t = 0$ равен $q$. Цепь замыкается при $t = 0$. Найти силу тока в цепи при $t > 0$.
**2.18.** Последовательно включены катушка индуктивности $L$, сопротивление $R$ и конденсатор емкости $C$, заряд которого при $t = 0$ равен $q$. Цепь замыкается при $t = 0$. Найти силу тока в цепи и частоту колебаний в том случае, когда разряд носит колебательный характер.



**2.19.** Последовательно включены источник напряжения, которое меняется по закону $E = V\sin\omega t$, сопротивление $R$ и катушка индуктивности $L$. Найти силу тока в цепи (установившийся режим).
**2.20.** Последовательно включены источник напряжения, которое меняется по закону $E = V\sin\omega t$, сопротивление $R$, катушка индуктивности $L$ и конденсатор емкости $C$. Найти силу тока в цепи (установившийся режим). При какой частоте $\omega$ сила тока наибольшая?
Решить уравнения Эйлера.
**2.21.** $x^3y''' + xy' - y = 0$.
**2.22.** $x^2y''' = 2y'$.
**2.23.** $x^2y'' - xy' + y = 8x^3$.
**2.24.** $x^2y'' + xy' + 4y = 10x$.
**2.25.** $x^3y'' - 2xy = 6\ln x$.
**2.26.** $x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$.
**2.27.** $x^2y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2$.
**2.28.** $x^2y'' - 2y = \sin\ln x$.
Решить уравнения способом вариации постоянных.
**2.29.** $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x$.
**2.30.** $y'' + y = 2\sec^3 x$.

## 3. Линейные системы с постоянной матрицей

Решить данные системы дифференциальных уравнений ($\dot{x}$ означает $\frac{dx}{dt}$ и т.д., в целях облегчения работы для систем трех уравнений указаны корни характеристического полинома).

**3.1.** $\begin{cases} \dot{x} = 4y - 2z - 3x, \\ \dot{y} = z + x, \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z \end{cases}$

$(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1)$.

**3.2.** $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z \end{cases}$

$(\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i)$.

**3.3.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = 2y + 3z - x \end{cases}$

$(\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 3 \pm i)$.

**3.4.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y - z, \\ \dot{y} = x + 2z, \\ \dot{z} = y - 2x - z \end{cases}$

($\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm i$).

**3.5.** $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$

($\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$).

**3.6.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z, \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$

($\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$).

**3.7.** $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2z - y \end{cases}$

($\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$).

**3.8.** $\begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x, \\ \dot{y} = 4x + y, \\ \dot{z} = 2x + y - z \end{cases}$

($\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$).

**3.9.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 2x - y - 2z, \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$

($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$).

**3.10.** $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z, \\ \dot{z} = 2x - 4y \end{cases}$

($\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -5$).

**3.11.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = y - 2x + 18t. \end{cases}$

**3.12.** $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t, \\ \dot{y} = 2x - y - 2\cos t. \end{cases}$

**3.13.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y, \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^t. \end{cases}$

**3.14.** $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 16te^t, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$

**3.15.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2\sin t. \end{cases}$

**3.16.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2e^t. \end{cases}$



**3.17.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$

**3.18.** $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$

**3.19.** $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$

**3.20.** $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$

Решить системы уравнений методом вариации произвольных постоянных.

**3.21.** $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}. \end{cases}$

**3.22.** $\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$

**3.23.** $\begin{cases} \dot{x} = x - y + \dfrac{1}{\cos t}, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

## 4. Точки покоя автономной системы

Исследовать на устойчивость нулевое решение.

**4.1.** $\begin{cases} \dot{x} = 2xy - x - y, \\ \dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases}$

**4.2.** $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x, \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y. \end{cases}$

**4.3.** $\begin{cases} \dot{x} = \ln(3e^y - 2\cos x), \\ \dot{y} = 2e^x - \sqrt[3]{8 + 12y}. \end{cases}$

**4.4** $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(y - x), \\ \dot{y} = 2^y - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right). \end{cases}$

**4.5.** $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(z - y) - 2x, \\ \dot{y} = \sqrt{9 + 12x} - 3e^y, \\ \dot{z} = -3y. \end{cases}$

Найти и исследовать особые точки систем уравнений.

**4.6.** $\begin{cases} \dot{x} = \ln(2 - y^2), \\ \dot{y} = e^x - e^y. \end{cases}$

**4.7.** $\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)(x - 2), \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$

**4.8.** $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x^2 - y + 2} - 2, \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}(x^2 + xy). \end{cases}$

**4.9.** $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = x^2 - (y-2)^2. \end{cases}$

**4.10.** $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{(x-y)^2 + 3} - 2, \\ \dot{y} = e^{y^2 - x} - e. \end{cases}$

## 5. Операционный метод

Найти решение задачи Коши операционным методом.

**5.1.** $y'' - 3y' + 2y = e^{-3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

**5.2.** $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2z + 4e^{-2t}, \\ \dot{y} = x + y + z - 5e^{-2t}, \\ \dot{z} = x + 2z - 8e^{-2t}, \end{cases}$

$x(0) = 0$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.

**5.3.** $\begin{cases} \dot{x} = 6x - 10y + 8z, \\ \dot{y} = 2x - 2y + 2z, \\ \dot{z} = -2x + 5y - 4z, \end{cases}$

$x(0) = 3$, $y(0) = 1$, $z(0) = -1$.

**5.4.** $\dddot{x} + 4\dot{x} = 1, \quad x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0.$

**5.5.** $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

**5.6.** $\ddot{x} + x = 5t^2, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

**5.7.** $\begin{cases} x + \dot{x} = y + e^t, \\ y + \dot{y} = x + e^t, \end{cases}$

$x(0) = y(0) = 1$.

**5.8.** $\begin{cases} \dot{x} + y = 0, \\ \dot{y} + x = 0, \end{cases}$

$x(0) = 1$, $y(0) = -1$.

**5.9.** $\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} + 9x + 4y = 0, \\ 2\dot{x} - \dot{y} + 12x - 7y = 0, \end{cases}$

$x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

**5.10.** $\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = x + y, \end{cases}$

$x(0) = 0$, $y(0) = 1$, $z(0) = 2$.



**5.11.** $\begin{cases} \dot{y} + \dot{z} - 3y + z = -6te^t + 7e^t, \\ \dot{z} + y - 2z = 3te^t - 2e^t, \end{cases}$

$y(0) = 0$, $z(0) = 2$.

**5.12.** $\begin{cases} \dot{y} - z = \sin t, \\ y + \dot{z} = \cos t, \end{cases}$

$y(0) = 1$, $z(0) = -1$.

**5.13.** Один конец пружины закреплен неподвижно в точке 0, а к другому прикреплен груз массы $3m$, соединенный другой пружиной с грузом массы $2m$. Оба груза движутся без трения по одной прямой, проходящей через точку 0. Каждая из пружин растягивается на величину $x$ под действием силы $a^2mx$. Найти возможные периодические движения системы.

**5.14.** Тело массы $m$ движется на плоскости $x,y$, притягиваясь к точке (0; 0) с силой $a^2mr$, где $r$ — расстояние до этой точки. Найти движение тела при начальных условиях $x(0) = d$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = v$ и траекторию этого движения.

**5.15.** К источнику напряжения $E = V\sin \omega t$ последовательно присоединено сопротивление $R$. Далее цепь разветвляется на две ветви, в одну из которых включена катушка индуктивности $L$, а в другую — конденсатор емкости $C$ (рис. 1).

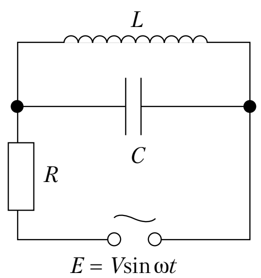



*Рис. 1*

Найти силу тока в цепи (установившийся режим), проходящего через сопротивление $R$. При какой частоте $\omega$ сила тока наибольшая? Наименьшая?

## 6. Разностные уравнения

Методом вариации произвольной постоянной решить следующие уравнения.

**6.1.** $y_{k+1} = \left(\dfrac{k+2}{k+1}\right)^2 y_k + \dfrac{2(k+2)}{k+4}.$

**6.2.** $y_{k+1} = \left(\dfrac{k+3}{k+2}\right)^3 y_k + \dfrac{3(k+3)^2}{k+4}.$

**6.3.** $y_{k+1} = \dfrac{2k+1}{2k+3} y_k + \dfrac{2k-1}{2k+3}$.

**6.4.** $y_{k+1} = 2^k y_k + 2^{\frac{k^2+3k}{2}}$.

**6.5.** $y_{k+1} = \dfrac{k+2}{k+1} y_k + \dfrac{2}{k+4}$.

**6.6.** $y_{k+1} = y_k + \dfrac{1}{(4k+5)(4k+1)}$.

**6.7.** $y_{k+1} = y_k + \dfrac{(k+1)^2}{(2k+3)(2k+1)}$.

**6.8.** $y_{k+1} = y_k + \dfrac{1}{16k^2-8k-3}$.

**6.9.** $y_{k+1} = y_k + \dfrac{1}{4k^2-1}$.

**6.10.** $y_{k+1} = y_k + \dfrac{1}{9k^2-3k-2}$.

Решить линейные разностные стационарные уравнения.

**6.11.** $y_{k+1} + 2y_k = 3k^2 + 2k - 2$.
**6.12.** $y_{k+1} + 3y_k = 3(2k-1)(-3)^k$.
**6.13.** $y_{k+1} + y_k = 2\sin k$.
**6.14.** $y_{k+1} - y_k = 2\cos k$.
**6.15.** $y_{k+1} + y_k = \sin(k+1)$.
**6.16.** $y_{k+1} - 4y_k = \cos(k+1) - 4\cos k$.
**6.17.** $y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k = 0$.
**6.18.** $y_{k+3} - 8y_k = 0$.
**6.19.** $y_{k+3} - y_{k+2} - y_{k+1} + y_k = 0$.
**6.20.** $y_{k+4} - 2y_{k+2} + y_k = 0$.
**6.21.** $y_{k+4} + 5y_{k+3} + 9y_{k+2} + 7y_{k+1} + 2y_k = 0$.
**6.22.** $y_{k+2} + 2y_{k+1} + 2y_k = 1 - 5k$.
**6.23.** $y_{k+2} - y_k = -\cos k$.
**6.24.** $y_{k+2} - y_k = -\cos(k+2)$.
**6.25.** $y_{k+2} - y_k = 8k + 2$.
**6.26.** $y_{k+2} + 6y_{k+1} + 10y_k = (10k-3)(-1)^k$.
**6.27.** $y_{k+2} + 3y_k = 4k^2 + 2$.
**6.28.** $y_{k+3} + y_{k+2} + 2y_{k+1} - 4y_k = 48(-2)^k + 14k - 6$.
**6.29.** $y_{k+3} - y_{k+2} + 2y_k = 20 \cdot 3^k + (-1)^k(10k+13)$.
**6.30.** $y_{k+3} + y_{k+2} + y_{k+1} + 2y_k = 5 \cdot (-2)^k + 2(4k+3)(-1)^k$.

Найти решение разностной задачи Коши.

**6.31.** $y_{k+2} - 2y_{k+1} + 4y_k = (7k-3)(-1)^k$, $y_0 = 0$, $y_1 = 2\cos\dfrac{\pi}{3}$.

**6.32.** $y_{k+2} + 2y_{k+1} + 4y_k = 3 - 7k$, $y_0 = 0$, $y_1 = -2\cos\dfrac{2\pi}{3}$.

**6.33.** $y_{k+2} - 6y_{k+1} + 9y_k = 4(k+1)$, $y_0 = 0$, $y_1 = -3$.



**6.34.** $y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k = (4k+6)2^k$, $y_0 = -1$, $y_1 = 3$.
**6.35.** $y_{k+3} + 4y_{k+2} + 5y_{k+1} + 2y_k = 12k + 16$, $y_0 = 0$, $y_1 = y_2 = 1$.
**6.36.** $y_{k+3} + 3y_{k+2} + 3y_{k+1} + y_k = 8k + 20$, $y_0 = y_1 = 2$, $y_2 = 4$.
**6.37.** $y_{k+3} + y_{k+2} + 4y_{k+1} + 4y_k = 1 - 10k$, $y_0 = -1$, $y_1 = 4$, $y_2 = -3$.
**6.38.** $y_{k+4} + 18y_{k+2} + 81y_k = 10(10k+14)$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2$, $y_2 = 21$, $y_3 = 4$.

Построить линейные однородные разностные стационарные уравнения сколь возможно низкого порядка, имеющие данные частные решения.

**6.39.** $y_{1k} = 2^k$, $y_{2k} = (-3)^k$.
**6.40.** $y_{1k} = k(-2)^k$.
**6.41.** $y_{1k} = k(-3)^k$.
**6.42.** $y_{1k} = 2^k \cos\dfrac{\pi k}{2}$.
**6.43.** $y_{1k} = (\sqrt{2})^k \sin\dfrac{\pi k}{4}$.
**6.44.** $y_{1k} = 1$, $y_{2k} = k(-4)^k$.
**6.45.** $y_{1k} = 2$, $y_{2k} = \cos\dfrac{\pi k}{2}$.

Решить системы разностных уравнений.

**6.46.** $\begin{cases} x_{k+1} = 5x_k + y_k - z_k, \\ y_{k+1} = x_k + 3y_k + z_k, \\ z_{k+1} = 7x_k + 3y_k + z_k. \end{cases}$

**6.47.** $\begin{cases} x_{k+1} = 2x_k + y_k - 3z_k, \\ y_{k+1} = 3x_k - 2y_k - 3z_k, \\ z_{k+1} = x_k + y_k - 2z_k. \end{cases}$

**6.48.** $\begin{cases} x_{k+1} = x_k + 2y_k + 2z_k, \\ y_{k+1} = -y_k - 2z_k, \\ z_{k+1} = y_k + z_k. \end{cases}$

**6.49.** $\begin{cases} x_{k+1} = 3x_k - 8y_k + z_k, \\ y_{k+1} = x_k - 2y_k + z_k, \\ z_{k+1} = 3x_k - 12y_k - 5z_k. \end{cases}$

**6.50.** $\begin{cases} x_{k+1} = -x_k - 4y_k, \\ y_{k+1} = x_k - y_k + z_k, \\ z_{k+1} = 3y_k - z_k. \end{cases}$

**6.51.** $\begin{cases} x_{k+1} = 2x_k - y_k + 2z_k, \\ y_{k+1} = x_k + 2z_k, \\ z_{k+1} = -2x_k + y_k - z_k. \end{cases}$

**6.52.** $\begin{cases} x_{k+1} = 4x_k - 7y_k - z_k, \\ y_{k+1} = 2x_k - 3y_k - z_k, \\ z_{k+1} = -2x_k + 2y_k + 3z_k. \end{cases}$

**6.53.** $\begin{cases} x_{k+1} = 7x_k - 10y_k - 4z_k, \\ y_{k+1} = 4x_k - 7y_k - 4z_k, \\ z_{k+1} = -6x_k + 7y_k + z_k. \end{cases}$

**6.54.** $\begin{cases} x_{k+1} = -6x_k + 3y_k - 5z_k, \\ y_{k+1} = -x_k - y_k - z_k, \\ z_{k+1} = 3x_k - 2y_k + 2z_k. \end{cases}$

**6.55.** $\begin{cases} x_{k+1} = -2x_k + y_k - z_k, \\ y_{k+1} = -6x_k - 4y_k + 3z_k, \\ z_{k+1} = -2x_k + 2y_k - 3z_k. \end{cases}$

**6.56.** $\begin{cases} x_{k+1} = 3x_k + y_k - 3z_k, \\ y_{k+1} = -7x_k - 2y_k + 9z_k, \\ z_{k+1} = -2x_k - y_k + 4z_k. \end{cases}$

**6.57.** $\begin{cases} x_{k+1} = x_k + y_k - z_k, \\ y_{k+1} = -x_k + 2y_k - z_k, \\ z_{k+1} = 2x_k - y_k + 4z_k. \end{cases}$

**6.58.** $\begin{cases} x_{k+1} = 2x_k + 3y_k - z_k, \\ y_{k+1} = -6x_k - 6y_k + z_k, \\ z_{k+1} = -4x_k - 2y_k - 2z_k. \end{cases}$

**6.59.** $\begin{cases} x_{k+1} = 4x_k - y_k - 2z_k, \\ y_{k+1} = 2x_k + y_k - 3z_k, \\ z_{k+1} = 2x_k - y_k + z_k. \end{cases}$

**6.60.** $\begin{cases} x_{k+1} = 7x_k + 4y_k - z_k, \\ y_{k+1} = -7x_k - 4y_k + 2z_k, \\ z_{k+1} = -9x_k - 9y_k + 6z_k. \end{cases}$

**6.61.** $\begin{cases} x_{k+1} = 4x_k - y_k, \\ y_{k+1} = 3x_k + y_k - z_k, \\ z_{k+1} = x_k + z_k. \end{cases}$

**6.62.** $\begin{cases} x_{k+1} = x_k + y_k, \\ y_{k+1} = -5x_k - 3y_k. \end{cases}$

**6.63.** $\begin{cases} x_{k+1} = -2x_k - y_k + 7k - 1, \\ y_{k+1} = -4x_k - 5y_k + 2. \end{cases}$

**6.64.** $\begin{cases} x_{k+1} = 3x_k + 2y_k - 5, \\ y_{k+1} = -2x_k - 2y_k + 3k + 3. \end{cases}$



**6.65.** $\begin{cases} x_{k+1} = -7x_k + 2y_k + 2k + 3, \\ y_{k+1} = -15x_k + 4y_k + 6k + 3. \end{cases}$

**6.66.** $\begin{cases} x_{k+1} = -6x_k + 8y_k + 5k + 1, \\ y_{k+1} = -4x_k + 6y_k + 2k + 1. \end{cases}$

**6.67.** $\begin{cases} x_{k+1} = -x_k - 4y_k + 3 \cdot 2^k, \\ y_{k+1} = 2x_k + 5y_k - 2^k. \end{cases}$

**6.68.** $\begin{cases} x_{k+1} = -7x_k + 2y_k + 2k + 29, \\ y_{k+1} = -15x_k + 4y_k + 10 \cdot 3^k. \end{cases}$

**6.69.** $\begin{cases} x_{k+1} = -2x_k - 3y_k - 3 \cdot (-2)^k + 2^k, \\ y_{k+1} = 6x_k + 7y_k + 3 \cdot (-2)^k + 2^k. \end{cases}$

**6.70.** $\begin{cases} x_{k+1} = -x_k + 8y_k + 3 \cdot 2^k + 8k + 6, \\ y_{k+1} = x_k + y_k - 2^k + 4k + 2. \end{cases}$

**6.71.** $\begin{cases} x_{k+1} = 2x_k + y_k + 2^k - 3^k, \\ y_{k+1} = 3x_k + 4y_k - 4 \cdot 2^k - 3^k. \end{cases}$

**6.72.** $\begin{cases} x_{k+1} = x_k - y_k + (-3)^k + 4 \cdot (-2)^k, \\ y_{k+1} = -4x_k + y_k + 8 \cdot (-3)^k + 3 \cdot (-2)^k. \end{cases}$

Найти решение разностной задачи Коши.

**6.73.** $\begin{cases} x_{k+1} = 3x_k + y_k + 2k + 2, \\ y_{k+1} = 2x_k + 4y_k + 2k + 1, \end{cases}$

$x_0 = y_0 = 0.$

**6.74.** $\begin{cases} x_{k+1} = 5x_k + y_k + 2^k, \\ y_{k+1} = -17x_k - 3y_k + 3 \cdot 2^k, \end{cases}$

$x_0 = 0,\ y_0 = 3.$

**6.75.** $\begin{cases} x_{k+1} = 2x_k - y_k + (-2)^k, \\ y_{k+1} = 3x_k - 2y_k + 3 \cdot (-2)^k, \end{cases}$

$x_0 = -1,\ y_0 = 1.$

**6.76.** $\begin{cases} x_{k+1} = -x_k + 2y_k - 6 \cdot 3^k, \\ y_{k+1} = -y_k + 4 \cdot 3^k, \end{cases}$

$x_0 = -3,\ y_0 = 2.$

Исследовать устойчивость нулевого положения равновесия линейных однородных стационарных систем разностных уравнений.

**6.77.** $\begin{cases} x_{k+1} = 2x_k + y_k, \\ y_{k+1} = -\dfrac{5}{2}x_k - y_k. \end{cases}$

**6.78.** $\begin{cases} x_{k+1} = -x_k + y_k, \\ y_{k+1} = -x_k + y_k. \end{cases}$

**6.79.** $\begin{cases} x_{k+1} = -4x_k + 6y_k, \\ y_{k+1} = -3x_k + 5y_k. \end{cases}$

**6.80.** $\begin{cases} x_{k+1} = -\dfrac{11}{4}x_k + \dfrac{5}{8}y_k, \\ y_{k+1} = -9x_k + 2y_k. \end{cases}$

## 7. Стохастические дифференциальные уравнения

**7.1.** С помощью формулы Ито записать следующие случайные процессы $X_t$ в стандартной форме

$$dX_t = u(t,\omega)dt + v(t,\omega)dW_t,$$

соответствующим образом выбрав $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^{n\times m}$ и размерности $n$ и $m$:

а) $X_t = W_t^2$, где $W_t$ — одномерное броуновское движение;

б) $X_t = 2 + t + e^{W_t}$, где $W_t$ — одномерное броуновское движение;

в) $X_t = W_1^2(t) + W_2^2(t)$, где $(W_1, W_2)$ — двумерное броуновское движение;

г) $X_t = (t_0 + t, W_t)$, где $W_t$ — одномерное броуновское движение;

д) $X_t = (W_1(t) + W_2(t) + W_3(t), W_2^2(t) - W_1(t)W_3(t))$, где $(W_1, W_2, W_3)$ — трехмерное броуновское движение.

**7.2.** Пусть $c$, $\alpha$ — константы, а $W_t$ – одномерное броуновское движение. Определим $X_t = e^{ct+\alpha W_t}$. Доказать, что

$$dX_t = \left(c + \frac{1}{2}\alpha^2\right)X_t dt + \alpha X_t dW_t.$$

**7.3.** Пусть $c$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_n$ — константы, а $W_t = (W_1(t), W_2(t), ..., W_n(t))$ — $n$-мерное броуновское движение. Определим

$$X_t = \exp\left(ct + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j W_j(t)\right).$$

Доказать, что

$$dX_t = \left(c + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2\right)X_t dt + X_t\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j dW_j\right).$$

**7.4.** Проверить, что данные процессы являются решениями указанных стохастических дифференциальных уравнений ($W_t$ обозначает одномерное броуновское движение):

а) $X_t = e^{W_t}$ является решением уравнения

$$dX_t = \frac{1}{2}X_t dt + X_t dW_t;$$

б) $X_t = \dfrac{W_t}{1+t}$, $W_0 = 0$, является решением уравнения

$$dX_t = -\frac{1}{1+t}X_t dt + \frac{1}{1+t}dW_t,\ X_0 = 0;$$

в) $X_t = \sin W_t$, $W_0 = a \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ является решением уравнения

$$dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + \sqrt{1 - X_t^2}\,dW_t$$

при $t < \inf\left\{s > 0, W_s \notin \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]\right\}$;

г) $(X_1(t), X_2(t)) = (t, e^t W_t)$ является решением уравнения

$$\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ X_2 \end{pmatrix}dt + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{X_1} \end{pmatrix}dW_t;$$

д) $(X_1(t), X_2(t)) = (\mathrm{ch}(W_t), \mathrm{sh}(W_t))$ является решением уравнения

$$\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}dt + \begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \end{pmatrix}dW_t.$$

**7.5.** Естественно определить броуновского движение на эллипсе

$$\left\{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}, \text{ где } a > 0, b > 0,$$

как процесс $X_t = (X_1(t), X_2(t))$, описываемый равенствами

$$X_1(t) = a\cos W_t, X_2(t) = b\sin W_t,$$

где $W_t$ есть одномерное броуновское движение. Требуется показать, что $X_t$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + MX_t dW_t,$$

где

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a}{b} \\ \dfrac{b}{a} & 0 \end{pmatrix}.$$

**7.6.** Пусть $(W_1, W_2, ..., W_n)$ — броуновское движение в $\mathbb{R}^n$, а $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_n$ — постоянные числа. Требуется решить стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = rX_t dt + X_t\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k dW_k(t)\right), X_0 > 0$$

(это модель экспоненциального роста с несколькими независимыми возмущениями типа белого шума в относительной скорости роста).

**7.7.** Требуется решить стохастическое дифференциальное уравнение

$$\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}dt + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dW_1 \\ dW_2 \end{pmatrix}.$$

**7.8.** Пусть $Z$ — стандартная нормальная случайная величина. Проверить, является ли случайный процесс $X_t = \sqrt{t}Z$ винеровским. (*Указание*. Достаточно проверить свойства 1—3 винеровского процесса из параграфа 8.1).

**7.9.** Пусть $W_t$ и $\tilde{W}_t$ — два независимых винеровских процесса, а $\rho$ — константа, по модулю меньшая единицы. Проверить, является ли случайный процесс $X_t = \rho W_t + \sqrt{1-\rho^2}\tilde{W}_t$ винеровским. (*Указание*. Достаточно проверить свойства 1—3 винеровского процесса из параграфа 8.1).

**7.10.** Рассматривается броуновское движение со сносом: $S_t = \sigma W_t + \mu t$. Показать, что для любых значений $\sigma$ ($\sigma \neq 0$), $\mu$, $T$ ($T > 0$) существует положительная вероятность того, что $S_T < 0$.

**7.11.** Рассматривается средневозвратный процесс Орнштейна — Уленбека

$$dX = \eta(\bar{X} - X)dt + \sigma dW_t.$$

Здесь $\bar{X}$ — некоторый «нормальный» уровень $X$, т.е. тот уровень, к которому $X$ стремится вернуться; $\eta$ — скорость возвращения. Требуется выразить математическое ожидание процесса $X_t$ как функцию времени, если известно, что в начальный момент уровень $X$ был $X_0$.

**7.12.** С помощью формулы Ито вычислить $d2e^{W_t}$, где $W_t$ — винеровский процесс.

**7.13.** С помощью формулы Ито вычислить $d3e^{W_t - \frac{t}{2}}$, где $W_t$ — винеровский процесс.

**7.14.** С помощью формулы Ито вычислить $d\frac{1}{7}W_t^7$, где $W_t$ — винеровский процесс.

**7.15.** С помощью формулы Ито вычислить $dW_t^{12}$, где $W_t$ — винеровский процесс.

**7.16.** С помощью формулы Ито вычислить стохастический интеграл $\int_0^T 2W_t dW_t$, где $W_t$ — винеровский процесс.

**7.17.** Случайный процесс $Z_t$ представляет собой броуновское движение со сносом $dZ_t = 2dt + 3dW_t$, где $W_t$ — винеровский процесс. Записать выражение процесса $F(Z_t, t) = tZ_t$ в дифференциальной форме.

**7.18.** Выразить $de^{W_t^2 t}$, где $W_t$ — винеровский процесс, как броуновское движение.

**7.19.** Вычислить стохастический интеграл $\int_0^t 2W_s^2 dW_s$ как линейную комбинацию случайных процессов или (и) римановских интегралов от случайных процессов.

**7.20.** Для фиксированных $a, b \in \mathbb{R}$ рассматривается следующее одномерное уравнение:

$$dY_t = \frac{b - Y_t}{1-t}dt + dB_t,\ 0 \le t < 1,\ Y_0 = a.$$



Показать, что процесс

$$Y_t = a(1-t) + bt + (1-t)\int_0^t \frac{dW_s}{1-s},\ 0 \le t < 1,$$

является решением этого уравнения, и доказать, что $\lim_{t\to 1} Y_t = b$ почти наверное (процесс $Y_t$ называется броуновским мостиком[1] из $a$ в $b$).

**7.21.** Если обозначить через $(W_1, W_2)$ двумерное броуновское движение, то можно ввести комплексные обозначения и положить

$$W(t) = W_1(t) + iW_2(t).$$

Такой процесс $W(t)$ называется комплексным броуновским движением.

а) Пусть $F(z) = u(z) + iv(z)$ — аналитическая функция, т.е. $F$ удовлетворяет условиям Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},\ z = x + iy.$$

Определим $Z_t = F(W(t))$. Требуется доказать, что $dZ_t = F'(W(t))dW(t)$, где $F'$ есть комплексная производная функции $F$ (заметим, что обычно присутствующие в вещественной формуле Ито члены второго порядка здесь отсутствуют).

б) Решить комплексное стохастическое дифференциальное уравнение[2] $dZ_t = \alpha Z_t dW(t)$ ($\alpha$ — константа).

**7.22. (Рост популяции в насыщенной стохастической среде).** Нелинейное стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = rX_t(K - X_t)dt + \beta X_t dW_t,\ X_0 = x > 0,$$

часто используется в качестве модели роста размера популяции $X_t$ в насыщенной стохастической среде. Константа $K > 0$ называется несущей емкостью среды, константа $r \in \mathbb{R}$ является мерой качества среды, а константа $\beta \in \mathbb{R}$ есть мера интенсивности шума в системе. Проверить, что

$$X_t = \frac{\exp\left[\left(rK - \frac{1}{2}\beta^2\right)t + \beta W_t\right]}{x^{-1} + r\int_0^t \exp\left[\left(rK - \frac{1}{2}\beta^2\right)s + \beta W_s\right]ds},\ t \ge 0,$$

есть решение заданного уравнения.

**7.23.** Техника, использованная в примере П.111, может быть применена к решению более общего нелинейного стохастического дифференциального уравнения вида

$$dX_t = f(t, X_t)dt + c(t)X_t dW_t,\ X_0 = x,$$

[1] Другие свойства этого процесса см. в книге: *Rogers L. C. G., Williams D.* Diffusions, Markov processes, and martingales. J. Wiley and Sons, 1987. Vol. 2. P. 86—89.

[2] Дальнейшие сведения о комплексном стохастическом анализе можно найти, например, в статье: *Uböe J.* Conformal martingales and analytic functions // Math. Scand. 1987. Vol. 60. P. 292—309.

где $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — заданные непрерывные (детерминированные) функции. Нужно поступить следующим образом.

А. Ввести интегрирующий множитель

$$F_t = F_t(\omega) = \exp\left(-\int_0^t c(s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t c^2(s)ds\right) \quad (1)$$

и показать, что это равенство можно записать в виде

$$d(F_t X_t) = F_t f(t, X_t)dt. \quad (2)$$

Б. Определить $Y_t(\omega) = F_t(\omega)X_t(\omega)$, так что

$$X_t = F_t^{-1}Y_t. \quad (3)$$

В. Показать, что уравнение (2) приобретает вид

$$\frac{dY_t(\omega)}{dt} = F_t(\omega)f(t, F_t^{-1}(\omega)Y_t(\omega)),\ Y_0 = x. \quad (4)$$

Отметим, что это детерминированное дифференциальное уравнение относительно функции $t \to Y_t(\omega)$ для каждого $\omega \in \Omega$. Поэтому мы можем решить уравнение (4), считая $\omega$ параметром, и найти $Y_t(\omega)$, а затем получить $X_t(\omega)$ из равенства (3).

Задание:

1. Применить этот подход к решению стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t = \frac{1}{X_t}dt + \alpha X_t dW_t,\ X_0 = x > 0,$$

где $\alpha$ — константа.

2. Применить этот метод к изучению решений стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t = X_t^\gamma dt + \alpha X_t dW_t,\ X_0 = x > 0,$$

где $\alpha$ и $\gamma$ — константы.

3. Определить, при каких значениях $\gamma$ мы получим «взрывной» эффект у решения?

**7.24.** Пусть $v(t)$ — неотрицательная функция, такая что

$$v(t) \le C + A\int_0^t v(s)ds \text{ при } 0 \le t \le T$$

для некоторых констант $C$, $A$. Доказать, что тогда

$$v(t) \le C\exp(At) \text{ при } 0 \le t \le T$$

(лемма Гронуолла — Беллмана).

*Указание*. Можно считать, что $A \ne 0$. Определите $w(t) = \int_0^t v(s)ds$. Тогда $w'(t) \le C + Aw(t)$. Покажите, что

$$w(t) \le \frac{C}{A}[\exp(At) - 1], \quad (*.7)$$

рассмотрев функцию $f(t) = w(t)\exp(-At)$. Воспользуйтесь этим неравенством для получения неравенства леммы.

**7.25.** Параллельный $RLC$-контур подключается к источнику тока $I(t) + \beta W_t$, $\beta = \mathrm{const}$, $W_t$ — одномерный броуновский процесс. Найти потокосцепление $\Psi(t)$ на индуктивном элементе как функцию времени, если $\Psi(0) = \Psi_0, \Psi'_0 = U_0$.

**7.26.** Акция одного предприятия котируется 8 января по цене 245 руб. В тот же день можно было продать и купить колл-опцион этой акции со сроком обращения до 15 июня того же года с базисной ценой 260 руб. по цене 6,10 руб. Соответствующая безрисковая годовая ставка процента составила $r_F = 7\%$.

Требуется рассчитать теоретическую цену колл-опциона с помощью модели Блэка — Шоулса при допущении, что моментная волатильность цены акции составляет 2%.

Если бы вам задали вопрос, превышает ли подразумеваемая волатильность 2%, то что бы вы ответили и как бы вы обосновали свой ответ?

Подразумеваемой волатильностью называется такое значение моментной волатильности, для которого теоретическая модель оценки дает цену колл-опциона, в точности соответствующую фактически наблюдаемой цене.

**7.27.** Акция имеет текущую стоимость 100 руб. Страйк колл-опциона равен 102 руб. Период исполнения составляет девять месяцев. Процентная ставка (номинальная годовая при непрерывном начислении) составляет 15%. Риск изменения цены акции (волатильность) составляет 20%. Определите равновесную (теоретическую) цену опциона.

**7.28.** Про колл-опцион говорят, что он «в деньгах», если спот-цена основного актива больше, чем сумма страйка и премии. Про пут-опцион говорят, что он «в деньгах», если его страйк больше, чем сумма его премии и спот-цены основного актива.

Предположим, что на некоторый актив, который продается по цене 51,50 долл., имеются опционы со страйками 40, 50 и 60 долл. Цена колл-опциона со страйком 50 долл. равна 4,50 долл.

1. Какова собственная ценность этого опциона?
2. Является ли этот опцион колл-опционом «в деньгах»?
3. Какова спекулятивная премия за этот опцион?
4. Какой процент составляет спекулятивная премия от цены основного актива?
5. Являются ли опционы 40 и 60 долл. опционами «в деньгах»?

**7.29.** Ходят слухи, что корпорация ВГ будет поглощена корпорацией АБ. Текущая цена акций компании ВГ равна 300 руб. Вам удалось подслушать, что совет директоров АБ примет окончательное решение в течение ближайших двух недель. Если поглощение произойдет, цена акций ВГ возрастет до 400 руб., если нет, то упадет до 200 руб. Предложите опционную стратегию, использующую эту новость.

**7.30.** Предположим, что инвестор владеет фондовым портфелем, который он не имеет права продавать в течение шести месяцев. Объясните, почему использование опционов может показаться привлекательным, и как опционы могут быть использованы.

**7.31.** Предположим, что инвестор имеет американский колл-опцион со страйком 50 фунтов стерлингов, который истекает в конце года. Что надо предпринять, если текущая цена основного актива равна 53,47 фунтов стерлингов?

## Список рекомендуемой литературы


1. *Аксенов, А. П.* Дифференциальные уравнения в 2 ч. : учебник для академического бакалавриата / А. П. Аксенов. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
2. *Арнольд, В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / В. И. Арнольд. — М. : Наука, 1975.
3. *Бодунов, Н. А.* Дифференциальные уравнения : учеб. пособие / Н. А. Бодунов, С. Ю. Пилюгин. — СПб. : Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2011.
4. *Боревич, Е. З.* Дифференциальные уравнения : методические указания к практическим занятиям / Е. З. Боревич [и др.]. — СПб. : СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2014.
5. *Боровских, А. В.* Дифференциальные уравнения. В 2 ч. : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. В. Боровских, А. И. Перов. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
6. *Бугров, Я. С.* Высшая математика в 3 т. Т. 3. В 2 кн. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного : учебник для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
7. *Бугров, Я. С.* Высшая математика в 3 т. Том 3. В 2 кн. Книга 1. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы : учебник для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
8. *Зайцев, В. Ф.* Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка : учебное пособие для академического бакалавриата / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
9. *Зайцев, В. Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения в 2 ч. Часть 1 : справочник для академического бакалавриата / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
10. *Камке, Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. — СПб. : Лань, 2003.
11. *Каразеева, Н. А.* Операционное исчисление / Н. А. Каразеева, В. Л. Трегуб, Е. В. Фролова. — СПб. : Отделение Математического института им. В. А. Стеклова, 1997.
12. *Муратова, Т. В.* Дифференциальные уравнения : учебник и практикум для академического бакалавриата / Т. В. Муратова. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
13. *Новак, Е. В.* Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения : учебное пособие для вузов / Е. В. Новак, Т. В. Рязанова, И. В. Новак ; под общ. ред. Т. В. Рязановой. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

14. *Оксендаль, Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения / Б. Оксендаль. — М. : Мир, 2003.

15. *Пименов, В. Г.* Численные методы: разностные схемы решения уравнений : учебное пособие для вузов / В. Г. Пименов ; под науч. ред. А. Б. Ложникова. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

16. *Романко, В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариацианного исчисления / В. К. Романко. — М. : Лаборатория базовых знаний, 2006.

17. *Романко, В. К.* Разностные уравнения / В. К. Романко. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.

18. *Стеклов, В. А.* Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений : учебное пособие для вузов / В. А. Стеклов. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

19. *Филиппов, А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. — М. ; Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2005.

20. *Dixit, A. K.* Investment under uncertainty / A. K. Dixit, R. S. Pindyck. — Princeton, 1993.

## Ответы

**1.1.** $y = Cx^2 + x^4$. **1.2.** $y = (2x+1)(C + \ln|2x+1|) + 1$. **1.3.** $y = \sin x + C\cos x$.
**1.4.** $y = e^x(\ln|x| + C)$, $x = 0$. **1.5.** $xy = C - \ln|x|$. **1.6.** $xy = (x^3 + C)e^{-x}$.
**1.7.** $x = 2\ln y - y + 1 + Cy^2$. **1.8.** $y(x+1)(\ln|x+1| + C) = 1$, $y = 0$.
**1.9.** $y = x^4\ln^2 Cx$, $y = 0$.
**1.10.** $y^{-2} = x^4(2e^x + C)$, $y = 0$. **1.11.** $xy(C - \ln^2 y) = 1$.
**1.12.** $\cos y = (x^2 - 1)\ln C(x^2 - 1)$.
**1.13.** $y = 2e^x - 1$. **1.14.** $y = -2e^x$. **1.15.** $y^3 = Cx^3 - 3x^2$.
**1.16.** $y^2 = x^2 - 1 + C\sqrt{|x^2 - 1|}$. **1.17.** $x^2(C - \cos y) = y, y = 0$. **1.18.** $x^2 = Ce^{2y} + 2y$.
**1.19.** $y^2 = C(x+1)^2 - 2(x+1)$. **1.20.** $e^{-y} = Cx^2 + x$. **1.21.** $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = C$.
**1.22.** $xe^{-y} - y^2 = C$. **1.23.** $4y\ln x + y^4 = C$. **1.24.** $x^2 + \dfrac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} + C$.
**1.25.** $x - y^2\cos^2 x = C$. **1.26.** $x^3 + x^3\ln y - y^2 = C$. **1.27.** $x^2 + 1 = 2(C - 2x)\sin y$.
**1.28.** $2x + \ln(x^2 + y^2) = C$. **1.29.** $(x^2 - C)y = 2x$. **1.30.** $y\sin xy = C$.
**1.31.** $x + 2\ln|x| + \dfrac{3}{2}y^2 - \dfrac{y}{x} = C$, $x = 0$. **1.32.** $\sin\dfrac{y}{x} = Ce^{-x^2}$.
**1.33.** $x^2 + y^2 = y + Cx$, $x = 0$.
**1.34.** $x^2y + \ln|x/y| = C$, $x = 0$, $y = 0$. **1.35.** $y = C\ln(x^2y)$.
**1.36.** $\sin y = -(x^2 + 1)\ln[C(x^2 + 1)]$.
**1.37.** $x\sqrt{1 + y^2/x^2} + \ln(y/x + \sqrt{1 + y^2/x^2}) = C, x = 0$.
**1.38.** $x^3 - 4y^2 = Cy\sqrt[3]{xy}, x = 0$, $y = 0$. **1.39.** $xy + C = \sqrt{1 + y^2}$.
**1.40.** $2x^3y^3 - 3x^2 = C$.
**1.41.** $y[\ln(1 - x^2) + 1] = 1$. **1.42.** $y = 2 - 3\cos x$. **1.43.** $2x + y - 1 = Ce^x$.
**1.44.** $x + 2y + 2 = 0$. **1.45.** $\sqrt{4x + 2y - 1} - 2\ln(\sqrt{4x + 2y - 1} + 2) = x + C$.
**1.46.** $y = Ce^{y/x}$. **1.47.** $\ln(Cx) = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y}{x}\right)$, $y = xe^{2\pi k}$, $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ .
**1.48.** $(y - x + 2)^2 + 2x = C$. **1.49.** $\sin\dfrac{y - 2x}{x + 1} = C(x + 1)$.
**1.50.** $(2\sqrt{y} - x)\ln C(2\sqrt{y} - x) = x,\ 2\sqrt{y} = x$. **1.51.** $y = C_1(x - e^{-x}) + C_2$.
**1.52.** $y = C_3 - (x + C_1)\ln C_2(x + C_1)$, $y = C_1x + C_2$.
**1.53.** $2y = C_1\cos 2x + (1 + 2C_1)x^2 + C_2x + C_3$. **1.54.** $y = \pm\operatorname{ch}(x + C_1) + C_2$.
**1.55.** $y = C_1\dfrac{x^3}{6} - C_1^3\dfrac{x^2}{2} + C_2x + C_3,\ y = \pm\dfrac{8}{315}x^3\sqrt{3x} + C_1x + C_2$.
**1.56.** $C_1^2y = (C_1^2x^2 + 1)\operatorname{arctg} C_1x - C_1x + C_2$, $2y = k\pi x^2 + C$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ .
**1.57.** $y = C_1\dfrac{x^2}{2} - C_1^2x + C_2,\ y = \dfrac{x^3}{12} + C$. **1.58.** $y = C_1(x + 2)e^{-x} + C_2x + C_3$.
**1.59.** $3C_1y = (x - C_1)^3 + C_2, y = C, y = C - 2x^2$. **1.60.** $12(C_1y - x) = C_1^2(x + C_2)^3 + C_3$.

**1.61.** $y = C_1\mathrm{tg}(C_1x + C_2)$, $\ln\left|\dfrac{y-C_1}{y+C_1}\right| = 2C_1x+C_2$, $y = (C - x) = 1$, $y = C$.
**1.62.** $C_1y = \sin(C_1x + C_2)$, $C_1y = \pm\mathrm{sh}(C_1x + C_2)$, $y = C \pm x$.
**1.63.** $y + C_1\ln|y| = x + C_2$, $y = C$. **1.64.** $y = C_1[1 \pm \mathrm{ch}(x + C_2)]$, $y = Ce^{\pm x}$.
**1.65.** $e^y\sin^2(C_1x+C_2) = 2C_1^2$, $e^y\mathrm{sh}^2(C_1x+C_2) = 2C_1^2$, $e^y(x+C)^2 = 2$.
**1.66.** $\ln\left|y^2+C_1\pm\sqrt{y^4+2C_1y^2+1}\right| = 2x+C_2$, $y = \pm 1$.
**1.67.** $12(C_1y - x) = C_1{}^2(x + C_2)^3 + C_3$.
**1.68.** $\ln y = C_1\mathrm{tg}(C_1x + C_2)$, $\ln\left|\dfrac{\ln y-C_1}{\ln y+C_1}\right| = 2C_1x+C_2$, $(C - x)\ln y = 1$, $y = C$.
**1.69.** $x = u - \ln|1 + u| + C_2$, где $u = \pm\sqrt{1+4C_1y}$, $y = C$, $y = Ce^{-x}$.
**1.70.** $C_1^2y+1 = \pm\mathrm{ch}(C_1x+C_2)$, $C_1^2y-1 = \sin(C_1x+C_2)$, $2y = (x + C)^2$, $y = 0$.
**1.71.** $y = C_2(x+\sqrt{x^2+1})^{C_1}$. **1.72.** $y^2 = C_1x^3 + C_2$. **1.73.** $y = C_2xe^{-C_1/x}$.
**1.74.** $y = C_2|x|^{C_1-(1/2)\ln|x|}$. **1.75.** $y = C_2\left|\dfrac{x}{x+C_1}\right|^{1/C_1}$, $y = C$, $y + Ce^{-1/x}$.
**1.76.** $|y|^{C_1^2+1} = C_2\left(x-\dfrac{1}{C_1}\right)|x+C_1|^{C_1^2}$, $y = C$.
**1.77.** $y = C_2x(\ln C_1x)^2$, $y = Cx$.
**1.78.** $\ln|y| = \ln|x^2-2x+C_1| + \int\dfrac{2dx}{(x-1)^2+C_1-1} + C_2$, $y = C$.
**1.79.** $4C_1y^2 = 4x + x(C_1\ln C_2x)^2$. **1.80.** $y = -x\ln(C_2\ln C_1x)$, $y = Cx$.
**1.81.** $\dfrac{y}{x} = C_2 - 3\ln\left|\dfrac{1}{x}-C_1\right|$, $y = Cx$. **1.82.** $4(C_1y-1) = C_1^2\ln^2 C_2x$.
**1.83.** $2C_2x^2y = (C_2x - C_1)^2 - 1$, $xy = \pm 1$. **1.84.** $2C_1C_2y = C_2^2|x|^{2+C_1} + |x|^{2-C_1}$.
**1.85.** $C_1y = \ln|C_1x + C_2| + C_3$, $y = C_1x + C_2$.
**1.86.** $C_1y-1 = C_2e^{C_1x}$, $y = C - x$, $y = 0$.
**1.87.** $y = C_1x^2 + C_2x + C_3$, $y = \pm\sqrt{C_1x+C_2} + C_3x + C_4$. **1.88.** $y^2 = x^2 + C_1x + C_2$.
**1.89.** $y = e^{x^2/2}(C_1\int e^{-x^2/2}dx + C_2) - 1$.
**1.90.** $2\ln\left|\dfrac{y-C_1}{y+C_1}\right| = C_1x^2 + C_2$, $y = 4C_1\mathrm{tg}(C_1x^2 + C_2)$, $y(C - x^2) = 4$, $y = C$.
**1.91.** Вся плоскость. **1.92.** $y \neq 2x$. **1.93.** $x\neq 2$, $y > 0$.
**1.94.** $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ .
**1.95.** $x > 0$, $y \neq x$. **1.96.** $x\neq 0$, $|y| > |x|$. **1.97.** При $x_0 \neq 0$ и любых $t_0$ и $y_0$.
**1.98.** При $t_0 > -1$, $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq t_0$. **1.99.** $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{Cx^5-x}$, $y = \dfrac{2}{x}$.
**1.100.** $y = x + \dfrac{x}{x+C}$, $y = x$. **1.101.** $y = x + 2 + \dfrac{4}{Ce^{4x}-1}$, $y = x + 2$.
**2.1.** $y = C_1 + C_2e^{5x} - 0{,}2x^3 - 0{,}12x^2 - 0{,}048x + 0{,}02(\cos 5x - \sin 5x)$.
**2.2.** $y = (C_1+C_2x)e^{-2x} + \left(\dfrac{x}{16}-\dfrac{1}{32}\right)e^{2x}$.
**2.3.** $y = \left(C_1-\dfrac{x^2}{4}\right)\cos x + \left(C_2+\dfrac{x}{4}\right)\sin x$.



**2.4.** $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + e^{3x}\left(\dfrac{6}{37}\sin x - \dfrac{1}{37}\cos x\right)$.
**2.5.** $y = C_1e^x + C_2e^{-4x} - \dfrac{x}{5}e^{-4x} - \left(\dfrac{x}{6}+\dfrac{1}{36}\right)e^{-x}$.
**2.6.** $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + (0{,}1x - 0{,}12)\cos x - (0{,}3x + 0{,}34)\sin x$.
**2.7.** $y = C_1e^x + C_2e^{4x} - (2x^2 - 2x + 3)e^{2x}$.
**2.8.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x$.
**2.9.** $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + 0{,}1\sin x + 0{,}3\cos x$.
**2.10.** $y = \left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{3}\right)e^x + C_1e^{-2x} + C_2e^x$.
**2.11.** $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x + x^2 + 2$.
**2.12.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3\cos x\sqrt{3} + C_4\sin x\sqrt{3}$.
**2.13.** $y = C_1 + (C_2 + C_3x)\cos 2x + (C_4 + C_5x)\sin 2x$.
**2.14.** $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + e^{3x}(C_4 + C_5x)$.
**2.15.** $I = \dfrac{V}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$. **2.16.** $I = \dfrac{V}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$. **2.17.** $I = \dfrac{q}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$.
**2.18.** $I = \dfrac{q}{\omega CL}e^{-\frac{Rt}{2L}}\sin\omega t$, $CR^2 < 4L$, $\omega = \dfrac{\sqrt{4CL-R^2C^2}}{2LC}$.
**2.19.** $I = A\sin(\omega t - \varphi)$, $A = \dfrac{V}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$, $\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{\omega L}{R}$.
**2.20.** $I = A\sin(\omega t-\varphi)$, $A = \dfrac{V}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$, $\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{\omega L-\dfrac{1}{\omega C}}{R}$, $\max A = \dfrac{V}{R}$
при $\omega^2 = \dfrac{1}{LC}$.
**2.21.** $y = x(C_1 + C_2\ln|x| + C_3\ln^2|x|)$. **2.22.** $y = C_1 + C_2\ln|x| + C_3x^3$.
**2.23.** $y = x(C_1 + C_2\ln|x|) + 2x^3$. **2.24.** $y = C_1\cos(2\ln|x|) + C_2\sin(2\ln|x|) + 2x$.
**2.25.** $y = C_1x^2 + \dfrac{1}{x}\left(C_2 - \dfrac{2}{3}\ln x - \ln^2 x\right)$.
**2.26.** $y = x^2(C_1\cos\ln|x| + C_2\sin\ln|x| + 3)$.
**2.27.** $y = C_1x^3 + C_2x^{-2} + x^3\ln|x| - 2x^2$.
**2.28.** $y = C_1x^2 + C_2x^{-1} + 0{,}1\cos\ln x - 0{,}3\sin\ln x$.
**2.29.** $y = \sin 2x\ln|\cos x| - x\cos 2x + C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$.
**2.30.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$.
**3.1.** $\begin{cases} x = C_1e^t + C_3e^{-t}, \\ y = C_1e^t + C_2e^{2t}, \\ z = 2C_2e^{2t} - C_3e^{-t}. \end{cases}$ **3.2.** $\begin{cases} x = e^t(2C_2\sin 2t + 2C_3\cos 2t), \\ y = e^t(C_1 - C_2\cos 2t + C_3\sin 2t), \\ z = e^t(-C_1 - 3C_2\cos 2t + 3C_3\sin 2t). \end{cases}$
**3.3.** $\begin{cases} x = C_1e^{2t} + e^{3t}(C_2\cos t + C_3\sin t), \\ y = e^{3t}[(C_2+C_3)\cos t + (C_3-C_2)\sin t], \\ z = C_1e^{2t} + e^{3t}[(2C_2-C_3)\cos t + (2C_3+C_2)\sin t]. \end{cases}$

**3.4.** $\begin{cases} x = C_2\cos t + (C_2+2C_3)\sin t, \\ y = 2C_1e^t + C_2\cos t + (C_2+2C_3)\sin t, \\ z = C_1e^t + C_3\cos t - (C_2+C_3)\sin t. \end{cases}$ **3.5.** $\begin{cases} x = C_1e^{2t} + (C_2+C_3)e^{3t}, \\ y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}, \\ z = C_1e^{2t} + C_3e^{3t}. \end{cases}$

**3.6.** $\begin{cases} x = C_1 + C_2e^t, \\ y = 3C_1 + C_3e^t, \\ z = -C_1 + (C_2-C_3)e^t. \end{cases}$ **3.7.** $\begin{cases} x = (C_1+C_2t)e^t + C_3e^{2t}, \\ y = (C_1-2C_2+C_2t)e^t, \\ z = (C_1-C_2+C_2t)e^t + C_3e^{2t}. \end{cases}$

**3.8.** $\begin{cases} x = (C_2+C_3t)e^{-t}, \\ y = 2C_1e^t - (2C_2+C_3+2C_3t)e^{-t}, \\ z = C_1e^t - (C_2+C_3+C_3t)e^{-t}. \end{cases}$ **3.9.** $\begin{cases} x = (C_1+C_3t)e^t, \\ y = (C_2+2C_3t)e^t, \\ z = (C_1-C_2-C_3-C_3t)e^t. \end{cases}$

**3.10.** $\begin{cases} x = C_1e^{2t} + C_3e^{-5t}, \\ y = C_2e^{2t} + 3C_3e^{-5t}, \\ z = (C_1-2C_2)e^{2t} + 2C_3e^{-5t}. \end{cases}$ **3.11.** $\begin{cases} x = C_1e^{3t} + 3t^2 + 2t + C_2, \\ y = -C_1e^{3t} + 6t^2 - 2t + 2C_2 - 2. \end{cases}$

**3.12.** $\begin{cases} x = C_1e^t + 3C_2e^{2t} + \cos t - 2\sin t, \\ y = C_1e^t + 2C_2e^{2t} + 2\cos t - 2\sin t. \end{cases}$ **3.13.** $\begin{cases} x = 4C_1e^t + C_2e^{-2t} - 4te^t, \\ y = C_1e^t + C_2e^{-2t} - (t-1)e^t. \end{cases}$

**3.14.** $\begin{cases} x = 2C_1e^{2t} + C_2e^{-3t} - (12t+13)e^t, \\ y = C_1e^{2t} - 2C_2e^{-3t} - (8t+6)e^t. \end{cases}$ **3.15.** $\begin{cases} x = 3C_1e^t + C_2e^{-t} + 3\sin t, \\ y = C_1e^t + C_2e^{-t} - \cos t + 2\sin t. \end{cases}$

**3.16.** $\begin{cases} x = (C_1+C_2t-t^2)e^t, \\ y = [C_1-C_2+t(C_2+2)-t^2]e^t. \end{cases}$ **3.17.** $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{3t} + te^t - e^{4t}, \\ y = -C_1e^t + C_2e^{3t} - (t+1)e^t - 2e^{4t}. \end{cases}$

**3.18.** $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{-t} + te^t - t^2 - 2, \\ y = C_1e^t - C_2e^{-t} + (t-1)e^t - 2t. \end{cases}$ **3.19.** $\begin{cases} x = (C_1+2C_2t)e^t - 3, \\ y = (C_1+C_2+2C_2t)e^t - 2. \end{cases}$

**3.20.** $\begin{cases} x = C_1e^{2t} + 3C_2e^{4t} - e^{-t} - 4e^{3t}, \\ y = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - 2e^{-t} - 2e^{3t}. \end{cases}$

**3.21.** $\begin{cases} x = C_1e^t + 2C_2e^{2t} - e^t\ln(e^{2t}+1) + 2e^{2t}\operatorname{arctg} e^t, \\ y = C_1e^t + 3C_2e^{2t} - e^t\ln(e^{2t}+1) + 3e^{2t}\operatorname{arctg} e^t. \end{cases}$

**3.22.** $\begin{cases} x = C_1\cos t + C_2\sin t + \operatorname{tg} t, \\ y = -C_1\sin t + C_2\cos t + 2. \end{cases}$

**3.23.** $\begin{cases} x = C_1\cos t + C_2\sin t + t(\cos t+\sin t) + (\cos t-\sin t)\ln|\cos t|, \\ y = (C_1-C_2)\cos t + (C_1+C_2)\sin t + 2\cos t\ln|\cos t| + 2t\sin t. \end{cases}$

**4.1.** Устойчиво. **4.2.** Неустойчиво. **4.3.** Неустойчиво. **4.4.** Устойчиво.
**4.5.** Устойчиво. **4.6.** (1; 1) — фокус, (–1; –1) — седло.
**4.7.** (2; 1) — узел, (1; 2) — седло, (–1; –2) — фокус.
**4.8.** (1; –1) — фокус, (0; –2) — седло, (–2; 2) — узел.
**4.9.** (–2; 4) — узел, (1; 1) — фокус, (2; 4) — седло, (–1; 1) — седло.
**4.10.** (0; –1) — седло, (0; 1) — седло, (–1; 0) — фокус, (3; 2) — узел.
**5.1.** $y(x) = \frac{9}{2}e^x - 4e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}$.



**5.2.** $\begin{cases} x(t) = -2 + 2e^t, \\ y(t) = 1 - e^t + e^{-2t}, \\ z(t) = 1 - 2e^t + 2e^{-2t}. \end{cases}$ **5.3.** $\begin{cases} x(t) = e^{-2t} + 2e^t\cos t, \\ y(t) = e^t(\cos t + \sin t), \\ z(t) = -e^{-2t} + e^t\sin t. \end{cases}$

**5.4.** $x(t) = \frac{t}{4} - \frac{1}{8}\sin 2t$. **5.5.** $x(t) = -e^{-2t} + 2e^{-t}$. **5.6.** $x(t) = 5(t^2 - 2 + 2\cos t)$.

**5.7.** $\begin{cases} x(t) = e^t, \\ y(t) = e^t. \end{cases}$ **5.8.** $\begin{cases} x(t) = e^t, \\ y(t) = -e^t. \end{cases}$ **5.9.** $\begin{cases} x(t) = e^{-6t}\cos t, \\ y(t) = e^{-6t}(\cos t - \sin t). \end{cases}$

**5.10.** $\begin{cases} x(t) = e^{2t} - e^{-t}, \\ y(t) = e^{2t}, \\ z(t) = e^{2t} + e^{-t}. \end{cases}$ **5.11.** $\begin{cases} y(t) = 3te^t, \\ z(t) = 2e^t. \end{cases}$ **5.12.** $\begin{cases} y(t) = t\sin t + \cos t - \sin t, \\ z(t) = -\sin t + t\cos t - \cos t. \end{cases}$

**5.13.** $\begin{cases} x(t) = C_1\sin\left(\frac{at}{\sqrt{6}} + C_2\right), \\ y(t) = \frac{3}{2}C_1\sin\left(\frac{at}{\sqrt{6}} + C_2\right); \end{cases}$ $\begin{cases} x(t) = C_3\sin(at + C_4), \\ y(t) = -C_3\sin(at + C_4). \end{cases}$

**5.14.** $\begin{cases} x(t) = d\cos at, \\ y(t) = \frac{v}{a}\sin at. \end{cases}$ Эллипс $\left(\frac{x}{d}\right)^2 + \left(\frac{ay}{v}\right)^2 = 1.$

**5.15.** $I = A\sin(\omega t - \varphi)$, $A = \frac{V}{\sqrt{R^2 + [\omega L/(1-\omega^2 LC)]^2}}$; $A_{\max} = \frac{V}{R}$, достигается при $\omega = 0$ и $\omega = \infty$; $A_{\min} = 0$, достигается при $\omega^2 = \frac{1}{LC}$.

**6.1.** $y_k = (k+1)^2\left(C - \frac{2k+5}{(k+2)(k+3)}\right)$. **6.2.** $y_k = (k+2)^3\left(C + \frac{k}{k+3}\right)$.

**6.3.** $y_k = \frac{1}{2k+1}[C + k(k-2)]$. **6.4.** $y_k = 2^{k(k-1)/2}(C + 2^k)$.

**6.5.** $y_k = (k+1)\left(C - \frac{2k+5}{(k+2)(k+3)}\right)$. **6.6.** $y_k = C + \frac{k}{4k+1}$.

**6.7.** $y_k = C + \frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$. **6.8.** $y_k = C - \frac{k}{3(4k-3)}$.

**6.9.** $y_k = C - \frac{k}{2k-1}$. **6.10.** $y_k = C - \frac{k}{2(3k-2)}$.

**6.11.** $y_k = C(-2)^k + k^2 - 1$. **6.12.** $y_k = (C + k - k^2)(-3)^k$.

**6.13.** $y_k = C(-1)^k + \frac{\sin k + \sin(k-1)}{1+\cos 1}$. **6.14.** $y_k = C + \frac{\cos(k-1) - \cos k}{1 - \cos 1}$.

**6.15.** $y_k = C(-1)^k + \frac{\sin k + \sin(k+1)}{2(1+\cos 1)}$. **6.16.** $y_k = C\cdot 4^k + \cos k$.

**6.17.** $y_k = C_1 + C_2(-2)^k$. **6.18.** $y_k = 2^k\left(C_1 + C_2\cos\frac{2\pi k}{3} + C_3\sin\frac{2\pi k}{3}\right)$.

**6.19.** $y_k = C_1 + C_2k + C_3k^2$. **6.20.** $y_k = (C_1 + C_2k)(-1)^k + C_3 + C_4k$.

**6.21.** $y_k = C_1(-2)^k + (C_2 + C_3k + C_4k^2)(-1)^k$.

**6.22.** $y_k=(\sqrt{2})^k\left(C_1\cos\frac{3\pi k}{4}+C_2\sin\frac{3\pi k}{4}\right)+1-k$.

**6.23.** $y_k=C_1(-1)^k+C_2-\frac{1}{2}\cos k+\frac{\sin 2\cdot\sin k}{2(1-\cos 2)}$.

**6.24.** $y_k=C_1(-1)^k+C_2-\frac{1}{2}\cos k+\frac{\sin k}{2(1-\cos 2)}$.

**6.25.** $y_k = C_1 + C_2(-1)^k + 2k^2 - 3k$.

**6.26.** $y_k=(\sqrt{10})^k(C_1\cos\varphi k+C_2\sin\varphi k)+(2k+1)(-1)^k$, $\varphi=-\mathrm{arctg}\frac{1}{3}$.

**6.27.** $y_k=(\sqrt{3})^k\left(C_1\cos\frac{\pi k}{2}+C_2\sin\frac{\pi k}{2}\right)+k^2-k$.

**6.28.** $y_k=C_1+2^k\left(C_2\cos\frac{2\pi k}{3}+C_3\sin\frac{2\pi k}{3}\right)-4(-2)^k+k^2-3k$.

**6.29.** $y_k=C_1(-1)^k+(\sqrt{2})^k\left(C_2\cos\frac{\pi k}{4}+C_3\sin\frac{\pi k}{4}\right)+3^k+(-1)^{k+1}k^2$.

**6.30.** $y_k=C_1(-1)^k+C_2\cos\frac{\pi k}{2}+C_3\sin\frac{\pi k}{2}+(-2)^{k+1}+k(3-2k)(-1)^k$.

**6.31.** $y_k=2^k\cos\frac{\pi k}{3}+(k-1)(-1)^k$. **6.32.** $y_k=-2^k\cos\frac{2\pi k}{3}+1-k$.

**6.33.** $y_k = -2\cdot 3^k + 2 + k$. **6.34.** $y_k = 1 - (-2)^k + (k-1)2^k$.

**6.35.** $y_k = (k+1)(-1)^k - (-2)^k + k$. **6.36.** $y_k = (k-1)^2(-1)^k + k + 1$.

**6.37.** $y_k=2(-1)^{k+1}+2^k\sin\frac{\pi k}{2}+1-k$. **6.38.** $y_k=k+1-k\cdot 3^k\cos\frac{\pi k}{2}$.

**6.39.** $y_{k+2} + y_{k+1} - 6y_k = 0$. **6.40.** $y_{k+2} + 4y_{k+1} + 4y_k = 0$.

**6.41.** $y_{k+2} + 6y_{k+1} + 9y_k = 0$. **6.42.** $y_{k+2} + 4y_k = 0$. **6.43.** $y_{k+2} - 2y_{k+1} + 2y_k = 0$.

**6.44.** $y_{k+3} + 7y_{k+2} + 8y_{k+1} - 16y_k = 0$. **6.45.** $y_{k+3} - y_{k+2} + y_{k+1} - y_k = 0$.

**6.46.** $\begin{pmatrix}x_k\\y_k\\z_k\end{pmatrix}=C_1 2^k\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}+C_2 3^k\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}+C_3 4^k\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

**6.47.** $\begin{pmatrix}x_k\\y_k\\z_k\end{pmatrix}=C_1\left(-2\right)^k\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+C_2\left(-1\right)^k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$.

**6.48.** $\begin{pmatrix}x_k\\y_k\\z_k\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}2\cos\frac{\pi k}{2}\\-2\cos\frac{\pi k}{2}\\\cos\frac{\pi k}{2}-\sin\frac{\pi k}{2}\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}2\sin\frac{\pi k}{2}\\-2\sin\frac{\pi k}{2}\\\cos\frac{\pi k}{2}+\sin\frac{\pi k}{2}\end{pmatrix}$. **6.49.** $\begin{pmatrix}x_k\\y_k\\z_k\end{pmatrix}=$



$=C_1(-2)^k\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+C_2(\sqrt{2})^k\begin{pmatrix}4\cos\frac{3\pi k}{4}-3\sin\frac{3\pi k}{4}\\2\cos\frac{3\pi k}{4}-\sin\frac{3\pi k}{4}\\-3\cos\frac{3\pi k}{4}\end{pmatrix}+C_3(\sqrt{2})^k\begin{pmatrix}3\cos\frac{3\pi k}{4}+4\sin\frac{3\pi k}{4}\\\cos\frac{3\pi k}{4}+2\sin\frac{3\pi k}{4}\\-3\sin\frac{3\pi k}{4}\end{pmatrix}$.

**6.50.** $\begin{pmatrix}x_k\\y_k\\z_k\end{pmatrix}=C_1(-1)^k\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+C_2(\sqrt{2})^k\begin{pmatrix}4\cos\frac{3\pi k}{4}\\\sin\frac{3\pi k}{4}\\-3\cos\frac{3\pi k}{4}\end{pmatrix}+C_3(\sqrt{2})^k\begin{pmatrix}-4\sin\frac{3\pi k}{4}\\\cos\frac{3\pi k}{4}\\3\sin\frac{3\pi k}{4}\end{pmatrix}$.

**6.51.** $\begin{pmatrix}x_k\\y_k\\z_k\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}3\cos\frac{\pi k}{2}+\sin\frac{\pi k}{2}\\\cos\frac{\pi k}{2}-\sin\frac{\pi k}{2}\\-\cos\frac{\pi k}{2}\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}3\sin\frac{\pi k}{2}-\cos\frac{\pi k}{2}\\\cos\frac{\pi k}{2}+\sin\frac{\pi k}{2}\\-\sin\frac{\pi k}{2}\end{pmatrix}$.

**6.52.** $\begin{pmatrix}x_k\\y_k\\z_k\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}+C_2\left[\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right]+C_3\cdot 2^k\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$.

**6.53.** $\begin{pmatrix}x_k\\y_k\\z_k\end{pmatrix}=C_1(-1)^k\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}+C_2\left[(-1)^k\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}+k(-1)^{k-1}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right]+C_3\cdot 3^k\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$.

**6.54.** $\begin{pmatrix}x_k\\y_k\\z_k\end{pmatrix}=C_1(-1)^k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+C_2(-2)^k\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+C_3\left[(-2)^k\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+k(-2)^{k-1}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right]$.

**6.55.** $\begin{pmatrix}x_k\\y_k\\z_k\end{pmatrix}=C_1(-4)^k\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+C_2\left[(-4)^k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+k(-4)^{k-1}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right]+C_3(-1)^k\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

**6.56.** $\begin{pmatrix}x_k\\y_k\\z_k\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}+C_2\cdot 2^k\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}+C_3\left[2^k\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}+k\cdot 2^{k-1}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}\right]$.

**6.57.** $\begin{pmatrix}x_k\\y_k\\z_k\end{pmatrix}=C_1\cdot 2^k\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+C_2\left[2^k\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+k\cdot 2^{k-1}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right]+C_3\cdot 3^k\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$.

**6.58.** $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = C_1(-2)^k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2\left[(-2)^k \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + k(-2)^{k-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right] +$

$+C_3\left[(-2)^k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k(-2)^{k-1}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{k(k-1)}{2}\cdot(-2)^{k-2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right].$

**6.59.** $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = C_1\cdot 2^k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\left[2^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k2^{k-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] +$

$+C_3\left[2^k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k2^{k-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{k(k-1)}{2}\cdot 2^{k-2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right].$

**6.60.** $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = C_1\cdot 3^k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\left[3^k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k\cdot 3^{k-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] +$

$+C_3\left[3^k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k3^{k-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{k(k-1)}{2}\cdot 3^{k-2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right].$

**6.61.** $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = C_1\cdot 2^k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\left[2^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k\cdot 2^{k-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] +$

$+C_3\left[2^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k\cdot 2^{k-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{k(k-1)}{2}\cdot 2^{k-2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$

**6.62.** $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = C_1(\sqrt{2})^k \begin{pmatrix} -\cos\frac{3\pi k}{4} \\ 2\cos\frac{3\pi k}{4} + \sin\frac{3\pi k}{4} \end{pmatrix} + C_2(\sqrt{2})^k \begin{pmatrix} -\sin\frac{3\pi k}{4} \\ 2\sin\frac{3\pi k}{4} - \cos\frac{3\pi k}{4} \end{pmatrix}.$

**6.63.** $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = C_1(-6)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2(-1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3k-2 \\ -2k+2 \end{pmatrix}.$

**6.64.** $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = C_1(-1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2\cdot 2^k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k+1 \\ -k+2 \end{pmatrix}.$

**6.65.** $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = C_1(-2)^k \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + C_2(-1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k-3 \\ 3k-13 \end{pmatrix}.$



**6.66.** $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = C_1(-2)^k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\cdot 2^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3k+1 \\ 2k+1 \end{pmatrix}.$

**6.67.** $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2\cdot 3^k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2^k \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$

**6.68.** $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = C_1(-2)^k \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + C_2(-1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3^k \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k \\ -5k-15 \end{pmatrix}.$

**6.69.** $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = C_1\cdot 4^k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2)^k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2^k \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$

**6.70.** $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = C_1(-3)^k \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\cdot 3^k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4k+1 \\ -2k-1 \end{pmatrix}.$

**6.71.** $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2\cdot 5^k \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2^k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 3^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

**6.72.** $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = C_1(-1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2\cdot 3^k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + (-3)^k \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} + (-2)^k \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}.$

**6.73.** $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot 5^k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{5}{3}\cdot 2^k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k-2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

**6.74.** $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = 4(\sqrt{2})^k\cdot \begin{pmatrix} -\cos\frac{\pi k}{4} \\ 4\cos\frac{\pi k}{4} + \sin\frac{\pi k}{4} \end{pmatrix} + 2^k \begin{pmatrix} 4 \\ -13 \end{pmatrix}.$

**6.75.** $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1)^{k+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2)^k \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$ **6.76.** $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = (-1)^k \begin{pmatrix} -2-k \\ 1 \end{pmatrix} + 3^k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

**6.77.** Асимптотически устойчивое. **6.78.** Неустойчивое.
**6.79.** Неустойчивое. **6.80.** Асимптотически устойчивое.

**7.1.** а) $dX_t = 2W_t dW_t + dt$; б) $dX_t = \left(1+\frac{1}{2}eW_t\right)dt + e^{W_t}dW_t$;

в) $dX_t = 2dt + 2W_1dW_1(t) + 2W_2dW_2(t)$; г) $dX_t = \begin{pmatrix} dt \\ dW_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}dt + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}dW_t$;

д) $dX_1(t) = dW_1(t) + dW_2(t) + dW_3(t)$, $dX_2 = dt - W_3(t)dW_1(t) + 2W_2(t)dW_2(t) - W_1(t)dW_3(t)$, или

$$dX_t = \begin{pmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}dt + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -W_3(t) & 2W_2(t) & -W_1(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \\ dW_3(t) \end{pmatrix}.$$

**7.6.** $X_t = X_0\cdot\exp\left[\left(r-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\right)t + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k W_k(t)\right]$ (как обычно, $W(0) = 0$).

**7.7.** $X_1(t) = X_1(0) + t + W_1(t)$,

$X_2(t) = X_2(0) + X_1(0)W_2(t) + \int\limits_0^t s dW_2(s) + \int\limits_0^t W_1(s) dW_2(s)$, мы предполагаем, как обычно, что $W(0) = 0$.

**7.11.** $E(x) = \bar{x} + (x_0 - \bar{x})e^{-\eta t}$. **7.12.** $d2e^{W_t} = e^{W_t}(2dW_t + dt)$.

**7.13.** $d\left(3e^{W_t - \frac{t}{2}}\right) = e^{W_t - \frac{t}{2}}\left(3dW_t - \frac{9}{8}dt\right)$. **7.14.** $d\frac{1}{7}W_t = W_t^6 dW_t + 3W_t^5 dt$.

**7.15.** $dW_t^{12} = 12W_t^{11}dW_t + 66W_t^{10}dt$. **7.16.** $\int\limits_0^T 2W_t dW_t = W_T^2 - T$.

**7.17.** $dF(z_t, t) = (4t + 3W_t)dt + 3t dW_t$.

**7.18.** $de^{W_t^2 t} = e^{W_t^2 t}[2tW_t dW_t + (W_t^2 + 2t^2 W_t^2 + t)dt]$.

**7.19.** $\int\limits_0^t 2W_s^2 dW_s = \frac{2}{3}W_t^3 - 2\int\limits_0^t W_s ds$.


**Наши книги можно приобрести:**

**Учебным заведениям и библиотекам**:
в отделе по работе с вузами
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: vuz@urait.ru

**Частным лицам**:
список магазинов смотрите на сайте urait.ru
в разделе «Частным лицам»

**Магазинам и корпоративным клиентам**:
в отделе продаж
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: sales@urait.ru

**Отзывы об издании присылайте в редакцию**
e-mail: red@urait.ru

**Новые издания и дополнительные материалы доступны в электронной библиотечной системе «Юрайт»**
**biblio-online.ru**

*Учебное издание*

**Королев Алексей Васильевич**

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Учебник и практикум для академического бакалавриата

Формат 70×100 $^1/_{16}$.
Гарнитура «Petersburg». Печать цифровая.
Усл. печ. л. 000.

**ООО «Издательство Юрайт»**
111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4а.
Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru