Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам

Тезисы докладов

Суздаль
4 - 9 июля 2014 года

Инерциальные многообразия параболических уравнений

Романов А.В. (Россия)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

av.romanov@hse.ru

Теория инерциальных многообразий представляет собой одну из реализаций восходящих к Э. Хопфу представления о том, что финальная динамика диссипативной эволюционной системы с бесконечным числом степеней свободы реально может контролироваться конечным числом параметров. Основным объектом исследования при этом оказывается класс полулинейных параболических уравнений

$$\partial_t u = -Au + F(u)$$

в сепарабельном бесконечномерном гильбертовом пространстве $(X, \|\cdot\|)$ с линейным неограниченным положительно-определённым оператором A и подчинённой ему нелинейной функцией F.

Предполагая, что уравнение (1) порождает [1] гладкий полупоток в фазовом пространстве $H = D(A^\alpha)$, $0 \leq \alpha < 1$, с $\|u\|_H = \|A^\alpha u\|$, определим глобальный аттрактор как совокупность всех целых ограниченных траекторий $u(t) \in H$, $t \in (-\infty, +\infty)$, а инерциальное многообразие (ИМ) как гладкую конечномерную инвариантную поверхность $M \subset H$, содержащую аттрактор и экспоненциально притягивающую с асимптотической фазой траектории $u(t) \subset H$ при $t \to +\infty$. Сужение (1) на M представляет собой инерциальную форму – ОДУ, полностью описывающее финальную динамику исходного уравнения.

Современное состояние теории инерциальных многообразий отражено в недавней работе [2]. Установить наличие ИМ до сих пор удаётся для не слишком широкого класса параболических задач, включающего в себя: системы уравнений реакции-диффузии

$$u_t = \Delta u + f(x, u)$$

в $(0,1)^N, N \leqslant 2$, и скалярные уравнения такого рода в ряде ограниченных областей $\Omega \subset R^3$; уравнения Гинзбурга – Ландау и обобщённые уравнения Кана – Хилларда в $(0,1)^N, N \leqslant$ …; одномерные уравнения Курамото – Сивашинского и Колмогорова – Сивашинского; некоторые версии нелинейного уравнения Бюргерса на торах $T^N, N \leq 2$; уравнения Свифта – Хохенберга в произвольных ограниченных областях $\Omega \subset R^3$. Проблемы возникают с ростом размерности задачи, например, существование инерциального многообразия не доказано даже для скалярных уравнений (2) в круге не говоря уже о двумерных уравнениях Навье – Стокса. Лучше обстоит дело с параболическими задачами на компактных замкнутых поверхностях: в частности, векторные уравнения (2) на сфере S^N обладают ИМ в любой размерности N.

С другой стороны, известные примеры [3, 4] отсутствия инерциального многообразия для уравнений вида (1) выглядят искусственно и не имеют отношения к реальным задачам математической физики. В качестве относительно физичного примера подобного явления предлагается интегро-дифференциальное уравнение

$$u_t = ((I + B)\, u_x)_x + f(x, u, u_x)$$

на единичной окружности Γ с вещественным пространством $X = L^2(\Gamma)$. Здесь $I = \mathrm{id}$, …

$$(Bh)(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln \left| \sin \frac{x+y}{2} \right| h(y)\, dy$$

для $h \in X$ и определённая на $\Gamma \times R^2$ функция $f(x, s, p)$ предполагается бесконечно гладкой, но не аналитической. При этом $\partial_x B = J$, где оператор

$$(Jh)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{x+y}{2}\, h(y)\, dy$$

является лёгкой модификацией интегрального оператора Гильберта. Оператор [illegible] играет роль вырожденного нелокального коэффициента диффузии. Каноническую линейную часть данного уравнения определим равенством $Au = u - u_{xx}$.

ТЕОРЕМА ([5]). *При подходящем выборе функции $f(x,s,p)$ уравнение (3) порождает гладкий диссипативный полупоток в $H = D(A^{\theta})$, $\theta \in (3/4, 1)$, причём аттрактор этого уравнения не содержится ни в каком инвариантном конечномерном C^1-многообразии $M \subset H$.*

Фактически, строится функция $f(x,s,p)$ такая, что в абстрактной записи (1) соответствующее уравнению (3) векторное поле $F(u) - Au$ имеет стационарные точки $u_0, u_1 \in H$ и спектры σ_0, σ_1 его линеаризации в этих точках обладают свойствами: $\sigma_0 \bigcap R = \phi$ и $\sigma_1 \bigcap R = \{\lambda\}$, где λ – простое положительное собственное значение. Отсюда следует [3, 4] невозможность провести через u_0, u_1 гладкое инвариантное конечномерное многообразие $M \subset H$.

Несколько более слабая версия данной теоремы получена в [6].

Литература

[1] Sell G.R., You Y. Dynamics of evolutionary equations, Springer, N–Y, 2002.

[2] Zelik S. Inertial manifolds and finite-dimensional reduction for dissipative PDEs, arXiv:1303.4457 [math.AP], 2013.

[3] Романов А.В. Три контрпримера в теории инерциальных многообразий, Матем. заметки, 68:3 (2000), 439–445.

[4] Еден А., Зелик С.В., Калантаров В.К. Контрпримеры к регулярности проекций Мане в теории аттракторов, Успехи матем. наук, 68:2 (2013), 3-32.

[5] Романов А.В. Параболическое уравнение с нелокальной диффузией без гладкого инерциального многообразия, Матем. заметки (2014), принято в печать.

[6] Alexander V. Romanov, Parabolic equation with nonlocal diffusion without a smooth inertial manifold, arXiv:1306.4249 [math.AP], 2013.

Псевдодифференциальные операторы Киприянова-Катрахова с негладкими символами

Рощупкин С.А. (Россия)
Елецкий государственный университет имени И. А. Бунина
roshupkinsa@mail.ru

Ядро полного преобразования Фурье-Бесселя введено И.А. Киприяновым и В.В. Катраховым в [1]. Здесь вводится общий вид такого ядра, который включает произведение ядер Киприянова-Катрахова по части переменных $x' = (x_1, \dots, x_n)$, а по другой части $x'' = (x_{n+1}, \dots, x_N)$, ядро преобразования Фурье имеет вид

$$\Lambda^{\pm}_{\gamma}(x', \xi') = \prod_{j=1}^{n} \left(j_{\frac{\gamma_j - 1}{2}}(x_j \xi_j) \mp i \, \frac{x_j \xi_j}{\gamma + 1} \, j_{\frac{\gamma_j + 1}{2}}(x_j \xi_j) \right) \, e^{\mp i \langle x'', \xi'' \rangle},$$

где $j_\nu(t)$ – j-функция Бесселя, связанная с функцией Бесселя первого рода J_ν равенством $j_\nu(t) = C(\nu) \cdot \frac{J_\nu(t)}{t^\nu}$, $\langle x'', \xi'' \rangle = \sum\limits_{j=n+1}^{N} x_j \xi_j$. На основе $\Lambda^{\pm}$ вводится смешанное интегральное преобразование Фурье-Бесселя (прямое и обратное)

$$\mathcal{F}_B[f] = \int\limits_{R_N} f(x) \Lambda^{+}_{\gamma}(x, \xi)(x')^{\gamma} dx \,, \quad \mathcal{F}^{-}_B[f] = C(\gamma) \int\limits_{R_N} f(\xi) \Lambda^{-}_{\gamma}(x, \xi)(\xi')^{\gamma} d\xi.$$