

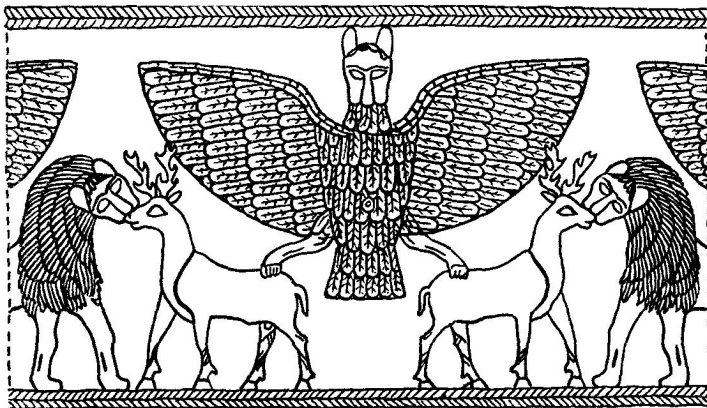
Симметрия в математике и не только

Е. Ю. Смирнов

Высшая школа экономики
факультет математики

Независимый московский университет

8 октября 2013 г.



Ваза шумерского царя Энтемены, 2700 г. до н.э.

Зеркальная (геральдическая) симметрия

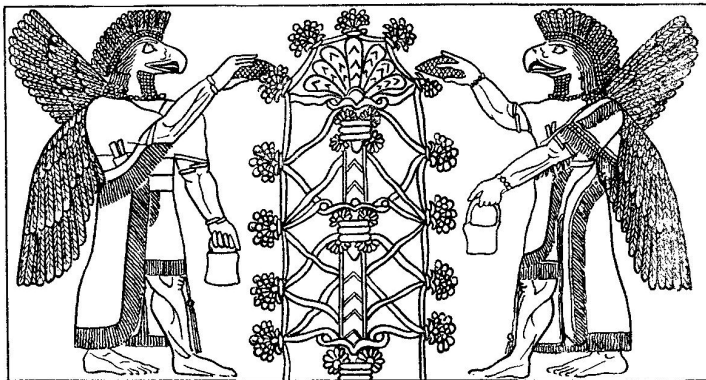


Герб императора Иоанна VIII Палеолога (1425–1448)

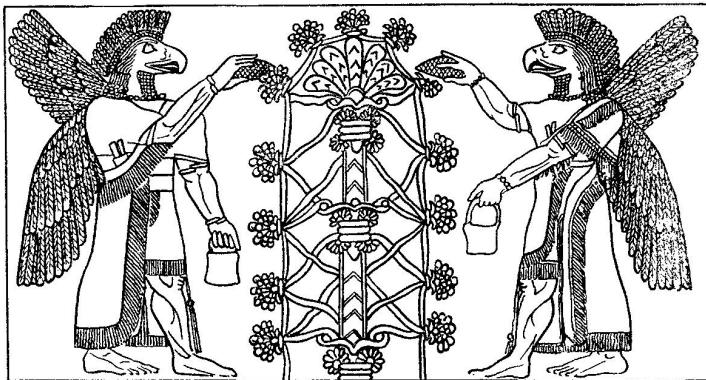
От сферической к зеркальной симметрии



Платон, диалог «Пир»: миф об андрогинах



Эти фигуры на первый взгляд кажутся зеркально-симметричными.

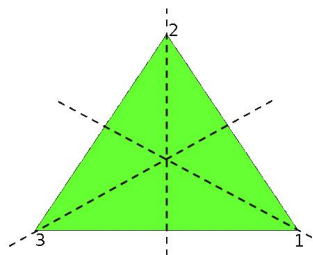


Эти фигуры на первый взгляд кажутся зеркально-симметричными. Однако они совмещаются не отражением, а поворотом на 180° .

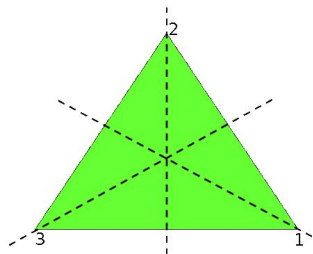


Почему винтовая лестница и штопор закручены в разные стороны?

Симметрии равностороннего треугольника

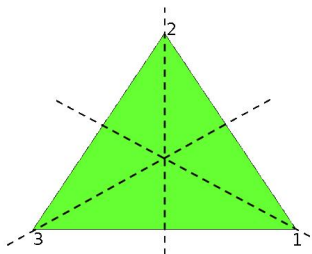


Симметрии равностороннего треугольника



Какие преобразования переводят треугольник в себя?

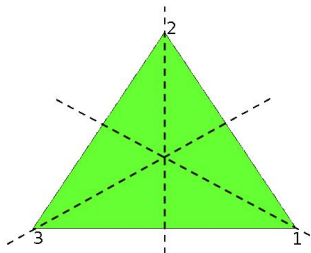
Симметрии равностороннего треугольника



Какие преобразования переводят
треугольник в себя?

- три отражения;

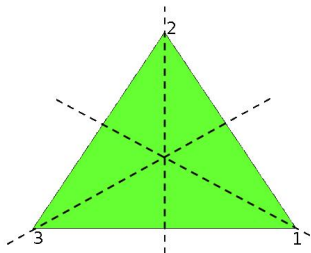
Симметрии равностороннего треугольника



Какие преобразования переводят треугольник в себя?

- три отражения;
- два поворота (на 120° и 240°);

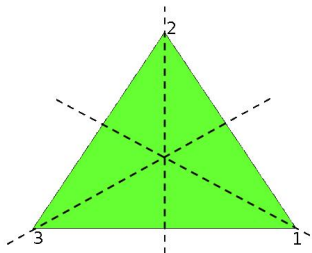
Симметрии равностороннего треугольника



Какие преобразования переводят треугольник в себя?

- три отражения;
- два поворота (на 120° и 240°);
- *тождественное* преобразование.

Симметрии равностороннего треугольника

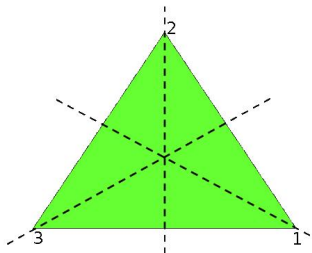


Какие преобразования переводят треугольник в себя?

- три отражения;
- два поворота (на 120° и 240°);
- *тождественное* преобразование.

Итого 6 преобразований.

Симметрии равностороннего треугольника



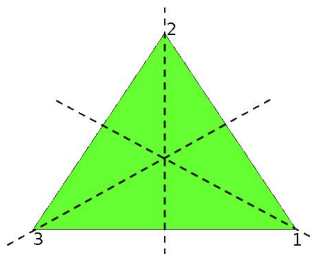
Какие преобразования переводят треугольник в себя?

- три отражения;
- два поворота (на 120° и 240°);
- *тождественное* преобразование.

Итого 6 преобразований.

Они соответствуют перестановкам множества $\{1, 2, 3\}$: любая перестановка вершин отвечает симметрии треугольника.

Симметрии равностороннего треугольника



Какие преобразования переводят треугольник в себя?

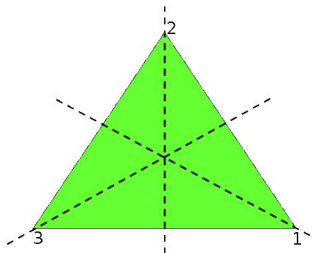
- три отражения;
- два поворота (на 120° и 240°);
- *тождественное* преобразование.

Итого 6 преобразований.

Они соответствуют перестановкам множества $\{1, 2, 3\}$: любая перестановка вершин отвечает симметрии треугольника.

Группа преобразований

Симметрии равностороннего треугольника



Какие преобразования переводят треугольник в себя?

- три отражения;
- два поворота (на 120° и 240°);
- *тождественное* преобразование.

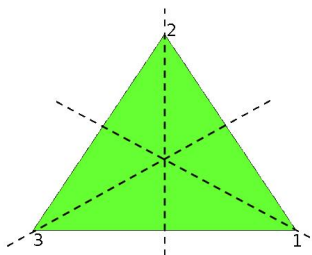
Итого 6 преобразований.

Они соответствуют перестановкам множества $\{1, 2, 3\}$: любая перестановка вершин отвечает симметрии треугольника.

Группа преобразований

У преобразований можно рассматривать:

Симметрии равностороннего треугольника



Какие преобразования переводят треугольник в себя?

- три отражения;
- два поворота (на 120° и 240°);
- *тождественное* преобразование.

Итого 6 преобразований.

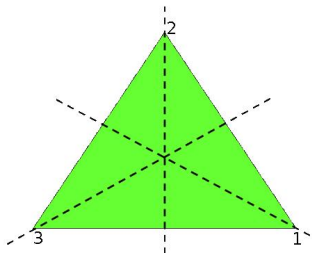
Они соответствуют перестановкам множества $\{1, 2, 3\}$: любая перестановка вершин отвечает симметрии треугольника.

Группа преобразований

У преобразований можно рассматривать:

- композицию;

Симметрии равностороннего треугольника



Какие преобразования переводят треугольник в себя?

- три отражения;
- два поворота (на 120° и 240°);
- *тождественное* преобразование.

Итого 6 преобразований.

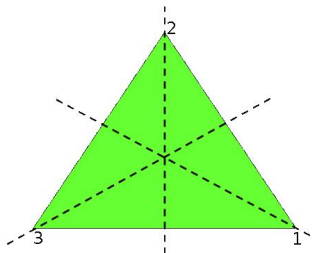
Они соответствуют перестановкам множества $\{1, 2, 3\}$: любая перестановка вершин отвечает симметрии треугольника.

Группа преобразований

У преобразований можно рассматривать:

- композицию;
- обратное преобразование;

Симметрии равностороннего треугольника



Какие преобразования переводят треугольник в себя?

- три отражения;
- два поворота (на 120° и 240°);
- *тождественное* преобразование.

Итого 6 преобразований.

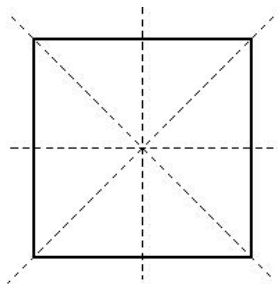
Они соответствуют перестановкам множества $\{1, 2, 3\}$: любая перестановка вершин отвечает симметрии треугольника.

Группа преобразований

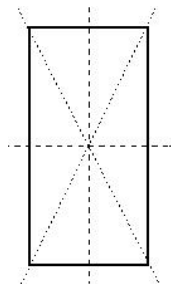
У преобразований можно рассматривать:

- композицию;
- обратное преобразование;
- тождественное преобразование.

Квадрат и прямоугольник

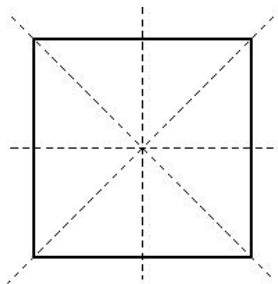


8 симметрий

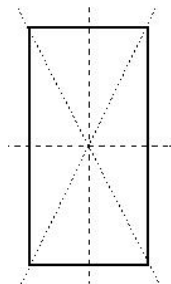


4 симметрии

Квадрат и прямоугольник



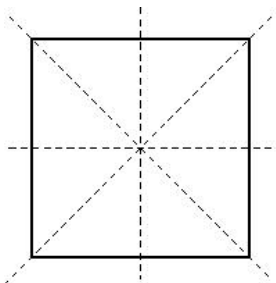
8 симметрий



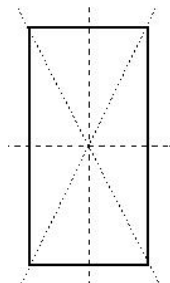
4 симметрии

Квадрат «более симметричен», чем произвольный прямоугольник!

Квадрат и прямоугольник



8 симметрий

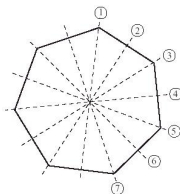


4 симметрии

Квадрат «более симметричен», чем произвольный прямоугольник!

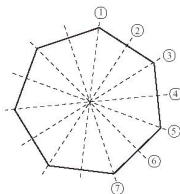
А какие многоугольники/многогранники «самые симметричные»?

Правильные многоугольники



У правильного n -угольника:

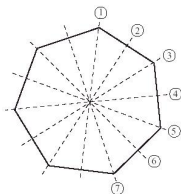
Правильные многоугольники



У правильного n -угольника:

- все углы и все стороны равны;

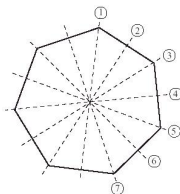
Правильные многоугольники



У правильного n -угольника:

- все углы и все стороны равны;
- n зеркальных симметрий;

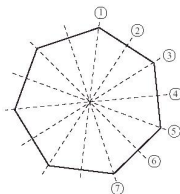
Правильные многоугольники



У правильного n -угольника:

- все углы и все стороны равны;
- n зеркальных симметрий;
- n поворотов (включая тождественное преобразование);

Правильные многоугольники



У правильного n -угольника:

- все углы и все стороны равны;
- n зеркальных симметрий;
- n поворотов (включая тождественное преобразование);
- итого $2n$ симметрий.

Тетраэдр (правильная треугольная пирамида)

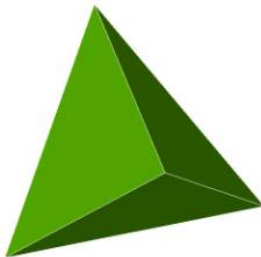


Тетраэдр (правильная треугольная пирамида)



Тетраэдр — пример *правильного многогранника*:

Тетраэдр (правильная треугольная пирамида)



Тетраэдр — пример *правильного многогранника*:

- Все грани — правильные многоугольники;

Тетраэдр (правильная треугольная пирамида)



Тетраэдр — пример *правильного многогранника*:

- Все грани — правильные многоугольники;
- Все двугранные углы между гранями равны.

Тетраэдр (правильная треугольная пирамида)

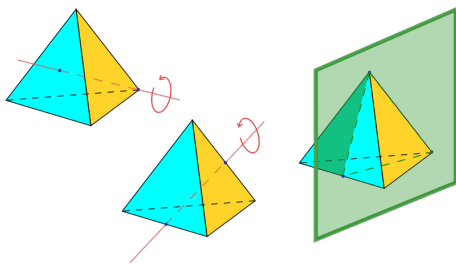


Тетраэдр — пример *правильного многогранника*:

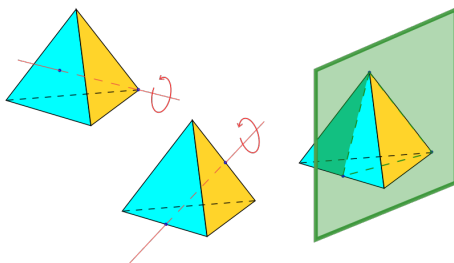
- Все грани — правильные многоугольники;
- Все двугранные углы между гранями равны.

У таких многогранников самая большая группа симметрий.

Симметрии тетраэдра

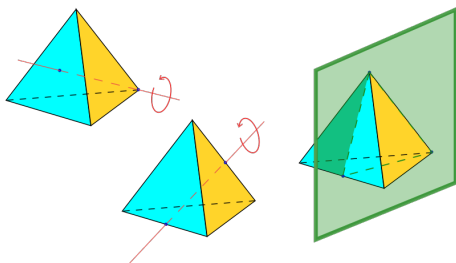


Симметрии тетраэдра



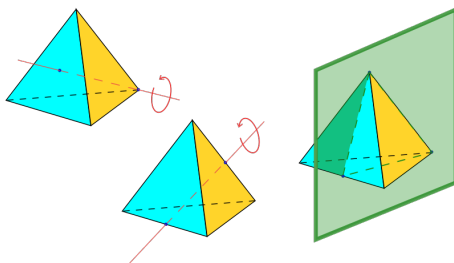
- тождественное преобразование;

Симметрии тетраэдра



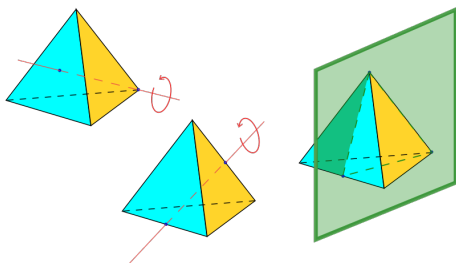
- тождественное преобразование;
- 8 поворотов относительно вершины;

Симметрии тетраэдра



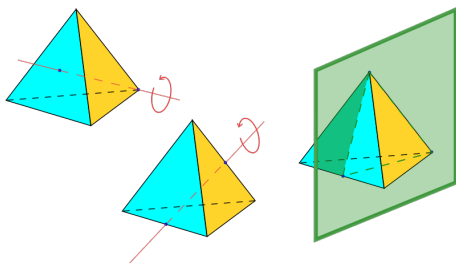
- тождественное преобразование;
- 8 поворотов относительно вершины;
- 3 поворота относительно середин сторон ребер;

Симметрии тетраэдра



- тождественное преобразование;
- 8 поворотов относительно вершины;
- 3 поворота относительно середин сторон ребер;
- 12 отражений.

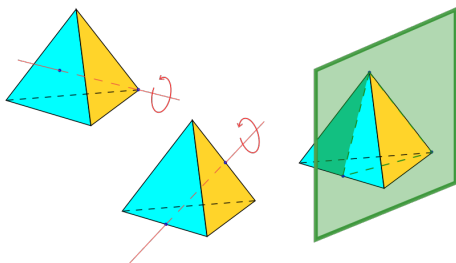
Симметрии тетраэдра



- тождественное преобразование;
- 8 поворотов относительно вершины;
- 3 поворота относительно середин сторон ребер;
- 12 отражений.

Итого 24 преобразования.

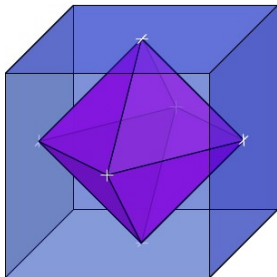
Симметрии тетраэдра

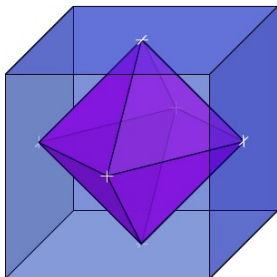


- тождественное преобразование;
- 8 поворотов относительно вершины;
- 3 поворота относительно середин сторон ребер;
- 12 отражений.

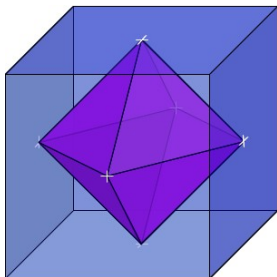
Итого 24 преобразования.

Они реализуют всевозможные перестановки множества вершин.

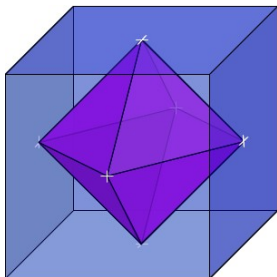




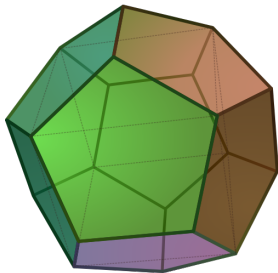
- Это *двойственные* многогранники.

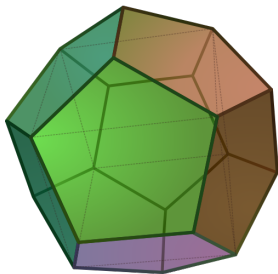


- Это *двойственные многогранники*.
- У них одинаковая группа симметрий.

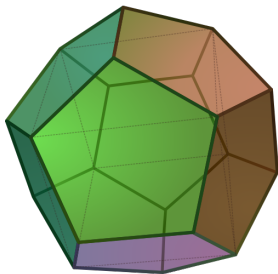


- Это *двойственные многогранники*.
- У них одинаковая группа симметрий.
- Она состоит из 48 элементов.

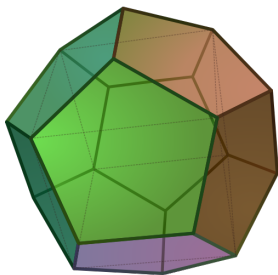




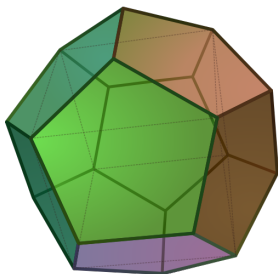
- Правильный многогранник с 12 гранями;



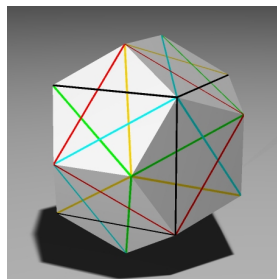
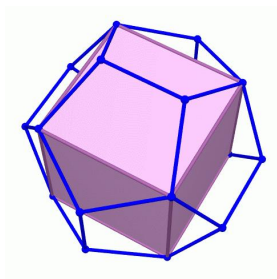
- Правильный многогранник с 12 гранями;
- Каждая грань — правильный пятиугольник.



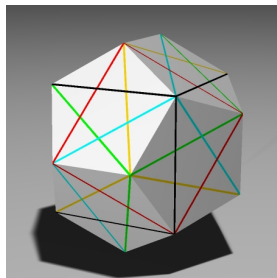
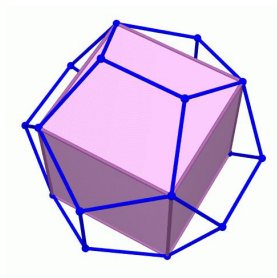
- Правильный многогранник с 12 гранями;
- Каждая грань — правильный пятиугольник.
- 12 граней, 30 ребер, 20 вершин.



- Правильный многогранник с 12 гранями;
- Каждая грань — правильный пятиугольник.
- 12 граней, 30 ребер, 20 вершин.
- Группа симметрий состоит из 120 элементов.

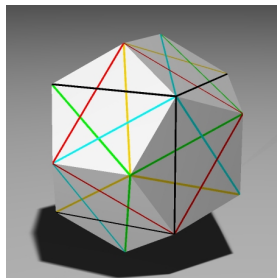
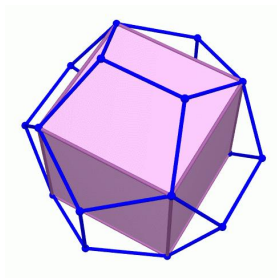


Как изучать симметрии додекаэдра?



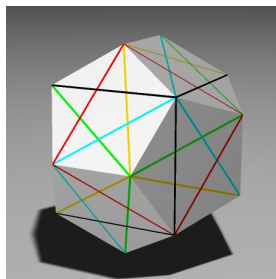
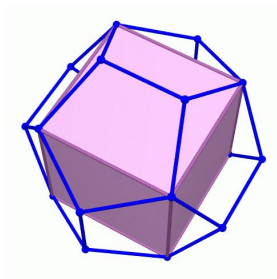
Как изучать симметрии додекаэдра?

- В додекаэдр можно вписать пять кубов.



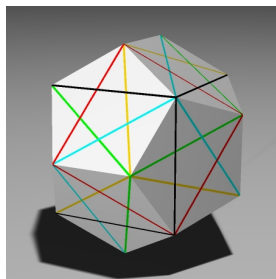
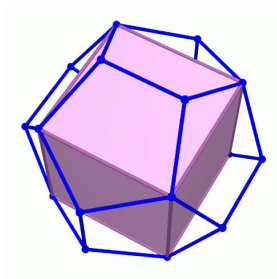
Как изучать симметрии додекаэдра?

- В додекаэдр можно вписать пять кубов.
- Эти кубы переставляются симметриями додекаэдра.



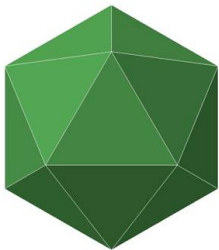
Как изучать симметрии додекаэдра?

- В додекаэдр можно вписать пять кубов.
- Эти кубы переставляются симметриями додекаэдра.
- Центральная симметрия не переставляет кубы.

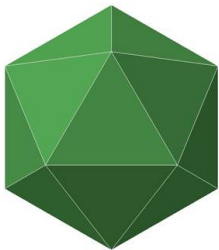


Как изучать симметрии додекаэдра?

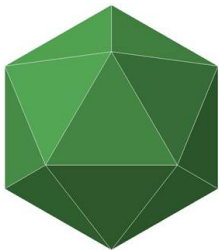
- В додекаэдр можно вписать пять кубов.
- Эти кубы переставляются симметриями додекаэдра.
- Центральная симметрия не переставляет кубы.
- Можно реализовать не все перестановки кубов, а только половину (60 из 120).



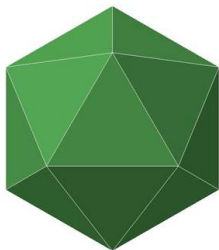
- 20 граней, 30 ребер, 12 вершин.



- 20 граней, 30 ребер, 12 вершин.
- Икосаэдр двойственен к додекаэдру.

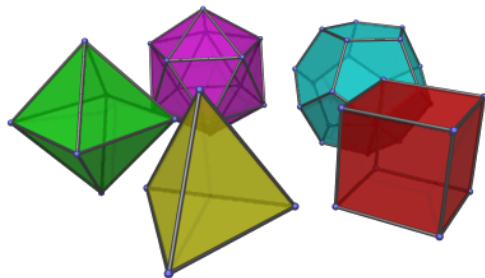


- 20 граней, 30 ребер, 12 вершин.
- Икосаэдр двойственен к додекаэдру.
- Группа симметрий — такая же, как у додекаэдра.

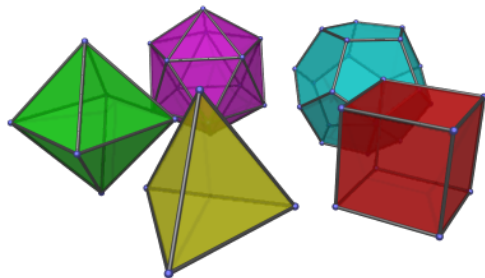


- 20 граней, 30 ребер, 12 вершин.
- Икосаэдр двойственен к додекаэдру.
- Группа симметрий — такая же, как у додекаэдра.

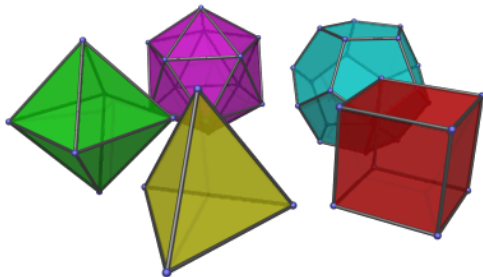
На фото справа — икосаэдр в составе паркового украшения в саду Холирудского дворца, Эдинбург, Шотландия.



- Согласно Платону, лежат в основе мироздания.



- Согласно Платону, лежат в основе мироздания.
- Олицетворяют четыре стихии: огонь — тетраэдр, земля — куб, воздух — октаэдр, вода — икосаэдр.



- Согласно Платону, лежат в основе мироздания.
- Олицетворяют четыре стихии: огонь — тетраэдр, земля — куб, воздух — октаэдр, вода — икосаэдр.
- Додекаэдр олицетворяет Вселенную.



Платон
(427–347 до н.э.)

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

Пусть a, b, c — целые числа, и уравнение имеет корень вида $x = p + \sqrt{q}$, где p, q — рациональные, а \sqrt{q} иррационально.

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

Пусть a, b, c — целые числа, и уравнение имеет корень вида $x = p + \sqrt{q}$, где p, q — рациональные, а \sqrt{q} иррационально. Тогда $x = p - \sqrt{q}$ — тоже корень!

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

Пусть a, b, c — целые числа, и уравнение имеет корень вида $x = p + \sqrt{q}$, где p, q — рациональные, а \sqrt{q} иррационально. Тогда $x = p - \sqrt{q}$ — тоже корень!

Пример

$$x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

Пусть a, b, c — целые числа, и уравнение имеет корень вида $x = p + \sqrt{q}$, где p, q — рациональные, а \sqrt{q} иррационально. Тогда $x = p - \sqrt{q}$ — тоже корень!

Пример

$$x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Корни: $x = 2 + \sqrt{3}$ и $x = 2 - \sqrt{3}$.

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

Пусть a, b, c — целые числа, и уравнение имеет корень вида $x = p + \sqrt{q}$, где p, q — рациональные, а \sqrt{q} иррационально. Тогда $x = p - \sqrt{q}$ — тоже корень!

Пример

$$x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Корни: $x = 2 + \sqrt{3}$ и $x = 2 - \sqrt{3}$.

Симметрия: $\sqrt{3} \leftrightarrow -\sqrt{3}$.

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

Пусть a, b, c — целые числа, и уравнение имеет корень вида $x = p + \sqrt{q}$, где p, q — рациональные, а \sqrt{q} иррационально. Тогда $x = p - \sqrt{q}$ — тоже корень!

Пример

$$x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Корни: $x = 2 + \sqrt{3}$ и $x = 2 - \sqrt{3}$.

Симметрия: $\sqrt{3} \leftrightarrow -\sqrt{3}$.

То же верно и для любого уравнения с целыми коэффициентами вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Пример

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

Пример

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Пример

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Тогда $x = \pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$ — тоже корни! Всего их четыре.

Пример

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Тогда $x = \pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$ — тоже корни! Всего их четыре.

Симметрии уравнения

$$\begin{array}{ccc} -\sqrt{2} + \sqrt{3} & \text{—} & \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ | & & | \\ -\sqrt{2} - \sqrt{3} & \text{—} & \sqrt{2} + \sqrt{3} \end{array}$$

Пример

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Тогда $x = \pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$ — тоже корни! Всего их четыре.

Симметрии уравнения

$$\begin{array}{ccc} -\sqrt{2} + \sqrt{3} & \text{—} & \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ | & & | \\ -\sqrt{2} - \sqrt{3} & \text{—} & \sqrt{2} + \sqrt{3} \end{array}$$

Симметрии этого уравнения — такие же, как у прямоугольника.

Пример

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Тогда $x = \pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$ — тоже корни! Всего их четыре.

Симметрии уравнения

$$\begin{array}{ccc} -\sqrt{2} + \sqrt{3} & \text{—} & \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ | & & | \\ -\sqrt{2} - \sqrt{3} & \text{—} & \sqrt{2} + \sqrt{3} \end{array}$$

Симметрии этого уравнения — такие же, как у прямоугольника.
Группу симметрий корней уравнения называют его *группой Галуа*.

Кубические уравнения: формула Кардано

$$x^3 + px + q = 0;$$

Кубические уравнения: формула Кардано

$$x^3 + px + q = 0;$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q}{2}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q}{2}}}.$$

Кубические уравнения: формула Кардано

$$x^3 + px + q = 0;$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q}{2}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q}{2}}}.$$

А дальше?..

- *Формула Феррари*: решение уравнения 4-й степени.

Кубические уравнения: формула Кардано

$$x^3 + px + q = 0;$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q}{2}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q}{2}}}.$$

А дальше?..

- *Формула Феррари*: решение уравнения 4-й степени.
- Степень 5 и выше: явной формулы нет!

Кубические уравнения: формула Кардано

$$x^3 + px + q = 0;$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q}{2}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q}{2}}}.$$

А дальше?..

- *Формула Феррари*: решение уравнения 4-й степени.
- Степень 5 и выше: явной формулы нет!
- Причина: группа Галуа такого уравнения может быть устроена слишком сложно.

Кубические уравнения: формула Кардано

$$x^3 + px + q = 0;$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q}{2}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q}{2}}}.$$

А дальше?..

- *Формула Феррари*: решение уравнения 4-й степени.
- Степень 5 и выше: явной формулы нет!
- Причина: группа Галуа такого уравнения может быть устроена слишком сложно.
- Например, как группа вращений додекаэдра.

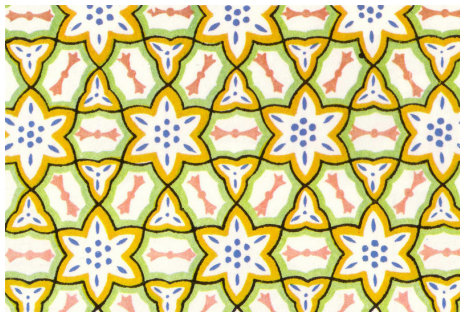


Эварист Галуа
(1811–1832)

Снова геометрия: группы симметрий орнаментов



Римский орнамент

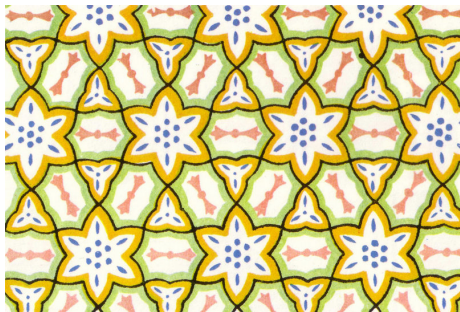


Персидский орнамент

Снова геометрия: группы симметрий орнаментов



Римский орнамент



Персидский орнамент

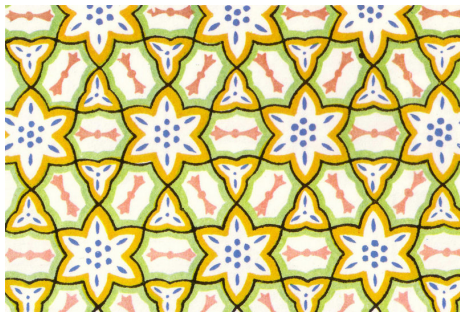
Задача

Классифицировать периодические орнаменты на плоскости.

Снова геометрия: группы симметрий орнаментов



Римский орнамент



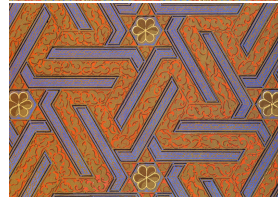
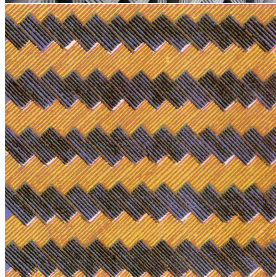
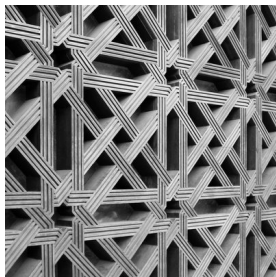
Персидский орнамент

Задача

Классифицировать периодические орнаменты на плоскости.

Будем считать орнаменты одинаковыми, если у них одна и та же группа симметрии.

Примеры орнаментов



- Существует 17 групп симметрий периодических орнаментов на плоскости (они же — *кристаллографические группы*).

- Существует 17 групп симметрий периодических орнаментов на плоскости (они же — *кристаллографические группы*).
- Все они встречаются в мусульманском искусстве.

- Существует 17 групп симметрий периодических орнаментов на плоскости (они же — *кристаллографические группы*).
- Все они встречаются в мусульманском искусстве.
- В пространстве таких групп уже 230.

- Существует 17 групп симметрий периодических орнаментов на плоскости (они же — *кристаллографические группы*).
- Все они встречаются в мусульманском искусстве.
- В пространстве таких групп уже 230.
- Классифицированы в 1891 г. Е. С. Фёдоровым.

- Существует 17 групп симметрий периодических орнаментов на плоскости (они же — *кристаллографические группы*).
- Все они встречаются в мусульманском искусстве.
- В пространстве таких групп уже 230.
- Классифицированы в 1891 г. Е. С. Фёдоровым.
- Они описывают всевозможные кристаллические структуры.

- Существует 17 групп симметрий периодических орнаментов на плоскости (они же — *кристаллографические группы*).
- Все они встречаются в мусульманском искусстве.
- В пространстве таких групп уже 230.
- Классифицированы в 1891 г. Е. С. Фёдоровым.
- Они описывают всевозможные кристаллические структуры.
- Порядок симметрии кристалла может быть равен 2, 3, 4 или 6.



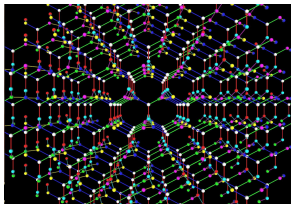
Евграф Степанович
Фёдоров
(1853–1919)

Герман Вейль:

«Хотя поворотная симметрия пятого порядка особенно часто встречается в органическом мире, она не обнаружена [...] среди кристаллов».



Герман Вейль
(1885–1955)

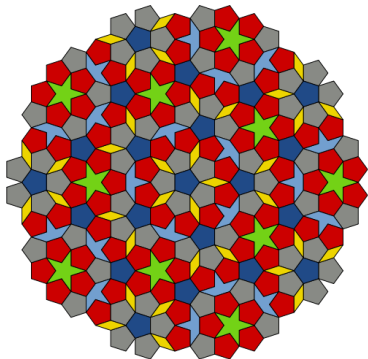


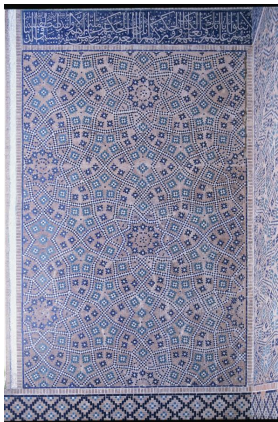
- Периодических замощений с симметрией порядка 5 нет.

- Периодических замощений с симметрией порядка 5 нет.
- Однако имеются *квазипериодические* замощения!

- Периодических замощений с симметрией порядка 5 нет.
- Однако имеются *квазипериодические* замощения!
- У них есть поворотная симметрия порядка 5, но нет симметрий типа «параллельный перенос».

- Периодических замощений с симметрией порядка 5 нет.
- Однако имеются *квазипериодические* замощения!
- У них есть поворотная симметрия порядка 5, но нет симметрий типа «параллельный перенос».
- Они называются *мозаиками Пенроуза*.





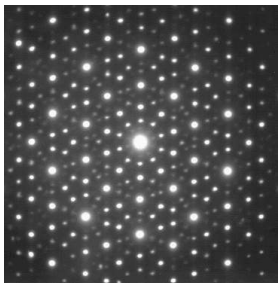
Орнамент в оформлении медресе Абдуллы-хана, Бухара, Узбекистан

Мозаики Пенроуза также встречаются в исламских орнаментах XIII-XV вв. на территории Ирана, Узбекистана, Афганистана, Индии...

См.: Peter J. Lu and Paul J. Steingardh, *Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture*, Science 315, 1106 (2007)



Сэр Роджер Пенроуз (р. 1931)



Икосаэдральный
квазикристалл
Ho-Mg-Zn

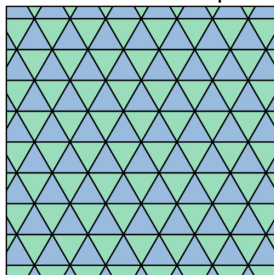
- Имеются квазикристаллические сплавы, кристаллическая решетка которых обладает осью симметрии пятого порядка.
- За открытие квазикристаллов Дан Шехтман был удостоен Нобелевской премии по химии за 2011 г.



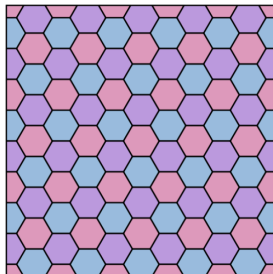
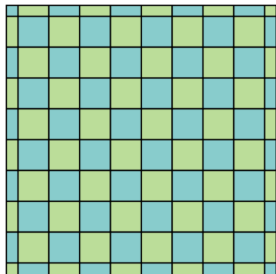
Дан Шехтман
(р. 1941)

Замощения с помощью многоугольников

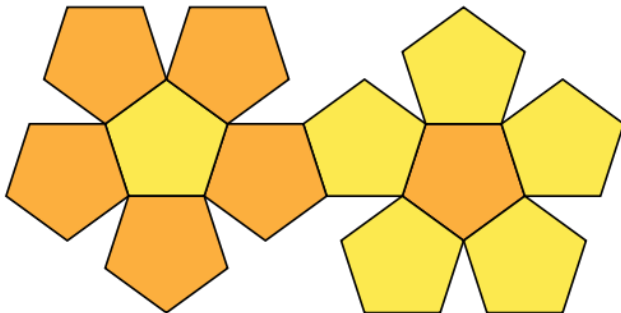
Периодический орнамент отвечает некоторому замощению плоскости.
Например, плоскость можно замостить правильными треугольниками.



С квадратами и шестиугольниками это тоже удастся:



А пятиугольниками замостить плоскость не получается...



Замощения с помощью многоугольников

Зато ими можно замостить *сферу*:



Замощения с помощью многоугольников

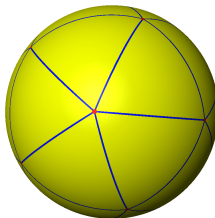
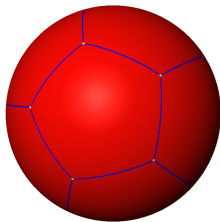
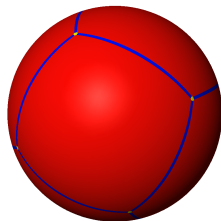
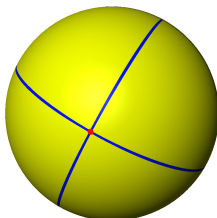
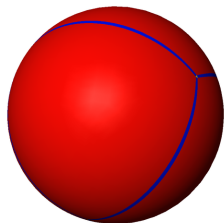
Зато ими можно замостить *сферу*:



Получается додекаэдр!

Замощения с помощью многоугольников

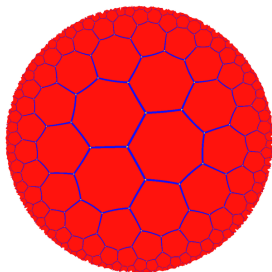
Все пять правильных многогранников отвечают замощениям сферы:



А как насчет семиугольников?

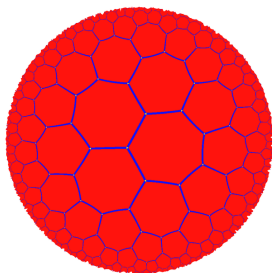
А как насчет семиугольников?

Ни плоскость, ни сферу ими замостить нельзя.
Зато можно замостить *плоскость Лобачевского*:



А как насчет семиугольников?

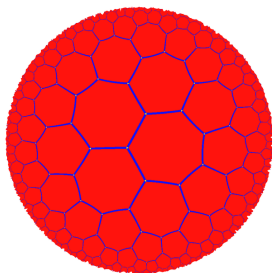
Ни плоскость, ни сферу ими замостить нельзя.
Зато можно замостить *плоскость Лобачевского*:



Здесь изображено разбиение плоскости Лобачевского на равные (!) правильные (!!) семиугольники.

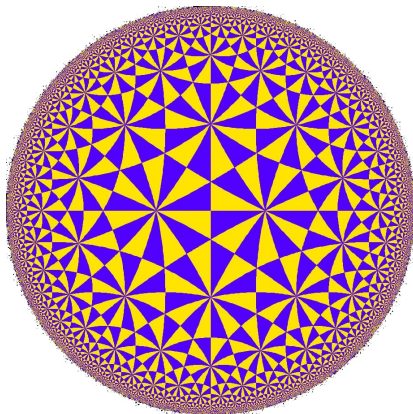
А как насчет семиугольников?

Ни плоскость, ни сферу ими замостить нельзя.
Зато можно замостить *плоскость Лобачевского*:

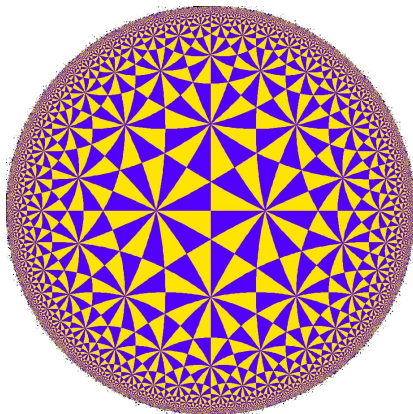


Здесь изображено разбиение плоскости Лобачевского на равные (!) правильные (!!) семиугольники.
В каждой вершине сходятся три семиугольника.

Разобьём каждый семиугольник на треугольники.

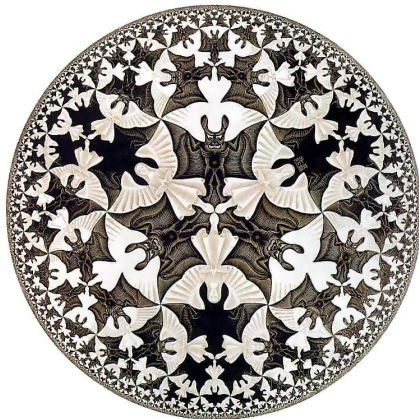


Разобьём каждый семиугольник на треугольники.



Группа симметрий такого замощения называется
гиперболической группой отражений.

Спасибо за внимание!



Мауриц Корнелиус Эшер. Круговой предел IV (Небеса и ад).

Что дальше?

Почитать:

- В. Г. Болтянский, Н. Я. Виленкин. Симметрия в алгебре. М.: МЦНМО, 2002
- Г. Вейль. Симметрия. М.: Наука, 1968
- М. Гарднер. От мозаик Пенроуза к надежным шифрам. М.: Мир, 1993
- И. М. Парамонова. Симметрия в математике. М.: МЦНМО, 2000

Посмотреть:

- Dimensions. Une promenade mathématique. (Размерности. Математическая прогулка). Мультфильм. Доступен в YouTube на 8 языках, включая русский.

Поиграть:

- iOrnament. Приложение для iPhone/iPad. Доступно в AppStore.