Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики»

Кафедра Высшей математики

Программа дисциплины «Случайные процессы и теория массового обслуживания»

Автор программы:

Шнурков Петр Викторович

Одобрена на заседании кафедры «___» _______________ 2012 г.
Зав. кафедрой Четвериков В.М.

Рекомендована секцией УМС «___» _______________ 2012 г.

Утверждена УС факультета «___» _______________ 2012 г.

Москва 2012

Содержание комплекса

Пояснительная записка к курсу «Случайные процессы и теория массового обслуживания»

Введение

Курс «Случайные процессы и теория массового обслуживания» представляет собой первую часть единого курса, посвящённого общей теории случайных процессов и рассчитанного на два семестра. Такой курс традиционно читается в течение ряда лет на факультете прикладной математики и факультете математической экономики МИЭМ. В настоящем варианте по формальным причинам его вторая часть называется «Процессы массового обслуживания и стохастические модели в экономике». Курс читается в пятом и шестом семестрах для студентов, обучающихся по специальности «Математические методы в экономике». Согласно учебному плану объем аудиторных занятий в пятом семестре составляет 2 часа лекций и 2 часа семинарских занятий в неделю, а в шестом семестре- 2 часа лекций и 1 час семинарских занятий в неделю. Кроме того, в шестом семестре предусмотрена курсовая работа.

При разработке данного курса и в ходе его изучения я как лектор ставил перед собой две главные задачи:

1. Познакомить слушателей с фундаментальными основами общей теории случайных процессов и ее отдельных разделов, посвященных различным видам случайных процессов.
2. Сформировать у слушателей общее представление о приложениях теории случайных процессов в естественных науках, в технике и в экономике.

В связи с этим, в курсе рассматриваются многие глубокие и весьма сложные вопросы, касающиеся общих свойств случайных процессов и их отдельных видов. В то же время на лекциях и на практических занятиях рассматривается целый ряд стохастических моделей, имеющих конкретное прикладное содержание. В основном эти модели носят экономический характер.

Учебная дисциплина, связанная с какой-либо областью фундаментальной науки, должна в целом отражать современное состояние и особенности этой области науки. Современная теория случайных процессов представляет собой специфическую область фундаментальной математики, в которой используются многие сложные и глубокие идеи, формальные понятия и конструкции. Соответствующая учебная дисциплина по объективным причинам является сложной для изучения и восприятия. Задача лектора состоит в том, чтобы найти форму изложения теоретического материала и создать методическое обеспечение этого изложения, которое позволит успешно изучать курс каждому студенту, серьезно и ответственно относящемуся к процессу своего образования. Именно этой цели служат методические материалы, приведённые в дальнейшем.

П.В. Шнурков

Общая методическая характеристика дисциплины

Программа курса «Случайные процессы и теория массового обслуживания» предназначена для реализации государственных требований к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников по специальности «математические методы в экономике» (080116) и (061800) и является единой для всех форм обучения.

Цели и задачи дисциплины.

Целью преподавания данной дисциплины является получение фундаментальных знаний об общих свойствах случайных процессов, а также основных свойствах отдельных классов случайных процессов (цепи Маркова, марковские процессы с непрерывным временем и дискретным множеством состояний). Задача преподавания дисциплины состоит в создании у студентов устойчивого представления о многообразии изучаемых стохастических моделей и возможностях их использования при анализе реальных систем и процессов в экономике, технике и естественных науках.

Требования к уровню освоения содержания дисциплины (требования к знаниям, умениям и навыкам, приобретенным в результате изучения дисциплины).

1) знание основных понятий, определений, формулировок теорем и других фундаментальных результатов в теории случайных процессов.
2) знание общих свойств и особенностей различных классов случайных процессов, а также важнейших характеристик данных процессов.
3) умение устанавливать связи между различными результатами и свойствами случайных процессов и других стохастических моделей.
4) умение осмысливать математические обоснования результатов теории и разбираться в доказательствах теорем, приведенных в курсе.
5) умение проводить логические рассуждения и аналитические выводы, аналогичные тем, которые используются при изучении данной дисциплины.
6) умение использовать учебную и учебно-научную литературу для уточнения и осмысления результатов, приведенных в ходе изучения данной дисциплины.
7) умение использовать полученные знания для изучения новых разделов теории случайных процессов, а также других математических дисциплин, в которых исследуются проблемы применения стохастических моделей в различных областях экономики и техники (стохастическая финансовая математика, математическая теория страхования, теория немарковских систем массового обслуживания, математическая теория эффективности и надежности, стохастическая теория дифференциальных систем, стохастическая теория физико-химических процессов и т.д.).
8) навыки работы с учебной литературой, нахождения и самостоятельного изучения необходимых материалов по данному курсу.
9) навыки самостоятельного изучения материалов лекций
10) навыки самостоятельного анализа и решения задач, предлагаемых на практических занятиях и контрольных работах

Оценка результатов работы студента. Пункты 1, 2, 6 (частично), 9, 10 характеризуют минимальный объем знаний, умений и навыков, которыми должен обладать студент в результате изучения данного курса. Освоение курса в объеме пунктов 3, 4, 8 соответствуют хорошему, добротному уровню приобретенных знаний, умений и навыков. Пункты 5, 6 (в достаточно полном объеме), 7 характерны для высокого уровня овладения дисциплиной, на таком уровне могут работать только наиболее подготовленные и добросовестные студенты.

Учебно-тематический план дисциплины

В первой графе таблицы указываются виды аудиторных и самостоятельных занятий студентов. Во второй графе указывается общая трудоемкость дисциплины в соответствии с ГОС ВПО, объем аудиторных и самостоятельных занятий – в соответствии с примерным учебным планом. В третьей и четвертой графе указываются номера семестров (если их два), в которых предусматривается каждый вид учебной работы и вид итогового контроля по дисциплине.

Объем дисциплины и виды учебной работы.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры
		5
Общая трудоемкость дисциплины	90	90
Аудиторные занятия	68	68
Лекции (Л)	34	34
Практические занятия (ПЗ)		
Семинары (С)	34	34
Лабораторные работы (ЛР)		
И (или) другие виды аудиторных занятий		
Самостоятельная работа	22	22
Курсовой проект (работа)		
Расчетно-графические работы		
Реферат		
И (или) другие виды самостоятельной работы		
Вид итогового контроля (зачет, экзамен)		экзамен

Учебно-тематический план дисциплины

В учебно-тематическом плане приводится перечень тем, которые могут делиться на разделы и части. После этого размещается подробное содержание тем курса, дополненное Семинарскими или практическими занятиями, самостоятельной работой (с целями и задачами). Обязательно приводится ссылка на литературу и знания и умения студента, полученные после изучения раздела.

Содержание дисциплины.

		Аудиторные занятия		
№ п/п	Раздел дисциплины	Лекции	Сем.	Лабор. Работы
1.	Введение в теорию случайных процессов	2 час.		
2.	Понятие случайного процесса. Случайные процесс как математический объект.	10 час.		
3.	Марковские процессы с дискретным временем и дискретным множеством состояний (цепи Маркова). Общая характеристика, классификация состояний.	14 час.	16 час.	
4.	Цепи Маркова с дискретным множеством состояний. Предельные и стационарные распределения.	8 час.	8 час.	
5.	Вспомогательные результаты. Теория экспоненциальных распределений и их некоторых приложений.		10 час.	

Содержание разделов дисциплины.

1. Введение в теорию случайных процессов (2 часа).

Общая характеристика дисциплин, посвящённых теории случайных процессов: «Случайные процессы и теория массового обслуживания» (5 семестр); «Процессы массового обслуживания и стохастические модели в экономике» (6 семестр). Описание основных разделов читаемых курсов, виды отчетности.

Анализ литературы по теории случайных процессов и методические рекомендации по её использованию.

2. Понятие случайного процесса. Общие свойства случайных процессов (8 часов).

Понятие случайного процесса как динамической стохастической модели. Примеры. Два подхода к определению случайного процесса. Выборочное вероятностное пространство (пространство траекторий). Теорема Колмогорова о системе согласованных вероятностных мер. Общие свойства траекторий. Различные понятия непрерывности случайного процесса. Теорема о достаточных условиях непрерывности «в целом» (существования непрерывной модификации). Лит. [1],[3],[4](осн.);[1],[2],[6](доп.)

3. Марковские процессы с дискретным временем и дискретным множеством состояний (цепи Маркова). Общая характеристика, классификация состояний. (14 часов).

Определение марковской цепи (МЦ). Идея марковского свойства. Вариант марковского свойства. Представление конечномерных распределений через переходные вероятности. Свойства вероятностей перехода. Способы задания МЦ.

Классы состояний МЦ. Основные свойства состояний: существенность, возвратность, положительность, периодичность. Альтернатива солидарности. Связи между различными свойствами. Теоремы об особенностях поведения МЦ при различных свойствах состояний.

Пример марковской цепи: неограниченное случайное блуждание по целочисленным точкам (одномерный и многомерный варианты). Свойства состояний и общая характеристика эволюции цепи. Лит. [2],[4](осн.);[1],[4],[7](доп.)

4. Цепи Маркова с дискретным множеством состояний. Предельные и стационарные распределения (8 часов).

Определения предельного, эргодического и стационарного распределений МЦ. Понятие стационарности (в узком смысле) и достаточные условия стационарности в виде условий на начальное распределение.

Эргодические теоремы для вероятностей перехода МЦ. Необходимые и достаточные условия существования эргодического, предельного и единственного стационарного распределений МЦ для конечного и счетного множества состояний. Связи между эргодическим, предельным и единственным стационарным распределениями.

Аддитивный функционал доходов, связанный с данной марковской цепью. Эргодическая теорема для аддитивного функционала. Лит. [2],[4](осн.);[1],[3],[4],[7](доп.)

5. Вспомогательные результаты. Теория экспоненциальных распределений и их некоторых приложений. (10 час.; изучается на семинарских занятиях).

Экспоненциальное (показательное) распределение. Аналитическое описание. Свойство отсутствия последействия для экспоненциального распределения. Вероятностные распределения, связанные с экспоненциальным: распределение Эрланга, гамма-распределение.

Общее понятие марковской модели с непрерывным временем и дискретным множеством состояний. Классическая марковская модель с двумя состояниями и её применение в теории массового обслуживания. Лит. [2](осн.);[3],[4],[5](доп.).

Понедельный план проведения лекционных и практических занятий.

План лекционных занятий.

Раздел 1. Введение в теорию случайных процессов.

Лекция 1. Общая характеристика дисциплин, посвящённых теории случайных процессов: «Случайные процессы и теория массового обслуживания» (5 семестр); «Процессы массового обслуживания и стохастические модели в экономике» (6 семестр). Описание основных разделов читаемых курсов, виды отчетности.
Анализ литературы по теории случайных процессов и методические рекомендации по её использованию.

Раздел 2. Понятие случайного процесса. Случайный процесс как математический объект.

Лекция 2.
Понятие случайного процесса. Первое (аналитическое) определение случайного процесса. Определение траектории случайного процесса. Примеры. Классификация процессов по характеру множества состояний X и множества значений временного параметра T. Совместное распределение значений процесса в различные моменты времени (конечномерное распределение). Основные свойства конечномерного распределения.

Лекция 3.
Второй подход к определению случайного процесса. Понятие случайной величины, свойство измеримости отображения, смысл данного свойства. Выборочная функция (траектория) процесса: $\xi(\omega,t)=x_w(t), t\in T$ (где $x_w(t)$ - некоторая функция, заданная на множестве T и принимающая значения в пространстве X). Построение выборочного вероятностного пространства ($\mathcal{X}$, $\mathcal{F}$, P_ξ).Построение измеримого отображения $w\to\xi(\omega,\cdot)=x(\cdot)\in \mathcal{X}$. Второе (аксиоматическое) определение случайного процесса.

Лекция 4.
Система согласованных вероятностных мер (распределений). Теорема А.Н. Колмогорова о системе согласованных вероятностных мер (теорема существования случайного процесса). Комментарии к формулировке теоремы Колмогорова. Схема доказательства теоремы Колмогорова. Метод построения вероятностного пространства и заданного на нём случайного процесса, конечномерные распределения которого совпадают с заданной системой согласованных вероятностных мер.

Лекция 5.
Стохастическая эквивалентность случайных процессов (различные определения и их связь). Понятие модификации. Стохастически эквивалентные случайные процессы, имеющие различные траектории. Принципиальная проблема аксиоматической теории случайных процессов: исследование свойств траектории.

Лекция 6.
Аналитические свойства траекторий случайных процессов. Стохастическая непрерывность случайного процесса (Различные варианты стохастической непрерывности). Стохастическая непрерывность в фиксированной точке t по вероятности, в среднеквадратическом, с вероятностью единица. Стохастическая непрерывность “в целом” (непрерывная модификация). Пример случайного процесса, непрерывного с вероятностью, равной единице, в любой момент времени $t\in T$, траектории которого разрывны. Достаточные условия стохастической непрерывности “в целом”, т.е. существования непрерывной модификации.

Раздел 3. Марковские процессы с дискретным временем и дискретным множеством состояний (цепи Маркова). Общая характеристика, классификация состояний.

Лекция 7.

Классическое определение марковской цепи (МЦ). Идея марковского свойства. Системы событий, порожденные траекториями процесса. Вариант марковского свойства (условная независимость произвольных событий из прошлого и будущего). Вероятности перехода, их свойства. Матрицы вероятностей перехода. Теорема о представлении совместного распределения через переходные вероятности: $P(\xi_{m+1} = i_1, ..., \xi_{m+n} = i_n \mid \xi_m = i_0) = p_{i_0, i_1}(m, m+1) \cdots p_{i_{n-1}, i_n}(m+n-1, m+n)$

при начальных условиях $\xi_0 = i_0$ и $\xi_m = i_0 (m \geq 0)$. Представление произвольных конечномерных распределений через переходные вероятности. Два способа задания характеристик марковской цепи.

Лекция 8.

Уравнения Колмогорова-Чепмена, их смысл и обоснование. Матричная форма уравнений $\mathrm{P}(n,m) = \mathrm{P}(n,s) \cdot \mathrm{P}(s,m)$. Вероятности перехода за один шаг и рекуррентные формулы $\mathrm{P}(n,m) = \mathrm{P}(n,n+1) \cdot \mathrm{P}(n+1,n+2) \cdots \mathrm{P}(m-1,m)$.

Однородные цепи. Вероятности перехода за k шагов: $P(k) = P^k, k \geq 1$. Вспомогательные результаты: теоремы об оценках для вероятностей перехода.

Лекция 9.

Классификация состояний МЦ. Понятие достижимости. Путь из i в j ($i \to j$). Транзитивность отношения $i \to j$ (если $i \to j$, $j \to k$, то $i \to k$). Сообщающиеся состояния (отношение $i \sim j$). Классы состояний. Теорема о разбиении множества состояний на непересекающиеся классы. Замкнутые и незамкнутые классы. Поглощающие состояния.

Существенность. Существенные и несущественные состояния (определение). Альтернатива солидарности для свойства существенности в виде отдельной теоремы. Теорема о связи свойств существенности и замкнутости (без доказательства).

Лекция 10.

Вероятности с запрещением. Система несовместных событий $B_n = (\xi_1 \neq i, ..., \xi_{n-1} \neq i, \xi_n = i)$, $n \geq 1$ при условии $\xi_0 = i$. Событие $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Вероятности $\upsilon_i(n) = P(B_n \mid \xi_0 = i)$, $n \geq 1$; $\upsilon_i = \sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_i(n) = P(B \mid \xi_0 = i)$. Вероятностный смысл параметра υ_i. Параметр υ_i – вероятность возвращения в состояние i за конечное время. Возвратность. Определение возвратности (два варианта). Теорема о необходимых и достаточных условиях возвратности. Доказательство. Теорема: если j –невозвратное состояние, $i \in \mathrm{X}$ (произвольное), то $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}(n) < \infty$ (необходимое условие невозвратности). Альтернатива солидарности для свойства возвратности в виде теоремы. Доказательство (с использованием критерия возвратности).

Случайные моменты возвращения в фиксированное состояние i (при условии $\xi_0 = i$): $\nu_0 = 0, \nu_1, \nu_2, ..., \nu_n, ...$; интервалы между возвращениями $[\nu_n, \nu_{n+1}]$, n=0,1,2… . Вероятностные характеристики марковской цепи, связанные с различными интервалами между возвращениями в состояние i (анализ на основе свойств марковости и однородности).

Лекция 11.

Случайная величина æ$_i$ – число возвращений в исходное состояние i (формальное определение).

Лемма Бореля-Кантелли (два утверждения; без доказательства). Теорема о числе возвращений МЦ в возвратное и невозвратное состояния. Доказательство. Эволюция МЦ с конечным множеством состояний в возвратных и невозвратных классах (анализ на основе теоремы о числе возвращений).

Лекция 12.

Теорема о связи свойств существенности и возвратности. Доказательство. Следствие: связь возвратности и замкнутости. Вероятности с запрещением (продолжение). Система несовместных событий $A_n = (\xi_1 \neq j, ..., \xi_{n-1} \neq j, \xi_n = j), n \geq 1$, при условии $\xi_0 = i$. Событие $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Вероятности $\upsilon_{ij}(n) = P(A_n | \xi_0 = i),\ n \geq 1,\ \upsilon_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_{ij}(n) = P(A \mid \xi_0 = i)$, их смысл и значение.

Теорема: если $i, j \in C$, где C – возвратный класс, то $\upsilon_{ij} = 1$ (без доказательства). Положительность. Определение положительных и нулевых состояний с использованием параметра $\mu_i = \mathrm{M}\nu_1 = \mathrm{M}(\nu_\mathrm{n} - \nu_\mathrm{n-1}),\ n \geq 1$. Альтернатива солидарности для свойства положительности. Формулировка теоремы (доказательство основано на использовании эргодической теоремы для вероятности перехода МЦ и приводится в дальнейшем в разделе о предельных и стационарных распределениях).

Теорема о связи свойств возвратности и положительности. Доказательство: Утверждения: если состояние i невозвратное, то оно нулевое (положительность $\Rightarrow$ возвратность). Доказательство второго утверждения: возвратность $\Rightarrow$ положительность для конечного класса состояний приводится ниже, после формулировки эргодических теорем для вероятностей перехода.

Методика классификации состояний МЦ по свойствам замкнутости, существенности, возвратности, положительности с использованием результатов, приведенных на предыдущих лекциях. Связи указанных свойств для вариантов конечной и счётной марковских цепей.

Лекция 13.

Периодичность Понятие цикла и периода состояния. Возвращения МЦ в периодическое состояние i $\in$ X. . Альтернатива солидарности для свойства периодичности, формулировка и доказательство теоремы. Теорема о циклических подклассах периодического класса. Доказательство. Структура матрицы вероятностей перехода для периодического класса. Матрицы вероятностей перехода между подклассами.

Пример анализа свойств марковской цепи. Случайное блуждание по целочисленной решетке. Одномерное случайное блуждание. Определение МЦ. Свойства состояний (неприводимость, существенность, периодичность). Исследование свойства возвратности. Качественное объяснение результатов.

Многомерное симметричное случайное блуждание. Определение. Представление многомерного блуждания через независимые одномерные. Возвратность и невозвратность (зависимость от размерности). Общие методологические выводы из полученного результата: необходимость точного количественного анализа модели.

Поглощающие цепи Маркова. Определение. Краткий обзор результатов.

<u>Раздел 4.</u> Цепи Маркова с дискретным множеством состояний. Предельные и стационарные распределения.

Лекция 14.

Определения предельного, эргодического и стационарного распределений МЦ. Понятие стационарности МЦ (стационарность случайного процесса в узком смысле).

Теорема о достаточных условиях стационарности цепи в виде условий на начальное распределение. Доказательство.

Стационарные режимы в системах, описываемых марковскими процессами. Понятие стационарного (устойчивого) поведения. Сходимость к предельному (стационарному) распределению, как достаточное условие приближения к стационарному режиму.

Лекция 15.

Эргодическая теорема для переходных вероятностей марковской цепи для варианта возвратных состояний (четыре основных утверждения без доказательства). Формулировка и анализ результатов. Доказательство альтернативы солидарности для свойства положительности. Доказательство связи свойств возвратности и положительности для конечного класса состояний.

Лекция 16.

Теорема о необходимых и достаточных условиях эргодичности конечной марковской цепи (формулировка и доказательство). Теорема о необходимых условиях существования пределов вероятностей перехода в счётной марковской цепи (без доказательства). Следствие: связь условий существования предельного и стационарного распределений марковской цепи.

Лекция 17.

Теорема о необходимых и достаточных условиях существования единственного стационарного распределения марковской цепи с дискретным (конечным или счётным) множеством состояний. Анализ результатов, полученных в ходе доказательства теоремы.

Теорема о необходимых и достаточных условиях существования предельного распределения марковской цепи с дискретным (конечным или счётным) множеством состояний (без доказательства). Анализ условий теоремы.

Теорема о необходимых и достаточных условиях существования эргодического распределения (эргодичности) марковской цепи со счётным множеством состояний (без доказательства).

Понятие функционала доходов, заданного на траекториях марковской цепи. Эргодическая теорема для функционала доходов (без доказательства).

План семинарских занятий.

Раздел Марковские процессы с дискретным временем и дискретным множеством состояний (цепи Маркова). Общая характеристика, классификация состояний.

Занятие №1.

Цепи Маркова. Анализ марковского свойства. Теоретические сведения. Определение марковской цепи (МЦ), комментарии к определению. Системы событий, порожденные траекториями процесса, понятия «прошлого», «настоящего» и «будущего» (формализация). Вариант марковского свойства (условная независимость произвольных событий из «прошлого» и «будущего» при фиксированном «настоящем»).
Задача 1. Связь двух определений марковской цепи.
Задача 2. Пример случайной последовательности, не образующей МЦ

Занятие №2.

Вероятностные характеристики марковской цепи.

Теоретические сведения. Матрицы вероятностей перехода (МВП) и их свойства. Графы переходов МЦ. Уравнения Колмогорова-Чепмена и их матричные представления. Задание произвольных конечномерных распределений МЦ. Два способа задания МЦ. Примеры.
Задача 1. Анализ вероятностных характеристик МЦ с четырьмя состояниями.

Занятие №3.
Классификация состояний МЦ. Понятие класса. Теоретические сведения. Достижимость, путь из i в j ($i \to j$).

Задача 1. Оценки для вероятностей перехода вида $p_{ij}(m+n) \geq p_{ik}(m)p_{kj}(n); i,j,k \in X$

Задача 2. Доказательство транзитивности отношения $i \to j$ ($i \to k$, $k \to j \Rightarrow i \to j$).

Теоретические сведения. Сообщающиеся состояния. Классы. Замкнутые и незамкнутые классы.

Занятие №4.
Теоретические сведения. Существенность. Определения существенных и несущественных состояний. Иллюстрации.

Задача 1. Альтернатива солидарности для свойства существенности (доказательство).

Задача 2. Доказать, что класс C замкнут $\Leftrightarrow$ C – существенный.

Занятие №5.
Классификация состояний МЦ. Возвратность и положительность.

Теоретические сведения. Возвратность. Основные результаты, связанные с возвратностью (формулировки теорем). Теорема о связи существенности и возвратности. Положительность. Связь возвратности и положительности.

Общая схема классификации состояний МЦ (изложение). Примеры.

Задача 1. Классификация состояний МЦ с двумя классами: $X = C_1 \cup C_2; C_1$ – замкнутый, C_2 – незамкнутый.

Занятие №6.
Классификация состояний МЦ. Периодичность. Теоретические сведения. Периодичность. Определение периода. Периодический класс. Циклические подклассы. Матрицы вероятностей перехода из подкласса $C^{(r)}$ в $C^{(r+1)}$ (за один шаг) и из подкласса $C^{(r)}$ в $C^{(r)}$ (за d шагов МЦ). Выделить случай периодического класса C, период которого d=2; циклические подклассы $C^{(0)}, C^{(1)}; C = C^{(0)} \cup C^{(1)}$.

Задача 1. Анализ МЦ с пятью состояниями, одним классом и двумя циклическими подклассами.

Занятие №7.
Поглощающие цепи Маркова.

Теоретические сведения. Определение поглощающей МЦ. Матрица вероятностей перехода и ее структура. Особенности эволюции поглощающей МЦ.

Вероятностные характеристики марковской модели с поглощением. Матричные формулы для основных характеристик.

Задача 1. Вычислительная система с отказами и восстановлением, обработка сообщений. Модель поглощающей МЦ с четырьмя состояниями. Определение математического ожидания числа выполненных заказов до первой потери заказа (поглощения). Определение математического ожидания дохода, полученного при эксплуатации данной системы до поглощения.

Занятие №8.
Аудиторная контрольная работа №1 на тему «Цепи Маркова. Общие свойства, классификация состояний».

Раздел «Цепи Маркова с дискретным множеством состояний. Предельные и стационарные состояния».

Занятие №9.
Предельные и стационарные распределения марковских цепей.

Анализ результатов контрольной работы №1. Недостатки в решениях задач и способы их устранения.

Теоретические сведения. Определения предельного, эргодического и стационарного распределений МЦ. Свойство стационарности МЦ (стационарность в узком смысле). Достаточные условия стационарности в форме условий на начальное распределение.

<u>Занятие №10.</u>

Предельные и стационарные распределения марковских цепей.

Теоретические сведения. Основные результаты для предельных и стационарных распределений. Теорема 1 (эргодическая теорема для вероятностей перехода). Теорема 2 (необходимые и достаточные условия эргодичности конечной МЦ). Теорема 3 (необходимые и достаточные условия существования предельного распределения конечной МЦ). Теорема 4 (необходимые и достаточные условия существования единственного стационарного распределения конечной МЦ). Связь стационарных вероятностей с параметрами μ_j,где μ_j, – математическое ожидание времени между последовательными возвращениями в состояние $j, j \in X$. Связь предельного и стационарного распределений МЦ. Схема логических связей свойств существования эргодического, предельного и единственного стационарного распределений конечной МЦ.

Задача 1. Анализ МЦ с пятью состояниями (продолжение исследования модели периодической МЦ, введенной на занятии 6).

<u>Занятие №11.</u>

Аддитивные функционалы на марковских цепях.

Теоретические сведения. Понятие аддитивного функционала (функционала доходов). Эргодическая теорема для функционала доходов на МЦ (формулировка). Прикладное значение утверждения эргодической теоремы. Асимптотические представления характеристик аддитивного функционала при длительной эволюции системы ($t \to \infty$).

Задача 1. Применение эргодической теоремы для функционала доходов, связанного с марковской моделью вычислительной системы с отказами и восстановлением (определена на занятии 7). Определение стационарного показателя – среднего удельного дохода в стационарном режиме, полученного при фиксировании данной системы.

<u>Занятие №12.</u>

Аудиторная контрольная работа №2 на тему «Цепи Маркова. Предельные и стационарные распределения».

<u>Раздел </u>Вспомогательные результаты. Теория экспоненциальных распределений и их некоторых приложений.

<u>Занятие №13.</u>

Свойства экспоненциального распределения.

Анализ результатов контрольной работы №2. Недостатки в решениях задач и способы их устранения.

Теоретические сведения. Экспоненциальное распределение. Свойство отсутствия последействия.

Задача 1. Доказать свойство отсутствия последействия для экспоненциального распределения.

Понятие операции. Остаточная длительность операции. Важнейшее свойство экспоненциальной операции.

<u>Занятие №14.</u>

Свойства экспоненциального распределения.

Задача 1. Асимптотическое свойство экспоненциальной вероятности.

Задача 2. Распределение минимума $n, n \geq 1$ независимых экспоненциальных величин $\eta_1,...,\eta_n; P(\eta_k < x) = 1 - e^{-\lambda_k x}; k = 1,2,...,n; \eta = \min(\eta_1,...,\eta_n)$. Тогда $P(\eta < x) = 1 - e^{-\lambda x}, \lambda = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$.

Задача 3. В условиях задачи 2 $P(\eta = \eta_k \mid \eta = t) = \frac{\lambda_k}{\lambda}, k = 1,2,..,n.$

Задача 4. Распределения числа операций, завершающихся в интервале $(t, t+\Delta)$.

Задача 5. Распределение Эрланга как распределение суммы n независимых величин экспоненциального характера.

Занятие №15.

Марковский процесс с непрерывным временем и дискретным множеством состояний. Основные свойства (краткие теоретические сведения).

Определение марковского процесса, вариант марковского свойства. Вероятности перехода и их свойства. Уравнения Колмогорова-Чепмена. Задание произвольных конечномерных распределений марковского процесса через вероятности перехода. Однородные процессы.

Инфинитезимальные характеристики однородного марковского процесса (интенсивности перехода и выхода). Уравнения Колмогорова для вероятностей перехода (прямая и обратная системы). Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний. Линейные алгебраические уравнения для стационарного распределения марковского процесса.

Занятие №16.

Задача 1. Марковская модель системы с двумя состояниями. Описание модели. Стандартная интерпретация модели с двумя состояниями как системы массового обслуживания M|M|1|0 с одним обслуживающим устройством и отсутствием очереди. Общее понятие о системах массового обслуживания. Экономическая интерпретация модели: структура или фирма, выполняющая один вид работ (услуг) или простаивающая в ожидании начала работы. Случайный процесс $\xi(t)$, описывающий функционирование системы (процесс с двумя состояниями). Обоснование марковского свойства процесса $\xi(t)$ при помощи свойств экспоненциальных распределений.

Занятие №17.

Марковская модель системы с двумя состояниями (продолжение анализа модели, описанной на предыдущем занятии).

Исследование переходных вероятностей процесса $\xi(t)$ за период времени $(t, t+\Delta)$ с использованием свойств экспоненциальных операций. Асимптотические представления вероятностей перехода при $\Delta \to 0$. Определение интенсивностей перехода процесса $\xi(t)$. Составление уравнений Колмогорова для вероятностей состояний процесса $\xi(t)$. Решение данных уравнений и определение нестационарных вероятностей состояний. Нахождение предельного (стационарного) распределения процесса $\xi(t)$

<u>Рекомендуемая литература:</u>

Основная литература:

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977.
2. Карлин С. Основы теории случайных процессов. - М.: Мир, 1973.
3. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: МЦНМО, 2004

Дополнительная литература:

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Эдиториал УРСС, 2003.
2. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Случайные процессы. - М.: Физматлит, 2003.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: Высшая школа, 2001.
4. Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания. – М.: Высшая школа, 1982.
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
6. Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. – М.: Физматлит, 2002.
7. Розанов Ю.А. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1982.