Логвенков С.А. Мышкис П.А. Панов П.А. Самовол В.С.

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ.

Учебное пособие для факультетов менеджмента, политологии и социологии.

Москва

Издательство МЦНМО

2010

Логвенков С.А. Мышкис П.А. Панов П.А. Самовол В.С. Сборник задач по алгебре. Учебное пособие для факультетов менеджмента, политологии и социологии. – М.: МЦНМО, 2010. 47 с.

ISBN ????????

Сборник задач составлен в соответствии с программой по алгебре для подготовки студентов, обучающихся по специальности менеджмент, социология, политология. Содержит задачи по следующим разделам: векторы, элементы аналитической геометрии, матрицы, решение систем линейных уравнений.

ISBN ????????

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Настоящий сборник задач посвящен одному из главных разделов высшей математики - линейной алгебре, а также включает в себя задачи по аналитической геометрии. Он составлен в соответствии с программами курса «Алгебра и анализ», читаемого на различных факультетах ГУ-ВШЭ. Изложение материала в предлагаемом сборнике ориентировано на углубленное изучение фундаментальных математических идей и методов, широко применяемых в исследовании социально-экономических процессов и явлений. При этом основное внимание уделено таким объектам, как векторы, матрицы и системы линейных уравнений. Большая часть задач снабжена ответами.

При подборе примеров и задач привлекались разнообразные источники и, прежде всего, те книги, которые вошли в приведенный в конце сборника библиографический список.

1. Векторы

1.1. Даны точки $M_1(4;-2;6)$, $M_2(1;4;0)$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

1.2. Известно, что $\overrightarrow{AB}=(4;-12;z)$, причем $\left|\overrightarrow{AB}\right|=13$. Найдите *z*.

1.3. Вектор $\vec{a}$ составляет с осями *Ox* и *Oy* углы 60^0 и 120^0. Найти его координаты и сделайте рисунок, если $|\vec{a}|=2$.

1.4. Найдите вектор $\vec{a}$, образующий с тремя базисными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ равные острые углы, при условии, что $|\vec{a}|=2\sqrt{3}$.

1.5. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$: $A(3;-4;7)$, $B(-5;3;-2)$, $C(1;2;-3)$. Найдите его четвертую вершину D.

1.6. Даны вершины треугольника $A(3;-1;5)$, $B(4;2;-5)$, $C(-4;0;3)$. Найдите длину медианы, проведенной из вершины A.

1.7. Постройте параллелограмм на векторах $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=\vec{k}-3\vec{j}$. Определите длины его диагоналей.

1.8. Найдите длину вектора $\vec{a}$, если векторы $\vec{a}=m\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=4\vec{i}+6\vec{j}-n\vec{k}$ коллинеарны.

1.9. Определите длины сторон параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $\vec{c}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{d}=2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$.

1.10. Даны векторы $\vec{a}(4;-2;4)$ и $\vec{b}(6;-3;2)$. Найдите а) $(\vec{a}+\vec{b})^2$, б) $(\vec{a}-\vec{b})^2$, в) $(2\vec{a}-3\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$.

1.11. Вычислить а) $(\vec{m}+\vec{n})^2$, если $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы с углом между ними 30^0; б) $(\vec{a}-\vec{b})^2$, если $|\vec{a}|=\sqrt{8}$, $|\vec{b}|=4$ и угол между ними составляет 135^0.

1.12. Даны длины векторов $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$, $|\vec{a}+\vec{b}|=24$. Найдите $|\vec{a}-\vec{b}|$.

1.13. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=60^0$, причем $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=8$. Определите $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$.

1.14. Найдите угол между диагоналями параллелограмма, если заданы три его вершины $A(2;1;3)$, $B(5;2;-1)$, $C(-3;3;-3)$.

1.15. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{m}+4\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, образующие угол 120^0. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1.16. Найти угол между биссектрисами углов *xOy* и *yOz*.

1.17. Найдите длину проекции вектора $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ на вектор $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$.

1.18. Даны два вектора $\vec{a}(m;3;4)$ и $\vec{b}(4;m;-7)$. При каких m $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будут перпендикулярны?

1.19. При каком значении параметра *m* векторы $\vec{a} = m\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - m\vec{k}$ перпендикулярны.

1.20. При каком значении параметра *m* угол между векторами $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{k}$ равен 180^0?

1.21. Разложите вектор $\vec{x}(4, 3, -2)$ по векторам $\vec{e}_1(1, 1, 2)$, $\vec{e}_2(-3, 0, -2)$, $\vec{e}_3(1, 2, -1)$.

1.22. Найдите координаты вектора $\vec{x}(2, 2, -1)$ в базисе $\vec{e}_1(1, 0, 2)$, $\vec{e}_2(-1, 2, 1)$, $\vec{e}_3(-1, 4, 0)$.

1.23. Разложите вектор $\vec{x}(2; 2; 3; 3)$ по системе векторов $\vec{a}(1; 2; 3; 1)$, $\vec{b}(2; 1; 2; 3)$, $\vec{c}(3; 2; 4; 4)$.

1.24. Разложите вектор $\vec{x}(4; 1; 3; 1)$ по системе векторов $\vec{a}(2; 0; 1; 1)$, $\vec{b}(1; 1; 2; -2)$, $\vec{c}(2; 1; 3; -3)$.

1.25. В линейном пространстве многочленов степени, не превосходящей 2 и с нулевым свободным членом, найдите какой-нибудь базис. Найдите в этом базисе разложение многочлена $T(x) = x^2 - 3x$. В ответе укажите координаты многочлена $T(x)$ в выбранном базисе.

1.26. В линейном пространстве многочленов степени, не превосходящей 2 и с корнем $x = 1$, найдите какой-нибудь базис. Найдите в этом базисе разложение многочлена $T(x) = x^2 - 3x + 2$. В ответе укажите координаты многочлена $T(x)$ в выбранном базисе.

1.27. В линейном пространстве многочленов степени, не превосходящей 2, найдите разложение многочлена $T(x) = 3x^2 + 2x + 1$

по базису $P(x) = 4x^2 + 3x + 4$, $Q(x) = 3x^2 + 2x + 3$, $R(x) = x^2 + x + 2$. В ответе укажите координаты многочлена $T(x)$ в данном базисе.

1.28. В линейном пространстве многочленов степени, не превосходящей 2, найдите разложение многочлена $T(x) = 9x^2 + 10x + 4$ по базису $P(x) = 3x^2 + 2x + 3$, $Q(x) = x^2 + x + 1$, $R(x) = 3x^2 + 3x + 2$. В ответе укажите координаты многочлена $T(x)$ в данном базисе.

2. Элементы аналитической геометрии.

2.1. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-4;-2)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, где $M_1(-1;-3;-7)$ и $M_2(-4;-1;-5)$.

2.2. Напишите уравнение плоскости, параллельной оси Ox и проходящей через точки $M_1(0;1;3)$ и $M_2(2;4;5)$.

2.3. Напишите уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки $M_1(3;1;0)$ и $M_2(1;3;0)$.

2.4. Напишите уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $M(2;-4;3)$.

2.5. Напишите уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $M(0;5;6)$.

2.6. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(5;4;3)$ и отсекающей равные отрезки на осях координат.

2.7. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;-3;3)$ и отсекающей на осях *Oy* и *Oz* вдвое большие отрезки, чем на оси *Ox*.

2.8. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;3;-1)$ параллельно плоскости $5x-3y+2z-10=0$.

2.9. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(14;2;2)$ параллельно плоскости $x-2y-3z=0$.

2.10. Найдите угол между плоскостью $x+2y-2z-8=0$ и $x+y-17=0$.

2.11. Найдите угол между плоскостью $x-y+z\sqrt{2}-6=0$ и $x+y-z\sqrt{2}+12=0$.

2.12. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1;-1;2)$ перпендикулярно плоскостям $x-2y+z-13=0$, $x+2y-2z+2=0$.

2.13. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;-1;-5)$ перпендикулярно плоскостям $3x-2y+2z-6=0$, $5x-4y+3z+3=0$.

2.14. Напишите уравнение прямой (в каноническом параметрическом виде), проходящей через точки $M_1(-1;2;3)$ и $M_2(2;6;-2)$.

2.15. Напишите в каноническом и параметрическом виде уравнение прямой, являющейся пересечением плоскостей $x+y-z-2=0$ и $2x-y+z-7=0$.

2.16. а) Прямые l_1 и l_2 являются линиями пересечения двух пар плоскостей

l_1: $\begin{matrix} 2x+y-z-2=0 \\ x-y+2z-2=0 \end{matrix}$; l_2: $\begin{matrix} x+3y-z-2=0 \\ x+2y \quad -2=0 \end{matrix}$. Определите, пересекаются ли эти прямые.

б) Прямые l_1 и l_2 являются линиями пересечения двух пар плоскостей

l_1: $\begin{matrix} 3x+3y+z+1=0 \\ x+2y+z+1=0 \end{matrix}$; l_2: $\begin{matrix} x+y+3z-5=0 \\ x+2y \quad +4z-5=0 \end{matrix}$. Определите, пересекаются ли эти прямые.

2.17. Напишите уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(3;-5;2)$ на ось Ox.

2.18. а) Найдите угол между прямой $\frac{x+1}{0}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{1}$ и прямой $x=2t-1$, $y=2t+3$, $z=2$.

б) Найдите угол между прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{\sqrt{2}}$ и плоскостью $x+y+z\sqrt{2}=0$.

2.19 а) Найдите косинус угла между двумя лучами

$$l_1:\begin{cases} x=3+3t \\ y=-2-t \\ z=1+2t \\ t\in[0;+\infty) \end{cases} \text{ и } l_2:\begin{cases} x=3+k \\ y=-2+3k \\ z=1-k \\ k\in(-\infty;0] \end{cases}$$

б) Найдите косинус угла между двумя лучами

$$l_1:\begin{cases} x=2-t \\ y=3-t \\ z=-2+4t \\ t\in[0;+\infty) \end{cases} \text{ и } l_2:\begin{cases} x=2+2k \\ y=3+k \\ z=-2+2k \\ k\in(-\infty;0] \end{cases}$$

2.20 а) Найдите длину отрезка $\begin{cases} x=-2{,}5+2t \\ y=3{,}1+2t \\ z=-1{,}1+t \\ t\in[-1;1] \end{cases}$

б) Найдите длину отрезка $\begin{cases} x=5 \\ y=-2{,}3+5t \\ z=5+12t \\ t\in[-2;-1] \end{cases}$

2.21. а) При каком значении параметра a прямая $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{-1}$ и плоскость $2x+(a+2)y-2z+11=0$ перпендикулярны?

б) При каком значении параметра a прямая $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{8}=\dfrac{z}{6}$ и плоскость $x+(a+1)y+3z+5=0$ перпендикулярны?

2.22. Найдите точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-1}{2}$ и плоскости $x-3y+z-8=0$.

2.23. Найдите точку пересечения прямой $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-2}{0}$ и плоскости $3x+y-2z=0$.

2.24. Найдите точку пересечения прямой, проходящей через точки $(1,1,1)$ и $(1,2,3)$ и плоскости $x-y-3z-11=0$.

2.25 При каком значении параметра a плоскость $x+y+az-4=0$ и прямая $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$ пересекаются (параллельны)?

2.26. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;3;-4)$ и перпендикулярной прямой $\frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$.

2.27. Напишите уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-4}{3}$ и точку $M(3;4;5)$.

2.28. Найдите координаты проекции точки $P(-1;\ 2;\ 0)$ на плоскость $4x-5y-z-7=0$.

2.29. Найдите координаты проекции точки $P(\ 2;\ -1;\ 1)$ на плоскость $x-y+2z-2=0$.

2.30. Найдите расстояние от точки $\left(0;-5;10\right)$ до плоскости $5x+2y-z-10=0$.

2.31. Найдите проекцию точки $M(2;3;4)$ на прямую $x=y=z$.

2.32. Найдите проекцию точки $P(0;\ 2;\ 1)$ на прямую $\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{3}$.

2.33. Напишите уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(1;0;-1)$ на прямую $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-3}$.

2.34. Найдите точку пересечения прямых $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{-1}$ и $\frac{x+6}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{2}$.

2.35. Найдите точку пересечения прямых $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+2}{3}$ и $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-6}{5}=\frac{z-2}{1}$.

2.36. Напишите уравнение плоскости, относительно которой точки $P_1(1;\ -2;\ -3)$ и $P_2(3;\ 4;\ 9)$ симметричны.

2.37. Напишите уравнение плоскости, относительно которой точки $P_1(-2;\ 1;\ -3)$ и $P_2(6;\ 5;\ 5)$ симметричны.

2.38. Найдите точку, симметричную точке $P(0,-1,3)$ относительно плоскости $2x+y-2z-2=0$.

2.39. Найдите точку, симметричную точке $P(2,1,-1)$ относительно плоскости $2x-y+z-8=0$.

3. Матрицы

3.1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ -3 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу $C=2A-3B$.

3.2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 1 \\ -5 & 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 9 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 1 \\ -3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу $C=A-2B$.

3.3. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 6 & -2 & 4 \\ 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу *X*, удовлетворяющую матричному уравнению $A+2X-4B=0$.

3.4. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу *X*, удовлетворяющую матричному уравнению $5A+3X-B=0$.

3.5. Найдите $f(A)$, если $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $f(x)=x^2-3x$.

3.6. Найдите произведение матриц *A* и *B*

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

б) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

г) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

д) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

е) $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

ж) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

з) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

и) $A=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

к) $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

л) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

м) $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B^T=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

3**.7.** Найдите произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ матриц A и B и установите, как при этом меняются столбцы или строчки матрицы B.

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

3.8. Используя результат предыдущей задачи, представьте матрицу B в виде произведения матриц A и X. В ответе укажите матрицу X и порядок сомножителей: $B = A \cdot X$ или $B = X \cdot A$.

а) $A=\begin{pmatrix} 342 & 211 & 645 \\ 457 & 992 & 719 \\ 123 & 403 & 842 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 645 & 211 & 342 \\ 719 & 992 & 457 \\ 842 & 403 & 123 \end{pmatrix}$

б) $A=\begin{pmatrix} 342 & 211 & 645 \\ 457 & 992 & 719 \\ 123 & 403 & 842 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 457 & 992 & 719 \\ 342 & 211 & 645 \\ 123 & 403 & 842 \end{pmatrix}$

в) $A=\begin{pmatrix} 332 & 211 & 123 \\ 457 & 992 & 719 \\ 123 & 403 & 842 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 996 & 633 & 369 \\ 457 & 992 & 719 \\ 123 & 403 & 842 \end{pmatrix}$

г) $A=\begin{pmatrix} 111 & 203 & 343 \\ 209 & 121 & 514 \\ 221 & 106 & 678 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 333 & 812 & 343 \\ 627 & 484 & 514 \\ 663 & 424 & 678 \end{pmatrix}$

3.9. Возведите матрицу A в степень n

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $n=3$

б) $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $n=5$

в) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $n=10$, $n=15$

г) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n=10$

д) $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, n - произвольное натуральное число

3.10. Найдите ранг матрицы

а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 & 7 \\ 4 & 15 & 8 & 7 & 1 \\ 2 & 17 & 4 & 13 & -9 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

е) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 4 & 11 & -7 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

ж) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

з) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & -9 & 4 & -2 \\ 5 & 18 & -8 & -1 \end{pmatrix}$

и) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

к) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

3.11. Исследуйте систему векторов на линейную зависимость или независимость

а) $\vec{a}_1 = (-7; 5; 19)$, $\vec{a}_2 = (-5; 7; -7)$, $\vec{a}_3 = (-8; 7; 14)$

б) $\vec{a}_1 = (1; 2; -2)$, $\vec{a}_2 = (0; -1; 4)$, $\vec{a}_3 = (2; -3; 3)$

в) $\vec{a}_1 = (1; 8; -1)$, $\vec{a}_2 = (-2; 3; 3)$, $\vec{a}_3 = (4; -11; 9)$

г) $\vec{a}_1 = (1; 2; 3)$, $\vec{a}_2 = (2; -1; 1)$, $\vec{a}_3 = (1; 3; 4)$

д) $\vec{a}_1 = (0; 1; 1; 0)$, $\vec{a}_2 = (1; 1; 3; 1)$, $\vec{a}_3 = (1; 3; 5; 1)$, $\vec{a}_4 = (0; 1; 1; -2)$

е) $\vec{a}_1 = (-1; 7; 1; -2)$, $\vec{a}_2 = (2; 3; 2; 1)$, $\vec{a}_3 = (4; 4; 4; -3)$,
$\vec{a}_4 = (1; 6; -1; 1)$

3.12. Найдите ранг системы векторов и укажите какой-нибудь базис в этой системе векторов

а) $\vec{a}_1 = (1; 1; 2)$, $\vec{a}_2 = (3; 1; 2)$, $\vec{a}_3 = (1; 2; 1)$, $\vec{a}_4 = (2; 1; 2)$

б) $\vec{a}_1 = (1; 1; 1)$, $\vec{a}_2 = (-3; -5; 5)$, $\vec{a}_3 = (3; 4; -1)$, $\vec{a}_4 = (1; -1; 4)$

в) $\vec{a}_1 = (1; 1; 0; -1)$, $\vec{a}_2 = (1; 2; 1; 0)$, $\vec{a}_3 = (1; 3; 2; 1)$, $\vec{a}_4 = (1; 4; 3; 2)$

г) $\vec{a}_1 = (1; 0; 1; 0)$, $\vec{a}_2 = (-2; 1; 3; -7)$, $\vec{a}_3 = (3; -1; 0; 3)$,
$\vec{a}_4 = (-4; 1; -3; 1)$

3.13. Найти какой-нибудь базис в указанном линейном пространстве L. Найдите координаты элемента $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ в этом базисе. В ответе укажите координаты A в выбранном базисе.

а) L - линейное пространство всех матриц 2x2

б) L - линейное пространство симметричных матриц 2x2

в) L - линейное пространство матриц 2x2 вида $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

3.14. а) В линейном пространстве симметричных матриц 2x2 найдите координаты элемента $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ в базисе $e_1=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

б) В линейном пространстве симметричных матриц 2x2 найдите координаты элемента $A=\begin{pmatrix}9 & 10\\ 10 & 4\end{pmatrix}$ в базисе $e_1=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$.

3.15. Вычислите определитель

а) $\begin{vmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix}-2 & 7\\ 3 & 5\end{vmatrix}$

в) $\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$

г) $\begin{vmatrix}2 & 4 & 6\\ 5 & 12 & 19\\ 3 & 9 & 17\end{vmatrix}$

д) $\begin{vmatrix}2 & 0 & 5\\ 1 & 3 & 16\\ 0 & -1 & 10\end{vmatrix}$

е) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

3.16. Вычислите определитель матрицы путем разложения его по элементам второй строки

а) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & -4 \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ x & y & z & t \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

3.17. Вычислите определитель матрицы путем разложения его по элементам третьего столбца

а) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & x & 8 \\ -4 & -1 & y & -5 \\ 8 & -1 & z & 12 \\ 4 & -1 & t & 7 \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & a & -1 \\ -1 & -2 & b & -1 \\ -2 & 0 & c & 1 \\ 0 & 1 & d & 0 \end{vmatrix}$

3.18. Вычислите определитель

а) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -5 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 8 & 0 \\ -2 & -5 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

в) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & -2 & 3 \\ 1 & 6 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

г) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

д) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 7 \\ -2 & -5 & 7 & 5 \\ -2 & -5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

е) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

ж) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 7 \\ -2 & -8 & -7 & -3 \\ -1 & -6 & -5 & -4 \end{vmatrix}$

з) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

и) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

3.19. При каких значениях параметра a система векторов $\vec{x}_1 = (3;\ 7;\ 4)$, $\vec{x}_2 = (3;\ 8;\ 6)$, $\vec{x}_3 = (3;\ a+5;\ 8)$ линейно зависима.

3.20. При каких значениях параметра a система векторов $\vec{x}_1 = (1;\ 2;\ 6)$, $\vec{x}_2 = (a-4;\ -2;\ -2)$, $\vec{x}_3 = (3;\ 1;\ 1)$ линейно зависима.

3.21. При каких значениях параметра a произвольный вектор в пространстве $\mathbf{R^3}$ можно разложить по векторам $\vec{a}_1 = (1,4,3)$, $\vec{a}_2 = (2, 1-a, 1)$, $\vec{a}_3 = (5,4,1)$?

3.22. При каких значениях параметра a произвольный вектор в пространстве $\mathbf{R^3}$ можно разложить по векторам $\vec{a}_1 = (-3,1,4)$, $\vec{a}_2 = (a+2, -2, -5)$, $\vec{a}_3 = (5,1,9)$?

3.23. При каком значении параметра a точки $A(1;1;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-1;0;1)$ и $D(a+1;2;0)$ лежат в одной плоскости? (Исследуйте линейную зависимость или независимость векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$)

3.24. При каком значении параметра a точки $A(0;3;1)$, $B(2;8;9)$, $C(1;0;2a-2)$ и $D(0;8;11)$ лежат в одной плоскости? (Исследуйте линейную зависимость или независимость векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$)

3.25. Найдите матрицу, обратную матрице A

а) $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$

б) $A=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

в) $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

г) $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$

д) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

е) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

ж) $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

з) $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

и) $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

к) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3.26. Найдите значения параметров a, b и c, при которых матрицы A и B являются обратными

а) $A=\begin{pmatrix} a-1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & c-2 \\ 4 & b & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -8 & 3 & -6 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

б) $A=\begin{pmatrix} a-3 & 3 & 5 \\ 0 & c & 3 \\ -5 & -1 & b-4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -15 & 29 & 12 \\ 10 & -19 & -8 \end{pmatrix}$

в) $A=\begin{pmatrix} a-2 & 0 & 1 \\ -8 & b+4 & -6 \\ -4 & 2 & c \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

г) $A=\begin{pmatrix} a & -2 & -1 \\ -15 & b+20 & 12 \\ 10 & -19 & 2c \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

3.27. Решите матричное уравнение

а) $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} -8 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} 4 & -8 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

г) $X\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

д) $X\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

е) $X\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

ж) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$

з) $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

и) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

к) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

4. Системы линейных уравнений

4.1. Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 1 \\ 3x_1 + 8x_2 - 10x_3 = 1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -3 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1 \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

4.2. Решите систему линейных уравнений. Найдите фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений. Запишите ответ в векторном виде.

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 12x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 34x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 79x_3 = 0 \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 42x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 109x_3 = 0 \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 - 22x_2 + x_3 + 250x_4 = 0 \\ 2x_1 - 44x_2 + 3x_3 + 180x_4 = 0 \end{cases}$

е) $\begin{cases} x_1 + 33x_2 + x_3 - 150x_4 = 0 \\ 3x_1 + 99x_2 + 4x_3 + 270x_4 = 0 \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x_1 - 40x_2 - x_3 + 120x_4 = 0 \\ 4x_1 - 160x_2 - 3x_3 + 640x_4 = 0 \end{cases}$

з) $\begin{cases} x_1 - 35x_2 - x_3 + 130x_4 = 0 \\ 3x_1 - 105x_2 - 2x_3 + 150x_4 = 0 \end{cases}$

и) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 6x_1 - x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$

к) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

л) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

м) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 11x_4 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 11x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$

4.3. Представьте общее решение системы уравнений в виде суммы частного решения и общего решения соответствующей однородной системы

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ -3x_1 - 2x_2 + 12x_3 - 7x_4 = -5 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 8 \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 11x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 6 \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 + 12x_4 = 10 \end{cases}$

е) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 - 11x_3 - 7x_4 = 2 \\ 3x_1 - 5x_2 - 13x_3 - 11x_4 = 1 \end{cases}$

з) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 = 7 \end{cases}$

и) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$

4.4. При каких значениях параметра a однородная система линейных уравнений, заданных матрицей $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 1 \\ -2 & a+6 & 5 \end{pmatrix}$, имеет ненулевое решение?

4.5. При каких значениях параметра a однородная система линейных уравнений, заданных матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 2+a & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$, имеет ненулевое решение?

4.6. При каких значениях параметра a однородная система линейных уравнений, заданных матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2+a & 2 \\ 2 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, имеет ненулевое решение?

4.7. Найдите базис линейного пространства векторов, ортогональных векторам $(1;-2;0;34)$ и $(3;-5;0;79)$. Запишите ответ в векторном виде.

4.8. Найдите базис линейного пространства векторов, ортогональных векторам $(1;2;0;42)$ и $(3;7;0;109)$. Запишите ответ в векторном виде.

4.9.Найдите базис линейного пространства векторов, ортогональных векторам $(1;-3;0;-31)$ и $(2;-5;0;-107)$. Запишите ответ в векторном виде.

4.10. Предприятие выпускает 3 вида изделий с использованием 2-х видов сырья. Для продукции ценовой вектор $\mathbf{p}=(6,\ \ 20,\ \ 100)$, вектор наличного сырья $\mathbf{s}=(38,\ \ 96)$, нормы расходов сырья даны элементами матрицы $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 18 \end{pmatrix}$. Требуется определить максимальную стоимость продукции $\mathbf{P}$ и оптимальный вектор-план выпуска продукции $\mathbf{q} = (q_1, \ \ q_2, \ \ q_3)$ при полном использовании всего сырья, т.е. надо найти максимум $\mathbf{P} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}^{\mathrm{T}}$, если $\mathbf{q}$ – решение системы $\mathbf{A} \cdot \mathbf{q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{s}^{\mathrm{T}}$. При решении следует учесть, что все величины q_1, q_2, q_3 – неотрицательны.

4.11. Предприятие выпускает 3 вида изделий с использованием 2-х видов сырья. Для продукции ценовой вектор $\mathbf{p} = (7, \ \ 20, \ \ 100)$, вектор наличного сырья $\mathbf{s} = (38, \ \ 96)$, нормы расходов сырья даны элементами матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 18 \end{pmatrix}$. Требуется определить максимальную стоимость продукции $\mathbf{P}$ и оптимальный вектор-план выпуска продукции $\mathbf{q} = (q_1, \ \ q_2, \ \ q_3)$ при полном использовании всего сырья, т.е. надо найти максимум $\mathbf{P} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}^{\mathrm{T}}$, если $\mathbf{q}$ – решение системы $\mathbf{A} \cdot \mathbf{q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{s}^{\mathrm{T}}$. При решении следует учесть, что все величины q_1, q_2, q_3 – неотрицательны.

4.12. Предприятие выпускает 3 вида изделий с использованием 2-х видов сырья. Для продукции ценовой вектор $\mathbf{p} = (8, \ \ 30, \ \ 100)$, вектор наличного сырья $\mathbf{s} = (28, \ \ 65)$, нормы расходов сырья даны элементами матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 5 & 19 \end{pmatrix}$. Требуется определить максимальную стоимость продукции $\mathbf{P}$ и оптимальный вектор-план выпуска продукции $\mathbf{q} = (q_1, \ \ q_2, \ \ q_3)$ при полном использовании всего сырья, т.е. надо найти максимум $\mathbf{P} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}^{\mathrm{T}}$, если $\mathbf{q}$ – решение системы $\mathbf{A} \cdot \mathbf{q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{s}^{\mathrm{T}}$. При решении следует учесть, что все величины q_1, q_2, q_3 – неотрицательны.

5. Собственные значения и собственные векторы матриц

5.1. Найдите собственные векторы и собственные значения матрицы

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

5.2. Найдите $|\cos\varphi|$, где φ - угол между собственными векторами, соответствующими различным собственным значениям

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

5.3. Найдите собственные векторы и собственные значения матрицы

а) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

5.4. При каком значении параметра a матрица $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ имеет собственный вектор $\vec{v} = (-3;\ 1;\ a-1)$, соответствующий собственному значению $\lambda = 5$?

5.5. При каком значении параметра a матрица $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ имеет собственный вектор $\vec{v} = (2;\ 3;\ a-1)$, соответствующий собственному значению $\lambda = 2$?

5.6. При каком значении параметра a матрица $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ имеет собственный вектор $\vec{v} = (1;\ 3;\ a-2)$, соответствующий собственному значению $\lambda = 3$?

5.7. Проверьте, что вектор $\mathbf{X}$ является собственным вектором матрицы $\mathbf{A}$ и найдите соответствующее ему собственное значение λ.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -15 & -5 & 23 & 4 \\ -33 & -13 & 49 & 14 \\ -13 & -5 & 21 & 4 \\ -18 & -5 & 23 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.8. Проверьте, что вектор $\mathbf{X}$ является собственным вектором матрицы $\mathbf{A}$ и найдите соответствующее ему собственное значение λ.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 23 & -52 \\ 7 & 16 & 39 & -56 \\ 11 & 20 & 27 & -52 \\ 11 & 20 & 33 & -58 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5.9. Проверьте, что вектор $\mathbf{X}$ является собственным вектором матрицы $\mathbf{A}$ и найдите соответствующее ему собственное значение λ.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 20 & -4 & 28 & -24 \\ 40 & 2 & 54 & -64 \\ 16 & 2 & 6 & -16 \\ 26 & -3 & 23 & -28 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5.10. Матрица А имеет три собственных вектора $v_1,\ v_2,\ v_3$ с соответствующими собственными значениями $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 3.$ Для матрицы $f(A) = A^2 + A$ найти собственные векторы и собственные значения.

5.11. Матрица А имеет три собственных вектора $v_1, \;\; v_2, \;\; v_3$ с соответствующими собственными значениями $\lambda_1 = 4, \;\; \lambda_2 = 2, \;\; \lambda_3 = 3.$ Для матрицы $f(A) = A^2 - A$ найти собственные векторы и собственные значения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Болгов В.А., Демидович Б.П., Ефимов А.В. и др. Сборник задач по математике. М.: Наука, 1986.

2. Зимина О.В., и др. Высшая математика. Решебник. М.: Физико-математическая литература, 2001.

3. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. СПб.: Лань, 2007.

4. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие. Под ред. В.И.Ермакова. М.: ИНФРА-М, 2005.

5. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике. Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2001.

Ответы

1.1. 9. **1.2.** ± 3. **1.3.** $\vec{a} = (1; -1; \pm\sqrt{2})$. **1.4.** $\vec{a} = \pm(2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$. **1.5.** $D(9; -5; 6)$. **1.6.** 7. **1.7.** 3, $\sqrt{21}$. **1.8.** $\sqrt{17}$. **1.9.** $\sqrt{34}/2$ и $\sqrt{42}/2$. **1.10. а)** 161. **1.10. б)** 9. **1.10. в)** -184. **1.11. а)** $2 + \sqrt{3}$. **1.11. б)** 40. **1.12.** 22. **1.13.** $\sqrt{97}$ и 7. **1.14.** $\cos\varphi = 43/(25\sqrt{13})$. **1.15.** 120^0. **1.16.** 60^0. **1.17.** $8/\sqrt{18}$. **1.18.** 4. **1.19.** -6. **1.20.** -2. **1.21.** $\vec{x} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$. **1.22.** (1;-3;2). **1.23.** $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$. **1.24.** $\vec{x} = 2\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$. **1.25. а)** в качестве базиса можно взять $e_1 = x^2$, $e_2 = x$. В этом базисе $T(x) = (1; -3)$, **1.26. б)** в качестве базиса можно взять $e_1 = (x-1)^2$, $e_2 = x - 1$. В этом базисе $T(x) = (1; -1)$, **1.27.** (2;-1;-2). **1.28.** (-1;-3;5)**.**

2.1. $3x - 2y - 2z - 18 = 0$. **2.2.** $2y - 3z + 7 = 0$. **2.3.** $x + y - 4 = 0$. **2.4.** $2x + y = 0$. **2.5.** $6y - 5z = 0$. **2.6.** $x + y + z - 12 = 0$. **2.7.** $2x + y + z - 4 = 0$. **2.8.** $5x - 3y + 2z + 1 = 0$. **2.9.** $x - 2y - 3z - 4 = 0$. **2.10.** $\varphi = \pi/4$. **2.11.** $\varphi = \pi/3$. **2.12.** $2x + 3y + 4z - 3 = 0$. **2.13.** $2x + y - 2z - 15 = 0$. **2.14.** $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-6}{4} = \dfrac{z+2}{-5}$. **2.15.** $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{1}$. **2.16. а)** Нет. б) Да, в точке (1;-2; 2). **2.17.** $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{-2}$. **2.18. а)** $\varphi = \pi/3$. **2.18. б)** $\varphi = \pi/6$. **2.19. а)** $2/\sqrt{154}$.

2.19. б) $-5/9\sqrt{2}$. **2.20**. а) 6, **2.20. б)** 13. **2.21. а)** $a=4$. **2.21. б)** $a=3$.

2.22. $(2;-1;3)$. **2.23.** $(1;1;2)$. **2.24.** $(1,-1,-3)$. **2.25.** При $a \neq -1$ пересекаются, при $a=-1$ параллельны. **2.26.** $y+z+1=0$. **2.27.** $x-2y+z=0$.

2.28. $(1;\text{-}0{,}5;\ \text{-}0{,}5)$. **2.29.** $(1{,}5;\ \text{-}0{,}5;\ 0)$. **2.30.** $\sqrt{30}$. **2.31.** $(3;3;3)$.

2.32. $(2;0;\text{-}1)$. **2.33.** $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+1}{-1}$. **2.34.** $(\text{-}5;6;1)$. **2.35.** $(3;1;1)$.

2.36. x+3y+6z-23=0. **2.37.** 2x+y+2z-9=0. **2.38.** $(4;1;\text{-}1)$.

2.39. $(6;\text{-}1;1)$.

3.1. $C=\begin{pmatrix}-7 & 2 & 4\\ -12 & -1 & -7\\ 5 & 2 & -8\end{pmatrix}$ **3.2.** $C=\begin{pmatrix}7 & -4 & -17 & 6\\ 4 & -9 & -4 & -1\\ 1 & -1 & -10 & 0\end{pmatrix}$

3.3. $X=\begin{pmatrix}1 & 8 & 14\\ -7 & 1 & 8\\ 8 & 6 & 5\end{pmatrix}$ 3.4. $X=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-30 & -6 & -2 & -25\\ -13 & 13 & -22 & 16\\ -9 & -5 & -3 & -1\end{pmatrix}$

3.5. $f(A)=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 4 & 6\end{pmatrix}$ 3.6.а) $A\cdot B=\begin{pmatrix}22 & 11\\ -19 & -1\end{pmatrix}$

3.6. б) $A\cdot B=\begin{pmatrix}9 & -5 & -9\\ 25 & 15 & -12\end{pmatrix}$ 3.6. в) $A\cdot B=\begin{pmatrix}14 & 22\\ 17 & -9\\ 16 & 8\end{pmatrix}$

3.6. г) $A\cdot B=\begin{pmatrix}-6 & -2\\ 13 & -4\\ 21 & 1\end{pmatrix}$ 3.6.д) $A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 15\\ 17 & 13\end{pmatrix}$

3.6. е) $A\cdot B=\begin{pmatrix}11 & -14 & 10\\ 7 & -6 & 7\end{pmatrix}$ 3.6. ж) $A\cdot B=\begin{pmatrix}6 & 7 & 3\\ 0 & -8 & 6\\ 0 & -6 & 6\end{pmatrix}$

3.6. з) $A\cdot B=(-12)$ 3.6. и) $A\cdot B=\begin{pmatrix}2&4&-6\\-1&-2&3\\4&8&-12\end{pmatrix}$ 3.6. к) $A\cdot B=\begin{pmatrix}31\\-14\\18\end{pmatrix}$

3.6. л) $A\cdot B=\begin{pmatrix}-6&-17&-1\end{pmatrix}$ 3.6. м) $A\cdot B=\begin{pmatrix}-6&13&18\\3&18&26\\-15&1&0\end{pmatrix}$

3.7 а) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&3\\7&8&9\\4&5&6\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}1&3&2\\4&6&5\\7&9&8\end{pmatrix}$ 3.7 б) $A\cdot B=\begin{pmatrix}5&2&4\\1&0&3\\8&24&16\end{pmatrix}$,

$B\cdot A=\begin{pmatrix}5&2&32\\1&0&24\\1&3&16\end{pmatrix}$ **3.8 а)** $X=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $B=A\cdot X$.

3.8 б) $X=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=X\cdot A$. **в)** $X=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=X\cdot A$.

г) 3.8. $X=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=X\cdot A$. **3.9. а)** $A^3=\begin{pmatrix}13&-14\\21&-22\end{pmatrix}$.

3.9. б) $A^5=\begin{pmatrix}304&-61\\305&-62\end{pmatrix}$. **3.9. в)** $A^{10}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A^{15}=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}$.

3.9. г) $A=\begin{pmatrix}1&10\\0&1\end{pmatrix}$. **3.9. д)** $A=\begin{pmatrix}a^n&na^{n-1}\\0&a^n\end{pmatrix}$. **3.10. а)** 2. **3.10. б)** 1.

3.10. в) 2. **3.10. г)** 3. **3.10. д)** 3. **3.10. е)** 2. **3.10. ж)** 3. **3.10. з)** 3.
3.10. и) 3. **3.10. к)** 2. **3.11. а)** линейно зависима.
3.11. б) линейно независима. **3.11. в)** линейно независима.
3.11. г) линейно зависима. **3.11. д)** линейно зависима. **3.11. е)** линейно независима. **3.12. а)** ранг 3, в качестве базиса можно взять $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$. В этом базисе $\overline{a}_4=(0{,}5;0{,}5;0)$. **3.12. б)** ранг 3, в качестве базиса можно взять $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$. В этом базисе $\overline{a}_4=(7{,}75;-0{,}25;-2{,}5)$
3.12. в) ранг 2, в качестве базиса можно взять $\overline{a}_1, \overline{a}_2$. В этом базисе

$\overline{a}_3=(-1;2)$, $\overline{a}_4=(-2;3)$ **3.12. г)** ранг 3, в качестве базиса можно взять $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$. В этом базисе $\overline{a}_4=(0;-1;-2)$ **3.13. а**) в качестве базиса можно взять $e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. В этом базисе $A=(0;2;2;3)$. **3.13. б)** в качестве базиса можно взять

$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. В этом базисе $A=(0;2;3)$.

3.13. в) в качестве базиса можно взять

$e_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. В этом базисе $A=(2;2;3)$.

3.14. а) $(2;-1;-2)$. **3.14. б)** $(-1;-3;5)$. **3.15. а)** 10. **3.15. б)** -31.

3.15. в) -10. **3.15. г)** 8. **3.15. д)** 87. **3.15. е)** 10.

3.16. а) $2a-8b+c+5d$. **3.16. б)** $-x-y-z+4t$.

3.17. а) $8x+15y+12z-19t$. **3.17. б)** $3a-b+2c+d$. **3.18. а)** 40.

3.18. б) -30. **3.18. в)** 18. **3.18. г)** -36. **3.18. д)** -40. **3.18. е)** -150.

3.18. ж) -10. **3.18. з)** 5. **3.18. и)** –720. **3.19.** $a=4$. **3.20.** $a=-2$.

3.21. $a\neq-9/7$. **3.22.** $a\neq 8{,}8$. **3.23.** $a=3$. **3.24.** $a=-2$.

3.25. а) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}9&-6\\-4&3\end{pmatrix}$. **3.25. б)** $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-3\\-4&7\end{pmatrix}$. **3.25. в)** $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5&-3\\-6&4\end{pmatrix}$.

3.25. г) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}8&-4\\5&-3\end{pmatrix}$. **3.25. д)** $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\2&3&4\end{pmatrix}$. **3.25. е)** $\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-5&3\\0&3&-2\end{pmatrix}$.

3.25. ж) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-7&-3\\-1&10&6\end{pmatrix}$. **3.25. з)** $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&1&0\\-3&12&10\\-1&4&5\end{pmatrix}$.

3.25. и) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1{,}5 & 2{,}5 & -1 \\ 9 & -13 & 5 \end{pmatrix}$. **3.25. к)** $\begin{pmatrix} -10 & 3 & 8 \\ -11 & 3 & 9 \\ 14 & -4 & -11 \end{pmatrix}$. **3.26. а)** $a=-2$, $b=2$, $c=4$. **3.26. б)** $a=-1$, $b=3$, $c=2$. **3.26. в)** $a=3$, $b=-1$, $c=-3$. **3.26. г)** $a=1$, $b=9$, $c=-4$. **3.27. а)** $-\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 24 \\ -12 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.27. б) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -23 & 43 & -4 \\ -10 & 14 & 1 \end{pmatrix}$. **3.27. в)** $-\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 9 & 18 & -45 \end{pmatrix}$.

3.27. г) $-\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. **3.27. д)** $-\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 17 & 7 \\ -19 & -8 \end{pmatrix}$. **3.27. е)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1{,}5 & -1{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

3.27. ж) $\begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 10 & -2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$. **3.27. з)** $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 10 & 11 & -3 \end{pmatrix}$. **3.27. и)** $\begin{pmatrix} 35 & -22 \\ 59 & -37 \end{pmatrix}$.

3.27. к) $\begin{pmatrix} -50 & -76 \\ 40 & 61 \end{pmatrix}$.

4.1. а) $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_3=2$. **4.1.** б) $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=2$. **4.1.** в) $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_3=1$. **4.1.** г) $x_1=-7$, $x_2=7$, $x_3=5$.

4.2 а) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. **4.2 б)** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4.2 в) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 12 \\ 23 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \\ 1 \end{pmatrix}.$ **4.2 г)** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -76 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -76 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix}.$

4.2 д) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -570 \\ 0 \\ 320 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 22 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -570 \\ 0 \\ 320 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 22 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

4.2 е) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 870 \\ 0 \\ -720 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -33 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 870 \\ 0 \\ -720 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -33 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

4.2 ж) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -280 \\ 0 \\ -160 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 40 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -280 \\ 0 \\ -160 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 40 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

4.2 з) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 110 \\ 0 \\ 240 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 35 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 110 \\ 0 \\ 240 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 35 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

4.2 и) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -0,5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

4.2 к) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

4.2 л) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. **4.2 м)** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 24 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -21 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$,

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 24 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -21 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$. **4.3 а)** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -1{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.3 б) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -15 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. **4.3 в)** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4.3 г) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. **4.3 д)** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4.3 е) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. **4.3 ж)** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.3 з) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. **4.3 и)** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

4.4. $a = 2$. **4.5.** $a = -4$. **4.6.** $a = 3$. **4.7.** $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 12 \\ 23 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. **4.8.** $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -76 \\ 17 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4.9. $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}166\\45\\0\\1\end{pmatrix}$. **4.10.** $\mathbf{P}=518$, $\mathbf{q}=(3,0,5)$. **4.11.** $\mathbf{P}=526$, $\mathbf{q}=(18,20,0)$. **4.12.** $\mathbf{P}=350$, $\mathbf{q}=(10,9,0)$.

5.1 а) $\lambda=1$: $(1;1)$, $\lambda=3$: $(1;-1)$. **5.1 б)** $\lambda=3$: $(1;1)$, $\lambda=5$: $(1;-1)$. **5.1. в)** $\lambda=-2$: $(3;-4)$, $\lambda=5$: $(1;1)$. **5.1. г)** $\lambda=-1$: $(1;-1)$, $\lambda=5$: $(1;2)$. **5.2. а)** $1/\sqrt{10}$. **5.2 .б)** $4/\sqrt{65}$. **5.2. в)** $3/\sqrt{130}$. **5.2. г)** $3/\sqrt{58}$.
5.3. а) $\lambda_1=2$, $(1;1;0)$; $\lambda_2=3$, $(2;1;0)$, $(0;0;1)$. **5.3. б)** $\lambda_1=2$, $(1;0;0)$, $(0;1;1)$; $\lambda_2=4$, $(1;1;-1)$. **5.3. в)** $\lambda_1=1$, $(2;-1;2)$; $\lambda_2=3$, $(1;-2;-1)$; $\lambda_3=5$, $(0;1;0)$. **5.3. г)** $\lambda_1=2$, $(0;1;0)$; $\lambda_2=3$, $(1;3;1)$; $\lambda_3=5$, $(3;1;-3)$.
5.4. $a=3$. **5.5.** $a=4$. **5.6.** $a=3$. **5.7.** $\lambda=2$. **5.8.** $\lambda=-4$.
5.9. $a=-12$. 5.10. Собственными векторами матрицы $f(A)$ являются векторы v_1, v_2, v_3. Им соответствуют собственными значениями $\lambda_1=6, \lambda_2=2, \lambda_3=12.$ 5.11. Собственными векторами матрицы $f(A)$ являются векторы v_1, v_2, v_3. Им соответствуют собственными значениями $\lambda_1=12, \lambda_2=2, \lambda_3=6.$

Учебное издание

Логвенков Сергей Алексеевич,

Мышкис Петр Анатольевич,

Панов Петр Алексеевич,

Самовол Владимир Симхович

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ.

Учебное пособие для факультетов менеджмента, политологии и социологии.

Учебное пособие

Редактор

Корректор

Оригинал-макет

Оформление

Лицензия

Подписано в печать . Формат

Усл. печ. .л . Тираж 500 экз.