

ISSN 2079 – 6900

# ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 16, № 2



2014



СРЕДНЕВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

---

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н. П. ОГАРЁВА

## Журнал Средневолжского математического общества

Том 16, № 2

Издается с декабря 1998 года  
Выходит четыре раза в год

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: В. Ф. Тишкин (главный редактор),  
М. Т. Терехин (зам. главного редактора),  
Л. А. Сухарев (ответственный секретарь),  
П. А. Шаманаев (зам. отв. секретаря),  
И. В. Бойков, П. А. Вельмисов, В. К. Горбунов,  
В. З. Гринес, Ю. Н. Дерюгин, А. Ф. Зубова,  
Е. Б. Кузнецов, Б. В. Логинов, С. И. Спивак

САРАНСК

2014

«Журнал Средневолжского математического общества» публикует обзорные статьи по наиболее актуальным проблемам математики, краткие сообщения Средневолжского математического общества и информацию о математической жизни в России и за рубежом. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 года.

Учредитель — Межрегиональная общественная организация «Средневолжское математическое общество», Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва».

### **Журнал Средневолжского математического общества. Том 16, № 2**

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.

Корректоры: Егорова Д. К., Пескова Е. Е.

Издается в НИИ математики Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва

---

*Адрес редакции:* 430000, г. Саранск, ул. Большевистская, 68, НИИ математики (комн. 210).

*Тел.:* (834-2) 23-32-05

*E-mail для статей:* journal@svmo.ru

*E-mail для организационных вопросов:* svmo@svmo.ru, conf@svmo.ru

*Web:* <http://www.svmo.ru>

---

ISSN 2079 – 6900

С 2010 г. полнотекстовая версия журнала размещается на сайте Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и на сайте Научной электронной библиотеки elibrary.ru

## Содержание

РЕДАКЦИОННАЯ СТРАНИЦА .....	6
-----------------------------	---

---

**Р. В. Жалнин, М. Е. Ладонкина, В. Ф. Масягин, В. Ф. Тишкин**

Об одном способе решения уравнений диффузионного типа с помощью разрывного метода Галёркина на неструктурированной сетке .....	7
--	---

1. Описание алгоритма решения уравнений диффузионного типа на основе разрывного метода Галёркина .....	7
2. Вычисление криволинейного интеграла первого рода по границе треугольника $T_k$ и ячейки двойственной сетки $D_k$ .....	9
3. Вычисление двойного интеграла по треугольнику $T_k$ и ячейке двойственной сетки $D_k$ .....	9
4. Результаты расчетов .....	10

---

**С. И. Спивак, О. Г. Кантор, Д. С. Юнусова**

Об одном подходе к оценке погрешности и значимости измерений в линейных задачах .....	14
---	----

1. Введение .....	14
2. Описание подхода для определения погрешности измерений .....	14
3. Методика определения значимости измерений .....	16
4. Результаты апробации .....	17

---

**В. З. Гринес, М. К. Носкова, О. В. Починка**

Энергетическая функция для структурно устойчивых 3-диффеоморфизмов с двумерным растягивающимся аттрактором .	20
--	----

1. Введение и формулировка результатов .....	20
2. Динамические свойства диффеоморфизмов класса $G$ .....	21
3. Построение энергетической функции для диффеоморфизмов из класса $G$ .	23

---

**В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ**


---

**Т. Е. Бадокина, Ю. Б. Русак**

Методы теории ветвления и катастроф в задаче об изгибе удлиненной пластины в сверхзвуковом потоке газа .....	26
--	----

---

**С. В. Гулакова, В. Н. Попов**

Аналитическое решение задачи об изотермическом скольжении газа вдоль твердой плоской поверхности .....	36
--	----

1. Введение .....	36
2. Вывод основных уравнений .....	37
3. Построение функции распределения молекул газа .....	38
4. Вычисление профиля массовой скорости газа .....	42

5.	Заключение . . . . .	44
<hr/>		
<b>Е. Я. Гуревич, Д. Т. Сяинова</b>		
	Реализация изотопических классов градиентно-подобных диффеоморфизмов тора . . . . .	46
1.	Введение и формулировка результатов . . . . .	46
2.	Допустимые периодические наборы диффеоморфизмов из $G_+(T^2)$ . . . . .	49
3.	Реализация допустимых наборов . . . . .	52
3.1.	Реализация минимального периодического набора в изотопическом классе тождественного диффеоморфизма . . . . .	52
3.2.	Реализация минимальных периодических наборов в изотопических классах, отличных от тождественного . . . . .	53
<hr/>		
<b>А. В. Зубов, Л. Г. Каляда, А. И. Нечаев, И. Г. Ужegov</b>		
	Модификация численных методов интегрирования . . . . .	57
1.	Введение . . . . .	57
2.	Постановка задачи . . . . .	57
3.	Выводы . . . . .	61
<hr/>		
<b>Н. В. Исаенкова, Е. В. Жужома, А. Е. Шишенкова</b>		
	О структуре неблуждающего множества эндоморфизмов одномерных ветвленных многообразий . . . . .	63
1.	Введение . . . . .	63
2.	Доказательство основных результатов . . . . .	65
<hr/>		
<b>О. А. Кузенков, Е. А. Рябова</b>		
	Отношение порядка в системах авторепродукции . . . . .	69
1.	Введение . . . . .	69
2.	Отношение строгого порядка на системе измеримых множеств . . . . .	70
3.	Система динамики положительной меры: предельные возможности управления . . . . .	72
4.	Примеры . . . . .	73
5.	Заключение . . . . .	74
<hr/>		
<b>Т. М. Митрякова, О. В. Починка</b>		
	О топологической сопряжённости 3-диффеоморфизмов с одной орбитой гетероклинического касания . . . . .	76
1.	Формулировка результатов . . . . .	77
<hr/>		
<b>Т. А. Михайлова, С. А. Мустафина</b>		
	Статистический подход к моделированию процесса сополимеризации бутадиена со стиролом в эмульсии . . . . .	80
1.	Введение . . . . .	80
2.	Алгоритм статистического подхода к моделированию . . . . .	80
3.	Результаты и выводы . . . . .	82
<hr/>		

**Е. В. Никишин, Е. Е. Пескова**

Исследования кинетики неравновесных носителей в полупроводнике при периодическом оптическом возбуждении . . . . .	85
---	----

**В. И. Сафонкин**

Доопределение системы с переменной структурой в областях переключения функции управления . . . . .	90
--	----

1. Введение . . . . .	90
2. Постановка задачи . . . . .	92
3. Решение задачи . . . . .	92

**Г. А. Смолкин**

Продолжение функции из полупространства на все пространство с помощью ее сужения на границу . . . . .	98
---	----

**Т. А. Шемякина**

Нелокальная разрешимость одного варианта системы Франкля . .	104
--	-----

1. Введение . . . . .	104
2. Постановка задачи . . . . .	105
3. Нелокальные условия существования решения . . . . .	105

**Т. К. Юлдашев, А. С. Хритonenko**

Суммарно-разностное уравнение в частных разностях высокого порядка . . . . .	109
--	-----

1. Постановка задачи . . . . .	109
2. Сведение задачи (1.1), (1.2) к суммарному уравнению . . . . .	110
3. Разрешимость задачи (1.1), (1.2) . . . . .	112

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

**В. И. Zubov, И. В. Zubov, А. Ф. Zubova**

Исследование робастного поведения семейств дискретных полиномов . . . . .	114
---	-----

**В. В. Афонин, С. М. Мурюмин**

Соотношения оптимальности в линейно-квадратичной задаче управления . . . . .	118
--	-----

1. Постановка задачи . . . . .	118
2. Результаты численного эксперимента . . . . .	120

Правила оформления рукописей для публикации в журнале «Журнал СВМО» . . . . .	121
---	-----

Алфавитный указатель . . . . .	123
--------------------------------	-----

## ОТ РЕДАКЦИИ

Во втором номере 16-го тома публикуются работы ведущих учёных и молодых исследователей, являющихся участниками XI научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» с участием зарубежных ученых (г. Саранск, 14 – 16 июля 2014 года). Конференция проводится национальным исследовательским Мордовским государственным университетом им. Н.П. Огарёва и Средневолжским математическим обществом при поддержке РФФИ (грант № 14-01-20052 Г). Журнал доступен в сети Internet на сайте [elibrary.ru](http://elibrary.ru).

Редакция журнала искренне желает авторам крепкого здоровья и творческих успехов!

УДК 517.9

# Об одном способе решения уравнений диффузионного типа с помощью разрывного метода Галёркина на неструктурированной сетке

© Р. В. Жалнин<sup>1</sup>, М. Е. Ладонкина<sup>2</sup>, В. Ф. Масягин<sup>3</sup>, В. Ф. Тишкин<sup>4</sup>

**Аннотация.** Предлагается новый эффективный алгоритм решения уравнений диффузионного типа на основе метода Галёркина с разрывными базисными функциями, который обладает хорошей сходимостью и точностью при использовании явной схемы. Характерной особенностью предлагаемого метода является использование двойственной сетки, на которой ищется решение вспомогательных неизвестных. Исследование метода проводится на примере начально-краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности. Расчеты двумерных модельных задач в том числе с разрывами показывают хорошую точность предложенного метода.

**Ключевые слова:** параболические уравнения, метод Галёркина с разрывными базисными функциями, сходимость и точность численного метода

## 1. Описание алгоритма решения уравнений диффузионного типа на основе разрывного метода Галёркина

Построение и исследование алгоритма решения уравнений диффузионного типа на основе разрывного метода Галёркина проведем на примере начально-краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned}\rho C_\nu \frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div}(\kappa \cdot \operatorname{gradu}) + f, \quad (x, y) \in G, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, y, t) &= g(x, y, t), \quad (x, y) \in \gamma, \\ u(x, y, 0) &= u_0(x, y),\end{aligned}\tag{1.1}$$

где  $C_\nu$  - коэффициент теплоемкости при постоянном объеме,  $\rho$  - плотность,  $\kappa$  - коэффициент теплопроводности,  $u$  - температура в точке  $(x, y)$  в момент времени  $t$ ,  $f$  - плотность тепловых источников,  $\gamma$  - граница области расчета,  $g(x, y, t)$ ,  $u_0(x, y)$  - заданные функции. Область  $G \cup \gamma$  - произвольная односвязная. В области  $G \cup \gamma$  - введем треугольную сетку  $\omega_p = \{P_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, N\}$ , содержащую внутренние и граничные точки области. На  $\omega_p$  построим триангуляцию Делоне:  $T(\omega_p) = \{T_k = T(T_k^1 : \{x_1, y_1\}, T_k^2 : \{x_2, y_2\}, T_k^3 : \{x_3, y_3\})\}$ . Пусть  $T(\omega_p)$  содержит все узлы  $\omega_p$ ; все треугольники  $T_k$  имеют ненулевую площадь и пересекаются не более чем по образующим их вершинам или ребрам. В каждом из треугольников определим центр и середины сторон. В треугольнике  $T_k$  с вершинами в точках  $T_k^1 : \{x_1, y_1\}$ ,  $T_k^2 : \{x_2, y_2\}$ ,  $T_k^3 : \{x_3, y_3\}$  центр  $(x_c, y_c)$  определим как:

<sup>1</sup> Заведующий кафедрой прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарева, г. Саранск; zhalnin@gmail.com.

<sup>2</sup> Старший научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва; ladonkina@imamod.ru.

<sup>3</sup> Аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарева, г. Саранск; vmasyagin@gmail.com.

<sup>4</sup> Заместитель директора по научной работе Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва; v.f.tishkin@mail.ru.

$x_c = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ ,  $y_c = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$ . Также примем в рассмотрение двойственную сетку, составленную из барицентрических объемов вокруг каждой из точек  $\omega_p$ , образованных отрезками, соединяющими центры треугольников с серединами сторон. Точка из  $\omega_p$  будет являться центром для соответствующей ей ячейки двойственной сетки. Для аппроксимации первого уравнения из (1.1) необходимо преобразовать его к системе дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка [1]. Для этого введем дополнительные переменные [2]:  $w_x = \kappa \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $w_y = \kappa \frac{\partial u}{\partial y}$ . Тогда первое уравнение в исходной системе (1.1) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \rho C_\nu \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} w_x + \frac{\partial}{\partial y} w_y + f, \quad (x, y) \in G, \quad 0 < t \leq T, \\ w_x &= \kappa \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (x, y) \in G, \quad 0 < t \leq T, \\ w_y &= \kappa \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (x, y) \in G, \quad 0 < t \leq T, \end{aligned} \quad (1.2)$$

Таким образом, (1.2) – это система дифференциальных уравнений 1-го порядка. Для решения такой системы будем использовать предлагаемый метод на основе разрывного метода Галёркина.

На каждом треугольнике  $T_k \in T(\omega_p)$  введем систему линейных базисных функций  $\{\varphi_i\} \in P^1$ ,  $i = 0, 1, 2$ ,  $\varphi_0 = 1$ ,  $\varphi_1 = \frac{x-x_c}{\Delta x}$ ,  $\varphi_2 = \frac{y-y_c}{\Delta y}$ , где  $(x_c, y_c)$  – центр соответствующего треугольника  $T_k$ ,  $\Delta x, \Delta y$  – проекции ячейки на соответствующие координатные оси. На каждой ячейке  $D_k$  двойственной сетки введем систему линейных базисных функций  $\{\psi_i\} \in P^1$ ,  $i = 0, 1, 2$ ,  $\psi_0 = 1$ ,  $\psi_1 = \frac{x-x_c^d}{\Delta x^d}$ ,  $\psi_2 = \frac{y-y_c^d}{\Delta y^d}$ , где  $(x_c^d, y_c^d)$  – центр соответствующей ячейки  $D_k$ ,  $\Delta x^d, \Delta y^d$  – проекции ячейки двойственной сетки на соответствующие координатные оси.

Приближенное решение  $u_k$  в разрывном методе Галеркина ищется как разложение по соответствующему базису [4]:  $u_k = u_{0k} + u_{1k} \frac{x-x_c}{\Delta x} + u_{2k} \frac{y-y_c}{\Delta y}$ ,  $u_{ik} = u_{ik}(t)$ ,  $u_{ik} \in T_k$ ,  $i = \overline{0, 2}$ , где неизвестные коэффициенты разложения зависят от времени.

Приближенные решения  $w_{xk}, w_{yk}$  будем искать в ячейке  $D_k$  в виде разложения по соответствующему базису:  $w_{xk} = w_{x0k} + w_{x1k} \frac{x-x_c^d}{\Delta x^d} + w_{x2k} \frac{y-y_c^d}{\Delta y^d}$ ,  $w_{xik} = w_{xik}(t)$ ,  $w_{xik} \in D_k$ ,  $i = \overline{0, 2}$ ,  $w_{yk} = w_{y0k} + w_{y1k} \frac{x-x_c^d}{\Delta x^d} + w_{y2k} \frac{y-y_c^d}{\Delta y^d}$ ,  $w_{yik} = w_{yik}(t)$ ,  $w_{yik} \in D_k$ ,  $i = \overline{0, 2}$ , где неизвестные коэффициенты разложения зависят от времени.

Умножим первое уравнение из (1.2) на пробную функцию  $\varphi_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , и проинтегрируем произведение по треугольнику  $T_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ , где  $N$  – число треугольников. Точное решение  $u$  заменим приближенным  $u_k$  [3]. Получаем следующую систему для определения коэффициентов разложения  $u_k$  по базису  $\{\varphi_i\}$ :

$$\begin{aligned} (\rho C_\nu)_k \sum_{i=0}^2 \frac{\partial u_{ik}}{\partial t} \int_{T_k} \varphi_i \varphi_m ds &= \oint_{\partial T_k} n_x w_x \varphi_m dl + \oint_{\partial T_k} n_y w_y \varphi_m dl - \\ &- \int_{T_k} w_x \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} ds - \int_{T_k} w_y \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} ds + \int_{T_k} \Phi_k \varphi_m ds, \quad m = \overline{0, 2}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Умножим второе и третье уравнения из (1.2) на пробную функцию  $\psi_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , и проинтегрируем произведение по ячейке  $D_k$ . Получаем следующие системы для определения коэффициентов разложения  $w_{xk}, w_{yk}$  по базису  $\{\psi_i\}$ :

$$\sum_{i=0}^2 w_{xik} \int_{D_k} \varphi_i \varphi_m ds = \oint_{\partial D_k} n_x \kappa w \psi_m dl - \int_{D_k} u_k \frac{\partial (\kappa \psi_m)}{\partial x} ds, \quad m = \overline{0, 2}, \quad (1.4)$$

$$\sum_{i=0}^2 w_{yik} \int_{D_k} \varphi_i \varphi_m ds = \oint_{\partial D_k} n_y \kappa u \psi_m dl - \int_{D_k} u_k \frac{\partial(\kappa \psi_m)}{\partial y} ds, \quad m = \overline{0, 2}. \quad (1.5)$$

В случае, если коэффициент теплопроводности  $\kappa$  терпит разрыв внутри расчетной области, необходимо это учитывать при вычислении интегралов по границе ячеек двойственной сетки. Разрыв коэффициента происходит на границе элементов основной сетки, поэтому необходимо дополнительно считать интегралы по линиям разрыва внутри ячеек  $D_k$  (ЛР):

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^2 w_{xik} \int_{D_k} \varphi_i \varphi_m ds &= \oint_{\partial D_k} n_x \kappa u \psi_m dl - \int_{D_k} u_k \frac{\partial(\kappa \psi_m)}{\partial x} ds + \sum_j \int_{\text{ЛР}_j} n_x (\kappa^+ - \kappa^-) u_f \psi_m dl, \quad m = \overline{0, 2}, \\ \sum_{i=0}^2 w_{yik} \int_{D_k} \varphi_i \varphi_m ds &= \oint_{\partial D_k} n_y \kappa u \psi_m dl - \int_{D_k} u_k \frac{\partial(\kappa \psi_m)}{\partial y} ds + \sum_j \int_{\text{ЛР}_j} n_y (\kappa^+ - \kappa^-) u_f \psi_m dl, \quad m = \overline{0, 2}, \end{aligned}$$

где  $u_f$  - потоковое значение  $u$  на границе ячеек,  $n_x, n_y$  - составляющие нормали, внешней по отношению к ячейке с индексом "+". В вычислениях мы брали  $u_f$  в одном случае как полусумму, в другом случае использовали противопоточную схему Шу[9].

Сначала из систем (1.4) и (1.5) находим  $w_{x0k}, w_{x1k}, w_{x2k}, w_{y0k}, w_{y1k}, w_{y2k}$  на текущем временном слое, используя значения  $u_k$  с предыдущего временного слоя, а после подставляем их в систему (1.3) для нахождения  $u_{0k}, u_{1k}, u_{2k}$  на текущем временном слое.

## 2. Вычисление криволинейного интеграла первого рода по границе треугольника $T_k$ и ячейки двойственной сетки $D_k$

Для вычисления интеграла  $\int_a^b f(x) dx$ , необходимо сделать замену вида:  $t = \frac{b-a}{2} \cdot x + \frac{a+b}{2}$ .

Получаем:

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{b-a}{2} \cdot \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2} \cdot x + \frac{a+b}{2}\right) dx.$$

В вычислениях мы использовали двухточечный шаблон.

## 3. Вычисление двойного интеграла по треугольнику $T_k$ и ячейке двойственной сетки $D_k$

Двойной интеграл по ячейке двойственной сетки считаем как сумму двойных интегралов по треугольникам, из которых она состоит. Следуя работе [5] возьмем три точки на каноническом треугольнике:

$$\begin{aligned} \tilde{t}_1 &: \left( \zeta_1 = \frac{2}{3}, \eta_1 = \frac{1}{6} \right), \quad \omega_1 = \frac{1}{3}, \\ \tilde{t}_2 &: \left( \zeta_2 = \frac{1}{6}, \eta_2 = \frac{2}{3} \right), \quad \omega_2 = \frac{1}{3}, \\ \tilde{t}_3 &: \left( \zeta_3 = \frac{1}{6}, \eta_3 = \frac{1}{6} \right), \quad \omega_3 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Значение интеграла по треугольнику с вершинами в точках  $T_k^1 : \{x_1, y_1\}$ ,  $T_k^2 : \{x_2, y_2\}$ ,  $T_k^3 : \{x_3, y_3\}$  равно

$$\int_{T_k} f(x, y) ds = J \int_0^1 \int_0^{1-\zeta} f(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \approx J \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \tilde{f}(\zeta_i, \eta_i) \omega_i,$$

где  $J = |(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)|$  - якобиан перехода к каноническому треугольнику,  $\tilde{f}$  - значение подынтегральной функции в образах точек  $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2$  и  $\tilde{t}_3$  в исходном треугольнике  $\{T_k^1 T_k^2 T_k^3\}$ .

#### 4. Результаты расчетов

Тестирование предложенного метода производилось с помощью расчетов ряда двумерных модельных задач. В качестве задачи 1 рассматривалась начально-краевая задача для уравнения теплопроводности [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, y, 0) &= 1 + x + y, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ u(0, y, t) &= 1 + y, u(1, y, t) = 2 + y, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0, t) &= 1 + x, u(x, 1, t) = 2 + x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

где  $\kappa = 1 + 0.3 \sin(10\pi x)$ . Решение сравнивалось с решением  $u^H$ , полученным по чисто неявной разностной схеме с помощью метода расщепления [7] на подробной структурированной сетке. Расчет производился до значения  $T = 0.0002$ .

В таблице 1 указано значение погрешности метода  $\sum_{i=1}^N (u_i - u^H)^2 S_i$ , где  $S_i$  - площадь  $i$ -го треугольника. В таблице представлены результаты работы предлагаемого алгоритма с использованием разрывного метода Галёркина (DG) и результаты работы разрывного метода Галёркина со стабилизационными добавками (CDG) [8].

Таблица 1. Значения погрешности  $\sum_{i=1}^N (u_i - u^H)^2 S_i$ , полученные при решении задачи 1.

	DG		CDG	
$N=2099$	$9.69 \cdot 10^{-7}$		$2.12 \cdot 10^{-7}$	
$N=8453$	$2.02 \cdot 10^{-7}$	2.26	$1.12 \cdot 10^{-8}$	4.24
$N=33975$	$8.30 \cdot 10^{-8}$	1.28	$2.10 \cdot 10^{-9}$	2.42

В качестве второй модельной задачи рассматривалась задача:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, y, 0) &= 1 + x + y, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ u(0, y, t) &= 1 + y, u(1, y, t) = 2 + y, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0, t) &= 1 + x, u(x, 1, t) = 2 + x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

где  $\kappa = 2$  при  $x \in [0.25; 0.75], y \in [0.25; 0.75]$  и  $\kappa = 1$  в противном случае. Решение сравнивалось с решением  $u^H$ , полученным по чисто неявной разностной схеме с помощью

метода расщепления [7] на подробной структурированной сетке. Расчет производился до значения  $T = 0.0002$ .

В таблице 2 указано значение погрешности метода  $\sum_{i=1}^N (u_i - u^H)^2 S_i$ , где  $S_i$  - площадь  $i$ -го треугольника. В таблице представлены результаты работы предлагаемого метода на основе разрывного метода Галёркина с потоком, взятым в виде полусуммы (схема 1) и потоком Shu (схема 2) и результаты работы разрывного метода Галёркина со стабилизационными добавками (CDG) [8].

Таблица 2. Значения погрешности  $\sum_{i=1}^N (u_i - u^H)^2 S_i$ , полученные при решении задачи 2.

	схема 1		схема 2		CDG	
$N=2085$	$1.09 \cdot 10^{-6}$		$1.32 \cdot 10^{-6}$		$3.46 \cdot 10^{-7}$	
$N=8546$	$2.17 \cdot 10^{-7}$	2.39	$3.19 \cdot 10^{-7}$	2.05	$3.13 \cdot 10^{-8}$	3.47
$N=34049$	$9.21 \cdot 10^{-8}$	1.24	$1.22 \cdot 10^{-7}$	1.39	$1.31 \cdot 10^{-7}$	1.26

В качестве третьей модельной задачи рассматривалась задача:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, y, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ u(0, y, t) &= 1, u(1, y, t) = 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0, t) &= 1, u(x, 1, t) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Решение сравнивалось с решением  $u^H$ , полученным по чисто неявной разностной схеме с помощью метода расщепления [7] на подробной структурированной сетке. Расчет производился до значения  $T = 0.0002$ .

В таблице 3 указано значение погрешности метода  $\sum_{i=1}^N (u_i - u^H)^2 S_i$ , где  $S_i$  - площадь  $i$ -го треугольника. В таблице представлены результаты работы предлагаемого алгоритма с использованием разрывного метода Галёркина (DG) и результаты работы разрывного метода Галёркина со стабилизационными добавками (CDG) [8].

Таблица 3. Значения погрешности  $\sum_{i=1}^N (u_i - u^H)^2 S_i$ , полученные при решении задачи 3.

	DG		CDG	
$N=2085$	$1.32 \cdot 10^{-6}$		$3.46 \cdot 10^{-7}$	
$N=8546$	$3.19 \cdot 10^{-7}$	2.05	$3.13 \cdot 10^{-8}$	3.47
$N=34049$	$1.22 \cdot 10^{-7}$	1.39	$1.31 \cdot 10^{-7}$	1.26

Как видно из результатов расчетов, предлагаемый метод обладает высоким порядком точности, сравнимым с результатами, полученными с помощью разрывного метода Галёркина со стабилизационными добавками. Но при этом предложенный метод меньше подвержен отрицательному скачку порядка сходимости. Ранее была показана [10] работоспособность метода на неструктурированных сетках с сильно вытянутыми ячейками там, где РМГ со стабилизационными добавками перестает работать.

**Вывод.** Создан новый эффективный алгоритм решения уравнений диффузионного типа на основе разрывного метода Галёркина. На примере ряда двумерных модельных задач

численно показано, что предложенный метод обладает сходимостью и хорошей точностью, полученное решение близко к решению по разрывному методу Галеркина со стабилизационными добавками.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (Грант № 14 – 01 – 31260 мол\_а)

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Флетчер К., *Численные методы на основе метода Галеркина: Пер. с английского*, Мир, М., 1988, 352 с.
2. Bassi F., Rebay S., “A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier–Stokes Equations”, *J. Comput. Phys.*, **131** (1997), 267–279.
3. Cockburn B., Shu C. W., “Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems”, *J. Sci. Comp.*, **3** (2001), 173–261.
4. Bernardo Cockburn, “An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations (Lecture Notes in Mathematics)”, **1697** (1998), 151–268.
5. Li B. Q., *Discontinuous finite elements in fluid dynamics and heat transfer*, Springer, Berlin, 2006, 578 pp.
6. Ладонкина М. Е., Милюкова О. Ю., Тишкин В. Ф., “Консервативные схемы для решения уравнений диффузионного типа на основе использования многосеточных методов”, *Труды Средневолжского математического общества*, **10:2** (2008), 21–44.
7. Самарский А. А., *Теория разностных схем*, 3-е изд., испр., Наука, М., 1989, 616 с.
8. Pany A. K., Yadav S., “An hp-Local Discontinuous Galerkin method for Parabolic Integro-Differential Equations”, **Report Number 09/30**.
9. Xu Y., Shu C.-W., “Error estimates of the semi-discrete local discontinuous Galerkin method for nonlinear convection-diffusion and KdV equations”, **196** (2007), 3805–3822.
10. Жалнин Р. В., Масягин В. Ф., Панюшкина Е. Н., “О применении разрывного метода Галёркина для численного решения двумерных уравнений диффузионного типа на неструктурированных разнесенных сетках”, *Современные проблемы науки и образования*, **6** (2013), URL: [www.science-education.ru/113-10929](http://www.science-education.ru/113-10929).

# Discontinuous finite-element Galerkin method for numerical solution of two-dimensional diffusion problems on unstructured grids

© R. V. Zhalnin<sup>5</sup>, M. Ye. Ladonkina<sup>6</sup>, V. F. Masyagin<sup>7</sup>, V. F. Tishkin<sup>8</sup>

**Abstract.** The new effective solution algorithm for diffusion type equations on base of discontinuous Galerkin method is offered, which has good convergence and accuracy when using the explicit scheme. A characteristic feature of the offered method is to use a dual mesh on which the solution is sought of ancillary parameters. Investigation of the method is exemplified by the initial-boundary value problem for two-dimensional heat equation. Calculations of two-dimensional modeling problems including with explosive factors have shown a good accuracy of offered method.

**Key Words:** parabolic equations, discontinuous Galerkin method, convergence and accuracy of the method.

---

<sup>5</sup> Head of Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; zhalnin@gmail.com.

<sup>6</sup> Senior Researcher of the Institute of applied mathematics by name M.V. Keldysh of RAS, Moscow; ladonkina@imamod.ru.

<sup>7</sup> Postgraduate student of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; vmasyagin@gmail.com.

<sup>8</sup> Deputy Director for Science of the Institute of applied mathematics by name M.V. Keldysh of RAS, Moscow; v.f.tishkin@mail.ru.

УДК 519.87

## Об одном подходе к оценке погрешности и значимости измерений в линейных задачах

© С. И. Спивак<sup>1</sup>, О. Г. Кантор<sup>2</sup>, Д. С. Юнусова<sup>3</sup>

**Аннотация.** Рассматриваются задачи восстановления линейных зависимостей по экспериментальным данным, для которых получение точного решения в силу невозможности удовлетворения ряда объективных условий неосуществимо. В работе предлагается метод, позволяющий не только получать приближенные решения, но и проводить оценку погрешности измерений и их значимости, что является существенным для совершенствования процедуры построения функциональных зависимостей на стадии планирования экспериментов в части уточнения экспериментальных данных или их исключения из рассмотрения. Приведены результаты апробации предлагаемого метода.

**Ключевые слова:** задачи восстановления линейных зависимостей, погрешность измерений, значимость измерений, двойственные оценки.

### 1. Введение

Задачи восстановления линейных зависимостей по экспериментальным данным сводятся к системам линейных алгебраических уравнений вида:

$$AX = B \quad (1.1)$$

где  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_i)$  – экспериментальные данные ( $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ ), а  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  – искомые параметры модели.

Точное решение системы (1.1) может не удовлетворять ограничениям модели или некоторым другим требованиям. В этой связи актуальными являются определение приближенного решения таких систем и связанная с ней оценка величины погрешности измерений, под которой будем понимать расхождение значений расчетных и экспериментальных величин не в каждом отдельном наблюдении, а в целом по всей совокупности наблюдений. Способы формализации такого рода задач, очевидно, зависят от многих факторов: имеющейся информации, предъявляемых к модели требований, предпочтений и компетенции исследователя и пр. В настоящей работе проблема приближенного решения системы (1.1) с последующим вычислением оценок погрешности и значимости измерений рассмотрена с позиций линейных задач.

### 2. Описание подхода для определения погрешности измерений

Будем предполагать, что на параметры модели  $X$  наложены условия неотрицательности:

$$X \geq 0 \quad (2.1)$$

<sup>1</sup> Заведующий кафедрой математического моделирования, ФГБОУ ВПО Башкирский государственный университет, г. Уфа; semen.spivak@mail.ru.

<sup>2</sup> Старший научный сотрудник, ФГБУН Институт социально-экономических исследований Уфимского научного центра РАН, г. Уфа; o\_kantor@mail.ru.

<sup>3</sup> Аспирант, ФГБОУ ВПО Башкирский государственный университет, г. Уфа; kazakova\_d\_s@mail.ru.

Также, будем считать, что на значения параметров накладываются ограничения, выражающие их принадлежность какому-либо множеству значений, другими словами, параметры модели удовлетворяют системе ограничений:

$$CX \geq D \quad (2.2)$$

где  $C = (c_{lj})$  – это матрица, состоящая из коэффициентов при параметрах модели в системе ограничений ( $l = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n$ ), а  $D = (d_l)$  – концы промежутков значений, которым принадлежат параметры модели ( $l = 1, \dots, k$ ).

Тогда задача определения приближенного решения системы (1.1) с учетом ограничений (2.1) и (2.2) может быть сведена к задаче линейного программирования:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\rightarrow \min \\ |AX - B| &\leq \varepsilon \\ CX &\geq D \\ X &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь  $\varepsilon$  – параметр, характеризующий величину погрешности измерений.

В результате решения задачи (2.3) должны быть определены параметры модели, удовлетворяющие требуемым ограничениям и величина погрешности измерений.

Следует заметить, что матрицы  $A$  и  $B$  формируются по результатам наблюдений, а потому не могут рассматриваться как абсолютно точные, так как результаты их измерений неминуемо сопряжены с некоторыми ошибками, которые приводят к отклонениям измеряемых значений величин  $A$  и  $B$  от их истинных значений.

В случае предполагаемых ошибок в матрице  $B$ , различных для каждого отдельного измерения  $i = 1, \dots, m$ , задача определения параметров модели, обеспечивающих минимальное отклонение от экспериментальных величин ( $b_i$ ) может быть сведена к задаче линейного программирования следующего вида:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\rightarrow \min \\ AX &= \Delta B \\ CX &\geq D \\ X &\geq 0 \\ |\delta_i - 1| &\leq \varepsilon, i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь  $\varepsilon$  – это величина погрешности измерений, а  $\Delta$  – диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят элементы  $\delta_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) – неизвестные величины, отождествляемые с параметрами, характеризующими ошибки в измерениях элементов матрицы  $B$ . Величины  $\varepsilon$  и  $\delta_i$  связаны очевидным соотношением:  $\varepsilon = \max_i |\delta_i - 1|$ .

В случае предполагаемых ошибок в каждом элементе матрицы  $A$  задача (1.1) может быть формализована в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\rightarrow \min \\ A'X &= B \\ CX &\geq D \\ X &\geq 0 \\ |\gamma_{ij} - 1| &\leq \varepsilon, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь матрица  $A' = (\gamma_{ij}a_{ij})$  ( $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ ).

Задача (2.5) является нелинейной, поскольку в выражении  $A'X = B$  элементы вектора  $X$  – неизвестные величины, а  $A'$  – матрица, которая зависит от  $n \times m$  неизвестных величин. Данное обстоятельство создает существенные проблемы для численной реализации модели (2.5). Вместе с тем относительно элементов матрицы  $A$  может быть известна информация, которая позволит упростить процесс получения решения, например, при наличии индивидуальных систематических ошибок, имеющих место при измерении каждой из наблюдаемых величин, или индивидуальных ошибок каждого отдельного наблюдения. Первая из перечисленных выше ситуаций отражается в пропорциональных изменениях всех элементов каждого из столбцов ( $A' = A\Gamma, \Gamma = (\gamma_{jj}), j = 1, \dots, n$ ), что никак не отражается на погрешности измерений  $\varepsilon$ , а влияет только на параметры  $X$ , а вторая – строк ( $A' = \Gamma A, \Gamma = (\gamma_{ii}), i = 1, \dots, m$ ), что сводит задачу определения неизвестных параметров к задаче (2.4).

### 3. Методика определения значимости измерений

Важное практическое значение имеет оценка влияния погрешности экспериментальных данных модели на погрешность измерений  $\varepsilon$  [1], что позволяет осуществлять анализ информационной ценности измерений и, как следствие, выявлять те, которые следует рассматривать как наиболее недостоверные или значимые и пр. Результатами такого анализа могут быть, например, выводы, о необходимости, при наличии соответствующих возможностей, уточнения некоторых экспериментальных данных, или рекомендации об их исключении из рассмотрения при непосредственном построении функциональных зависимостей.

Из теории линейного программирования известно, что для этих целей может быть использована теория двойственности [2]. Применительно к исследуемой в настоящей работе проблеме решение соответствующих двойственных задач позволит оценить влияние элементов матрицы экспериментальных данных  $B$  и матрицы ограничений на параметры модели  $D$  в прямых задачах линейного программирования на величину минимального значения погрешности измерений  $\varepsilon$ . Двойственная задача для задачи линейного программирования (2.3) имеет вид:

$$\begin{aligned} (B, y^1) - (B, y^2) + (D, y^3) &\rightarrow \max \\ A^T y^1 - A^T y^2 + C^T y^3 &\leq 0 \\ \sum_{i=1}^m y_i^1 + \sum_{i=1}^m y_i^2 &\leq 1 \\ y^1 \geq 0, y^2 \geq 0, y^3 &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $y^1 = (y_i^1), y^2 = (y_i^2) (i = 1, \dots, m), y^3 = (y_l^3) (l = 1, \dots, k)$  – векторы оптимального решения двойственной задачи.

Заметим, что в задаче (2.3) для оценки степени влияния  $i$ -го соотношения из системы неравенств  $|AX - B| \leq \varepsilon$  на значение погрешности измерений  $\varepsilon$  необходимо рассмотреть соответствующие компоненты векторов  $y^1$  и  $y^2$ , являющихся решением задачи (3.1), и выбрать из них максимальный.

Аналогичным образом может быть выписана двойственная задача для задачи линейного программирования (2.4).

## 4. Результаты апробации

Описанный выше подход был применен для определения степени влияния погрешностей наблюдаемых величин на погрешность измерения при решении задачи моделирования численности населения Российской Федерации методом системной динамики [3] - [6]. Общий вид исследованной модели системной динамики следующий:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= a_1 N^{\alpha_1} D^{\beta_1} I^{\gamma_1} - a_2 N^{\alpha_2} D^{\beta_2} I^{\gamma_2} \\ \frac{dD}{dt} &= a_3 N^{\alpha_3} D^{\beta_3} I^{\gamma_3} - a_4 N^{\alpha_4} D^{\beta_4} I^{\gamma_4} \\ \frac{dI}{dt} &= a_5 N^{\alpha_5} D^{\beta_5} I^{\gamma_5} - a_6 N^{\alpha_6} D^{\beta_6} I^{\gamma_6}\end{aligned}\quad (4.1)$$

где  $N$  – численность населения РФ;  $D$  – душевые доходы за год;  $I$  – индекс потребительских цен. Информационную базу исследования составили данные официальной статистической отчетности за период с 1998 по 2009 гг.

По результатам специально организованного численного эксперимента была получена модель следующего вида:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= 8,139 \cdot 10^{-22} \cdot \frac{N^{0,05} \cdot D^2}{I^2} - 64,01 \cdot \frac{N^{0,33} \cdot D^{0,3}}{I^{0,3}} \\ \frac{dD}{dt} &= 560 \cdot D^{0,35} - 9900 \cdot I \\ \frac{dI}{dt} &= 0,131 \cdot I^{-0,4} - 0,0072 \cdot \frac{N^{0,092} \cdot D^{0,092}}{I^{0,092}}\end{aligned}\quad (4.2)$$

Модель (4.2) с достаточно высокой точностью описывает экспериментальные данные, о чем свидетельствуют низкие значения средних ошибок аппроксимации для каждого из уравнений модели:  $\bar{A}_N = 0,13\%$ ,  $\bar{A}_D = 3,33\%$ ,  $\bar{A}_I = 5,86\%$ .

Вместе с тем, как показывает практика использования статистической информации, исходные данные для модели (4.1) нельзя рассматривать как абсолютно точные. Это обусловлено рядом причин объективного характера: запаздывание сбора и обработки данных, неточности (а иногда и умышленные искажения) предоставляемой информации, аккумуляруемой органами статистики, и пр. В этой связи, несмотря на хорошую точность построенной модели, целесообразной является оценка значимости имеющихся экспериментальных данных. И одним из возможных способов реализации этого является описанный в настоящей работе подход.

Ниже приводится описание его применения для первого уравнения модели (4.1). Для этого потребовалось осуществить линеаризацию данного уравнения, для чего было использовано разложение в ряд Тейлора с центром в точке  $\{a_i^0, \alpha_i = 0, \beta_i = 0, \gamma_i = 0\}$ ,  $i = \overline{1, 2}$ :

$$\begin{aligned}\Delta N &\approx a_1 + a_1^0 \cdot \ln N \cdot \alpha_1 + a_1^0 \cdot \ln D \cdot \beta_1 + a_1^0 \cdot \ln I \cdot \gamma_1 - \\ &\quad - a_2 - a_2^0 \cdot \ln N \cdot \alpha_2 + a_2^0 \cdot \ln D \cdot \beta_2 + a_2^0 \cdot \ln I \cdot \gamma_2\end{aligned}\quad (4.3)$$

Были введены следующие обозначения:  $x_1 = a_1$ ,  $x_2 = a_2$ ,  $x_3 = \alpha_1$ ,  $x_4 = \alpha_2$ ,  $x_5 = \beta_1$ ,  $x_6 = \beta_2$ ,  $x_7 = \gamma_1$ ,  $x_8 = \gamma_2$ . На основании исходной информации для определения

параметров  $\{a_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}$ ,  $i = \overline{1, 2}$  были сформированы матрицы  $A$  и  $B$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1,881 & 0,692 & 0,000 & -1 & 1128,683 & 415,074 & 0,0000 \\ 1 & 1,881 & 0,741 & -0,031 & -1 & 1128,576 & 444,835 & -18,669 \\ 1 & 1,881 & 0,773 & -0,018 & -1 & 1128,312 & 463,945 & -11,039 \\ 1 & 1,880 & 0,803 & -0,017 & -1 & 1128,072 & 481,609 & -10,235 \\ 1 & 1,880 & 0,828 & -0,014 & -1 & 1127,803 & 496,846 & -8,438 \\ 1 & 1,879 & 0,855 & -0,011 & -1 & 1127,520 & 513,042 & -6,800 \\ 1 & 1,879 & 0,877 & -0,011 & -1 & 1127,189 & 525,940 & -6,639 \\ 1 & 1,878 & 0,900 & -0,010 & -1 & 1126,900 & 540,065 & -6,208 \\ 1 & 1,878 & 0,923 & -0,009 & -1 & 1126,598 & 553,785 & -5,171 \\ 1 & 1,877 & 0,944 & -0,011 & -1 & 1126,374 & 566,500 & -6,746 \\ 1 & 1,877 & 0,961 & -0,012 & -1 & 1126,284 & 576,740 & -7,492 \\ 1 & 1,877 & 0,974 & -0,008 & -1 & 1126,340 & 584,490 & -5,060 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -262647,1 \\ -649238,1 \\ -586457,1 \\ -654217,1 \\ -685624,1 \\ -795385,1 \\ -693926,1 \\ -720608,1 \\ -532523,1 \\ -212070,1 \\ -104799,1 \\ 10589,9 \end{pmatrix}$$

С учетом всех предъявляемых требований к параметрам модели, задача определения приближенного значения параметров модели была формализована в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\rightarrow \min \\ |AX - B| &\leq \varepsilon \\ 0 &\leq x_1 \leq 3 \\ 1,948 &\leq x_2 \leq 2,050 \\ -14151439,74 &\leq x_1 - x_5 \leq 23,4 \\ 0 &\leq x_6 \leq 1 \\ 0 &\leq x_p \leq 5, p = 3, 4, 7, 8 \\ x_5 &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Решение задачи (4.4):  $X = (0; 1,948; 5; 5; 395119,963; 0; 5; 5)^T$ , погрешность измерений  $\varepsilon = 402804,23$ , решение двойственной к ней (см. модель (3.1)):

$$\begin{aligned} y^1 &= (0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,5; 0; 0; 0; 0; 0)^T, \\ y^2 &= (0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,5)^T, \\ y^3 &= (0; 0; 0,001; 0,0595; 0,0015; 0; 3,5724; 0,87; 0; 0)^T. \end{aligned}$$

Полученные результаты позволили сделать вывод о том, что погрешность измерений в большей степени определяется верхним ограничением на переменную  $x_7$  ( $y_7^3 = 3,5724$ ), в меньшей 6-м и 12-м элементами матрицы  $B$  ( $y_6^1 = 0,5$  и  $y_{12}^2 = 0,5$ ), верхними ограничениями на переменные  $x_4$ ,  $x_5$ ,  $x_8$  ( $y_4^3 = 0,0595$ ,  $y_5^3 = 0,0015$ ,  $y_8^3 = 0,87$ ) и нижними ограничениями на переменную  $x_3$  ( $y_3^3 = 0,001$ ). Даная информация может быть использована при планировании дальнейших экспериментов с исследуемой моделью. При этом должен соблюдаться следующий принцип: в каждом последующем эксперименте информативность новых измерений должна быть не менее значима, что должно отражаться при формировании соответствующих условий. Так, например, сужение диапазонов значений переменных  $x_4$ ,  $x_5$ ,  $x_7$ ,  $x_8$  целесообразно проводить за счет увеличения нижних границ, а переменной  $x_3$  – верхней.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спивак С.И., Тимошенко В.И., Слинько М.Г., “Методы построения кинетических моделей стационарных реакций”, *Химическая промышленность*, 1979, № 3, 33–36.
2. Канторович Л.В., Горстко А.Б., *Оптимальные решения в экономике*, Наука, М., 1972, 231 с.
3. Спивак С.И., Кантор О.Г., “Оценка качества спецификации моделей системной динамики”, *Журнал СВМО*, **14**:2 (2012), 34–39.
4. Спивак С.И., Кантор О.Г., “Оценка параметров моделей системной динамики”, *Журнал СВМО*, **13**:3 (2011), 107–113.
5. Спивак С.И., Кантор О.Г., Салахов И.Р., “Алгоритм получения прогнозируемых параметров социально-экономических систем”, *Системы управления и информационные технологии*, 2013, № 4(54), 43–45.
6. Спивак С.И., Кантор О.Г., Салахов И.Р., “Вычислительная реализация оценки управляющих параметров модели системной динамики”, *Вестник Башкирского университета*, **17**:4 (2012), 1658–1660.

## A approach to error estimation and significance of measurements in linear problems.

© S. I. Spivak<sup>4</sup>, O. G. Kantor<sup>5</sup>, D. S. Yunusova<sup>6</sup>

**Abstract.** We consider the problem of recovering the linear dependency on the experimental data, for which it is impossible to find exact solutions because of inability to meet a number of objective conditions. This paper proposes a method to not only obtain approximate solutions, but also to assess the accuracy of measurements and their significance, which is essential for improving the procedure for construction of functional dependencies in the planning stage of the experiments in verifying experimental data or their exclusion from consideration. The paper also provides results of testing of the proposed method.

**Key Words:** the problem of recovering the linear dependency, the accuracy of measurements, the significance of measurements, dual estimates.

<sup>4</sup> Head of the Chair of Mathematical Modelling, Bashkir State University, Ufa; semen.spivak@mail.ru.

<sup>5</sup> Senior Scientist, Institute of Social and Economic Research of RAS Ufa Scientific Center, Ufa; o\_kantor@mail.ru.

<sup>6</sup> Postgraduate, Bashkir State University, Ufa; kazakova\_d\_s@mail.ru.

УДК 517.9

# Энергетическая функция для структурно устойчивых 3-диффеоморфизмов с двумерным растягивающимся аттрактором

© В. З. Гринес<sup>1</sup>, М. К. Носкова<sup>2</sup>, О. В. Починка<sup>3</sup>

**Аннотация.** В настоящей работе устанавливается существование энергетической функции для структурно устойчивых диффеоморфизмов замкнутых трехмерных многообразий, неблуждающее множество которых содержит двумерный растягивающийся аттрактор.

**Ключевые слова:** структурно устойчивая система, растягивающийся аттрактор, энергетическая функция

## 1. Введение и формулировка результатов

В настоящей работе рассматриваются грубые диффеоморфизмы  $f$ , заданные на трехмерном гладком замкнутом многообразии  $M$ . Согласно спектральной теореме С. Смейла [3] неблуждающее множество  $NW(f)$  диффеоморфизма  $f$  представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств  $NW(f) = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_m$ , называемых *базисными множествами*, каждое из которых содержит всюду плотную орбиту. Базисное множество  $\Omega$  называется *нетривиальным*, если оно не является периодической орбитой. Если  $\dim \Omega = 2$ , то, согласно [6],  $\Omega$  является либо аттрактором, либо репеллером<sup>4</sup>. Среди двумерных аттракторов (репеллеров)  $\Omega$  диффеоморфизма  $f : M \rightarrow M$  выделяют растягивающиеся (сжимающиеся)<sup>5</sup>.

Обозначим через  $G$  класс структурно устойчивых диффеоморфизмов  $f : M \rightarrow M$ , неблуждающее множество которых содержит двумерный растягивающийся аттрактор  $\Omega$ .

*Энергетическая функция* для структурно устойчивого диффеоморфизма  $f$  — это гладкая функция, убывающая вдоль блуждающих траекторий, постоянная на базисных множествах и множество критических точек которой совпадает с множеством неблуждающих точек  $MW(f)$ .

Основным результатом настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

**Т е о р е м а 1.1.** *Для любого диффеоморфизма  $f \in G$  существует энергетическая функция, являющаяся функцией Морса вне нетривиальных базисных множеств.*

*Благодарности.* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 12-01-00672, 13-01-12452-офи-м).

<sup>1</sup> Профессор кафедры численного и функционального анализа ННГУ им. Н.И. Лобачевского; vgrines@yandex.ru

<sup>2</sup> Студентка, ННГУ им. Н.И. Лобачевского; mknoskova@yandex.ru

<sup>3</sup> Профессор кафедры информационных систем и технологий НИУ ВШЭ-НН; olga-pochinka@yandex.ru

<sup>4</sup> Компактное  $f$ -инвариантное множество  $A \subset M$  называется *аттрактором* диффеоморфизма  $f$ , если оно имеет компактную окрестность  $U_A$  такую, что  $f(U_A) \subset \text{int } U_A$  и  $A = \bigcap_{k \geq 0} f^k(U_A)$ . Окрестность  $U_A$  при этом называется *захватывающей*. Репеллер определяется как аттрактор для  $f^{-1}$ .

<sup>5</sup> Аттрактор  $\Omega$  называется *растягивающимся*, если размерность  $\Omega$  совпадает с размерностью неустойчивого многообразия любой его точки. Базисное множество диффеоморфизма  $f$  называется *сжимающимся репеллером*, если оно является растягивающимся аттрактором для диффеоморфизма  $f^{-1}$ .

## 2. Динамические свойства диффеоморфизмов класса $G$

В этом разделе мы изложим необходимую для доказательства теоремы 1.1. информацию о двумерном растягивающемся аттракторе  $\Omega$  диффеоморфизма  $f \in G$  следуя источникам [7], [2], [8], [4].

Из определения аттрактора  $\Omega$  следует, что

$$\dim E_{\Omega}^s = \dim E_x^s = 1 \text{ для любой точки } x \in \Omega.$$

Введем следующие обозначения:  $(x, y)^s$  — открытая дуга на одномерном устойчивом многообразии  $W^s(z)$  с концевыми точками  $x, y \in W^s(z)$ , где  $z \in \Omega$ . Аналогичную замкнутую дугу обозначим через  $[x, y]^s$ .

Точка  $x \in \Omega$  называется  $s$ -граничной, если одна из компонент связности множества  $W_x^s \setminus x$  не пересекается с  $\Omega$ .

Согласно [7] множество граничных точек конечно и все граничные точки периодические. Кроме того, в силу [7], [2], [8] все граничные точки аттрактора  $\Omega$  разбиваются на ассоциированные пары  $(p, q)$  точек одинакового периода так, что 2-связка  $W^u(p) \cup W^u(q)$  является достижимой изнутри границей<sup>6</sup> компоненты связности множества  $M \setminus \Omega$ .

Для каждой пары ассоциированных граничных периодических точек построим из дуг одномерных устойчивых многообразий связывающий двумерный цилиндр и соответствующую двумерную сферу.

Пусть  $B_{pq}$  — 2-связка аттрактора  $\Omega$ , состоящая из двух неустойчивых многообразий  $W^u(p)$  и  $W^u(q)$  ассоциированных граничных точек  $p$  и  $q$  соответственно, и  $m = m(p, q)$  — период точек  $p, q$ . Тогда для любой точки  $x \in W^u(p) \setminus p$  существует единственная точка  $y \in W^u(q)$  такая, что  $(x, y)^s \cap \Omega = \emptyset$ . Определим отображение

$$\varphi_{pq} = \varphi : (W^u(p) \setminus p) \cup (W^u(q) \setminus q) \rightarrow (W^u(p) \setminus p) \cup (W^u(q) \setminus q),$$

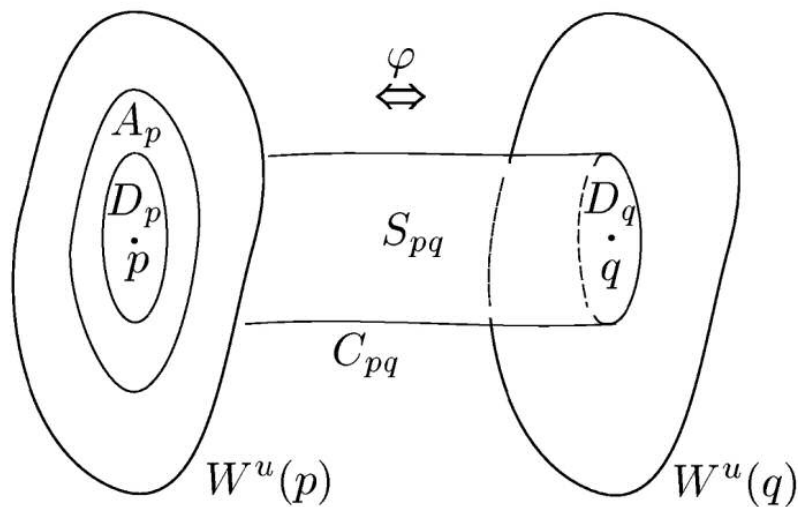
положив  $\varphi_{pq}(x) = y$  и  $\varphi_{pq}(y) = x$ . Тогда

$$\varphi_{pq}(W^u(p) \setminus p) = W^u(q) \setminus q \text{ и } \varphi_{pq}(W^u(q) \setminus q) = W^u(p) \setminus p,$$

то есть отображение  $\varphi_{pq}$  переводит проколотые неустойчивые многообразия 2-связки друг в друга и является инволюцией. В силу теоремы о непрерывной зависимости инвариантных многообразий на компактных множествах отображение  $\varphi_{pq}$  является гомеоморфизмом.

Ограничение  $f^m|_{W^u(p)}$  имеет ровно одну гиперболическую отталкивающую неподвижную точку  $p$ , поэтому существует гладкий замкнутый 2-диск  $D_p \subset W^u(p)$  такой, что  $p \in D_p \subset \text{int}(f^m(D_p))$ . Тогда множество  $C_{pq} = \bigcup_{x \in \partial D_p} (x, \varphi(x))^s$  гомеоморфно открытому двумерному цилиндру  $\mathbb{S}^1 \times (0; 1)$ . Множество  $C_{pq}$  называют *связывающим цилиндром*. Окружность  $\varphi_{pq}(\partial D_p)$  ограничивает в  $W^u(q)$  двумерный 2-диск  $D_q$  такой, что  $q \in D_q \subset \text{int}(f^m(D_q))$ . Множество  $S_{pq} = D_p \cup C_{pq} \cup D_q$  гомеоморфно двумерной сфере, которую называют *характеристической сферой*, соответствующей связке  $B_{pq}$  (см. рисунок 2.1).

<sup>6</sup> Пусть  $G \subset M$  — открытое множество с границей  $\partial G$  ( $\partial G = \text{cl}(G) \setminus \text{int}(G)$ ). Подмножество  $\delta G \subset \partial G$  называется *достижимой изнутри границей* области  $G$ , если для любой точки  $x \in \delta G$  найдется открытая дуга, полностью лежащая в  $G$  и такая, что  $x$  является одной из ее концевых точек.

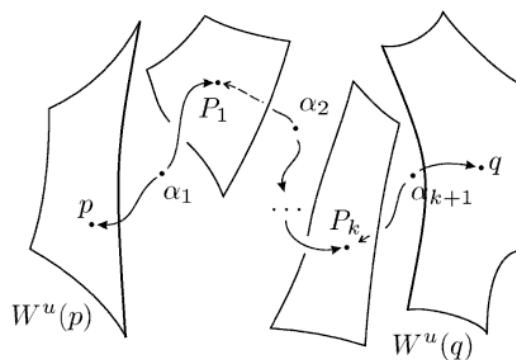


Р и с у н о к 2.1

Характеристическая сфера

**Предложение 2.1.** Для любого диффеоморфизма  $f \in G$  объемлющее многообразие гомеоморфно трехмерному тору  $\mathbb{T}^3$  и множество  $T(f) = NW(f) \setminus \Omega$  имеет следующую структуру:

1.  $T(f)$  принадлежит объединению 3-шаров  $Q_{pq}$ , ограниченных характеристическими сферами  $S_{pq}$ ;
2. для каждой связки  $B_{pq}$  существует натуральное число  $k_{pq}$  такое, что  $T(f) \cap Q_{pq}$  состоит из  $k_{pq}$  периодических источников  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k_{pq}}$  и  $k_{pq} - 1$  седловых периодических точек  $P_1, \dots, P_{k_{pq}-1}$ ;
3. множество  $l_{pq} = \bigcup_{i=1}^{k_{pq}-1} cl W^s(P_i)$  является простой дугой, на которой источник-вые периодические точки чередуются с седловыми (см. рисунок 2.2).

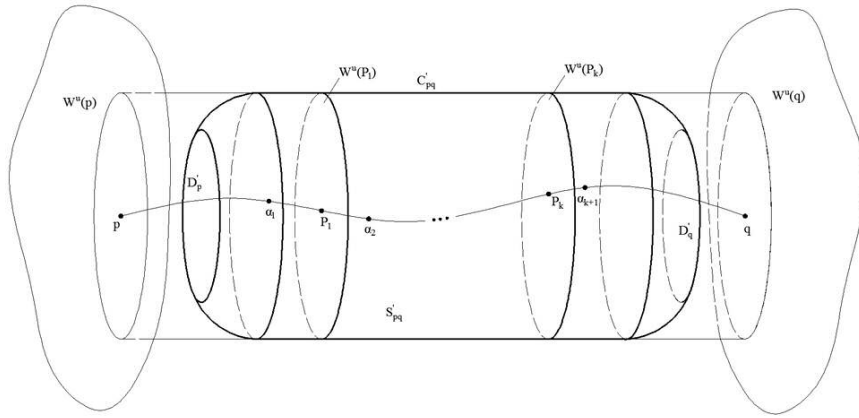


Р и с у н о к 2.2

Дуга  $l_{pq}$

Заметим, что шар  $Q_{pq}$  пересекает двумерное неустойчивое многообразие седла  $P_j, j \in \{1, \dots, k_{qp} - 1\}$  в точности по одному двумерному диску<sup>7</sup>. Тогда внутри шара  $Q_{pq}$  существует гладкий 3-шар  $U_{l_{pq}}$  такой, что:

- 1)  $l_{pq} \subset U_{l_{pq}} \subset f^m(U_{l_{pq}})$ ;
- 2) пересечение  $U_{l_{pq}} \cap W^u(P_j)$  состоит в точности из одного двумерного диска для каждого  $j \in \{1, \dots, k_{qp} - 1\}$  (см. рисунок 2.3).



Р и с у н о к 2.3

Окрестность  $U_{l_{pq}}$

Положим  $K_{pq} = f^m(U_{l_{pq}}) \setminus U_{l_{pq}}$  и  $L_{pq} = l_{pq} \cup f(l_{pq}) \cup \dots \cup f^m(l_{pq})$  и  $U_{pq} = U_{l_{pq}} \cup f(U_{l_{pq}}) \cup \dots \cup f^m(U_{l_{pq}})$ . Тогда  $L_{pq}$  является репеллером с захватывающей окрестностью  $U_{pq}$ . Обозначим через  $L, U$  объединение всех таких репеллеров и их захватывающих окрестностей, соответственно, по всем связкам аттрактора  $\Omega$ . Пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{P}$  объединение всех источников и стоков, соответственно, множества  $T(f)$ .

В силу результатов работ [1] и [4] имеет место следующий факт.

**Предложение 2.2.** На множестве  $U$  существует функция Морса  $\psi : U \rightarrow [1; 3]$  такая, что  $\psi(\partial U) = 1$ ,  $\psi(\mathcal{P}) = 2$ ,  $\psi(\mathcal{A}) = 3$ , являющаяся энергетической функцией диффеоморфизма  $f|_U$ .

### 3. Построение энергетической функции для диффеоморфизмов из класса $G$

Разобьем построение энергетической функции для  $f \in G$  на шаги.

**Шаг 1.** Для каждой связки  $B_{pq}$  аттрактора  $\Omega$  положим  $K_{pq} = f^m(U_{l_{pq}}) \setminus U_{l_{pq}}$  и  $W_{pq} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(K_{pq})$ . Поскольку трехмерное кольцо  $K_{pq}$  является фундаментальной областью диффеоморфизма  $f^m|_{W_{pq}}$ , то диффеоморфизм  $f^m|_{W_{pq}}$  гладко сопряжен с гомотетией  $g(x, y, z) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2})$  на  $\mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$  посредством некоторого диффеоморфизма  $h_{pq} : W_{pq} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$ , переводящего кольцо  $K_{pq}$  в кольцо  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ . Функция  $\varphi_g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  является энергетической функцией диффеоморфизма  $g$ . Положим  $\varphi_{pq} = \varphi_g h_{pq}$ .

<sup>7</sup> Это следует из того, что любая дуга  $(x, \varphi(x))^s, x \in D_p \setminus p$  пересекает  $W^u(P_j)$  ровно в одной точке для всех  $j = 1, \dots, k_{pq} - 1$ . Предположим обратное: пусть существует пара точек, в которых  $W^u(P_j)$  пересекает дугу  $(x, \varphi(x))^s$ . Тогда найдется точка, в которой произойдет касание устойчивого многообразия этой точки и неустойчивого многообразия  $W^u(P_j)$ , что противоречит структурной устойчивости диффеоморфизма  $f$ , а именно, сильному условию трансверсальности.

Положим  $K = f(U) \setminus U$  и  $W = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(K)$ . Сделав аналогичные построения для каждой 2-связки мы получим энергетическую функцию  $\varphi_W$  для диффеоморфизма  $f_W$ .

$$\text{Положим } \tilde{\varphi}(z) = \begin{cases} \varphi_W(z), & \text{если } z \in \bigcup_{n \geq 0} f^n(K); \\ \psi(z), & \text{если } z \in U; \\ 0, & \text{если } z \in \Omega; \end{cases}$$

**Шаг 2.** По построению функция  $\tilde{\varphi} : M \rightarrow [0, 3]$  является функцией Морса на множестве  $M \setminus \Omega$ . Покажем, что функция  $\tilde{\varphi}$  является непрерывной на  $M$ .

Для этого рассмотрим любую точку  $a \in \Omega$  и покажем, что  $\lim_{z_n \rightarrow a} \tilde{\varphi}(z_n) = 0$  для любой последовательности точек  $\{z_n \in M, n \in \mathbb{N}\}$  такой, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(z_n, a) = 0$ , где  $d$  — метрика на многообразии  $M$ . Поскольку  $\tilde{\varphi}(\Omega) = 0$ , то достаточно доказать утверждение для последовательности  $\{z_n \in M \setminus \Omega\}$ . Тогда для любого  $n \in \mathbb{N}$  существует натуральное число  $k_n$  такое, что  $z_n \in f^{k_n}(K_{pq})$  для некоторой связки  $B_{pq}$ . Поскольку  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(z_n, a) = 0$ , то  $k_n \rightarrow \infty$ . Тогда по построению последовательность  $\{h_{pq}(z_n) \in \mathbb{R}^3\}$  сходится к точке  $(0, 0, 0)$ . Откуда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_g(h_{pq}(z_n)) = 0$  и, следовательно,  $\lim_{z_n \rightarrow a} \tilde{\varphi}(z_n) = 0$ .

**Шаг 3.** Покажем, как сгладить функцию  $\tilde{\varphi}$  на множестве  $\Omega$ , сохранив при этом линии уровня.

Положим  $U_\Omega = M \setminus U$  и  $\tilde{\eta} = \tilde{\varphi}|_{cl U_\Omega} : cl U_\Omega \rightarrow [0, 1]$ . На отрезке  $[0, 1]$  зададим функцию  $\nu : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  формулой  $\nu(s) = \inf\{e^{-\frac{1}{d(z, w)}}, z, w \in cl U_\Omega : |\tilde{\eta}(z) - \tilde{\eta}(w)| \geq s\}$ . По построению  $\nu$  — непрерывная функция такая, что  $\lim_{s \rightarrow +0} \nu(s) = +\infty$ . В силу лемм 1 и 3 работы [5], существует бесконечно гладкая монотонно возрастающая функция  $q : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  такая, что функция  $\eta = q\tilde{\eta} : cl U_\Omega \rightarrow [0, 1]$  удовлетворяет условию  $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{|q(x) - q(y)|}{\nu(|x - y|)} = 0$ . Непосредственно проверяется, что функция  $\eta$  является гладкой на  $\Omega$  и  $\eta(\Omega) = 0$ .

Искомая функция  $\varphi : M \rightarrow [0, 3]$  определяется формулой

$$\varphi(z) = \begin{cases} \eta(z), & \text{если } z \in cl U_\Omega; \\ \psi(z), & \text{если } z \in U. \end{cases}$$

Функция  $\varphi : M \rightarrow [0, 3]$  — энергетическая функция для диффеоморфизма  $f \in G$ . Таким образом, теорема 1.1. доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grines V.Z., Laudenbach F., Pochinka O.V., “Dynamically ordered energy function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **278**:1 (2012), 27–40.
2. Гринес В.З., Жужома Е.В., “Структурно устойчивые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один”, *Известия РАН. Серия Математическая*, **66**:2 (2002), 3–66.
3. Смейл С., “Дифференцируемые динамические системы”, *УМН*, **25**:1 (151) (1970), 113–185.
4. Гринес В.З., Починка О.В., *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. Ижевский институт компьютерных исследований, М. - Ижевск.

5. Norton A., Pugh Ch., “Critical sets in the plane”, *Michigan Journal of Math.*, **38** (1991), 441–459.
6. Плыкин Р.В., “О топологии базисных множеств диффеоморфизмов Смейла”, *Мат. сборник*, **84 (126):2** (1971), 301–312.
7. Плыкин Р.В., “О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов”, *УМН*, **39:6 (240)** (1984), 75–113.
8. Жужома Е.В., Медведев В.С., “О неориентируемых двумерных базисных множествах на 3-многообразиях”, *Матем. сб.*, **193:6** (2002), 83–104.

## Energy function for structurally stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional expanding attractor

© V. Z. Grines<sup>8</sup>, M. K. Noskova<sup>9</sup>, O. V. Pochinka<sup>10</sup>

**Abstract.** In this paper we prove the existence of the energy function for the structurally stable diffeomorphisms of closed three-dimensional manifolds non-wandering set of which contains two-dimensional expanding attractor

**Key Words:** Structurally stable system, expanding attractor, energy function

---

<sup>8</sup> Professor, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod; vgrines@yandex.ru.

<sup>9</sup> Student, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod; mknoskova@yandex

<sup>10</sup> Professor, High School Economy, Nizhny Novgorod; olga-pochinka@yandex.ru

## В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

УДК 517.9

## Методы теории ветвления и катастроф в задаче об изгибе удлиненной пластины в сверхзвуковом потоке газа

© Т. Е. Бадюкина<sup>1</sup>, Ю. Б. Русак<sup>2</sup>

**Аннотация.** Рассматривается задача о вычислении разветвляющихся решений нелинейной задачи на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка, описывающего прогиб удлиненной пластины в сверхзвуковом потоке газа, сжимаемой (растягиваемой) внешними краевыми усилиями. Строится асимптотика разветвляющихся решений в виде сходящихся по малым отклонениям от критических значений бифуркационных параметров рядов. Предгольмовость линеаризованной спектральной задачи доказывается построением соответствующей функции Грина, которое для задач такого типа выполнено впервые.

**Ключевые слова:** прогиб пластины, аэроупругость, бифуркация, уравнение разветвления.

Статические задачи потери устойчивости заключаются в нахождении таких значений бифуркационных параметров, при которых система может совершить скачкообразный переход из одного состояния равновесия в другое. В этом случае происходит переход параметров через некоторое критическое значений, при этом меняется качественная картина решений уравнений, описывающих деформацию упругих тел. В окрестности критических значений бифуркационных параметров возможно несколько решений, т.е. несколько положений равновесия обтекаемого тела.

Математическая модель задачи о прогибе удлиненной упруго опертой пластины в сверхзвуковом потоке газа, сжимаемой / растягиваемой внешними краевыми усилиями, описывается классом двухточечных краевых задач [1], [2] для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) четвертого порядка:

$$\chi^2 \left( \frac{w''}{(1+w'^2)^{\frac{3}{2}}} \right)'' - Tw'' + \beta_0 w + \varepsilon_3 q(x) = kK(w', M, \kappa) + \theta w'' \int_0^1 [(1+w'^2)^{\frac{1}{2}} - 1] dx \quad (1.1)$$

Здесь  $w = w(x)$  — прогиб пластины,  $0 \leq x_1 \leq d$ ,  $-\infty < y_1 < \infty$ ,  $x = \frac{x_1}{d}$ ,  $0 \leq x \leq 1$  — прямоугольные координаты;  $K(w', M, \kappa) = 1 - [1 + \frac{\kappa-1}{2} Mw']^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}$  — при одностороннем обтекании,  $K(w', M, \kappa) = [1 - \frac{\kappa-1}{2} Mw']^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} - [1 + \frac{\kappa-1}{2} Mw']^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}$  — при двустороннем;  $\chi^2 = \frac{h^2}{12(1-\mu^2)d^2}$ ,  $T = \frac{qd}{Eh}$ ,  $\theta = \frac{1}{1-\mu^2}$  и  $k = \frac{p_0 d}{Eh}$ , где  $d$  — ширина пластины,  $h$  — её толщина,  $E$  — модуль Юнга,  $\mu$  — коэффициент Пуассона,  $M = \frac{v}{c_\infty}$  — число Маха ( $v$  — скорость потока газа,  $c_\infty$  — скорость звука в невозмущенном газе),  $\kappa$  — показатель политропы,  $p_0$  — давление,  $\beta_0$  — коэффициент жесткости основания,  $\varepsilon_3 q(x)$  — малая нормальная нагрузка. Интегральное слагаемое учитывает дополнительное усилие в срединной плоскости при прогибе.

<sup>1</sup> Ассистент кафедры фундаментальной информатики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва, г. Саранск; badokinate@gmail.com.

<sup>2</sup> Австралийский национальный университет, г.Канберра, Австралия; irousak@gmail.com.

В окрестностях критических значений бифуркационных параметров (сжимающее (растягивающее) усилие  $T = T_0 + \varepsilon_1$ , число Маха  $M = M_0 + \varepsilon_2$ ) для вычисления малых изгибных форм применяются методы теории бифуркаций [3]. Зависимость дифференциального уравнения от бифуркационных параметров выражается через корни соответствующих характеристических уравнений линеаризации, которые можно считать заданными точно. Равенство нулю определителя матрицы граничных условий позволяет определить критические бифуркационные поверхности и кривые [5], [6], в окрестностях точек которых строится асимптотика разветвляющихся решений в виде сходящихся по малым параметрам рядов, и, тем самым, решить бифуркационную задачу о прогибе пластины в точной постановке. Наибольшие трудности возникают при исследовании линеаризованной спектральной задачи, фредгольмовость которой, доказывается построением соответствующей функции Грина, выполненным по схеме монографии [4].

В известных нам работах к бифуркационным задачам аэроупругости, как правило, применялся метод Галеркина. Методами теории бифуркаций задача о прогибе прямоугольной пластины исследована в работе [7]. Прогиб удлиненной пластины при учёте только одного бифуркационного параметра - числа Маха - в работах П.А.Вельмисова и Б.В.Логинова [8], П.А. Вельмисова и С.В.Киреева [9], в которых применялся метод групповых преобразований Ц.На, позволяющий сводить двухточечные граничные задачи для ОДУ четвёртого порядка к задаче Коши.

Пусть  $E_1, E_2$  - банаховы пространства. Рассматривается нелинейное уравнение

$$Bx = R(x, \lambda), \quad R(0, 0) = 0, \quad R'(0, 0) = 0 \quad (1.2)$$

Здесь  $B : E_1 \rightarrow E_2$  - замкнутый фредгольмов оператор ( $R(B) = \overline{R(B)}$ ,  $R(B)$  - область значений оператора  $B$ ) с плотной в  $E_1$  областью определения  $D(B)$ ,  $N(B) = \text{span}\{\varphi(x)\}$  - его подпространство нулей,  $N^*(B) = \text{span}\{\psi(x)\}$  - дефектное подпространство. Нелинейный оператор  $R(x, \lambda)$  предполагается определённым и достаточно гладким по  $x$  и  $\lambda$  в окрестности  $(0, 0) \in E_1 + \Lambda$ ,  $\Lambda$  - пространство параметров. По теореме Хана-Банаха существуют биортогональные системы  $\{\gamma_j\}_1^n \in E_1$ ,  $\langle \varphi_i, \gamma_j \rangle = \delta_{ij}$  и  $\{z_k\}_1^n \in E_2$ ,  $\langle z_k, \psi_l \rangle = \delta_{kl}$  (здесь и далее  $\langle a, b \rangle = \int_0^1 a(x)b(x)dx$ ), порождающие проекторы  $P = \sum_{j=1}^n \langle \cdot, \psi_j \rangle z_j : E_1 \rightarrow N(B)$ ,  $Q = \sum_{j=1}^n \langle \cdot, \gamma_j \rangle \varphi_j : E_2 \rightarrow E_{2,n} = \text{span}\{z_1, \dots, z_n\}$  и разложение банаховых пространств в прямые суммы  $E_1 = E_1^n + E_1^{\infty-n}$ ,  $E_1^n = N(B)$ ,  $E_2 = E_{2,n} + E_{2,\infty-n}$ ,  $E_{2,\infty-n} = R(B)$ . Тогда метод Ляпунова-Шмидта позволяет свести задачу (1.2) к построению малых решений нелинейной конечномерной системы, называемой уравнением разветвления (УР). Действительно, согласно лемме Э. Шмидта, оператор  $\tilde{B} = B + \sum_{k=1}^n \langle \cdot, \gamma_k \rangle z_k$  непрерывно обратим, и уравнение (1.2) может быть записано в виде системы

$$\tilde{B}x = R(x, \lambda) + \sum_{i=1}^n \xi_i z_i, \quad \xi_i = \langle x, \gamma_i \rangle, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.3)$$

По теореме о неявных операторах первое уравнение (1.3) имеет единственное решение  $x = x(\xi, \lambda)$ , подстановка которого во второе даёт УР:

$$f(\xi, \lambda) \equiv \xi_i - \langle x(\xi, \lambda), \gamma_i \rangle = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.4)$$

Уравнения (1.2) и (1.4) имеют одно и то же число малых решений, которые представимы в виде рядов по одинаковым дробным степеням малых параметров в малых окрестностях точек бифуркации.

В работе метод Ляпунова-Шмидта применяется к нелинейной задаче в окрестностях критических значений параметров  $T_0$ ,  $M_0$  и  $\varepsilon_3 = 0$ .

Применение регуляризатора Шмидта [3] к уравнению (1.1) в разложении аналитической нелинейности:

$$Bw \equiv \chi^2 w^{(4)} - T_0 w'' + \sigma_0 w' + \beta_0 w = \chi^2 \left( \frac{3}{2} w'^2 w^{(4)} + 3w''^3 + 9w'w''w''' \right) - \varepsilon_3 q(x) + \varepsilon_1 w'' + \xi z^{(1)} - 1(2)k\kappa w' \varepsilon_2 + \frac{\theta}{2} w'' \int_0^1 w'^2 dx - \left\{ \frac{k\kappa(\kappa+1)}{4} M_0^2 w'^2 + \frac{k\kappa(\kappa+1)}{2} M_0 \varepsilon_2 w'^2 + \frac{k\kappa(\kappa+1)}{12} M_0^3 w'^3 + \dots \right. \\ \left. - \frac{k\kappa(\kappa+1)}{6} M_0^3 w'^3 \right.$$

(верхняя(нижняя) строка отвечает одностороннему(двустороннему) обтеканию пластины потоком газа,  $\sigma_0 = 1(2)k\kappa M_0$ ), позволяет записать его в виде системы  $\tilde{B}w = R(w, \varepsilon) + \xi z$ ,  $\xi - \langle w, \gamma \rangle = 0$ . Здесь  $\tilde{B} = B + \langle \cdot, \varepsilon \rangle z$ ,  $\gamma$  и  $z$  - биортогональные системы к  $\varphi \in N(B)$  и  $\psi \in N^*(B)$  соответственно,  $\tilde{B}^{-1} = \Gamma$ , существующий согласно лемме Шмидта [3], при этом  $\Gamma z = \varphi$ ,  $\Gamma^* \gamma = \psi$ .

Линеаризованное в точке ветвления уравнение (1.1) определяет фредгольмов оператор  $B : C^{4+\alpha}[0, 1] \rightarrow C^\alpha[0, 1]$  с одномерным подпространством нулей  $N(B) = \text{span}\{\varphi(x)\}$  и одномерным дефектным подпространством  $N^*(B) = \text{span}\{\psi(x)\}$ .

При отсутствии малой нормальной нагрузки  $\varepsilon_3 q(x) = 0$  решение первого уравнения (1.3) представляется в виде ряда

$$\omega = \omega_{100}\xi + \omega_{010}\varepsilon_1 + \omega_{001}\varepsilon_2 + \omega_{110}\xi\varepsilon_1 + \omega_{101}\xi\varepsilon_2 + \omega_{011}\varepsilon_1\varepsilon_2 + \omega_{200}\xi^2 + \omega_{020}\varepsilon_1^2 + \omega_{002}\varepsilon_2^2 + \dots$$

подстановка которого во второе даёт УР.

В случае одностороннего обтекания пластины УР

$$L(\xi, \varepsilon) = L_{200}^1 \xi^2 + L_{110}^1 \xi \varepsilon_1 + L_{101}^1 \xi \varepsilon_2 = 0$$

определяет асимптотику разветвляющихся решений

$$w(x) = -\frac{L_{110}^1 \varepsilon_1 + L_{101}^1 \varepsilon_2}{L_{200}^1} \varphi(x) + o(|\varepsilon|),$$

для двустороннего обтекания

$$L(\xi, \varepsilon) = L_{300}^2 \xi^3 + L_{110}^2 \xi \varepsilon_1 + L_{101}^2 \xi \varepsilon_2 = 0$$

и

$$w(x) = \pm \sqrt{-\frac{L_{110}^2 \varepsilon_1 + L_{101}^2 \varepsilon_2}{L_{300}^2}} \varphi(x) + O(|\varepsilon|),$$

где знаки  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  определяются неотрицательностью подкоренного выражения.

Таким образом, для одностороннего обтекания пластины имеет место транскритическая бифуркация, при одностороннем - бифуркация типа "вилки".

Коэффициенты УР вычисляются согласно [3] по методу неопределённых коэффициентов Назарова-Некрасова

$$L_{110}^1 = \int_0^1 \varphi'' \psi dx, L_{101}^1 = -k\kappa \int_0^1 \varphi' \psi dx, L_{200}^1 = -\frac{k\kappa(\kappa+1)M_0^2}{4} \int_0^1 \varphi'^2 \psi dx$$

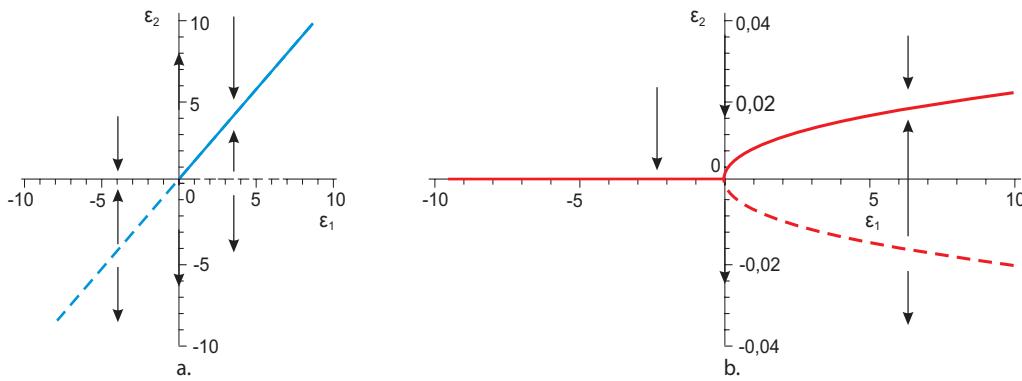


Рис. 1: Бифуркационная диаграмма: а.транскритическая бифуркация; б.бифуркация типа «вилки»

при одностороннем обтекании, и

$$L_{110}^2 = \int_0^1 \varphi'' \psi dx = L_{110}^1, L_{101}^2 = -2k\kappa \int_0^1 \varphi' \psi dx = 2L_{101}^1, L_{200}^2 = 0,$$

$$L_{300}^2 = 3\chi^2 \int_0^1 \varphi''' \psi dx + \frac{3}{2}\chi^2 \int_0^1 \varphi^{(4)} \varphi'^2 \psi dx + 9\chi^2 \int_0^1 \varphi' \varphi'' \varphi''' \psi dx$$

$$- \frac{1}{6}k\kappa(\kappa+1)M_0^3 \int_0^1 \varphi'^3 \psi dx + \frac{1}{2}\theta \int_0^1 \varphi'^3 \psi dx \int_0^1 \varphi'' \psi dx$$

для двустороннего. Коэффициенты уравнений разветвления в случае дивергенции, определяемом равенством нулю матрицы граничных условий, вычислены при использовании Maple 12, и в силу ограниченного объёма здесь не приводятся.

В общем случае ненулевой нормальной нагрузки ( $\varepsilon_3 \neq 0$ ) и отсутствии сжимающего/растягивающего усилия ( $T = 0$ ), построенное методом Ляпунова-Шмидта [3], уравнение разветвления имеет вид:

$$L(\xi, \varepsilon_1, \varepsilon_3) = L_{300}\xi^3 + L_{101}\xi\varepsilon_1 + L_{010}\varepsilon_3 + \dots = 0$$

Составляя результат главной части УР и её производной по  $\xi$ , получаем приближённую кривую разветвления:

$$4L_{101}\varepsilon_1^3 + 27L_{010}^2L_{300}\varepsilon_3^2 = 0 \quad (1.5)$$

Так как коэффициенты  $L_{101}$ ,  $L_{010}$ ,  $L_{300}$  положительны, то полукубическая парабола (1.5) касается оси абсцисс  $\varepsilon_1$  и лежит по левую сторону от оси  $\varepsilon_3$ . Слева от кривой разветвления УР имеет три вещественных малых решения  $\xi_0(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ ,  $\xi_{\pm}(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ , два из которых ( $\xi_{\pm}$ ) совпадают на этой кривой, а справа - одно  $\xi_0(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ .

В [3] УР с помощью замены переменных

$$\eta = L_{010}^{1/3}L_{300}^{-1/3}\varepsilon_3^{1/3}, \quad \omega = L_{101}\varepsilon_1L_{300}^{-1/3}(L_{010}\varepsilon_3)^{-2/3}$$

преобразуется к уравнению с одним параметром

$$1 + \omega\eta + \eta^3 \simeq 0$$

для которого точкой ветвления является  $\omega = -3 \cdot 2^{-2/3}$ ,  $\eta = 2^{-1/3}$ , т.е. уравнение кривой разветвления может быть записано в виде  $\omega \simeq -3 \cdot 2^{-2/3}$ . В [3] построена следующая асимптотика решений  $\xi(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$  УР, а тем самым и решений исходной задачи :

$$w \simeq \xi(\varepsilon_1, \varepsilon_3)\varphi,$$

где

$$\begin{aligned}\xi_0(\varepsilon_1, \varepsilon_3) &\simeq (4L_{010}L_{300}^{-1}\varepsilon_3)^{1/3} \\ \xi_{\pm}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) &\simeq \sqrt[3]{L_{010}L_{300}^{-1}\varepsilon_3} \left[ 2^{-1/3} \mp \sqrt{3 \cdot 2^{-2/3} + L_{101}\varepsilon_1(L_{010}\varepsilon_3)^{-2/3}L_{300}^{-1/3}} \right]\end{aligned}$$

в окрестности кривой разветвления, т.е. при  $\varepsilon_1\varepsilon_3^{-2/3} \rightarrow -\frac{3}{2^{2/3}}L_{010}^{2/3}L_{300}^{1/3}L_{101}^{-1}$ ;  $\xi_{\pm} \simeq 2^{-1/3}(L_{010}L_{300}^{-1}\varepsilon_3)^{1/3} = 3^{-1/2}L_{300}^{-1/2}(-L_{101}\varepsilon_1)^{1/2}\text{sign}\varepsilon_3$ ,  $\xi_0 = -2\xi_{\pm}$  на кривой разветвления (два решения совпадают);

$$\begin{aligned}\xi_{0,+}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) &\simeq \mp L_{300}^{-1}(-L_{101}\varepsilon_1)^{1/2}\text{sign}\varepsilon_3 \\ \xi_{-}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) &\simeq -L_{010}L_{101}^{-1}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_3\end{aligned}$$

при больших отрицательных значениях  $\varepsilon_1\varepsilon_3^{-2/3}$ ;

$$\xi_0(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \simeq -L_{010}L_{101}^{-1}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_3$$

при больших положительных.

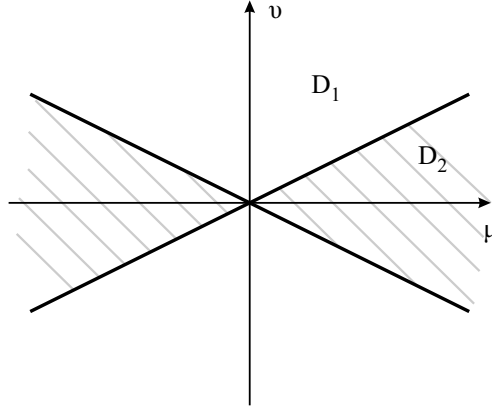


Рис. 2: График  $\eta(\theta)$

Полученная картина поведения решений  $\varepsilon_{\pm}$  для  $\varepsilon_3 > 0$  совпадает с картиной, описанной в [11] для другой задачи. Критическое значение числа Маха (точка бифуркации) уменьшается по сравнению со случаем  $\varepsilon_3 = 0$  :

$$M_{\text{кр}} \simeq M_* - 3 \cdot 2^{-2/3} \varepsilon_3^{2/3} L_{010}^{2/3} L_{300}^{1/3} L_{101}^{-1} \quad (1.6)$$

Формула (1.6) и вид функций  $\xi_{\pm}$  согласуется с графиками  $\xi(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ , приведёнными в [1] для конкретных значений  $\varepsilon_3$ .

Для случая отсутствия сжимающего/растягивающего усилия ( $T = 0$ ) и отсутствии малой нормальной нагрузки, решение (1.3) ищется в виде

$$w = w_{10}\xi + w_{01}\varepsilon_1 + w_{20}\xi^2 + w_{11}\varepsilon_1\xi + w_{02}\varepsilon_1^2 + \dots$$

При одностороннем обтекании пластины УР имеет вид

$$L_{11}\xi\varepsilon_1 + L_{20}\xi^2 + \dots = 0,$$

где  $L_{11} = k\kappa(1(2)) \int_0^1 \varphi' \psi dx$ ,  $L_{20} = -\frac{k\kappa(\kappa+1)}{4} M_0 \int_0^1 \varphi'^2 \psi dx$ . При двухстороннем обтекании главная часть УР :

$$L_{30}\xi^3 + L_{11}\varepsilon_1 = 0$$

где  $L_{30} = -\frac{k\kappa(\kappa+1)}{6} M_0 \int_0^1 \varphi'^3 \psi dx + \chi^2 \int_0^1 (\frac{3}{2} \varphi'^2 \varphi^{(4)} \psi + 3 \varphi''^3 \psi + 9 \varphi' \varphi'' \varphi^{(2)} \psi) dx + \frac{\theta}{2} \int_0^1 \varphi'^2 dx \int \varphi'' \psi dx$ .

Соответственно асимптотика разветвляющихся решений определяется формулами :  $w(x) = -\frac{L_{11}}{L_{20}} \varepsilon_1 \varphi(x) + o(|\varepsilon_1|)$  - для одностороннего обтекания и  $w(x) = \pm \sqrt{\frac{L_{11}\varepsilon_1}{L_{30}}} \varphi(x) + O(|\varepsilon_1|)$  - для двустороннего, где  $sign \varepsilon_1 = sign L_{11} L_{30}$  определяются неотрицательностью выражения под корнем. Значение коэффициентов разветвления не приводятся в силу их громоздкости.

В наиболее общем случае  $T \neq 0$ ,  $\varepsilon_3 q(x) \neq 0$  асимптотика разветвляющихся решений по трём малым параметрам  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  в точке бифуркации  $(T_0, M_0, 0)$  вычисляется для случаев существования бифуркационных многообразий, которые определяются равенством нулю определителя матрицы граничных условий.

Разыскание решения первого уравнения системы (1.3) в виде ряда

$$w = w_{1000}\xi + w_{0100}\varepsilon_1 + w_{0010}\varepsilon_2 + w_{0001}\varepsilon_3 + \sum_{k+|\alpha|>1} w_{k;\alpha} \xi^k \varepsilon^\alpha$$

с последующей подстановкой во второе, даёт разложение по  $\xi$  и  $\varepsilon$  уравнения разветвления Шмидта  $L(\xi, \varepsilon) = \xi - \langle w(\xi, \varepsilon), \gamma \rangle = 0$ .

Для одностороннего обтекания главная часть УР, определяемая методом диаграммы Ньютона[3] имеет вид:

$$L(\xi, \varepsilon) = L_{2000}\xi^2 + L_{0001}\varepsilon_3 + L_{1001}\xi\varepsilon_3 + L_{1100}\xi\varepsilon_1 + L_{1010}\xi\varepsilon_2 + \dots = 0$$

$$L_{2000} = \frac{k\kappa(\kappa+1)}{4} M_0^2 \langle \varphi'^2, \psi \rangle, L_{0001} = -\langle q, \psi \rangle, L_{1100} = -\langle \varphi'', \psi \rangle, L_{1010} = k\kappa \langle \varphi', \psi \rangle, L_{1001} = \frac{k\kappa(\kappa+1)}{2} M_0^2 \langle \varphi'(\Gamma q)', \psi \rangle.$$

При  $L_{2000} \neq 0$  замена  $\eta = \xi + \frac{L_{1100}\varepsilon_1 + L_{1010}\varepsilon_2 + L_{1001}\varepsilon_3}{L_{2000}}$  сводит УР к виду

$$\eta^2 + \alpha = 0,$$

где  $\alpha = \frac{L_{0001} + L_{0101}\varepsilon_1 + L_{0011}\varepsilon_2 + L_{0002}\varepsilon_3}{L_{2000}} \varepsilon_3 - \frac{(L_{1100}\varepsilon_1 + L_{1010}\varepsilon_2 + L_{1001}\varepsilon_3)^2}{4L_{2000}}$ . В окрестности точки ветвления  $\xi = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = 0$ ,  $\varepsilon_3 = 0$  имеем  $\eta = \pm \sqrt{-\alpha}$ . Возвращаясь к  $\xi$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$

$$w(x) = \left[ -\frac{L_{1100}\varepsilon_1 + L_{1010}\varepsilon_2 + L_{1001}\varepsilon_3}{L_{2000}} \pm \left( \frac{(L_{1100}\varepsilon_1 + L_{1010}\varepsilon_2 + L_{1001}\varepsilon_3)^2}{4L_{2000}} - \frac{L_{0001}\varepsilon_3 + (L_{0101}\varepsilon_1 + L_{0011}\varepsilon_2)\varepsilon_3 + L_{0002}\varepsilon_3^2}{L_{2000}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \varphi(x) + o(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3|)$$

Для двустороннего обтекания пластины сверхзвуковым потоком газа главная часть УР имеет вид:

$$L(\xi, \varepsilon) \equiv L_{3000}\xi^3 + L_{0001}\varepsilon_3 + L_{1100}\xi\varepsilon_1 + L_{1010}\xi\varepsilon_2 + L_{1001}\xi\varepsilon_3 + \dots = 0 \quad (1.7)$$

где  $L_{3000} = \frac{k\kappa(\kappa+1)}{6}M_0^3\langle\varphi'^3, \psi\rangle - \chi^2\langle\frac{3}{2}\varphi'^2\varphi^{(4)} + 3\varphi''^3 + 9\varphi'\varphi''\varphi''', \psi\rangle - \frac{\theta}{2}\langle\varphi'' \int_0^1 \varphi'^2 dx, \psi\rangle$ ,  $L_{2000} = 0$ ,  $L_{0001} = -\langle q, \psi\rangle$ ,  $L_{1001} = 0$ ,  $L_{1100} = -\langle\varphi'', \psi\rangle$ ,  $L_{1010} = \sigma_0\langle\varphi', \psi\rangle$ ,  $\sigma_0 = 2k\kappa M_0$ .

При использовании замен  $\alpha = \frac{L_{1100}\varepsilon_1 + L_{1010}\varepsilon_2}{L_{3000}}$  и  $\beta = \frac{L_{0101}\varepsilon_1 + L_{0011}\varepsilon_2 + L_{0001}\varepsilon_3}{L_{3000}}$  при  $L_{3000} \neq 0$ , уравнение (1.7) перепишется в виде

$$L(\xi) \equiv \xi^3 + \xi\alpha + \beta \quad (1.8)$$

При  $\alpha > 0$  уравнение не имеет вырождения, так как  $L'(\xi) = 3\xi^2 + \alpha > 0$ . Поэтому будем считать, что  $\alpha = -\mu^2$  и  $\beta = v^3$  и уравнение (1.8) сводится к

$$\xi^3 - \xi\mu^2 + v^3 = 0. \quad (1.9)$$

Дискриминантная кривая определяется решением системы

$$\begin{cases} \xi^3 - \xi\mu^2 + v^3 = 0 \\ 3\xi^2 - \mu^2 = 0 \end{cases}$$

которое имеет вид  $\mu = \pm\sqrt{3}\xi$  и  $v = 2^{1/3}\xi$ , то есть  $v = \pm B\mu$  ( $B = \frac{2^{1/3}}{3^{1/2}} < 1$ ).

Плоскость параметров  $(\mu, v)$  разбивается на две области  $D_1$  и  $D_2$ . В области  $D_1$  уравнение (1.9) имеет три решения, в области  $D_2$  – одно решение. На границе областей – прямых  $v = \pm B\mu$  – два решения.

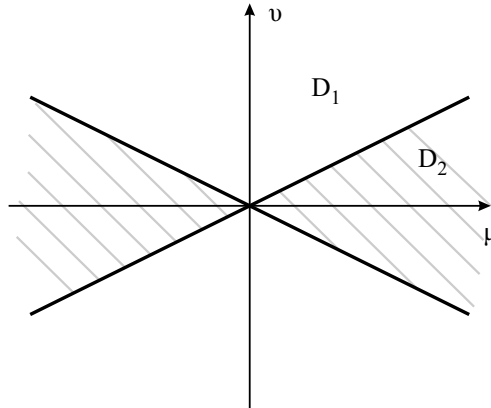


Рис. 3: Плоскость параметров  $(\mu, v)$

Рассмотрим области  $D_1$ , в которой  $|\frac{v}{\mu}| < 1$ . Считая  $v \neq 0$ , разделим уравнение (1.9) на  $\mu^3$  и введем новые переменные  $\eta = \frac{\xi}{\mu}$  и  $\lambda = \frac{v}{\mu}$ . Уравнение (1.9) перепишется в виде:

$$\eta^3 - \eta + \lambda^3 = 0$$

По теореме об обратной функции,  $\eta$  является аналитической функцией от  $\lambda^3$ . Это уравнение имеет три решения, соответствующих значению  $\lambda = 0$ :  $\eta = 0$ ,  $\eta = 1$ ,  $\eta = -1$ .

Применение метода диаграмм Ньютона определяет асимптотику этих решений при малых значениях  $\lambda$

$$\begin{aligned} \eta &= \lambda^3 + \lambda^9 + 3\lambda^{15} + 12\lambda^{21} + O(|\lambda^{21}|) \\ \eta &= 1 - \frac{1}{2}\lambda^3 - \frac{3}{8}\lambda^6 + O(|\lambda^6|) \\ \eta &= -1 + \frac{1}{2}\lambda^3 - \frac{3}{8}\lambda^6 + O(|\lambda^6|) \end{aligned}$$

Возвращаясь к переменным  $\xi$ ,  $\mu$  и  $v$ , получаем разложение функции в ряд Тейлора-Лорана-Пюизе внутри некоторого угла с проколотой вершиной

$$\begin{aligned}\xi &= \left(\frac{v}{\mu}\right)^3 + \left(\frac{v}{\mu}\right)^9 + 3\left(\frac{v}{\mu}\right)^{15} + 12\left(\frac{v}{\mu}\right)^{21} + \dots \\ \text{или} \\ \xi &= \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta^3}{\alpha^4} + 3\frac{\beta^5}{\alpha^7} + 12\frac{\beta^7}{\mu^{10}} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi &= \mu - \frac{v^3}{2\mu^2} - \frac{3v^6}{8\mu^5} + \dots \\ \text{или} \\ \xi &= (-\alpha)^{1/2} + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{3\beta^2}{8(-\alpha)^{5/2}} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi &= -\mu - \frac{v^3}{2\mu^2} + \frac{3v^6}{8\mu^5} + \dots \\ \text{или} \\ \xi &= -(-\alpha)^{1/2} + \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{3\beta^2}{8(-\alpha)^{5/2}} + \dots\end{aligned}$$

Аналогично, для нахождения асимптотики решения (1.9) в области  $D_2$ , где  $|\frac{\mu}{v}| < 1$ , разделим уравнение на  $v^3$  и введем замены  $\eta = \frac{\xi}{v}$  и  $\lambda = \frac{\mu}{v}$ . Уравнение (1.9) перепишется в виде

$$\eta^3 - \eta\lambda + 1 = 0$$

Это уравнение имеет одно решение, соответствующее  $\lambda = 0$ :  $\eta = -1$ . При достаточно малых значениях решение имеет асимптотику:

$$\begin{aligned}\eta &= -1 - \frac{1}{3}\lambda^2 + \frac{1}{81}\lambda^6 + \dots \\ \text{или} \\ \xi &= -v + \frac{\mu^3}{3v^2} - \frac{\mu^6}{81v^4} + \dots \\ \text{или} \\ \xi &= -\beta^{1/3} + \frac{(-\alpha)^{3/2}}{3\beta^{2/3}} - \frac{\alpha^3}{81\beta^{5/3}} + \dots\end{aligned}$$

На прямых  $v = \pm B\mu$ , разделяющих области  $D_1$  и  $D_2$ , уравнение (1.9) имеет вид

$$\xi^3 - \xi\mu^2 \pm B^3\mu^3 = 0$$

Используя замену  $\eta = \frac{\xi}{\mu}$ , получаем два уравнения:

$$\eta^3 - \eta \pm B^3 = 0$$

каждое из которых имеет два решения  $(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$  и  $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ , то есть  $\xi = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\mu$  и  $\xi = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\mu$  или  $\xi \approx K(-\alpha)^{1/2}$

**З а м е ч а н и е 1.1.** При наличии сжимающего/растягивающего усилия и малой нормальной нагрузки функции  $L(\xi, \varepsilon)$  и при одностороннем обтекании, и при двустороннем, не имеют в  $(0, 0, 0, 0)$  особой точки, т.к.  $L(0, 0, 0, 0) = 0$ , но  $dL(0, 0, 0, 0) \neq 0$ , поскольку  $\frac{\partial L(\xi, \varepsilon)}{\partial \varepsilon_3} \neq 0$ , поэтому катастрофа отсутствует. В каждом отдельном случае по выполненному исследованию УР и найденным его решениям не трудно выписать решение исходной нелинейной бифуркационной задачи.

Таким образом, в работе методами теории бифуркации и катастроф исследован класс задач о дивергенции удлиненной пластины в сверхзвуковом потоке газа и в общем виде построена асимптотика разветвляющихся решений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В. В., *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*, ГИФМЛ, М., 1961, 339 с.
2. Вольмир А. С., *Устойчивость деформируемых систем*, Наука, М., 1967, 984 с.
3. Вайнберг М. М., Треногин В. А., *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, Наука, М., 1969, 524 с.
4. Наймарк М. А., *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969, 528 с.
5. Бадюкина Т. Е., Логинов Б. В., Русак Ю. Б., “Построение асимптотики решений нелинейной краевой задачи для дифференциального уравнения четвертого порядка с двумя бифуркационными параметрами”, *Известия Иркутского государственного университета*, 2012, № 1, 2–12.
6. Бадюкина Т. Е., “Бифуркационное множество в модельных задачах аэроупругости”, *Труды третьей международной научной конференции «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения» (г.Брест, 17-22 сентября 2012 г.)*, 2012, 47–57.
7. Логинов Б. В., Кожевникова О. В., “Вычисление собственных изгибных форм и асимптотики разветвляющихся решений бифуркационной задачи о дивергенции пластины”, *Известия РАН*, 2:3 (1998), 112–120.
8. Вельмисов П. А., Логинов Б. В., “Метод групповых преобразователей и ветвление решений в двухточечных граничных задачах аэроупругости”, *Дифференциальные уравнения и их приложения материалы Междунар. конф. (Саранск, 20-22 декабря 1994 г.)*, 1995, 120–125.
9. Вельмисов П. А., Киреев С. В., Кузнецов А. О., “Устойчивость пластины в сверхзвуковом потоке газа”, *Журнал "Вестник УлГТУ"*, 1 (1999), 44–51.
10. Бадюкина Т. Е., “Green functions construction for divergence problems in aeroelasticity”, *ROMAI Journal*, 4:2 (2008), 33–44.
11. Логинов Б. В., “Задача о дивергенции крыла как пример теории ветвления решений нелинейных уравнений с двумя малыми параметрами”, *Дифференциальные уравнения и их приложения*, 1979, 109–113.

# Methods of the theory of branching and catastrophes in the problem of divergence an elongated plate in a supersonic gas flow.

© T. E. Badokina<sup>3</sup> Yu. B. Rousak<sup>4</sup>

**Abstract.** We consider the problem of computing the branching solutions of nonlinear eigen- value problem for an ordinary differential equation of the fourth order, describing the divergence of the elongated plate in a supersonic gas flow, compressible ( stretchable ) external boundary conditions and subjected to a small normal load. We construct the asymptotics of branching solutions in the form of convergent series in the small parameters. Fredholm property of the linearized spectral problem is proved by constructing the appropriate Green's function, which for this type of tasks performed for the first time.

**Key Words:** buckling, aeroelasticity, bifurcation, branching equation.

---

<sup>3</sup> Assistant, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; badokinate@gmail.ru.

<sup>4</sup> Canberra University, Australia; irousak@gmail.com

УДК 517.9

# Аналитическое решение задачи об изотермическом скольжении газа вдоль твердой плоской поверхности

© С. В. Гулакова<sup>1</sup>, В. Н. Попов<sup>2</sup>

**Аннотация.** В рамках кинетического подхода построено аналитическое (в виде ряда Неймана) решение задачи об изотермическом скольжении газа вдоль твердой плоской поверхности (задачи Крамерса). В качестве основного уравнения используется линеаризованная БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модель кинетического уравнения Больцмана, а в качестве граничного условия на обтекаемой газом поверхности – модель зеркально-диффузного отражения. Для различных значений коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа вычислена скорость изотермического скольжения газа вдоль поверхности и построены профили массовой скорости. Выполнено сравнение с аналогичными результатами, опубликованными в открытой печати.

**Ключевые слова:** кинетическое уравнение Больцмана, модельные кинетические уравнения, точные аналитические решения, модели граничных условий

## 1. Введение

В классической гидродинамике в качестве граничного условия на обтекаемых газом поверхностях используются так называемые граничные условия «прилипания», которые предполагают равенство скорости газа вблизи обтекаемой поверхности скорости самой поверхности. В действительности это условие носит приближенный характер и применимо лишь в том случае, когда длину свободного пробега молекул газа можно считать сколь угодно малой, что не выполняется, в частности, для разреженных газов. Вместо того чтобы полностью «прилипнуть» к обтекаемой поверхности, разреженный газ сохраняет около нее некоторую, хотя и малую скорость, т.е. возникает скольжение газа вдоль поверхности [1]. В случае постоянства температуры газа это явление получило название изотермического скольжения. Экспериментально явление изотермического скольжения было обнаружено в 1875 году Кундтом и Варбургом при исследовании движения разреженного газа по трубам [2]. Как показали результаты проведенных Кундтом и Варбургом исследований, скорость скольжения оказалась пропорциональной градиенту массовой скорости вне слоя Кнудсена (тонкого слоя газа непосредственно прилегающего к поверхности, толщина которого имеет порядок средней длины свободного пробега молекул газа). Таким образом, для не слишком больших градиентов массовой скорости газа скорость изотермического скольжения определяется выражением [1]

$$u_0 = C_m \frac{du_\tau}{dx'_n}. \quad (1.1)$$

Здесь  $u_\tau$  – касательная к обтекаемой поверхности компонента массовой скорости газа,  $x'_n$  – нормальная к поверхности координата. Коэффициент  $C_m$  называется коэффициентом изотермического скольжения.

<sup>1</sup> Аспирант кафедры прикладной математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; s.gulakova@narfu.ru.

<sup>2</sup> Заведующий кафедрой математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; v.popov@agtu.ru.

Решению задачи об изотермическом скольжении разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности посвящено значительное число работ. Обзор наиболее ранних, выполненных с использованием различных приближенных методов, можно найти в [3]. Более поздних (в том числе и с использованием точных аналитических решений) – в [4]. При этом в большинстве упомянутых выше работ решение задачи ограничивалось вычислением коэффициента изотермического скольжения, входящего в (1.1) для случая диффузного отражения молекул газа обтекаемой поверхностью. Исключение составляют работы [4] – [6], в которых помимо значения коэффициента изотермического скольжения построен профиль скорости газа. В [4] аналитические решения задачи найдены с использованием метода Кейза (метода разложения решения по собственным функциям соответствующего характеристического уравнения) и метода аппроксимирующих функций. В первом случае в качестве граничного условия на стенке использовалась модель диффузного отражения молекул газа, во втором – зеркально-диффузного. В [5] и [6] решение построено методом дискретных ординат, а в качестве граничного условия принималась модель зеркально-диффузного отражения. В представленной работе в качестве метода решения использовано обобщение метода Кейза, предложенное в [7], а в качестве граничного условия на стенке принята модель зеркально-диффузного отражения.

## 2. Вывод основных уравнений

Рассмотрим газ, заполняющий полупространство  $x' > 0$ , ограниченное стенкой, расположенной в плоскости  $x' = 0$ . Ось  $Oz'$  направим вдоль массовой скорости газа. Предположим, что газ неоднороден из-за градиента  $z$ -компоненты массовой скорости вдоль оси  $x'$ , причем градиент скорости стремится к константе при  $x' \rightarrow +\infty$ .

В качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса, будем использовать БГК модель кинетического уравнения Больцмана, которая в выбранной системе координат записывается в виде [4]

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{p}{\eta_g} (f_{eq} - f). \quad (2.1)$$

Здесь  $f(\mathbf{r}', \mathbf{v})$  – искомая функция распределения молекул газа по координатам и скоростям,  $f_{eq}(\mathbf{r}', \mathbf{v})$  – локально-равновесная функция распределения,  $p$  и  $\eta_g$  – давление и коэффициент динамической вязкости газа.

Будем полагать, что отклонение состояния газа мало отличается от равновесного. Тогда задача допускает линеаризацию и функцию распределения молекул газа по координатам и скоростям можно представить в виде

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f_\infty(\mathbf{r}', \mathbf{v}) [1 + C_z Z(x, C_x)]. \quad (2.2)$$

Здесь  $f_\infty(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f(C)[1 + 2C_z U_0 + 2C_z G_v(x - C_x)]$  – функция распределения молекул газа вдали от стенки;  $f(C) = n_0 (\beta/\pi)^{3/2} \exp(-C^2)$  – абсолютный максвеллиан с параметрами, заданными на стенке;  $\mathbf{C} = \sqrt{\beta} \mathbf{v}$  – безразмерная скорость молекул газа;  $\beta = m/2k_B T$ ;  $m$  – масса молекулы газа;  $k_B$  – постоянная Больцмана;  $T$  – температура газа;  $x = x'/l_g$  – безразмерная координата;  $l_g = \eta_g \beta^{-1/2}/p$  – средняя длина свободного пробега молекул газа;  $G_v$  – безразмерный градиент скорости газа;  $U_0$  – искомая скорость скольжения газа.

Подставляя (2.2) в (2.1) и линеаризуя  $f_{eq}(\mathbf{r}', \mathbf{v})$  относительно абсолютного максвеллиана, приходим к уравнению для нахождения  $Z(x, \mu)$  ( $\mu = C_x$ )

$$\mu \frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau^2) Z(x, \tau) d\tau. \quad (2.3)$$

Граничные условия для  $Z(x, \mu)$  записываются в виде

$$Z(0, \mu) = (1 - q)Z(0, -\mu) - 2qU_0 + 2G_v\mu(2 - q), \quad \mu > 0, \quad (2.4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Z(x, \mu) = 0, \quad \mu < 0. \quad (2.5)$$

Здесь  $q$  – коэффициент аккомодации стенкой тангенциального импульса молекул газа.

Таким образом, вычисление скорости изотермического скольжения и построение профиля массовой скорости газа над стенкой сводится к решению краевой задачи (2.3) – (2.5).

### 3. Построение функции распределения молекул газа

Общее решение (2.3) имеет вид [4]

$$Z(x, \mu) = A_0 + A_1(x - \mu) + \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) F(\eta, \mu) a(\eta) d\eta. \quad (3.1)$$

Здесь

$$F(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta P \frac{1}{\eta - \mu} + \exp(\eta^2) \lambda(\eta) \delta(\eta - \mu),$$

$$\lambda(z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-\mu^2) d\mu}{\mu - z}, \quad (3.2)$$

$P(1/z)$  – распределение в смысле главного значения при вычислении интеграла от  $1/z$ ,  $\delta(z)$  – дельта-функция Дирака, а  $A_0$ ,  $A_1$  и  $a(\eta)$  – неизвестные параметры и функция, подлежащие дальнейшему определению.

С учетом граничного условия (2.5) находим  $A_0 = 0$ ,  $A_1 = 0$ . Подставляя далее (3.1) в граничное условие (2.4), приходим к сингулярному интегральному уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta - \mu} + \exp(\mu^2) a(\mu) \lambda(\mu) = f(\mu), \quad (3.3)$$

$$f(\mu) = -2qU_0 + 2G_v\mu(2 - q) + \frac{1 - q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta + \mu}, \quad \mu > 0. \quad (3.4)$$

Решение (3.3) ищем с использованием методов краевых задач теории функций комплексного переменного. С этой целью введем вспомогательную функцию, заданную интегралом типа Коши

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta - z}, \quad (3.5)$$

для которой на верхнем и нижнем берегах разреза, совпадающего с действительной положительной полупрямой, выполняются соотношения

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = 2\sqrt{\pi} i \mu a(\mu), \quad 0 < \mu < +\infty, \quad (3.6)$$

$$N^+(\mu) + N^-(\mu) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta - \mu}, \quad 0 < \mu < +\infty. \quad (3.7)$$

Аналогичные соотношения для  $\lambda(\mu)$ , определяемой равенством (3.2), имеют вид

$$\lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu) = 2\sqrt{\pi} i \mu \exp(-\mu^2), \quad -\infty < \mu < +\infty, \quad (3.8)$$

$$\lambda^+(\mu) + \lambda^-(\mu) = 2\lambda(\mu), \quad -\infty < \mu < +\infty. \quad (3.9)$$

С учетом (3.4) и (3.6) – (3.9) сведем сингулярное интегральное уравнение (3.3) к краевой задаче Римана

$$\begin{aligned} [N^+(\mu) + 2qU_0 - 2G_v\mu(2-q)]\lambda^+(\mu) - [N^-(\mu) + 2qU_0 - 2G_v\mu(2-q)]\lambda^-(\mu) = \\ = 2i(1-q)\mu \exp(-\mu^2) \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta)}{\eta + \mu} d\eta, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Особенность краевой задачи (3.10) состоит в том, что функции  $N(z)$  и  $\lambda(z)$  имеют различные разрезы. Чтобы устранить эту особенность необходимо решить задачу факторизации, то есть найти такую не обращающуюся в нуль ни в одной конечной точке функцию  $X(z)$ , для которой на действительной положительной полуоси выполняется условие

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}$$

и которая аналитична во всех остальных точках комплексной плоскости.

Решение этой задачи имеет вид [4]:

$$X(z) = \frac{1}{z} \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\theta(\tau) - \pi) d\tau}{\tau - z} \right], \quad \theta(\tau) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} \left( \frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{\pi}\tau \exp(-\tau^2)} \right).$$

С учетом решения задачи факторизации перепишем (3.10)

$$\begin{aligned} [N^+(\mu) + 2qU_0 - 2G_v\mu(2-q)]X^+(\mu) - [N^-(\mu) + 2qU_0 - 2G_v\mu(2-q)]X^-(\mu) = \\ = \frac{2i(1-q)X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \mu \exp(-\mu^2) \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta + \mu}, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Линии скачков функций  $N(z)$  и  $X(z)$  совпадают с контуром краевого условия. Следовательно, получили краевую задачу Римана – задачу определения аналитической функции по заданному скачку. Учитывая поведение входящих в (3.11) функций, ее общее решение по формулам Сохоцкого имеет вид

$$\begin{aligned} N(z) = \frac{1}{X(z)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \mu \exp(-\mu^2) \frac{d\mu}{\mu - z} \frac{1-q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta + \mu} - \\ - 2qU_0 + 2G_v z(2-q) + \frac{P_n(z)}{X(z)}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где  $P_n(z)$  – многочлен с неопределенными коэффициентами, степень которого будет определена ниже.

Рассмотрим поведение решения, задаваемого выражением (3.12), в окрестности бесконечно удаленной точки. Учитывая, что при  $|z| \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \mu \exp(-\mu^2) \frac{d\mu}{\mu - z} \frac{1-q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta + \mu} = \\ = -\frac{1}{z} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \mu \exp(-\mu^2) d\mu \frac{1-q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta + \mu} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \\ \frac{1}{X(z)} = z + Q_1 + O\left(\frac{1}{z}\right), \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} N(z) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \mu \exp(-\mu^2) d\mu \frac{1-q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta + \mu} - \\ - 2qU_0 + 2G_v z(2-q) + P_n(z)(z + Q_1) + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad |z| \rightarrow +\infty. \quad (3.13) \end{aligned}$$

Здесь

$$Q_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta^{k+1} \exp(-\eta^2) d\eta$$

– интегралы Лоялки, в частности,  $Q_1 = -1.01619$ .

Воспользовавшись интегральным представлением факторизующей функции

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \mu \exp(-\mu^2) \frac{d\mu}{\mu - z} \quad (3.14)$$

и изменив в выражении (3.13) порядок интегрирования, перепишем его в виде

$$N(z) = -\frac{1-q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta X(-\eta) a(\eta) d\eta}{\eta + \mu} - 2qU_0 + 2G_v z(2-q) + P_n(z)(z + Q_1) + O\left(\frac{1}{z}\right). \quad (3.15)$$

Так как функция  $N(z)$  согласно (3.5) задана интегралом типа Коши, то в окрестности бесконечно удаленной точки должно выполняться соотношение  $N(z) = O(1/z)$ . Отсюда, с учетом (3.15) необходимо положить  $P_n(z) = C_0$ .

Тогда, приравнявая в (3.15) коэффициенты при одинаковых степенях  $z$ , находим

$$\begin{aligned} C_0 = -2(2-q)G_v, \\ U_0 = -\frac{1}{q} \left[ (2-q)G_v Q_1 + \frac{1-q}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \eta X(-\eta) a(\eta) d\eta \right]. \quad (3.16) \end{aligned}$$

Коэффициент  $a(\eta)$  в разложении (3.1) решения рассматриваемой задачи по собственным векторам непрерывного спектра найдем из условия (3.6), предварительно преобразовав (3.12).

Учитывая, что

$$\frac{1}{\mu - z} \frac{1}{\eta + \mu} = \frac{1}{\eta + z} \left[ \frac{1}{\mu - z} - \frac{1}{\mu + \eta} \right],$$

перепишем (3.12) в виде

$$\begin{aligned} N(z) = \frac{1}{X(z)} & \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \mu \exp(-\mu^2) \frac{d\mu}{\mu - z} \frac{1 - q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta + z} - \right. \\ & \left. - \frac{1 - q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta + \mu} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \mu \exp(-\mu^2) \frac{d\mu}{\mu + \eta} \right] - \\ & - 2qU_0 + 2G_v z(2 - q) - \frac{2(2 - q)G_v}{X(z)}, \end{aligned}$$

или, с учетом (3.14)

$$\begin{aligned} N(z) = -\frac{2}{X(z)} & \left[ (2 - q)G_v + \frac{1 - q}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta X(-\eta)a(\eta) d\eta}{\eta + \mu} \right] - \\ & - 2qU_0 + 2G_v z(2 - q) + \frac{1 - q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta + z}. \end{aligned}$$

Для построенного решения  $N(z)$ , используя формулы Сохоцкого-Племеля, можем записать

$$\begin{aligned} N^+(\mu) - N^-(\mu) &= -2 \left[ \frac{1}{X^+(\mu)} - \frac{1}{X^-(\mu)} \right] \left[ (2 - q)G_v + \frac{1 - q}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta X(-\eta)a(\eta) d\eta}{\eta + \mu} \right] = \\ &= \frac{2\sqrt{\pi} i \mu \exp(-\mu^2) X(-\mu)}{|\lambda^+(\mu)|^2} \left[ (2 - q)G_v + \frac{1 - q}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta X(-\eta)a(\eta) d\eta}{\eta + \mu} \right], \quad \mu > 0. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (3.6) для нахождения  $a(\eta)$  приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$a(\mu) = h(\mu) \left[ (2 - q)G_v + \lambda \int_0^{+\infty} \frac{\eta X(-\eta)a(\eta) d\eta}{\eta + \mu} \right], \quad \mu > 0. \quad (3.17)$$

Здесь

$$h(\mu) = \frac{\exp(-\mu^2) X(-\mu)}{|\lambda^+(\mu)|^2}, \quad \lambda = \frac{1 - q}{2\sqrt{\pi}}.$$

Решение (3.17) ищем в виде ряда

$$a(\mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k a_k(\mu). \quad (3.18)$$

Подставляя (3.18) в (3.17) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$ , приходим к системе рекуррентных соотношений, из которых находим

$$\begin{aligned} a_0(\mu) &= (2-q)G_v h(\mu), \quad a_1(\mu) = (2-q)G_v h(\mu) \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \mu}, \\ a_2(\mu) &= (2-q)G_v h(\mu) \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \mu} \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_2) d\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}, \\ a_k(\mu) &= (2-q)G_v h(\mu) \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \mu} \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_2) d\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \dots \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_k) d\eta_k}{\eta_k + \eta_{k-1}}, \\ g(\eta) &= \eta X(-\eta)h(\eta). \end{aligned}$$

Подставляя (3.18) в (3.16) с учетом полученных результатов, можем записать

$$U_0 = -\frac{(2-q)G_v}{q} \left[ Q_1 + \sum_{k=0}^{+\infty} (1-q)^{k+1} I_k \right], \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} g(\eta) d\eta, \quad I_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} g(\eta) d\eta \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \eta}, \\ I_k &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} g(\eta) d\eta \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \eta} \dots \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_k) d\eta_k}{\eta_k + \eta_{k-1}}. \end{aligned}$$

Таким образом, неизвестные параметры  $A_0$ ,  $A_1$  и функция  $a(\eta)$ , входящие в (3.1) найдены и функция распределения молекул газа по координатам и скоростям построена.

#### 4. Вычисление профиля массовой скорости газа

Скорость газа над стенкой находим, исходя из статистического смысла построенной функции распределения

$$\begin{aligned} U_z(x) &= \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2) C_z^2 [2U_0 + 2G_v x + Z(x, C_x)] d^3 C = \\ &= U_0 + G_v x + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\mu^2) Z(x, \mu) d\mu = U_0 + G_v x + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) a(\eta) d\eta = \\ &= \left[ -\frac{2-q}{q} \left[ Q_1 + \sum_{k=0}^{+\infty} (1-q)^{k+1} I_k \right] + x + (2-q) \sum_{k=0}^{+\infty} (1-q)^k J_k(x) \right] G_v. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь

$$J_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \gamma(x, \eta) d\eta,$$

$$J_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \gamma(x, \eta) d\eta \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \eta},$$

$$J_k(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \gamma(x, \eta) d\eta \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \eta}, \dots \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_k) d\eta_k}{\eta_k + \eta_{k-1}},$$

$$\gamma(x, \eta) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) h(\eta).$$

В случае линейной экстраполяции профиля массовой скорости газа на стенку

$$U_z(x) = \left[ x - \frac{2-q}{q} \left[ Q_1 + \sum_{k=0}^{+\infty} (1-q)^{k+1} I_k \right] \right] G_v. \quad (4.2)$$

Профили массовой скорости газа  $U_z(x)$ , отнесенные к градиенту массовой скорости, для различных значений коэффициента аккомодации, рассчитанные согласно (4.1) и (4.2) приведены на Рисунке 1.

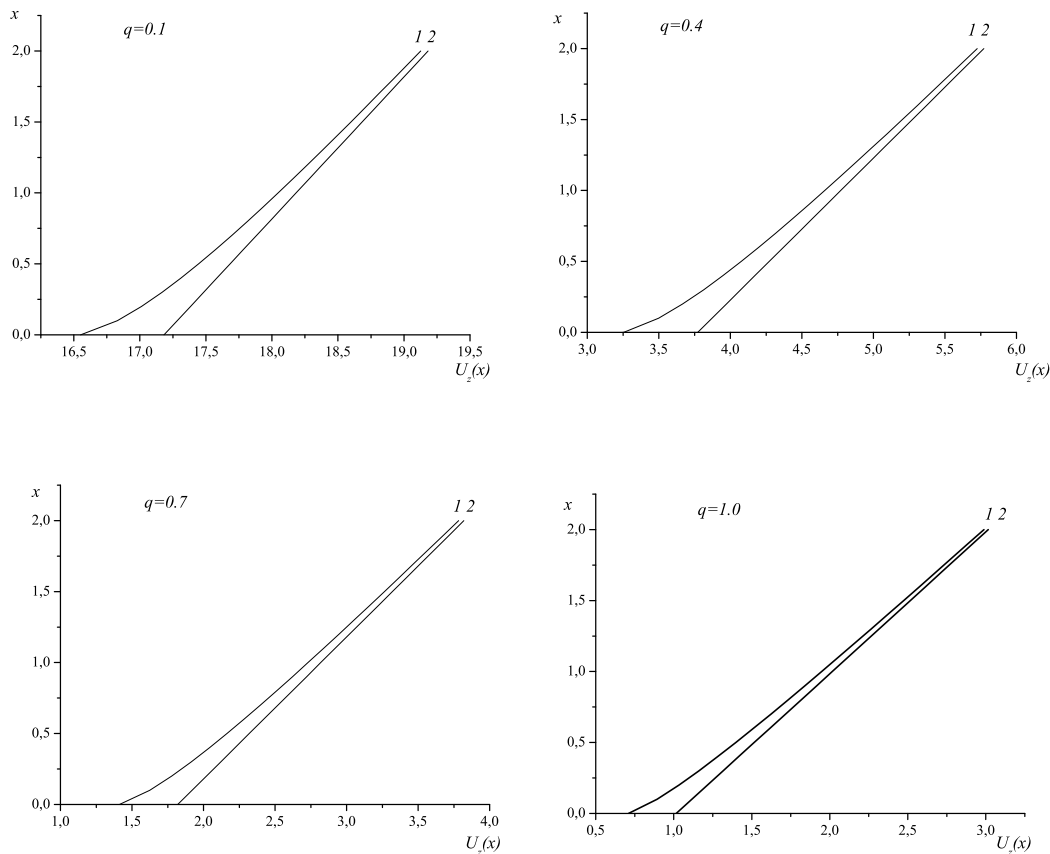


Рис. 1. Графики зависимости  $U_z(x)/G_v$  для различных значений  $q$ : 1 – рассчитанные согласно (4.1), 2 – согласно (4.2).

Как видно из приведенных рисунков при уменьшении значения коэффициента аккомодации профиль массовой скорости в слое Кнудсена, рассчитанный согласно (4.1) все существеннее отличается от того, что получается на основе (4.2).

Значения скорости скольжения  $U_0$ , рассчитанные согласно (3.19), приведены в Таблице 1. Там же приведены значения, полученные в [4] – [6] с использованием линеаризованного уравнения Больцмана для молекул-жестких сфер (LBE), модели кинетического уравнения Больцмана с комбинированным ядром (CES) и БГК модели (BGK).

$q$	(4.1)	$BGK$ [4]	$BGK$ [6]	$CES$ [5]	$LBE$ [5]
0.1	17.11708	17.09809	17.10313	17.04462	17.0478
0.2	8.22973	8.220481	8.224902	8.169615	8.17248
0.3	5.257268	5.251263	5.255112	5.203049	5.20563
0.4	3.763664	3.759290	3.762619	3.713778	3.71609
0.5	2.861707	2.858334	2.86119	2.815562	2.81761
0.6	2.255662	2.252980	2.25541	2.212984	2.21178
0.7	1.818786	1.816621	1.818667	1.779429	1.78048
0.8	1.487706	1.485952	1.487654	1.451586	1.45292
0.9	1.227215	1.225801	1.227198	1.194247	1.19540
1.0	1.01619	1.015064	1.01619	0.9864009	0.987328

Таблица 1. Значения  $U_0/G_v$  при различных значениях  $q$ .

Как видно из приведенной таблицы, отличие значений скорости изотермического скольжения, полученных в представленной работе, не превышает 0.1% от аналогичных значений, найденных в [4], [6] в рамках БГК модели. Отличие от аналогичных результатов, полученных в рамках CES и LBE моделей, составляет от 3% при  $q = 1$  до 0,4% при  $q = 0.1$ , и обусловлено зависимостью значений коэффициентов скольжения от выбора модели интеграла столкновений, отмеченной в [8].

## 5. Заключение

Итак, в работе с использованием аналитических методов в виде ряда Неймана построено решение задачи об изотермическом скольжении разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности. Для произвольных значений коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа получены аналитические выражения для профиля скорости газа и скорости изотермического скольжения. Проведен численный анализ полученных выражений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
2. Kundt A., Warburg E. Ueber reibung und waermeleitung verduennter gase // Poggendorfs Annalen der Physik. 1875. Vol. 155. P. 337–525.
3. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. Кинетическая теория. М.: Наука, 1967. - 440 с.
4. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитическое решения граничных задач для кинетических уравнений. М.: МГОУ. 2004. 286 с.

5. Siewert C.E. The linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solutions to Basic Flow Problems // Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik. 2003. V. 54. P. 273–303.
6. Siewert C.E., Sharipov F. Model equation in rarefied gas dynamics: viscous-slip and thermal-slip coefficients // Physics Fluids. 2002. V. 14. No 12. P. 4123–2129.
7. Попов В., Юшканов А. Лукашев В.В. Математическое моделирование процессов переноса в каналах. Монография. Saarbrucken, Germany: LAP LAMBERT Academic publishing GmbH & Co. KG. 2014. 116 с.
8. Шарипов Ф.М., Селезнев В.Д. Движение разреженных газов в каналах и микроканалах. Екатеринбург. УрО РАН. 2008. 230 с.

## Analytic solution of the Kramers problem

© S. V. Gulakova <sup>3</sup>, V. N. Popov <sup>4</sup>

**Abstract.** In the framework of kinetic approach the analytic solution (in the form of a series Neumann) of the problem of isothermal slip gas along a hard, flat surface (Kramers's problem) is built. The linearized BGK (Bhatnagar, Gross, Krook) model of Boltzmann's kinetic equation as the main equation and the model of mirror-diffuse reflection as boundary conditions on the surface are used. For different values of the coefficient of diffusely the speed of isothermal slip gas along the surface is calculated and the profiles of mass velocity are built. The comparison with similar results, published in the open press is done.

**Key Words:** Boltzmann kinetic equation, model kinetic equations, exact analytical decisions, models of boundary conditions

<sup>3</sup> Post graduate student, Northern Arctic federal university named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk; s.gulakova@narfu.ru.

<sup>4</sup> Head of Mathematics Chair, Northern Arctic federal university named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk; v.popov@narfu.ru.

УДК 517.938

# Реализация изотопических классов градиентно-подобных диффеоморфизмов тора

© Е. Я. Гуревич<sup>1</sup>, Д. Т. Сяинова.<sup>2</sup>

**Аннотация.** В работе уточняются результаты работы [7] С. Баттерсона, в которой описаны классы изотопных отображений тора, содержащие диффеоморфизмы Морса-Смейла. Следуя идеям, изложенным в [7], мы описываем изотопические классы, содержащие градиентно-подобные диффеоморфизмы тора, приводим все возможные виды наборов периодических данных таких диффеоморфизмов и описывается алгоритм реализации каждого набора.

**Ключевые слова:** изотопическая классификация, градиентно-подобные диффеоморфизмы, диффеоморфизмы тора, структурно-устойчивые динамические системы

## 1. Введение и формулировка результатов

Напомним, что диффеоморфизм  $f : M^n \rightarrow M^n$  замкнутого многообразия  $M^n$  размерности  $n$  называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если он удовлетворяет следующим условиям:

- 1) неблуждающее множество  $\Omega_f$  диффеоморфизма  $f$  состоит из конечного числа периодических точек;
- 2) все периодические точки являются гиперболическими;
- 3) инвариантные многообразия различных седловых периодических точек пересекаются трансверсально.

Диффеоморфизм Морса-Смейла  $f : M^n \rightarrow M^n$  называется *градиентно-подобным*, если из условия  $W_p^s \cap W_q^u \neq \emptyset$  для различных точек  $p, q \in \Omega_f$  следует  $\dim W_p^u < \dim W_q^u$ . В случае  $n = 2$  последнее условие означает, что диффеоморфизм  $f : M^2 \rightarrow M^2$  Морса-Смейла является градиентно-подобным тогда и только тогда, когда инвариантные многообразия различных его седловых точек не пересекаются. Обозначим через  $MS_+(T^2)$  класс сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла на торе и через  $G_+(T^2)$  подмножество множества  $MS_+(T^2)$ , состоящее из градиентно-подобных диффеоморфизмов.

Два диффеоморфизма  $f, f'$  на торе  $T^2$  называются *изотопными*, если существует непрерывное отображение  $H : T^2 \times [0, 1] \rightarrow T^2$  такое, что для каждого  $t \in [0, 1]$  отображение  $H : T^2 \times \{t\} \rightarrow T^2$  является гомеоморфизмом и  $H|_{T^2 \times \{0\}} = f$ ,  $H|_{T^2 \times \{1\}} = f'$ <sup>3</sup>.

Цель настоящей работы состоит в изучении изотопических классов, содержащих диффеоморфизмы из класса  $G_+(T^2)$ , и описании структуры неблуждающего множества таких диффеоморфизмов. Мотивировка этой задачи принадлежит С. Баттерсону и заключается в следующем. Во-первых, тор является единственной ориентируемой поверхностью,

<sup>1</sup> Доцент кафедры теории управления и динамики машин, Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; elena\_gurevich@list.ru.

<sup>2</sup> Студентка факультета ВМК (кафедры теории управления и динамики машин), Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород

<sup>3</sup> Из работы [9] (теорема 6.3) следует, что два диффеоморфизма поверхности изотопны тогда и только тогда, когда они гомотопны

для которой изотопический класс сохраняющего ориентацию диффеоморфизма определяется его действием в группе гомологий  $H_1(T^2, \mathbb{R})$ , что позволяет найти необходимые условия существования градиентно-подобного диффеоморфизма в изотопическом классе. Во-вторых, относительно простая динамика таких диффеоморфизмов позволяет описать структуру неблуждающего множества диффеоморфизма, определяемую изотопическим классом, и предъявить алгоритм реализации каждого допустимого периодического набора. Актуальность изучения градиентно-подобных систем следует из структурной устойчивости таких систем, что позволяет использовать их в задачах математического моделирования.

Из [5] (см. раздел D главы 2) следует, что диффеоморфизмы  $f, f' : T^2 \rightarrow T^2$  изотопны тогда и только тогда, когда совпадают индуцированные изоморфизмы первой гомологической группы  $f_* : H_1(T^2, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(T^2, \mathbb{R})$ ,  $f'_* : H_1(T^2, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(T^2, \mathbb{R})$ . Так как группа  $H_1(T^2, \mathbb{R})$  изоморфна прямому произведению  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , то для любого диффеоморфизма  $f : T^2 \rightarrow T^2$  индуцированный изоморфизм  $f_* : H_1(T^2, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(T^2, \mathbb{R})$  (и, следовательно, его изотопический класс) определяется унимодулярной целочисленной матрицей. Далее будем рассматривать только сохраняющие ориентацию отображения, что сужает класс рассматриваемых матриц до матриц  $SL(2, \mathbb{Z})$ , имеющих положительный определитель.

В силу работы [6] для любого диффеоморфизма Морса-Смейла  $f : T^2 \rightarrow T^2$  все собственные числа матрицы индуцированного изоморфизма  $f_* : H_1(T^2, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(T^2, \mathbb{R})$  являются корнями из единицы. Баттерсон (см. лемму 3 работы [7]) доказал, что любая матрица из  $SL(2, \mathbb{Z})$ , обладающая этим свойством, подобна (при помощи матрицы из  $SL(2, \mathbb{Z})$ ) одной из следующих матриц.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B_2 = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \\ B_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Этот результат лег в основу основного результата работы [7], утверждающего, что в каждом изотопическом классе, определяемом матрицей, подобной одной из матриц  $B_1, \dots, B_5$ , существует диффеоморфизм Морса-Смейла.

Следующая лемма утверждает, что изотопические классы, определяемые матрицами  $B_1, B_2$ , содержат градиентно-подобные диффеоморфизмы только тогда, когда  $m = 0$ , а динамика градиентно-подобного диффеоморфизма (в частности, максимальный период периодических орбит) существенным образом зависит от свойств матрицы.

Будем говорить, что матрица  $A \in SL(2, \mathbb{Z})$  является *периодической периода  $t > 0$* , если  $A^t = E$  и  $A^i \neq E$  для любого положительного  $i < t$ .

**Л е м м а 1.1.** *Если  $f \in G_+(T^2)$ , то:*

- 1) *индуцированный изоморфизм  $f_*$  имеет периодическую матрицу<sup>4</sup>;*
- 2) *если  $f_* \neq E$ , то максимальный период периодических точек  $f$  не превышает периода  $t_f$  матрицы  $f_*$ ;*
- 3) *если  $\sigma$  — седловая точки диффеоморфизма  $f$ , то период точки  $\sigma$  равен либо  $t_f$  — в случае, если диффеоморфизм  $f_{W_\sigma^u}$  сохраняет ориентацию  $W_\sigma^u$ , либо  $t_f/2$  — в случае, если диффеоморфизм  $f_{W_\sigma^u}$  меняет ориентацию  $W_\sigma^u$ .*

<sup>4</sup> Этот факт доказан в кандидатской диссертации А.Н. Безденежных, его справедливость также следует из теоремы 3.1.1 книги [4]. Для связности изложения мы приводим его доказательство.

Из утверждения 1) леммы следует, в частности, нижеприведенное утверждение.

**С л е д с т в и е 1.1.** Если  $f \in G_+(T^2)$ , то матрица индуцированного изоморфизма  $f_* : H_1(T^2, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(T^2, \mathbb{R})$  подобна одной из следующих матриц.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для описания структуры неблуждающего множества диффеоморфизма  $f \in G_+(T^2)$ , определяемого его изотопическим классом, введем, следуя работе [2], понятие набора периодических данных диффеоморфизма  $f$ . Каждой периодической орбите  $\gamma$  диффеоморфизма  $f$  поставим в соответствие тройку чисел  $(p_\gamma, u_\gamma, \nu_\gamma)$ , где  $p_\gamma$  - период орбиты  $\gamma$ ,  $u_\gamma = \dim W_\gamma^u$  - ее индекс Морса, а параметр  $\nu_\gamma$  равен  $+1$  ( $-1$ ), если  $f^m|_{W_p^u}$  сохраняет (меняет) ориентацию  $W_\gamma^u$ .

**О п р е д е л е н и е 1.1.** Периодическими данными диффеоморфизма  $f$  будем называть набор  $P_f$  троек  $(p_\gamma, u_\gamma, \nu_\gamma)$  всех орбит  $\gamma$  диффеоморфизма  $f$ , частично упорядоченный в порядке возрастания периода и индекса.

Если набор  $P_f$  содержит  $l > 0$  одинаковых троек  $(p_\gamma, u_\gamma, \nu_\gamma)$ , то набор всех таких троек будем сокращенно записывать как  $l(p_\gamma, u_\gamma, \nu_\gamma)$ .

Основной результат работы заключается в следующей теореме.

**Т е о р е м а 1.1.** Диффеоморфизм  $f : T^2 \rightarrow T^2$  принадлежит классу  $G_+(T^2)$  тогда и только тогда, когда матрица  $f_*$  подобна матрице  $A_i$ ,  $i \in 1, \dots, 5$ , и набор периодических данных  $P_f$  диффеоморфизма  $f$  совпадает с одним из перечисленных ниже наборов (при этом набор  $P_{i,j_i}$  соответствует классу подобия матрицы  $A_i$ ,  $j_i \in \{1, \dots, 9\}$ ).

- 1)  $P_{1,1} = \{l_n^0(n, 0, +1); l_n^1(n, 1, +1); l_n^2(n, 2, +1)\}$ ; где  $n, l_n^1, l_n^0, l_n^1$  - любые натуральные числа такие, что  $l_n^1 = l_n^0 + l_n^2$ .
- 2)  $P_{2,1} = \{2(1, 0, +1); (1, 1, -1); (1, 2, +1); l_2^0(2, 0, +1); (2, 1, +1); l_2^1(2, 1, +1); l_2^2(2, 2, +1)\}$ ;  
 $P_{2,2} = \{(1, 0, +1); (1, 1, -1); 2(1, 2, +1); l_2^0(2, 0, +1); (2, 1, +1), l_2^1(2, 1, +1); l_2^2(2, 2, +1)\}$ ;  
 $P_{2,3} = \{(1, 0, +1); 2(1, 1, -1); (1, 2, +1); l_2^0(2, 0, +1); l_2^1(2, 1, +1); l_2^2(2, 2, +1)\}$ ;  
 $P_{2,4} = \{(1, 0, +1); 3(1, 1, -1); l_2^0(2, 0, +1); l_2^1(2, 1, +1); (2, 2, +1), l_2^2(2, 2, +1)\}$ ;  
 $P_{2,5} = \{3(1, 1, -1); (1, 2, +1); (2, 0, +1), l_2^0(2, 0, +1); l_2^1(2, 1, +1); l_2^2(2, 2, +1)\}$ ;  
 $P_{2,6} = \{4(1, 1, -1); (2, 0, +1), l_2^0(2, 0, +1); l_2^1(2, 1, +1); (2, 2, +1), l_2^2(2, 2, +1)\}$ ;  
 $P_{2,7} = \{3(1, 0, +1); (1, 2, +1); l_2^0(2, 0, +1); 2(2, 1, +1), l_2^1(2, 1, +1); l_2^2(2, 2, +1)\}$ ;  
 $P_{2,8} = \{(1, 0, +1); 3(1, 2, +1); l_2^0(2, 0, +1); 2(2, 1, +1), l_2^1(2, 1, +1); l_2^2(2, 2, +1)\}$ ;  
 $P_{2,9} = \{2(1, 0, +1); 2(1, 2, +1); l_2^0(2, 0, +1); 2(2, 1, +1), l_2^1(2, 1, +1); l_2^2(2, 2, +1)\}$ ;
- 3)  $P_{3,1} = \{2(1, 0, +1); (1, 2, +1); l_3^0(3, 0, +1); (3, 1, +1), l_3^1(3, 1, +1); l_3^2(3, 2, +1)\}$ ;  
 $P_{3,2} = \{(1, 0, +1); 2(1, 2, +1); l_3^0(3, 0, +1); (3, 1, +1), l_3^1(3, 1, +1); l_3^2(3, 2, +1)\}$ ;

- 4)  $P_{4,1} = \{(1, 0, +1); (1, 2, +1); (2, 1, -1); l_4^0(4, 0, +1); l_4^1(4, 1, +1); l_4^2(4, 2, +1)\};$   
 $P_{4,2} = \{2(1, 0, +1); (2, 2, +1); l_4^0(4, 0, +1); (4, 1, +1), l_4^1(4, 1, +1); l_4^2(4, 2, +1)\};$   
 $P_{4,3} = \{(2, 0, +1); 2(1, 2, +1); l_4^0(4, 0, +1); (4, 1, +1), l_4^1(4, 1, +1); l_4^2(4, 2, +1)\};$   
 $P_{4,4} = \{(1, 0, +1); (1, 2, +1); (2, 2, +1); l_4^0(4, 0, +1); (4, 1, +1), l_4^1(4, 1, +1); l_4^2(4, 2, +1)\};$   
 $P_{4,5} = \{(1, 0, +1); (1, 2, +1); (2, 0, +1); l_4^0(4, 0, +1); (4, 1, +1), l_4^1(4, 1, +1); l_4^2(4, 2, +1)\};$
- 5)  $P_{5,1} = \{(1, 2, +1); (2, 0, +1); (3, 1, -1); l_6^0(6, 0, +1); l_6^1(6, 1, +1); l_6^2(6, 2, +1)\};$   
 $P_{5,2} = \{(1, 0, +1); (2, 2, +1); (3, 1, -1); l_6^0(6, 0, +1); l_6^1(6, 1, +1); l_6^2(6, 2, +1)\};$   
 $P_{5,3} = \{(1, 2, +1); (2, 0, +1); (3, 0, +1); l_6^0(6, 0, +1); (6, 1, +1), l_6^1(6, 1, +1); l_6^2(6, 2, +1)\};$   
 $P_{5,4} = \{(1, 0, +1); (2, 2, +1); (3, 0, +1); l_6^0(6, 0, +1); (6, 1, +1), l_6^1(6, 1, +1); l_6^2(6, 2, +1)\};$   
 $P_{5,5} = \{(1, 2, +1); (2, 0, +1); (3, 2, +1); l_6^0(6, 0, +1); (6, 1, +1), l_6^1(6, 1, +1); l_6^2(6, 2, +1)\};$   
 $P_{5,6} = \{(1, 0, +1); (2, 2, +1); (3, 2, +1); l_6^0(6, 0, +1); (6, 1, +1), l_6^1(6, 1, +1); l_6^2(6, 2, +1)\};$

где  $l_i^0, l_i^1, l_i^2$ ,  $i \in \{2, 3, 4, 6\}$ , — любые целые неотрицательные числа такие, что  $l_i^1 = l_i^0 + l_i^2$ .

## БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят В.З. Гринеса и О.В. Починку за плодотворные обсуждения. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ № 12-01-00672-а и № 13-01-12452-офи-м2.

## 2. Допустимые периодические наборы диффеоморфизмов из $G_+(T^2)$

В этом разделе доказывается необходимое условие теоремы 1.1.. Пусть  $f \in G_+(T^2)$ ,  $f_* : H_1(T^2, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(T^2, \mathbb{R})$  — индуцированный изоморфизм. В силу следствия 1.1. матрица отображения  $f_*$  подобна (при помощи некоторой матрицы  $B_f \in SL(2, \mathbb{Z})$  одной из пяти матриц  $A_1, \dots, A_5$ . Докажем, что класс подобия матрицы  $f_*$  определяет вид набора периодических данных диффеоморфизма  $f$ . Матрицы  $A_i$ ,  $B_f$  определяют диффеоморфизмы  $f_i, g_f$  такие, что  $f = g_f^{-1} f_i g_f$ , что означает, что диффеоморфизм  $f$  гладко сопряжен с диффеоморфизмом  $f_i$  и, следовательно, периодические наборы диффеоморфизмов  $f, f_i$  совпадают. Таким образом, теорему достаточно доказать для диффеоморфизмов  $f_1, \dots, f_5 \in G_+(T^2)$ , чьи изотопические классы определяются матрицами  $A_1, \dots, A_5$  соответственно.

Идея доказательства базируется на приведенном ниже утверждении Дж. Френкса, устанавливающим связь между набором периодических данных диффеоморфизма Морса-Смейла и индуцированными изоморфизмами гомологических групп. Для точной формулировки этого результата приведем определения динамической и гомологической дзета-функций.

**О п р е д е л е н и е 2.1.** Пусть  $f \in MS_+(T^2)$ ,  $\Omega_f$  — множество его неблуждающих орбит. Динамической дзета-функцией Артина-Мазура диффеоморфизма  $f$  называется функция  $\zeta_f(t) = \prod_{\gamma \in \Omega_f} (1 - \nu_\gamma t^{p_\gamma})^{(-1)^{u_\gamma+1}}$ .

**О п р е д е л е н и е 2.2.** Пусть  $f : T^2 \rightarrow T^2$  — диффеоморфизм,  $f_{*i} : H_i(T^2, \mathbb{R}) \rightarrow H_i(T^2, \mathbb{R})$  — индуцированный изоморфизм. Гомологической дзета-функцией диффеоморфизма  $f$  называется функция  $\eta_f(t) = \prod_{i=0}^2 (E - t f_{*i})^{(-1)^{i+1}}$ .

Из [10] следует, что справедливо следующее утверждение.

**У т в е р ж д е н и е 2..1** Если  $f \in MS_+(T^2)$ , то  $\zeta_f = \eta_f$ .

Непосредственное вычисление гомологических дзета-функций в каждом изотопическом классе, определяемом матрицами  $A_1, \dots, A_5$ , приводит к следующему утверждению.

**П р е д л о ж е н и е 2.1.** Пусть  $f : T^2 \rightarrow T^2$  такой, что  $f_{*1} = A_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 5\}$ . Тогда его гомологическая функция  $\eta_i$  определяется следующей формулой.

$$\eta_1 = 1; \quad \eta_2 = \frac{(1+t)^2}{(1-t)^2}; \quad \eta_3 = \frac{1+t+t^2}{(1-t)^2}; \quad \eta_4 = \frac{1+t^2}{(1-t)^2}; \quad \eta_5 = \frac{1-t+t^2}{(1-t)^2}.$$

Дальнейшее доказательство необходимого условия теоремы 1.1. сводится к подбору значений параметров  $\nu_\gamma, p_\gamma, u_\gamma$  таких, чтобы выполнялось равенство  $\frac{\zeta_{f_i}}{\eta_i} = 1$ .

Обозначим через  $\Omega_f^k$  множество периодических орбит диффеоморфизма  $f$  индекса  $k \in \{0, 1, 2\}$  и представим множество  $\Omega_f^1$  как объединение двух подмножеств  $\Omega_f^{1+}, \Omega_f^{1-}$ , состоящих из точек с типом ориентации равным  $+1, -1$  соответственно. Будем обозначать через  $l_m^k$  число периодических орбит диффеоморфизма  $f$  индекса  $k \in \{0, 1, 2\}$  периода  $m$ . Из теоремы 2.1.1 работы [4] и формулы Лефшеца (см. лемму 3.1 работы [4]) вытекает справедливость следующего утверждения.

**П р е д л о ж е н и е 2.2.** Для любого  $f \in G_+(T^2)$  множества  $\Omega_f^k$  непусты,  $k \in \{0, 1, 2\}$ .

**Окончание доказательства необходимого условия теоремы 1.1.**

Пусть диффеоморфизм  $f \in G_+(T^2)$  изотопен тождественному. Тогда лемма 1.1., предложение 2.1. и утверждение 2..1 приводят к следующему соотношению.

$$\frac{(1 + t^{m_f/2})^{l_{m_f/2}^1} (1 - t^{m_f})^{l_{m_f}^1}}{\prod_{\gamma \in \Omega_f^0 \cup \Omega_f^2} (1 - t^{m_\gamma})} = 1, \quad (2.1)$$

где  $m_\gamma \leq m_f$  для любого  $\gamma \in \Omega_f^0 \cup \Omega_f^2$ .

Число  $t = 1$  является нулем числителя порядка  $l_{m_f}^1$  (в силу формулы  $(1 - t^m) = (1 - t)(1 + t + \dots + t^{m-1})$ ), поэтому для тождественного выполнения тождества необходимо, чтобы  $t = 1$  являлся нулем знаменателя того же порядка, то есть число множителей в знаменателе равно  $l_{m_f}^1$ . Отсюда следует, что  $m_\gamma = m_f$  для любого  $\gamma \in \Omega_f^0 \cup \Omega_f^2$ ,  $l_{m_f/2}^1 = 0$ ,  $|\Omega_f^0 \cup \Omega_f^2| = l_{m_f}^1 = |\Omega_f^1|$ . Последние соотношения означают, что вид периодического набора диффеоморфизма  $f$  совпадает с набором  $P_{1,1}$ .

Пусть теперь изотопический класс диффеоморфизма  $f \in G_+(T^2)$  определяется матрицей  $A_2$ . Лемма 1.1., предложение 2.1. и утверждение 2..1 приводят к следующему соотношению.

$$\frac{(1 - t)^2 (1 + t^{m_f/2})^{l_{m_f/2}^1} (1 - t^{m_f})^{l_{m_f}^1}}{(1 + t)^2 \prod_{\gamma \in \Omega_f^0 \cup \Omega_f^2} (1 - t^{m_\gamma})} = 1, \quad (2.2)$$

где  $m_\gamma \leq m_f \leq 2$ .

Если  $m_f = 1$ , то последнее соотношение эквивалентно следующему:

$$\frac{(1-t)^{l_1^1+2}}{(1+t)^2(1-t)^{l_1^0+l_1^2}} = 1. \quad (2.3)$$

В силу формулы Лефшеца  $l_1^1 = l_1^0 + l_1^2$ , отсюда следует, что последнее соотношение не выполняется тождественно для произвольного  $t \neq 0$ . Поэтому  $m_f = 2$  и соотношение 2.2 имеет вид

$$\frac{(1+t)^{l_1^1+l_2^1}(1-t)^{l_2^1+2}}{(1+t)^2(1-t)^{l_1^0+l_1^2+l_2^0+l_2^2}(1+t)^{l_2^0+l_2^2}} = 1, \quad (2.4)$$

что приводит к соотношениям  $l_2^1 = l_2^0 + l_2^2 + l_1^0 + l_1^2 - 2$ ;  $l_1^1 = 4 - l_1^0 - l_1^2$  и анонсированным видам допустимых наборов.

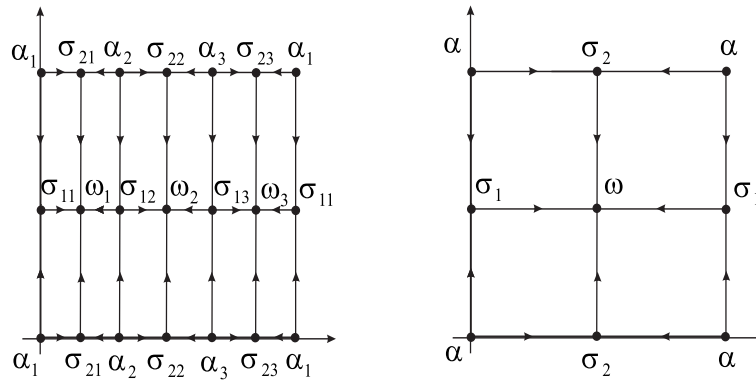
Доказательство теоремы для остальных матриц строится аналогичным образом. Для завершения доказательства необходимого условия теоремы 1.1. осталось привести доказательство леммы 1.1.

### Доказательство леммы 1.1.

Ключом к доказательству всех пунктов леммы является доказательство того факта, что сепаратрисы всех седловых точек диффеоморфизма  $f \in G_+(T^2)$  имеют одинаковый период. Действительно, если  $m$  — период всех сепаратрис, то период любой седловой орбиты  $\gamma$  равен  $m$ , если  $\nu_\gamma = +1$  и равен  $\frac{m}{2}$ , если  $\nu_\gamma = -1$ , а период любой узловой орбиты не превышает  $m$ . Кроме того, объединение устойчивых многообразий периодических орбит диффеоморфизма  $f$  задает клеточное разбиение тора  $T^2$ . Тогда образующие группы  $H_1(T^2, \mathbb{R})$  принадлежат одномерному подкомплексу  $A_f$ , образованному замыканиями устойчивых сепаратрис, и период любой петли  $\lambda \in A_f$  равен  $m$ , следовательно, отображение  $f_*$  является периодическим периода  $m$ .

Докажем, что сепаратрисы всех седловых точек диффеоморфизма  $f \in G_+(T^2)$  имеют одинаковый период. Пусть  $L_\omega = \{l_0, \dots, l_{k-1}\}$  — множество сепаратрис седловых периодических точек диффеоморфизма  $f$ , в замыкании которых содержится сток  $\omega$ . Покажем, что все сепаратрисы из множества  $L_\omega$  имеют одинаковый период. Из гиперболичности точки  $\omega$  следует, что существует замкнутая кривая  $S_0 \in W_\omega^s$ , ограничивающая диск  $D_0$  с точкой  $\omega$  внутри, и пересекающаяся с каждой сепаратрисой из множества  $L_\omega$  в единственной точке. Положим  $z_i = l_i \cap S_0$ ,  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ . Не уменьшая общности предположим, что индексация сепаратрис выбрана таким образом, что точки  $z_1, \dots, z_k$  разбивают  $S_0$  на  $k$  отрезков, причем внутри отрезка с граничными точками  $z_i, z_{i+1}$  нет других точек из множества  $L_\omega \cap S_0$ ,  $i \in 0, \dots, k-2$ . Положим  $S_j = f^{jm_\omega}(S_0)$ ,  $z_i^j = l_i \cap S_j$ ,  $i \in \{1, 2, \dots\}$ . Так как отображение  $f^{jm_\omega}|_{S_0} : S_0 \rightarrow S_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , является сохраняющим ориентацию, оно индуцирует перестановку  $g_j$  на множестве индексов  $\{0, \dots, k-1\}$  такую, что  $g_j(i-1, i, i+1) = (n-1, n, n+1) \pmod k$ ,  $i, n \in \{0, \dots, k-1\}$ . Кроме того, если  $m_{l_i} = n_i m_\omega$  — период сепаратрисы  $l_i$ , то  $g_{n_i}(i) = i$ . Тогда  $g_{n_i}(i-1) = i-1$ ,  $g_{n_i}(i+1) = i+1$ , откуда следует, что  $m_{l_{i-1}} = m_{l_{i+1}} = m_{l_i}$ . В силу произвольности выбора индекса  $i$  отсюда следует, что  $m_{l_n} = m_{l_i}$  для любых  $i, n \in \{0, \dots, k-1\}$ .

Докажем, что все неустойчивые сепаратрисы седловых периодических точек диффеоморфизма  $f$  имеют одинаковый период. Для этого достаточно доказать связность множества  $A_f = W_{\Omega_f^1}^u \cup \Omega_f^0$ . Заметим, что  $A_f$  — аттрактор диффеоморфизма  $f$ , то есть существует такая окрестность  $U$  множества  $A_f$  и положительное число  $r$ , что  $f^r(U) \subset U$ ,  $W_{A_f}^s = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} f^i r(U)$ . Так как  $T^2 = \bigcup_{\gamma \in \Omega_f} W_\gamma^s$  (см., например, теорему 2.1.1 книги [4]), то

Рис. 1: Фазовые портреты потоков  $X_{1(1)}^t, X_{1(3)}^t$ 

$W_{A_f}^s = T^2 \setminus W_{\Omega_f^2}^s = T^2 \setminus \Omega_f^2$ . Предположим, что  $A_f$  несвязно. Тогда множество  $W_{A_f}^s = T^2 \setminus \Omega_f^2$  также несвязно, что противоречит теореме о разбивающих множествах (см., например, [4], теореме 11.3.2).

Обозначим через  $m_{A_f}$  период всех сепаратрис (совпадающий с периодом аттрактора  $A_f$ ). Отметим, что период стоковых орбит не превышает  $m_{A_f}$ ; если  $\gamma$  — седловая орбита такая, что  $\nu_\gamma = +1$ , то  $m_\gamma = m_{A_f}$ ; если  $\gamma$  — седловая орбита такая, что  $\nu_\gamma = -1$ , то  $m_\gamma = \frac{1}{2}m_{A_f}$ . Аналогичные аргументы, примененные к репеллеру  $R_f = W_{\Omega_f^1}^u \cup \Omega_f^2$  приводят к заключению, что период любой источниковой орбиты не превосходит  $m_{A_f}$ .

### 3. Реализация допустимых наборов

Для доказательства достаточности условия теоремы 1.1. для каждого из допустимых наборов опишем алгоритм построения градиентно-подобного диффеоморфизма в соответствующем изотопическом классе, набор периодических данных которых совпадает с допустимым набором. Построение разобьем на два этапа. На первом этапе в каждом изотопическом классе строятся модельные диффеоморфизмы с минимальным возможным числом периодических орбит. Периодические наборы таких диффеоморфизмов будем называть *минимальными*. На втором этапе описывается алгоритм модификации каждого модельного диффеоморфизма, для построения диффеоморфизма, реализующего произвольный допустимый периодический набор в данном изотопическом классе. Ниже приводится детальное описание первого этапа. Второй этап аналогичен шагу 1 доказательства теоремы реализации работы [3].

Представим тор  $T^2$  как фактор-пространство евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  по следующему отношению эквивалентности: точки  $(x_a, y_a), (x_b, y_b)$  эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют целые числа  $m, n$  такие, что  $x_b = x_a + m$ ,  $y_b = y_a + n$ . Фазовые портреты всех динамических систем на торе будем изображать на квадрате  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , являющемся разверткой тора  $T^2$ .

#### 3.1. Реализация минимального периодического набора в изотопическом классе тождественного диффеоморфизма

Для каждого  $n > 0$  положим  $h_{1(n)}(x, y) = (x + \frac{1}{n}, y) \pmod{1}$ , и определим диффеоморфизм  $g_{1(n)}$  как сдвиг на единицу времени вдоль траекторий потока  $X_{1(n)}^t$ , определенного

следующей системой дифференциальных уравнений (фазовые портреты потоков  $X_{1(3)}^t$ ,  $X_{1(1)}^t$  изображены на рисунке 1).

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin \frac{2\pi x}{n} (\text{mod } 1) \\ \dot{y} = \sin \frac{2\pi y}{n} (\text{mod } 1) \end{cases}$$

Суперпозиция  $g_{1(n)}h_{1(n)}$  принадлежит классу  $G_+(T^2)$  и имеет набор периодических данных  $P_{1,1}^{min} = \{(n, 0, +1), 2(n, 1, +1), (n, 2, +1)\}$ .

### 3.2. Реализация минимальных периодических наборов в изотопических классах, отличных от тождественного

Модельный диффеоморфизм  $f_{i,j_i}$ , реализующий один из минимальных допустимых наборов  $P_{i,j_i}^{min}$  в изотопическом классе матрицы  $A_i$ ,  $i \in \{2, \dots, 6\}$ , будем строить как суперпозицию  $f_{i,j_i} = g_{i,j_i}h_i$ , где  $h_i$  — периодический диффеоморфизм, определяемый формулой  $h_i(x, y) = A_i * (x, y)^T (\text{mod } 1)$ , а  $g_{i,j_i} : T^2 \rightarrow T^2$  — градиентно-подобный диффеоморфизм, изотопный тождественному, траектории которого инвариантны относительно диффеоморфизма  $h_i$ ,  $i \in \{2, \dots, 5\}$ ,  $j_i \in \{1, \dots, 9\}$ . Все диффеоморфизмы из множества  $\{g_{i,j_i}\}$  можно получить как сдвиг на единицу времени (в положительном либо в отрицательном направлении) вдоль траекторий потоков  $X_1^t, \dots, X_9^t$ , фазовые портреты которых приведены на рис. 2. Минимальные наборы периодических данных в каждом изотопическом классе и соответствующие каждому набору потоки приведены в таблице 1.

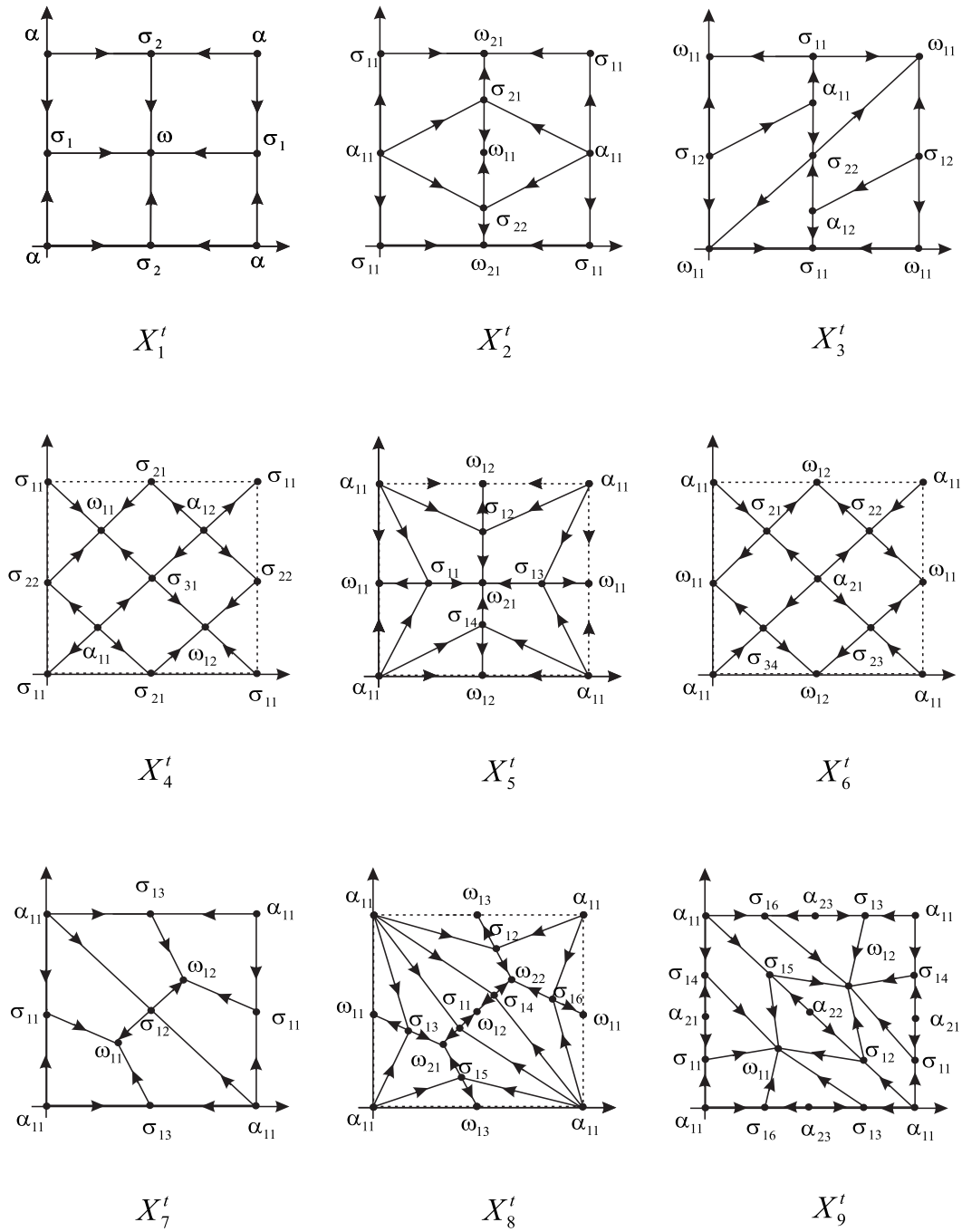
Рис. 2: Фазовые портреты потоков  $X_1^t, \dots, X_9^t$

Таблица 1: К реализации минимальных наборов

Минимальный допустимый набор	Вспомогательный поток
$P_{2,1} = \{2(1, 0, +1); (1, 1, -1); (1, 2, +1); (2, 1, +1)\}$	$X_2^t$
$P_{2,2} = \{(1, 0, +1); (1, 1, -1); 2(1, 2, +1); (2, 1, +1)\}$	$X_2^{-t}$
$P_{2,3} = \{(1, 0, +1); 2(1, 1, -1); (1, 2, +1)\}$	$X_1^t$
$P_{2,4} = \{(1, 0, +1); 3(1, 1, -1); (2, 2, +1)\}$	$X_3^t$
$P_{2,5} = \{3(1, 1, -1); (1, 2, +1); (2, 0, +1)\}$	$X_3^{-t}$
$P_{2,6} = \{4(1, 1, -1); (2, 0, +1); (2, 2, +1)\}$	$X_4^t$
$P_{2,7} = \{3(1, 0, +1); (1, 2, +1); 2(2, 1, +1)\}$	$X_5^t$
$P_{2,8} = \{(1, 0, +1); 3(1, 2, +1); 2(2, 1, +1)\}$	$X_5^{-t}$
$P_{2,9} = \{2(1, 0, +1); 2(1, 2, +1); 2(2, 1, +1)\}$	$X_6^t$
$P_{3,1} = \{2(1, 0, +1); (1, 2, +1); (3, 1, +1)\}$	$X_7^t$
$P_{3,2} = \{(1, 0, +1); 2(1, 2, +1); (3, 1, +1)\}$	$X_7^{-t}$
$P_{4,1} = \{(1, 0, +1); (1, 2, +1); (2, 1, -1)\}$	$X_1^t$
$P_{4,2} = \{2(1, 0, +1); (2, 2, +1); (4, 1, +1)\}$	$X_6^t$
$P_{4,3} = \{(2, 0, +1); 2(1, 2, +1); (4, 1, +1)\}$	$X_6^{-t}$
$P_{4,4} = \{(1, 0, +1); (1, 2, +1); (2, 2, +1); (4, 1, +1)\}$	$X_5^{-t}$
$P_{4,5} = \{(1, 0, +1); (1, 2, +1); (2, 0, +1); (4, 1, +1)\}$	$X_5^t$
$P_{5,1} = \{(1, 2, +1); (2, 0, +1); (3, 1, -1)\};$	$X_7^{-t}$
$P_{5,2} = \{(1, 0, +1); (2, 2, +1); (3, 1, -1)\};$	$X_7^t$
$P_{5,3} = \{(1, 2, +1); (2, 0, +1); (3, 0, +1); (6, 1, +1)\}$	$X_8^t$
$P_{5,4} = \{(1, 0, +1); (2, 2, +1); (3, 0, +1); (6, 1, +1)\}$	$X_8^{-t}$
$P_{5,5} = \{(1, 2, +1); (2, 0, +1); (3, 2, +1); (6, 1, +1)\}$	$X_9^t$
$P_{5,6} = \{(1, 0, +1); (2, 2, +1); (3, 2, +1); (6, 1, +1)\}$	$X_9^{-t}$

Для получения формул, описывающих каждый из потоков  $X_1^t, \dots, X_9^t$ , можно воспользоваться алгоритмом, предложенным в работе [8], где получена полная топологическая классификация потоков Морса-Смейла на поверхностях посредством трехцветных графов. Идея реализации состоит в следующем. Для любого потока  $X_j^t$  замыкания всех сепаратрис седловых состояний равновесия разбивают тор на несвязные компоненты, названные в [1] ячейками, состоящие из блуждающих траекторий, идущих от источника  $\alpha$  к стоку  $\omega$ , входящим в границу ячейки. Канонической моделью ячейки является внутренность квадрата  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , в котором задан поток  $Z^t$  системой уравнений  $\dot{x} = \sin \pi x$ ,  $\dot{y} = \sin \pi y$ . Для получения искомого потока  $X_j^t$  склеим необходимое число копий квадрата  $D$  по схеме, определенной фазовым портретом, в силу диффеоморфизма, сопрягающего ограничения потока  $Z^t$  на соответствующую компоненту границы. Сгладив полученный поток в точках примыкания вершин треугольников, получим поток  $X_j^t$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер, *Качественная теория динамических систем второго порядка*, Наука, Москва, 1966.
2. Безденежных А. Н., Гринес В. З., “Реализация градиентно-подобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях”, *Дифференциальные и интегральные уравнения* / Н. Ф. Отроков. Горький: ГГУ, 1985, 33–37.
3. Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С., “О топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла с одномерным множеством неустойчивых сепаратрис на многообразиях размерности большей 3”, *Труды математического института им. В.А. Стеклова*, **270** (2010), 62-86.
4. Гринес В.З., Починка О.В, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, Ижевск, 2011.
5. D. Rolfsen, “Knots and links”, *Transactions of the American Mathematical Society*, **450**:1 (2003), 26-28.
6. Shub M., “Morse-Smale diffeomorphisms are unipotent on homology”, *Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, salvador, 1971)*, Academic Press, New York,, 1973.
7. Batterson S., “The Dynamics of Morse-Smale Diffeomorphisms on the Torus”, *Transactions of the American Mathematical Society*, **256**. (1979), 395-403.
8. Ошемков А.А., Шарко В. В., “О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях”, *Математический сборник*, **189**:8 (1998), 93-140.
9. Epstein D.B.A., “Curves on 2-manifolds and isotopies”, *Acta math.*, **115** (1966), 83–107.
10. John M.Franks, “A Reduced Zeta Function for Diffeomorphisms”, *American Journal of Mathematics*, **100**:2 (978), 217-243.

## Realization of isotopic classes of gradient-like diffeomorphisms on torus

© Е. Ya. Gurevich<sup>5</sup>, D. T. Syainova<sup>6</sup>

**Abstract.** We specify S. Batterson’s results of [7] where classes of isotopic maps on torus contained Morse-Smale diffeomorphisms are described. Following to ideas of paper [7], we describe isotopic classes, contained gradient-like diffeomorphisms, present all admitted types of periodic data of such diffeomorphisms and provide an algorithm of realization of each type of periodic data.

**Key Words:** isotopic classification, Morse-Smale dynamical system, cascades, gradient-like diffeomorphisms.

---

<sup>5</sup> Associated Professor of Chair of Theory of Control and Dymanics of Machines, Lobachevskii State University, Nizhnii Novgorod; elena\_gurevich@list.ru.

<sup>6</sup> Student of Lobachevskii State University, Nizhnii Novgorod.

УДК 517.929

# Модификация численных методов интегрирования

© А. В. Зубов<sup>1</sup>, Л. Г. Каляда<sup>2</sup>, А. И. Нечаев<sup>3</sup>, И. Г. Ужегов<sup>4</sup>

**Аннотация.** В данной статье предложен новый модифицированный метод численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих кососимметрической матрицей коэффициентов при линейных членах.

**Ключевые слова:** линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений, численный метод, ортогональная фундаментальная матрица

## 1. Введение

Предложим модификацию численных методов интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений, учитывающих физическую природу этих уравнений, т.е. наличие интегралов. Мы будем модифицировать численные методы интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих кососимметрической матрицей коэффициентов при линейных членах. Модифицированные методы являются более точными, чем исходные методы Рунге-Кутты, Адамса-Штермера и другие, и более предпочтительными в задачах интегрирования на больших промежутках. Точность модифицированных методов обусловлена тем, что они сохраняют интеграл однородной системы - свойство ортогональности фундаментальной матрицы.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{X} = A(t)X, \quad (2.1)$$

где  $X = (x_1, \dots, x_n)^*$ ,  $A(t)$  - кососимметрическая  $(n \times n)$ -матрица [1]. Условия теоремы существования и единственности мы будем считать выполненными. Решение задачи Коши  $X = X_0$  при  $t = 0$  дается формулой

$$X(t) = W(t)X_0, \quad (2.2)$$

где  $W(t)$  - фундаментальная матрица, удовлетворяющая соотношениям

$$\dot{W} = A(t)W, \quad W(0) = E.$$

Известно [1], что  $W(t)$  является унитарной матрицей, т.е. выполняется соотношение

$$W(t)W^*(t) = E. \quad (2.3)$$

Предполагаемая модификация численных методов заключается в таком их изменении, что соотношение (2.3) будет выполнено для всей последовательности приближенных значений

<sup>1</sup> Профессор кафедры Теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

<sup>2</sup> Аспирант кафедры Теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

<sup>3</sup> Аспирант кафедры Теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

<sup>4</sup> Аспирант кафедры Теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

$W_k$  фундаментальной матрицы в узлах  $t_k = kh$ , причем это изменение производится в пределах локальной точности метода, что, очевидно, не ухудшает его. Рассмотрим явный метод Эйлера построения последовательности  $W_k$

$$W_{k+1} = W_k + hA(t_k)W_k. \quad (2.4)$$

Поскольку точность этого метода является величиной порядка  $h^2$ , то соотношение

$$W_{k+1} = W_k + hA_k W_k + O(h^2),$$

где элементы матрицы  $O(h^2)$  суть величины порядка  $h^2$ , не "хуже" метода (2.4). Допустим, что соотношение (2.3) на  $n$ -м шаге выполнялось. Тогда имеем

$$W_{n+1}W_{n+1}^* = E - h^2 A_n^2. \quad (2.5)$$

Введем этап коррекции в метод (2.4): вместо матрицы  $W_{n+1}$  в качестве очередного приближенного значения мы будем брать унитарную матрицу  $U_{n+1}$  полярного разложения матрицы  $W_{n+1}$ . Пусть  $W_{n+1} = F_{n+1}U_{n+1}$  - полярное разложение матрицы  $W_{n+1}$ , где  $F_{n+1}$  - симметрическая, положительно определенная матрица,  $U_{n+1}$  - унитарная матрица. Из соотношения (2.5) следует

$$F_{n+1}^2 = E - h^2 A_n^2.$$

Отсюда имеем  $F_{n+1} = E - (\frac{1}{2})h^2 A_n^2 + O(h^2)$ . Оценим величину  $W_{n+1} - U_{n+1}$ . Из последнего соотношения видно, что

$$W_{n+1} - U_{n+1} = -\frac{1}{2}h^2 A_n U_{n+1} - O(h^4)$$

является величиной порядка  $h^2$ , т.е. находится в пределах точности метода (2.4). Обозначим  $U(W)$  операцию нахождения унитарной матрицы  $U$  полярного разложения матрицы  $W$ , т.е.  $U_{n+1} = U(W_{n+1})$ . Таким образом, мы получили двухэтапный вычислительный алгоритм модифицированного метода Эйлера:

$$\tilde{W}_{n+1} = W_n + hA_n W_n$$

$$W_{n+1} = U(\tilde{W}_{n+1}).$$

Покажем теперь, что введение этапа коррекции не ухудшает и методы более высоких порядков. Пусть численный метод

$$W_{n+1} = F(W_{n-q}, W_{n-q+1}, \dots, W_n, \dots, W_{n+s})$$

является методом  $k$ -го порядка, т.е. имеем соотношение

$$W_j = W(jh) + O(h^k).$$

Тогда из соотношения (2.3) следует

$$W_j = W_j^* = F_{j+1}^2 = E + O(h^k).$$

Следовательно,  $F_{j+1} = E + O(h^k)$ , и операция  $U(W_{j+1})$  не выводит нас из пределов точности метода. Итак, вводя этап коррекции

$$W_{j+1} = U(W_{j+1}), \quad (2.6)$$

мы модифицируем исходный численный метод таким образом, что интеграл (2.3) сохраняется, т.е. приближенные значения  $W_j$  удовлетворяют соотношениям (2.3). Покажем теперь применение модифицированных методов при интегрировании неоднородных систем. Рассмотрим систему

$$\dot{X} = A(t)X + F(t, X).$$

По формуле Коши имеем

$$X(t) = W(t)W^{-1}(0)X_0 + \int_0^t W(t)W^{-1}(\tau)F d\tau. \quad (2.7)$$

Используя формулу прямоугольников, можно получить явный алгоритм

$$X_{k+1} = W_{k+1}W_k^*X_k + F(t_k, X_k)(t_{k+1} - t_k)$$

и неявный алгоритм

$$X_{k+1} = W_{k+1}W_k^*X_k + (F(t_k, X_k) + F(t_{k+1}, X_{k+1}))\frac{t_k - t_{k-1}}{2}.$$

Можно выписать также предсказывающее-исправляющий алгоритм

$$\tilde{X}_{k+1} = W_k^*X_k + F(t_k, X_k)(t_{k+1} - t_k),$$

$$X_{k+1} = W_{k+1}W_k^*X_k + F(t_{k+1}, \tilde{X}_{k+1})(t_{k+1} - t_k).$$

Используя формулу Симпсона, а также методы более высоких порядков, мы получим все многообразие подобных методов. Отметим только, что все эти методы решения интегрального уравнения (2.7) будут использовать приближенные значения фундаментальной матрицы  $W$ , которые мы будем строить с учетом корректирующего правила (2.6). Изложим метод построения ортогональной матрицы полярного разложения матрицы  $W = FU$ , использующий аппарат матричных функций Ляпунова. Как было показано выше, в приложениях весьма важной является задача построения полярного разложения невырожденной матрицы, т.е. представления ее в виде произведения симметричной положительно определенной матрицы на ортогональную. Такое представление всегда возможно и однозначно [2]. Пусть  $A$  - заданная невырожденная  $(n \times n)$  - матрица. Требуется найти симметрическую положительно определенную матрицу  $F$  и ортогональную матрицу  $U$  такие, что выполняется соотношение

$$A = FU. \quad (2.8)$$

Введем в рассмотрение множество  $M_n$  квадратных матриц порядка  $n$  и множество  $D_n$  невырожденных матриц того же порядка. Множество  $M_n$  является линейным нормированным пространством с нормой, определяемой соотношением

$$\|C\| = \max_{X \in E_n} \frac{\|CX\|}{\|X\|}, \quad (2.9)$$

где  $C \in M_n$ ,  $X \in E_n$ . На множестве  $M_n$  можно задать динамическую систему, определяемую матричной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = F(X, t), \quad (2.10)$$

где  $X, F \in M$ ; для  $F$  выполнены условия, обеспечивающие существование, единственность и продолжимость на интервале  $(t_0, \infty)$  решений; точка обозначает дифференцирование по параметру  $t$ . Поставим следующую задачу: построить такую дифференциальную систему вида (2.10), что решение задачи Коши с начальным условием  $X = X_0$  при  $t = t_0 = 0$  сходится к значению матрицы  $U$  полярного разложения (2.8). Таким образом, мы сведем первоначальную задачу к численному интегрированию построенной системы дифференциальных уравнений. Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение

$$\dot{X} = \frac{1}{2}(-X + X^{\star-1}). \quad (2.11)$$

Обозначим  $X(t, X_0)$  решение системы (2.11), удовлетворяющее начальному условию  $X = X_0$  при  $t = 0$ .

**Т е о р е м а 2.1.** *Если матрица начальных условий  $X_0$  невырожденная, то решение  $X(t, X_0)$  системы (2.11) также будет невырожденной матрицей при  $t > 0$ , причем решение  $X(t, X_0)$  неограниченно продолжимо при  $t > 0$  [2].*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Сначала покажем, что при  $t > 0$  выполняется условие

$$X(t, X_0) \in D_n. \quad (2.12)$$

Предложим противное, а именно, пусть существует момент времени  $t_1$ , в который выполнено соотношение  $\det(X(t_1, X_0)X^{\star}(t_1, X_0)) \neq 0$ . Тогда справедливо равенство

$$\det(X(t_1, X_0)X^{\star}(t_1, X_0)) \neq 0. \quad (2.13)$$

Введем в рассмотрение матричную функцию  $V = XX^{\star}$ , заданную в  $M_n$ . Эта функция удовлетворяет на решениях системы (2.11) следующему уравнению:

$$\dot{V} = -V + E. \quad (2.14)$$

Интегрируя, получаем [3]

$$V = (V_0 - E)\exp(-t) + E. \quad (2.15)$$

В силу того, что матрица  $V_0 = X_0X_0^{\star}$  является симметрической и положительно определенной, из формулы (2.14) следует, что при  $t \geq 0$  определитель матрицы  $V$  не обращается в нуль, что находится в противоречии с формулой (2.12), которое и доказывает справедливость условия (2.12). Необходимым и достаточным условием продолжимости решений системы (2.11) является расходимость интегралов  $\int_0^t \dot{v}_{ij}^{-1} dv_{ij}$ . Из (2.13) имеем

$$\int_0^t v_{ij}^{-1} dv_{ij} = -\ln(v_{ij} - \delta_{ij})|_0^t,$$

где  $\delta_{ij}$  - символ Кронеккера [4]. Расходимость интеграла следует из формулы (2.14), так как из нее вытекает  $v_{ij} \rightarrow \delta_{ij}$ , и выражение в правой части последнего соотношения неограничено.

**Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.**

**Т е о р е м а 2.2.** *Решение  $X(t, X_0)$  системы (2.11) с начальным условием  $X_0 = A$  сходится при  $t \rightarrow \infty$  к значению матрицы  $U$  полярного разложения (2.8), причем справедлива оценка*

$$\|X(t, A) - U\| < \|AA^* - E\| \exp(-t). \quad (2.16)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Поскольку решение  $X(t, A)$  удовлетворяет условиям теоремы 2.1., то оно представимо единственным образом в виде

$$X(t, A) = F(t)U(t), \quad (2.17)$$

где  $F(t), U(t)$  - матрицы полярного разложения. Отметим, что  $F(0) = F$ ,  $U(0) = U$ . Подставляя выражение (2.16) в уравнение (2.11), можно получить следующее соотношение:

$$\dot{F}(t)F(t) + F(t)\dot{U}(t)U^*(t)F(t) = F(t)U(t)\dot{U}^*(t)F(t) + F(t)\dot{F}(t). \quad (2.18)$$

Из (2.14) следует, что матрица  $F(t)$  представляет собой ряд по целым отрицательным степеням экспоненциальной функции параметра  $t$  с коэффициентами, являющимися постоянными симметрическими матрицами:

$$F(t) = E + \frac{1}{2}(F^2 - E)e^{-t} - \frac{1}{4}(F^2 - E)^2e^{-2t} + \dots$$

Следовательно, имеет место тождество

$$\dot{F}(t)F(t) \equiv F(t)\dot{F}(t). \quad (2.19)$$

Рассматривая совместно выражения (2.17), (2.18) и условие ортогональности  $\dot{U}(t)U^*(t) + U(t)\dot{U}^*(t) = 0$ , получаем, что имеет место соотношение [5]

$$\dot{U}(t) = 0 \text{ или } U(t) \equiv \text{const} = U.$$

Поскольку  $\|F(t) - E\| \rightarrow 0$  в силу (2.14), справедливо следующее утверждение:

$$X(t, A) - U \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Оценку (2.15) получаем следующим образом. По свойству нормы (2.19) можно выписать цепочку равенств и неравенств

$$\begin{aligned} \|X(t, A) - U\| &= \|(F(t) - E)U(t)\| \leq \|F(t) - E\| = \\ &= \|(F^2(t) - E)(F(t) + E)^{-1}\| < \|F^2(t) - E\| = \\ &= \|F^2 - E\| \exp(-t) = \|AA^* - E\| \exp(-t). \end{aligned}$$

При оценке нормы  $\|F^2(t) - E\|$  мы использовали выражение (2.14).

**Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.**

### 3. Выводы

На основании доказанных теорем можно утверждать, что значение матрицы  $U$  можно получить, численно проинтегрировав систему (2.11) с начальным условием  $X_0 = A$  при  $t = 0$ . Точность нахождения матрицы  $U$  будет зависеть как от длины интервала интегрирования, так и от точности самого метода интегрирования.

**Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-000624.)**

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И.В.Зубов, Н.В.Зубов, М.В.Стрекопытова, *Анализ управляемых систем и равновесных движений*, ВВМ, СПб., 2012, 322 с.
2. А.Ф. Зубова, *Математические методы моделирования промышленных процессов и технологий*, СПбГУ, СПб., 2004, 472 с.
3. А.В.Зубов, Н.В.Зубов, С.В.Зубов, А.Ф.Зубова, *Математические методы исследования устойчивости и надежности технических систем*, ВВМ, СПб., 2011, 362 с.
4. А.В.Зубов, Н.В.Зубов, *Динамическая безопасность управляемых систем*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб., 2009, 172 с.
5. А.В.Зубов, С.В.Зубов, *Математические методы качественного анализа систем управления и устойчивость расчетных движений*, АООТ «Мобильность-Плюс», СПб., 2012, 357 с.

## The modification of calculating methods integration

© A. V. Zubov<sup>5</sup>, L. G. Caleda<sup>6</sup>, A. I. Nechaev<sup>7</sup>, I. G. Ugegov<sup>8</sup>

**Abstract.** In giving article is supposes the new modification method calculating integration of systems ordinary differential equations is obtains crosssymmetrical matrix coefficients by linear numbers/

**Key Words:** linear system of ordinary differential equations, numerical method, orthogonal fundamental matrix.

---

<sup>5</sup> Professor of the Department of management theories, St. Petersburg State University; ddemidova@mail.ru

<sup>6</sup> Post-graduate of the Department of management theories, St. Petersburg State University; ddemidova@mail.ru

<sup>7</sup> Post-graduate of the Department of management theories, St. Petersburg State University; ddemidova@mail.ru

<sup>8</sup> Post-graduate of the Department of management theories, St. Petersburg State University; ddemidova@mail.ru

УДК 517.938

# О структуре неблуждающего множества эндоморфизмов одномерных ветвленных многообразий

© Н. В. Исаенкова<sup>1</sup>, Е. В. Жужома<sup>2</sup>, А. Е. Шишенкова<sup>3</sup>

**Аннотация.** В статье рассматриваются эндоморфизмы одномерных ветвленных многообразий с двумя точками ветвления. Главный результат состоит в изучении неблуждающего множества таких эндоморфизмов

**Ключевые слова:** Неблуждающее множество, неособый эндоморфизм, одномерное ветвленное многообразие

## 1. Введение

Каноническим примером эндоморфизма окружности является линейное отображение  $E_d(x) = dx \pmod{1}$ ,  $d \geq 2$ , где  $S^1$  наделена циклической координатой  $x \pmod{1}$ . Напомним, сюръективное  $C^1$  отображение  $g : S^1 \rightarrow S^1$  называется *эндоморфизмом* [8]. Эндоморфизм  $g$  называется *неособым*, если его производная  $Dg \neq 0$  [6]. Поскольку  $d \geq 2$ , то  $E_d$  является растягивающим эндоморфизмом ( $g : S^1 \rightarrow S^1$  - *растягивающий* эндоморфизм, если  $Dg > 1$ ). Шуб [8] классифицировал растягивающиеся эндоморфизмы, показав, что степень является полным инвариантом сопряженности в классе растягивающих эндоморфизмов.

Якобсон [4] рассматривал  $C^r$ -эндоморфизмы ( $r \geq 1$ ), которые могут иметь точки, в которых производная обращается в нуль. В [4] выделялось инвариантное множество  $\Sigma$  канторовского типа, принадлежащее неблуждающему множеству  $\Omega$ , и вводилось понятие  $\Sigma$ -устойчивости, аналогичное понятию  $\Omega$ -устойчивости. Обозначим через  $Diff^1(M)$  пространство  $C^1$  диффеоморфизмов многообразия  $M$ , наделенное равномерной  $C^1$  топологией. Диффеоморфизм  $f \in Diff^1(M)$  называется  $\Omega$ -устойчивым, если существует его окрестность  $U(f) \subset Diff^1(M)$  такая, что любой  $g \in U(f)$   $\Omega$ -сопряжен  $f$ . Диффеоморфизм  $f \in Diff^1(M)$  называется *структурно устойчивым*, если существует его окрестность  $U(f) \subset Diff^1(M)$  такая, что любой диффеоморфизм  $g \in U(f)$  сопряжен  $f$ . Было показано, что ограничения  $f|_\Sigma$  и  $f|_\Omega$  эндоморфизма  $f$  на  $\Sigma$  и  $\Omega$  соответственно сопряжены односторонним марковским цепям с конечным числом состояний.

Нитецки [6] описал неблуждающее множество структурно устойчивых неособых  $C^r$ -эндоморфизмов окружности (отметим что растягивающие эндоморфизмы структурно устойчивы, но существуют отличные от растягивающих структурно устойчивые эндоморфизмы).

Неособые эндоморфизмы образуют важный класс  $d$ -накрытий окружности.  $d$ -*накрытием* окружности  $S^1$  называется сюръективный локальный гомеоморфизм  $S^1 \rightarrow S^1$  степени  $|d| \geq 2$ , при этом прообраз каждой точки состоит из  $|d| \in \mathbb{N}$  точек. В статье [3] сделана классификация  $d$ -накрытий окружности  $S^1$  с точностью до сопряженности с помощью сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов (основные понятия и определения

<sup>1</sup> Доцент Нижегородской академии МВД России, Нижний Новгород; nisaenkova@mail.ru

<sup>2</sup> Профессор кафедры Теории управления и динамики машин ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; zhuzhoma@mail.ru.

<sup>3</sup> Доцент кафедры высшей математики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru.

теории динамических систем см. в [1], [2]). В [3] рассматриваются сохраняющие ориентацию  $d$ -накрытия, когда  $d > 0$  и показано, что полным классификационным инвариантом с точностью до  $d$ -эквивалентности является наделенное схемой инвариантное счетное множество (отмеченное множество) линейного растягивающего эндоморфизма степени  $d$ . Как следствие получена классификация неособых эндоморфизмов, включая важный класс структурно устойчивых эндоморфизмов. Также в статье [3] изучено неблуждающее множество  $d$ -накрытий окружности, а именно, показано, что оно содержит канторовское множество плюс периодические точки из открытых смежных интервалов.

*Благодарности.* Авторы благодарят В. З. Гринеса, О. В. Починку, С. В. Гонченко за плодотворные обсуждения. Исследования проводились при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, а именно, грантов 12-01-00672-а и 13-01-12452-офи-м.

Важным обобщением эндоморфизмов окружности  $S^1$  являются эндоморфизмы одномерных ветвленных многообразий, введенных Вильямсом в статье [9] для изучения одномерных растягивающихся аттракторов. В данной статье мы будем рассматривать неособые эндоморфизмы одномерных ветвленных многообразий, с одним только отличием, что эндоморфизмы не обязательно должны быть растягивающимися.

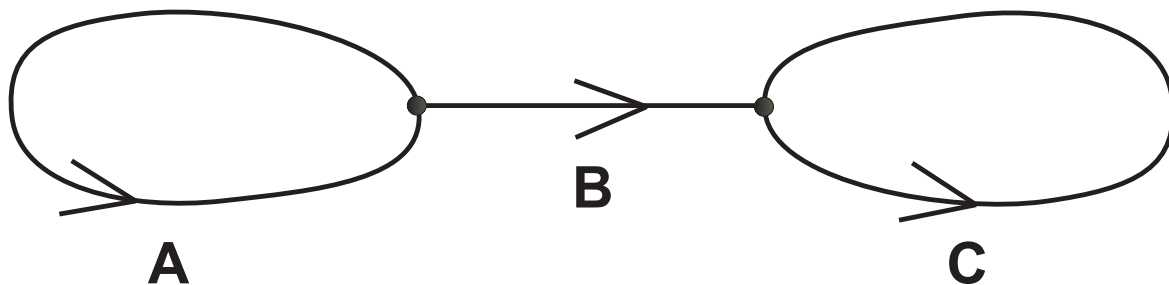
Основной целью данной статьи является изучение неблуждающего множества неособых эндоморфизмов одномерных ветвленных многообразий следующего вида:

$$A \longrightarrow -B + A + B$$

$$B \longrightarrow C - B + A$$

$$C \longrightarrow B + C - B$$

Рассмотрим одномерное ветвленное многообразие  $\mathbb{K}$ , и пусть  $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  – неособый эндоморфизм. Обозначим буквой  $\Upsilon$  – класс неособых эндоморфизмов одномерного ветвленного многообразия, см. рис. 1.1).



Р и с у н о к 1.1

Отображение Вильямса

Перейдем к необходимым определениям и формулировке основного результата. Напомним, неблуждающее множество  $NW(f)$  определяется как множество неблуждающих точек и является  $f$ -инвариантным и замкнутым. Точка  $x \in M$  является *неблуждающей*, если для любой ее окрестности  $U$  пересечение  $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$  для бесконечного множества положительных  $n$ .

Будем говорить, что отображение  $f_1 : S^1 \rightarrow S^1$  *полусопряжено*  $f_2 : S^1 \rightarrow S^1$ , если существует сохраняющее ориентацию непрерывное отображение  $h : S^1 \rightarrow S^1$  такое, что

$h \circ f_1 = f_2 \circ h$ , то есть имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f_1} & S^1 \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ S^1 & \xrightarrow{f_2} & S^1. \end{array}$$

Если  $h$  - гомеоморфизм, то  $f_1, f_2$  называются *сопряженными* отображениями.

Как будет показано далее, для изучения неблуждающего множества эндоморфизмов из класса  $\Upsilon$  необходимо знать структуру неблуждающего множества неособых эндоморфизмов окружности, которая подробно описана в статье [3].

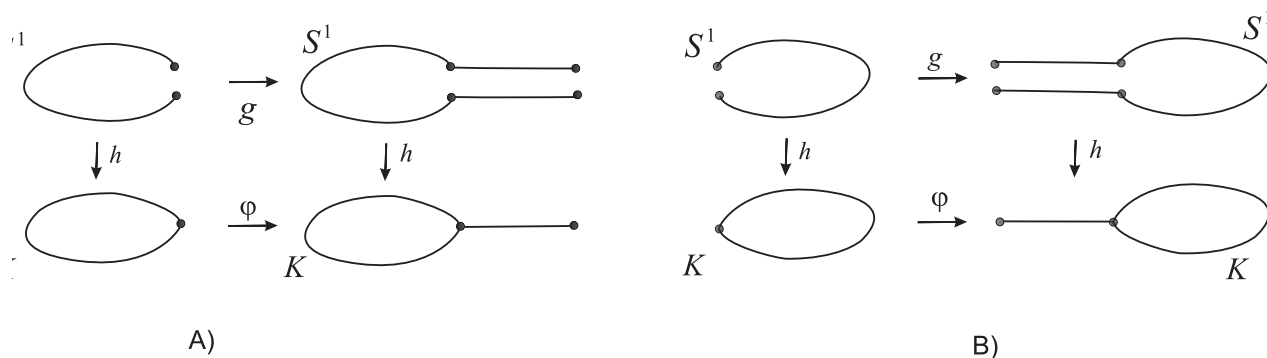
Итак, пусть  $g : S^1 \rightarrow S^1$  - неособый эндоморфизм окружности степени  $d \geq 2$ . Рассмотрим непрерывное и сохраняющее ориентацию отображение  $h : S^1 \rightarrow h(S^1) = S^1$ . Обозначим через  $\Sigma^\circ$  подмножество таких  $x \in S^1$ , что  $h^{-1}(h(x))$  - одна точка. Множество  $S^1 \setminus \Sigma^\circ$  представляет собой объединение попарно непересекающихся замкнутых интервалов.  $S^1 \setminus \Sigma^\circ = \cup_{i=1}^\infty [a_i, b_i]$ , причем можно считать, что  $h^{-1}(h[a_i, b_i]) = [a_i, b_i]$  для всех  $i \in \mathbb{N}$ , и  $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] = \emptyset$ , при  $i \neq j$ . Интервалы  $[a_i, b_i]$  называются *смежными*. Соответствующие открытые интервалы  $(a_i, b_i)$  - *открытыми смежными*. Смежный интервал  $[a, b]$  называется *периодическим*, если  $g^k([a, b]) = [a, b]$  для некоторого  $k \in \mathbb{N}$ , концевые точки периодического смежного интервала являются периодическими точками. Обозначим через  $\Sigma_g$  объединение  $\Sigma^\circ$  со всеми концевыми точками  $a_i, b_i$  смежных интервалов множества  $S^1 \setminus \Sigma^\circ$ ,  $\Sigma_g = \Sigma^\circ \cup_{i \geq 1} (\{a_i\} \cup \{b_i\})$ .

Если  $g$  - транзитивный эндоморфизм, то  $NW(g) = S^1$ . В статье [3] показано, что если  $g : S^1 \rightarrow S^1$  - неособый и нетранзитивный эндоморфизм степени  $d \geq 2$ , тогда его неблуждающее множество  $NW(g)$  есть объединение  $\Sigma_g$  со всеми периодическими точками из открытых смежных интервалов.

## 2. Доказательство основных результатов

**Т е о р е м а 2.1.** Пусть  $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  - неособый эндоморфизм из класса  $\Upsilon$ . Тогда его неблуждающее множество  $NW(\varphi)$  есть объединение канторовского множества со всеми периодическими промежутками из открытых смежных интервалов.

Ключевым утверждением для доказательства теоремы 2.1. является тот факт, что любой эндоморфизм из класса  $\Upsilon$  полусопряжен с некоторым неособым эндоморфизмом окружности.

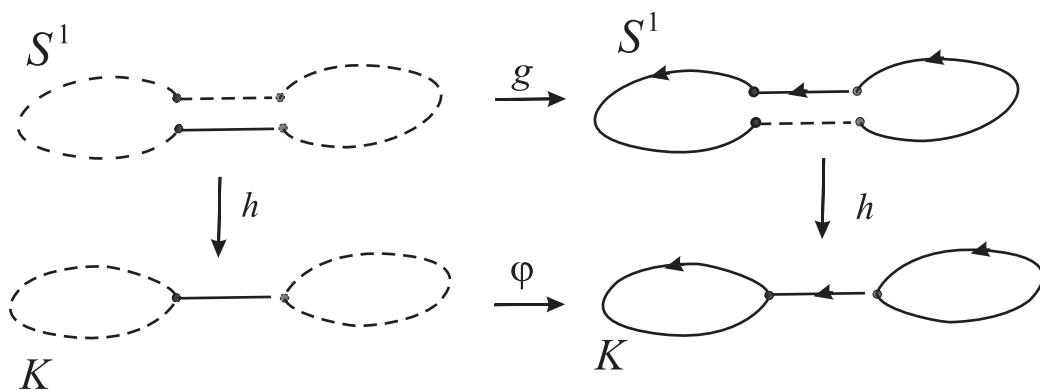


Р и с у н о к 2.1

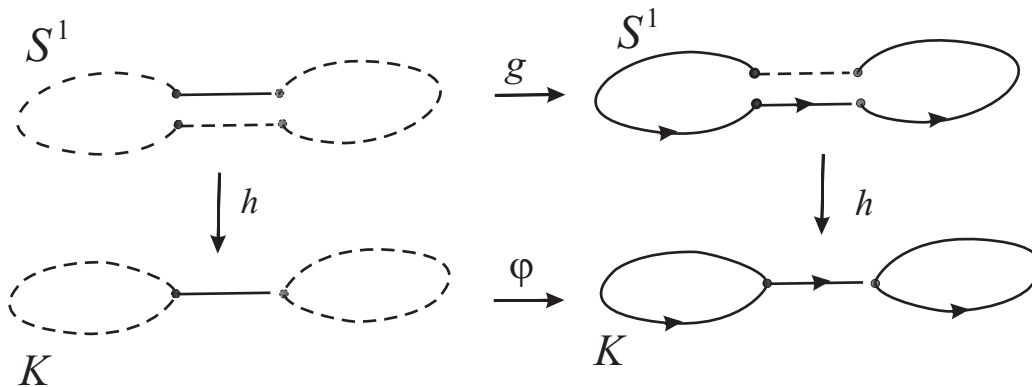
**Л е м м а 2.1.** Пусть  $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  - неособый эндоморфизм из класса  $\Upsilon$ , тогда существует неособый эндоморфизм окружности  $S^1$   $g : S^1 \rightarrow S^1$  и непрерывное отображение  $h : S^1 \rightarrow \mathbb{K}$ , полусопрягающее  $\varphi$  с  $g$ , то есть имеет место равенство  $h \circ g = \varphi \circ h$  и верна следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{g} & S^1 \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \mathbb{K} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{K} \end{array}$$

*Доказательство.* Рисунки 2.1), 2.2), 2.3) демонстрируют геометрическое построение полусопрягающего отображения.



Р и с у н о к 2.2



Р и с у н о к 2.3

□

**С л е д с т в и е 2.1.** Пусть выполнены условия леммы 2.1. Тогда для любого  $n \in \mathbb{N}$  имеет место равенство  $h \circ g^n = \varphi^n \circ h$ .

Осталось показать, что полусопрягающее отображение переводит неблуждающее множество неособого эндоморфизма окружности  $g$  в неблуждающее множество эндоморфизма одномерного ветвленного многообразия  $\varphi$ .

**Л е м м а 2.2.** Пусть  $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  - неособый эндоморфизм из класса  $\Upsilon$ ,  $g : S^1 \rightarrow S^1$  неособый эндоморфизм окружности  $S^1$ , тогда имеет место следующее включение

$$h(NW(g)) \subset NW(\varphi).$$

*Доказательство.* Для  $x \in h(NW(g))$ , покажем, что  $h(x) \in NW(\varphi)$ .

Возьмем любую  $\varepsilon$ -окрестность точки  $h(x)$  -  $U_\varepsilon(h(x))$ , тогда  $h^{-1}[U_\varepsilon(h(x))] = V(x)$  - окрестность точки  $x$ ,  $x \in S^1$ . Так как точка  $x \in NW(g)$ , существует  $n_0 \geq 0$  такое, что  $g^{n_0}[V(x)] \cap V(x) \neq \emptyset$ , следовательно  $h[g^{n_0}[V(x)] \cap V(x)] \neq \emptyset$ . Поскольку  $h$  - непрерывное отображение, верно следующее включение  $h[g^{n_0}[V(x)] \cap V(x)] \subset h \circ g^{n_0}[V(x)] \cap h[V(x)]$ . Значит,  $h \circ g^{n_0}[V(x)] \cap h[V(x)] \neq \emptyset$ . В силу следствия 2.1.,  $\varphi^{n_0} \circ h[V(x)] \cap h[V(x)] \neq \emptyset$ . Таким образом,  $h[V(x)] = U_\varepsilon(h(x))$ , и тогда  $\varphi^{n_0}[U_\varepsilon(h(x))] \cap U_\varepsilon(h(x)) \neq \emptyset$ , что означает  $h(x) \in NW(\varphi)$ . □

Используя результаты [3] и лемму 2.1., можно показать и обратное включение  $h^{-1}(NW(\varphi)) \subset NW(g)$ . Отсюда и леммы 2.2. вытекает равенство  $NW(g) = NW(\varphi)$ . Теперь утверждение теоремы 2.1. следует из [3].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аносов Д.В., "Исходные понятия. В сб. серии "Современные проблемы математики Фундаментальные направления (Итоги науки и техники).", *Динамические системы* - 1 (под ред. Д. В. Аносова), **1** (1985), 156-178.
2. Аносов Д.В., Солодов В.В., "Гиперболические множества.", *Динамические системы* - 9 (под ред. Д. В. Аносова), **66** (1991), 12-99.

3. Жужома Е.В., Исаенкова Н.В., “Классификация накрытий окружности.”, *Труды МИАН. Российская академия наук*, **3** (2012), 96-101.
4. Якобсон М.В., “О гладких отображениях окружности в себя”, *Матем. сборник*, 1971, 163-188.
5. Куратовский Л., *Топология*, **3**, Москва, Мир, 1966.
6. Nitecki Z., “Nonsingular endomorphisms of the circle”, *Proc. Symp. Pure Math.*, 1970, 203-220.
7. Robinson C., *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. Studies in Adv. Math., Sec. edition*, CRC Press, 1999.
8. Shub M., “Endomorphisms of compact differentiable manifolds”, *Amer. Journ. Math.*, **91** (1969), 175-199.
9. Williams R.F., “One-dimensional non-wandering sets”, *Topology*, **6** (1967), 473-487.
10. Williams R., “Expanding attractors”, *Publ. Math. IHES*, **43** (1974), 169-203.

## Solenoidal basic sets of Smale-Vietoris A-diffeomorphisms

© N. Isaenkova<sup>4</sup>, E. Zhuzhoma<sup>5</sup>, A. Shishenkova<sup>6</sup>

**Abstract.** In the article, one considers the endomorphisms of the class  $\Upsilon$  of branched 1-manifolds with two branch points. The main result is a description of non-wandering set the endomorphisms of the class  $\Upsilon$ .

**Key Words:** Non-wandering set, nonsingular endomorphism, branched 1-manifold.

---

<sup>4</sup> Associated professor of MIA academy of Nizhnii Novgorod; math-ngaa@yandex.ru, nisaenkova@mail.ru

<sup>5</sup> Professor of Chair of Theory of Control and Dynamics of Machines, Lobachevskii State University, Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.

<sup>6</sup> Assistant professor of department of higher mathematic, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math@agri.sci-nnov.ru

УДК 517.9

# Отношение порядка в системах авторепродукции

© О. А. Кузенков<sup>1</sup>, Е. А. Рябова<sup>2</sup>

**Аннотация.** Вводится порядок предпочтения на системе измеримых множеств, исходя из некоторого заданного процесса динамики положительной меры. Определяются ограничения на ресурс управления, при которых в исследуемой системе авторепродукции можно получить порядок, удовлетворяющий заранее заданным требованиям. Рассматривается решение задачи для управляемой обобщенной репликаторной системы с распределенными параметрами.

**Ключевые слова:** самовоспроизводящиеся системы, динамика меры, отношение строгого порядка, оптимальное управление

## 1. Введение

Работа посвящена изучению предельного поведения решения в управляемых системах авторепродукции (наследования). Процессы авторепродукции широко распространены в окружающей действительности, наблюдаются в физических, информационных [1], биологических системах [2], [??], [4], [5].

В [6] исследовалось поведение систем авторепродукции в общем виде. В работе [7] была предложена обобщенная модель таких систем в виде уравнения с наследованием, являющегося частным случаем уравнения динамики меры. Правая часть уравнения с наследованием определяется как произведение непрерывной функции и меры. В случае, когда мера является абсолютно непрерывной, это уравнение сводится к интегро-дифференциальному. В работах [8], [9] был рассмотрен ряд интегро-дифференциальных уравнений и уравнений в банаховом пространстве, которые могут описывать модели авторепродукции. Эти уравнения являются обобщением репликаторных систем на случай распределенных параметров [10], [11], [12]. Указанные уравнения представляют основу для создания современной общей математической теории отбора [13], [14], [15].

Исследование уравнений с наследованием показывает, что их решения обладают важным свойством сужения носителя меры или, что то же самое, локализации меры с течением времени на некоторых измеримых подмножествах [16], [17]. Таким образом, имеет место неравноценность в системе измеримых подмножеств с точки зрения предельного поведения решения. Это свойство получило название теоремы об отборе, оно имеет ключевое значение для моделирования процессов отбора в самых разных предметных областях. Благодаря ему создается возможность с помощью предельных характеристик решения устанавливать порядок предпочтительности для измеримых подмножеств в соответствующем измеримом пространстве. Такой способ установления порядка обобщает подход, использованный в [18], [19] для установления порядка предпочтительности в сосредоточенной системе с помощью предельных соотношений между фазовыми координатами.

Если на систему осуществляется внешнее управление, то при определенных условиях можно подобрать его так, чтобы полученный в результате порядок удовлетворял заранее

<sup>1</sup> Доцент кафедры численного и функционального анализа, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; kuzenkov\_o@mail.ru

<sup>2</sup> Старший преподаватель кафедры численного и функционального анализа, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; riabova-ea@rambler.ru

заданным требованиям. В статье определяются условия на ресурс управления, при котором выбор такого управления возможен для одного класса уравнений с наследованием. Рассмотрен ряд примеров. Реализуемая в статье методика является обобщением методики работы, успешно примененной для сосредоточенных систем [18].

## 2. Отношение строгого порядка на системе измеримых множеств

Пусть  $X$  — компактное топологическое пространство,  $\Sigma$  — борелевская  $\sigma$ -алгебра в нем;  $\text{frm}(X)$  — банахово пространство мер Радона (конечных регулярных борелевских мер на  $X$  с нормой меры  $\mu$ , равной ее вариации на множестве  $X$ :  $\|\mu\| = |\mu|(X)$  [20]);  $\text{frm}_+(X)$  — семейство положительных мер на  $X$  из  $\text{frm}(X)$ ;  $\text{frm}(X, \mu_0)$  — семейство мер из  $\text{frm}(X)$ , абсолютно непрерывных относительно некоторой меры  $\mu_0 \in \text{frm}_+(X)$ ,  $\mathbf{L}_1(X, \mu_0)$  — банахово пространство всех суммируемых по Лебегу функций по мере  $\mu_0$  с нормой  $\|w\| = \int_X w \mu_0(dx)$ ,  $\mathbf{L}_\infty(X)$  — пространство ограниченных измеримых функций;  $\mathbf{C}(X)$  — пространство непрерывных функций;  $\mathbb{R}_+$  — множество неотрицательных действительных чисел.

Рассмотрим задачу Коши в банаховом пространстве  $\text{frm}(X)$ : найти непрерывную по  $t$  при  $t \geq 0$ , дифференцируемую по  $t$  при  $t > 0$  функцию  $\mu[t]$ , удовлетворяющую уравнению и начальному условию

$$\mu'_t = F[\mu], \quad \mu[0] = \mu_0, \quad (2.1)$$

где  $\mu[t] : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{frm}(X)$ ,  $\mu_0 \in \text{frm}(X)$ , оператор  $F[\mu] : \text{frm}(X) \rightarrow \text{frm}(X)$  удовлетворяет в некоторой окрестности меры  $\mu_0$  условию Липшица.

Введем следующие обозначения:  $\mu[t](A)$  — мера  $\mu$  множества  $A$  в момент времени  $t$ ,  $F[\mu](A)$  — значение на множестве  $A$  результата действия оператора  $F$  на меру  $\mu$ .

Известно [21], что, если для фиксированного измеримого множества  $A$  оператор  $F$  подчиняется условию

$$F[\mu](A) \geq 0 \quad \text{при} \quad \mu(A) = 0,$$

то при  $\mu_0(A) \geq 0$  решение задачи Коши (2.1) удовлетворяет неравенству  $\mu[t](A) \geq 0$  во все моменты времени  $t > 0$ . Если это условие и неравенство  $\mu_0(A) \geq 0$  выполняются для любого измеримого множества  $A$ , то решение задачи Коши (2.1) остается в семействе  $\text{frm}_+(X)$ . Если же для фиксированного измеримого множества  $A$  выполняется равенство

$$F[\mu](A) = 0 \quad \text{при} \quad \mu(A) = 0, \quad (2.2)$$

то при  $\mu_0(A) > 0$  решение задачи Коши (2.1) удовлетворяет неравенству  $\mu[t](A) > 0$  для всех  $t > 0$ . Кроме того, если  $\mu_0(A) = 0$ , то  $\mu[t](A) = 0$  для любого  $t > 0$ .

Следовательно, в случае (2.2) меры  $\mu_0$  и  $\mu[t]$  взаимно абсолютно непрерывны. Тогда ограниченные измеримые функции  $b(x)$  и  $g(x)$ , эквивалентные в мере  $\mu_0$ , будут эквивалентны в любой мере  $\mu[t]$ , и существенная точная верхняя грань функции  $b(x)$  на некотором измеримом множестве  $A \subset X$  относительно меры  $\mu_0$  [22]:

$$\text{vraisup}_{x \in A} b(x) \triangleq \inf_{\forall g \sim b} \left( \sup_{x \in A} g(x) \right)$$

не изменится при переходе от меры  $\mu_0$  к любой мере  $\mu[t]$ . То же справедливо и для существенной точной нижней грани функции  $b(x)$  на множестве  $A$ .

Известно [20], что пространство  $\text{frm}(X)$  является сопряженным к  $\mathbf{C}(X)$ :  $\text{frm}(X) = \mathbf{C}^*(X)$ , то есть представляет собой совокупность линейных непрерывных функционалов над множеством непрерывных функций. Пусть  $k(x) \in \mathbf{L}_\infty(X)$  — измеримая ограниченная функция на  $X$ ,  $\mu \in \text{frm}(X)$ , тогда для любой непрерывной функции  $v(x) \in \mathbf{C}(X)$  определен интеграл Лебега  $\int_X k(x)v(x)\mu(dx)$ , который каждому элементу  $v(x) \in \mathbf{C}(X)$  ставит в соответствие действительное число, тем самым этот интеграл задает линейный непрерывный функционал на пространстве  $\mathbf{C}(X)$ . Следовательно, существует элемент из  $\text{frm}(X)$ , который соответствует этому функционалу. Будем обозначать этот элемент  $k\mu$  и называть его произведением функции  $k(x)$  на меру  $\mu$  [7]. Очевидно, для любого измеримого множества имеет место тождество

$$\int_A v(x)[k\mu](dx) \equiv \int_A k(x)v(x)\mu(dx).$$

Пусть оператор задается в виде

$$F[\mu] = k[\mu]\mu, \quad (2.3)$$

где оператор  $k[\mu] : \text{frm}(X) \rightarrow \mathbf{L}_\infty(X)$ ,  $k[\mu]\mu$  — произведение меры  $\mu$  на функцию  $k$ . Уравнение (2.1), (2.3) называется уравнением с наследованием. Нетрудно видеть, что оператор (2.3) удовлетворяет условию (2.2).

В частности оператор  $k[\mu]$  может иметь следующий вид:

$$k[\mu](x) = Q[\mu]b(x) + P[\mu], \quad (2.4)$$

где  $Q[\mu], P[\mu]$  — ограниченные непрерывные функционалы, определенные на  $\text{frm}_+(X)$ ,  $b(x)$  — ограниченная измеримая функция.

Пусть поставлена задача Коши (2.1), где  $\mu_0$  — положительная мера, и решение этой задачи на некоторых измеримых подмножествах  $A, B$  множества  $X$  не обращается в ноль:  $\mu[t](A) > 0$ ,  $\mu[t](B) > 0$ . Введем на парах  $(A, B)$  элементов множества  $\Sigma$  отношение строгого порядка следующим образом.

**О п р е д е л е н и е 2.1.** Будем считать, что подмножество  $A$  находится в отношении строгого предпочтения с подмножеством  $B$ :

$$A \succ B, \quad \text{если} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu[t](B)}{\mu[t](A)} = 0 \quad (2.5)$$

вдоль решения  $\mu[t]$  задачи (2.1); и будем считать, что подмножество  $A$  находится в отношении нестрогого предпочтения с подмножеством  $B$ :

$$A \succcurlyeq B, \quad \text{если} \quad A \succ B \quad \text{или} \quad A = B.$$

Нетрудно убедиться, что введенное отношение нестрогого предпочтения удовлетворяет аксиомам частичного порядка: 1) рефлексивности  $A \succcurlyeq A$ ; 2) транзитивности:  $A \succcurlyeq B$  и  $B \succcurlyeq C$ , то  $A \succcurlyeq C$ ; 3) антисимметричности: если  $A \succcurlyeq B$  и  $B \succcurlyeq A$ , то  $A = B$ .

Заметим, что если в задаче (2.1) изменить начальные условия  $\mu_0$ , то порядок, введенный отношением нестрогого предпочтения, вообще говоря, изменится.

**Л е м м а 2.1.** Если для измеримого множества  $\Omega \subset X$ ,  $0 < \mu_0(\Omega) < \mu_0(X)$ , найдется подмножество  $\omega \subset \Omega$ ,  $\mu_0(\omega) > 0$ , для которого выполняется неравенство

$$\text{vraiinf}_{x \in \omega} b(x) > \text{vraisup}_{x \in \bar{\Omega}} b(x), \quad (2.6)$$

то  $\omega \succ \bar{\Omega}$  и множество  $\Omega$  находится в отношении строгого предпочтения со своим дополнением  $(\Omega \succ \bar{\Omega})$  относительно уравнения динамики меры (2.1), (2.3), (2.4), в котором функционал  $Q[\mu]$  ограничен снизу положительной константой  $q$ .

### 3. Система динамики положительной меры: предельные возможности управления

Введенный порядок предпочтения в системе измеримых подмножеств целиком зависит от системы динамики меры. Он может быть изменен, если на систему оказывается какое-либо внешнее воздействие — управление. Можно поставить задачу изменения порядка с помощью допустимого управления.

В качестве примера рассмотрим уравнение с наследованием вида (2.1), (2.3), (2.4), описывающее управляемую динамику положительной меры Радона:

$$\mu'_t = (Q[\mu, u](b + u) + P[\mu, u])\mu \quad (3.1)$$

с начальным условием

$$\mu[0] = \mu_0, \quad \mu_0 \geq 0. \quad (3.2)$$

Здесь управляющая функция  $u = u(t, x)$  — измеримая, удовлетворяющая ограничению

$$|u(t, x)| \leq c, \quad (3.3)$$

в котором  $c$  — некоторая константа; функционалы  $Q, P$  определенные на декартовом произведении  $\text{fm}_+(X) \times \mathbf{L}_\infty(X)$  ограничены и непрерывны,  $Q[\mu, u] \geq q > 0$ , где  $q$  — положительная константа;  $b = b(x)$  принадлежит пространству  $\mathbf{L}_\infty(X)$ .

Для конечномерного случая уравнение в форме (3.1) рассматривалось в [18].

Предполагается, что задача (3.1), (3.2) имеет единственное решение  $\mu[t]$ , бесконечно продолжаемое по переменной  $t$  для любого допустимого управления  $u$ .

Пусть решение задачи Коши  $\mu[t](X)$  является равномерно ограниченной мерой на множестве  $X$ :  $0 < w_0 \leq \mu[t](X) \leq W$ , где  $w_0, W$  — некоторые константы;  $\Omega$  — некоторое подмножество множества  $X$ ,  $\bar{\Omega}$  — дополнение множества  $\Omega$  до  $X$ ,  $\mu_0(\Omega) > 0$ ,  $\mu_0(\bar{\Omega}) > 0$ .

Сформулируем условия, при которых в задаче (3.1)–(3.3) возможно управление такое, что измеримое множество  $\Omega$  было бы лучше своего дополнения  $\bar{\Omega}$ .

**Т е о р е м а 3.1.** *Для того чтобы в задаче (3.1), (3.2) существовало управление, удовлетворяющее ограничению (3.3), при котором  $\Omega \succ \bar{\Omega}$ , достаточно выполнения неравенства*

$$c > \frac{1}{2} \left( \text{vraisup}_{x \in \bar{\Omega}} b(x) - \text{vraisup}_{x \in \Omega} b(x) \right). \quad (3.4)$$

Нестрогое неравенство (3.4) является необходимым для этого.

**Т е о р е м а 3.2.** *Для того чтобы в задаче (3.1), (3.2) существовало управление, удовлетворяющее ограничению (3.3), при котором любое подмножество  $\omega$  множества  $\Omega$  с мерой  $\mu_0(\omega) > 0$  удовлетворяло отношению  $\omega \succ \bar{\Omega}$ , достаточно выполнения неравенства*

$$c > \frac{1}{2} \left( \text{vraisup}_{x \in \bar{\Omega}} b(x) - \text{vraiinf}_{x \in \Omega} b(x) \right). \quad (3.5)$$

Нестрогое неравенство (3.5) является необходимым для этого.

## 4. Примеры

Приведем примеры уравнений вида (3.1) динамики меры с управлением. Из [17] известно, что уравнение

$$\mu'_t = (b(x) + u(t, x)) \mu - [(b(x) + u(t, x)) \mu](X) \mu \quad (4.1)$$

с начальными условиями (3.2), где  $\mu_0$  является вероятностной мерой, описывает динамику вероятностной меры, следовательно, для его решения выполняется равенство  $\mu[t](X) = 1$ . Нетрудно видеть, что уравнение (4.1) представляет собой частный случай уравнения (3.1), где функционалы  $P$  и  $Q$  имеют вид:  $Q[\mu, u] = 1$ ,  $P[\mu, u] = [(b + u)\mu](X)$ .

Согласно теоремам 2.1, 2.2, если константа  $c$ , ограничивающая управление  $u$  будет удовлетворять неравенству (3.4), то можно найти допустимое управление, при котором некоторое измеримое подмножество  $\Omega$  множества  $X$  находится в отношении строгого предпочтения со своим дополнением  $\bar{\Omega}$ , в частности таким управлением будет  $u(x) = c$ , если  $x \in \Omega$ , и  $u(x) = -c$ , если  $x \in \bar{\Omega}$ .

Если же константа  $c$  удовлетворяет условию (3.5), то найдется управление, при котором любое измеримое подмножество  $\omega \subset \Omega$  удовлетворяет соотношению  $\omega \succ \bar{\Omega}$ .

Уравнение (4.1) допускает интерпретацию как уравнение динамики распределения численности особей по пространству генотипов. Следуя гипотезам [10], можно считать, что  $X$  — множество генотипов некоторой популяции,  $x$  — отдельный генотип из этого множества,  $\mu$  — распределение численности особей,  $\mu(A)$  — численность особей с генотипами из множества  $A \subset X$ ,  $b(x)$  — коэффициент размножения особей генотипа  $x$  в благоприятных условиях,  $u(x)$  — внешнее влияние на коэффициент размножения. Слагаемое  $(b(x) + u(x)) \mu$  в (4.1) в этом случае будет описывать скорость экспоненциального (мальтузианского) роста популяции при отсутствии лимитирующих факторов и при выполнении предположения строгого наследования,  $[(b(x) + u(t, x)) \mu](X)$  — коэффициент дополнительной смертности, возникающей в результате внутривидового лимитирования, пропорциональный скорости совокупного прироста популяции. В рамках данной модели соотношение  $\Omega \succ \bar{\Omega}$  имеет смысл вымирания особей с генотипами из множества  $\bar{\Omega}$ , а именно: вытеснение их особями с генотипами из множества  $\Omega$ .

Второй пример представляет уравнение

$$\mu'_t = (b(x) + u(t, x)) \mu - [\varphi(x)\mu](X) \mu,$$

где  $\varphi(x)$  — измеримая ограниченная положительная функция. Здесь  $Q[\mu, u] = 1$ ,  $P[\mu, u] = [\varphi(x)\mu](X)$ . Это уравнение является обобщением уравнения Ферхюльста и описывает динамику распределения численности популяции по пространству генотипов  $X$  с учетом внутривидового лимитирования, где коэффициент лимитирования имеет вид  $[\varphi(x)\mu](X)$ . При этом функция  $\varphi(x)$  описывает вклад особей генотипа  $x$  в общее лимитирование численности популяции. Для данного уравнения справедливы те же выводы, что и для предыдущего примера.

Третий пример представляет обобщенная система Вольтерра

$$\begin{cases} \xi' = (b(x) + u(t, x)) \xi - p y \xi, \\ y' = h y \xi(X) - s y, \end{cases}$$

в которой  $p$ ,  $h$ ,  $s$  — некоторые положительные константы,  $y = y(t)$  — скалярная функция времени, описывающая динамику численности хищника,  $\xi = \xi[t]$  — мера, описывающая распределение численности жертв по пространству генотипов. С помощью замены переменных  $\mu = \xi/\xi(X)$  уравнение динамики меры  $\xi[t]$  сводится к уравнению (4.1). При этом сохраняются в силе все выводы, установленные для уравнения (4.1).

## 5. Заключение

Статья посвящена исследованию предельного поведения решения в управляемых системах авторепродукции. Обобщенной моделью таких систем является уравнение с наследованием, являющееся частным случаем уравнения динамики меры. Благодаря свойству сужения носителя меры установлено отношение порядка на системе измеримых множеств, исходя из заданного процесса динамики положительной меры. Определены ограничения на ресурс управления, при которых в исследуемой системе авторепродукции можно получить порядок, удовлетворяющий заранее заданным требованиям. Приведены примеры, демонстрирующие разнообразие систем, к которым может быть применена изложенная теория.

*Благодарности.* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 13-01-12452 офи\_м2.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дж. фон Нейман, *Теория самовоспроизводящихся автоматов*, М.: Мир, 1971, 326 с.
2. J.B.S. Haldane, *The Causes of Evolution*, Princeton: Princeton University Press, 1990, 220 с.
3. R.A. Fisher, *The Genetical Theory of Natural Selection: A Complete Variorum Edition*, Oxford: Oxford University Press, 1999, 318 с.
4. S. Wright, *Evolution: Selected Papers*, Chicago: University of Chicago Press, 1986.
5. Г.Ю. Ризниченко, *Лекции по математическим моделям в биологии*, М-Ижевск: РХД, 2011, 560 с.
6. Л.И. Розоноэр, Е.И. Седых, “О механизмах эволюции самовоспроизводящихся систем”, *Автоматика и телемеханика*, 1979, № 5, 137-148.
7. А.Н. Горбань, *Обход равновесия*, Новосибирск: Наука, 1984, 224 с.
8. О.А. Кузенков, “О свойствах одного класса интегро-дифференциальных уравнений в пространстве Лебега”, *Нелинейная динамика и управление*, **1**, М.: Физматлит, 2001, 347-355.
9. О.А. Кузенков, “Задача Коши для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве”, *Дифференц. уравнения*, **40**:1 (2004), 23-32.
10. I.M. Bomze, “Lotka-Volterra equations and replicator dynamics: a two dimensional classification”, *Biol. Cybernetics*, 1983, № 48, 201-211.
11. A.S. Bratus, V.P. Posvyanskii, A.S. Novozhilov, “A note on the replicator equation with explicit space and global regulation Mathematical Biosciences and Engineering (MBE).”, **8**:3 (2011), 659-676.
12. А.С. Братусь, А.С. Новожилов, А.П. Платонов, *Динамические системы и модели биологии*, М: ФИЗМАТЛИТ, 2010, 400 с.
13. G.P. Karev, “On mathematical theory of selection: continuous time population dynamics”, *J. Math. Biol.*, **60**:1 (2010), 107-129.

14. G.P. Karev, "Replicator equations and the principle of minimal production of information", *Bull Math Biol.*, **72**:5 (2010), 1124-1142.
15. A. Y. Klimenko, "Entropy and equilibria in competitive systems", *Entropy.*, 2014, № 16, 1-22.
16. A.N. Gorban, "Selection Theorem for Systems with Inheritance", *Math. Model. Nat. Phenom.*, **2**:4 (2007), 1-45.
17. О.А. Кузенков, "Исследование динамической системы вероятностных мер Радона", *Дифференц. уравнения*, **31**:4 (1995), 591-596.
18. О.А. Кузенков, Г.В. Кузенкова, "Оптимальное управление системами авторепродукции", *Изв. РАН. Теория и системы управления*, 2012, № 4, 26-37.
19. О.А. Кузенков, "Уравнения динамики меры как язык для описания оптимизационных процессов", *Вестник ННГУ Математическое моделирование и оптимальное управление*, **1**:30, Н. Новгород: Изд-во ННГУ (2006), 51-62.
20. Д. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, М.: Наука, 1977, 624 с.
21. О.А. Кузенков, А.В. Новоженин, *Уравнения динамики меры: Учебн. пособие*, Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2010, 100 с.
22. В.И. Богачев, *Основы теории меры*, 2003, 543 с.

## Order of preference in self-replicating systems

© О. А. Kuzenkov<sup>3</sup>, Е. А. Ryabova<sup>4</sup>

**Abstract.** Order of preference for the system of measurable sets is introduced based on some given process of positive measure dynamics. Control resource limits are determined to get the order in the observed self-replicating system that satisfies given requirements. Solution to the problem for controlled generalized replication system with distributed parameters is considered.

**Key Words:** self-replicating systems, dynamics of measure, strict preference relation, optimal control

<sup>3</sup> Associate Professor of numerical and functional analysis, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod; kuzenkov\_o@mail.ru

<sup>4</sup> Senior teacher of chair numerical and functional analysis, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod; riabova-ea@rambler.ru

УДК 517.9

## О топологической сопряжённости 3-диффеоморфизмов с одной орбитой гетероклинического касания

© Т. М. Митрякова<sup>1</sup>, О. В. Починка<sup>2</sup>

**Аннотация.** В настоящей работе рассматривается класс трёхмерных диффеоморфизмов, лежащих на границе множества градиентно-подобных систем и отличающихся от последних наличием не более, чем одной орбиты касания у пары двумерных сепаратрис. Доказывается, что для изучаемых диффеоморфизмов необходимым и достаточным условием топологической сопряжённости является совпадение классов эквивалентности их схем и модулей устойчивости, соответствующих орбитам касания.

**Ключевые слова:** топологическая сопряжённость, гетероклинические касания, модули устойчивости

### Введение

Диффеоморфизмы Морса-Смейла являются математическими моделями процессов с регулярной динамикой. Начало их исследования восходит к классической работе А.А. Андропова и Л.С. Понтрягина [1], в которой было введено понятие грубости потока, заданного векторным полем, определенным в компактной части плоскости, ограниченной циклом без контакта. В начале 60-х годов прошлого века благодаря открытиям Д.В. Аносова [2] и С. Смейла [11] стало понятно, что потоки (каскады), заданные на многообразиях размерности три (два), могут обладать счетным множеством гиперболических периодических орбит. Это означало наличие хаотического поведения в процессах, описываемых динамическими системами такого вида. Поэтому грубые системы, обладающие регулярной динамикой, были выделены в отдельный класс систем Морса-Смейла. Эти системы интенсивно изучаются как с точки зрения топологической классификации, так и с точки зрения исследования бифуркаций, соответствующих переходу из одного класса топологической сопряженности к другому. Прежде всего к бифуркациям такого вида приводит наличие гетероклинических касаний устойчивых и неустойчивых многообразий периодических точек.

Очевидно, что нарушение условия трансверсальности гетероклинических пересечений седловых точек диффеоморфизма приводит к его негрубости. Более того, это приводит к возникновению непрерывных топологических инвариантов — *модулей топологической сопряженности* — и, следовательно, к существованию континуума несопряженных диффеоморфизмов с изоморфными графами и одинаковой геометрией гетероклинического пересечения.

Первым, кто обратил внимание на существование модулей топологической сопряженности, был Ж. Палис [10]. Он обнаружил, что такими модулями обладают уже двумерные диффеоморфизмы с негрубой гетероклинической траекторией, в точках которой инвариантные многообразия двух разных седловых неподвижных точек имеют одностороннее касание. Существенным продвижением в этом направлении явилась работа В. ди Мелу, С. Ж. ван Стрина [6], в которой были найдены необходимые и достаточные условия

<sup>1</sup> Доцент кафедры теории функций, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; tatiana.mitryakova@yandex.ru

<sup>2</sup> Профессор кафедры информационных систем и технологий, НИУ ВШЭ-НН, Нижний Новгород; olga-pochinka@yandex.ru

того, что диффеоморфизм ориентируемой поверхности имеет конечное число модулей топологической сопряженности, описывающих все классы топологической сопряженности, принадлежащие некоторой окрестности такого диффеоморфизма.

В 2010 г. в работе [7] Т.М. Митряковой и О.В. Починки была получена топологическая классификация содержательного класса диффеоморфизмов ориентируемой поверхности с конечным числом модулей топологической сопряженности. Существенное отличие от уже упомянутой работы [6] заключается в приведении условий топологической сопряженности систем не только для некоторой окрестности диффеоморфизмов данного класса, но и для “далёких” систем. Кроме того, в работе [8] описана реализация двумерных систем с гетероклиническими касаниями.

В случае многообразий размерности большей двух известно лишь несколько результатов. В работе Ш. Ньюхауса, Ж. Палиса и Ф. Такенса [9] приведено и доказано необходимое условие топологической сопряженности двух диффеоморфизмов  $n$ -мерных многообразий, содержащих одну орбиту одностороннего гетероклинического касания. В работе Ж. Палиса и В. ди Мелу [5] рассмотрены диффеоморфизмы  $n$ -мерных многообразий с одной орбитой одностороннего гетероклинического касания и приведена классификация диффеоморфизмов в окрестности. В работе Е. А. Гринеса и О. В. Починки [4] доказано необходимое условие топологической сопряженности диффеоморфизмов, заданных на многообразиях размерности 3 и имеющих конечное число орбит гетероклинического касания двумерных инвариантных многообразий.

В настоящей работе найдены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности диффеоморфизмов трёхмерных многообразий не более, чем с одной орбитой касания двумерных сепаратрис.

*Благодарности.* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 12-01-00672, 13-01-12452-офи-м).

## 1. Формулировка результатов

В данной работе рассматривается класс  $\Psi$  диффеоморфизмов  $f : M^3 \rightarrow M^3$ , заданных на гладком трёхмерном замкнутом ориентируемом многообразии  $M^3$ , сохраняющих ориентацию и удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) неблуждающее множество  $\Omega_f$  состоит из конечного числа неподвижных гиперболических точек, собственные значения которых положительны;
- 2) для различных седловых точек  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega_f$  пересечение  $W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u$  не пусто только в случае, когда  $\dim W_{\sigma_1}^s = \dim W_{\sigma_2}^u = 2$ , при этом оно является трансверсальным всюду, кроме, возможно, одной орбиты касания.

Пусть  $f \in \Psi$ . Для  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$  обозначим через  $\Omega_i$  подмножество  $\Omega_f$ , состоящее из точек  $p$  таких, что  $\dim W_p^u = i$ . Положим  $A_f = W_{\Omega_0 \cup \Omega_1}^u$ ,  $R_f = W_{\Omega_2 \cup \Omega_3}^s$ ,  $V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f)$  и  $\hat{V}_f = V_f / f$ . Из результатов книги [3] следует, что множества  $A_f$ ,  $R_f$ ,  $V_f$  и  $\hat{V}_f$  являются связными,  $\hat{V}_f$  является гладким замкнутым 3-многообразием и естественная проекция  $p_f : V_f \rightarrow \hat{V}_f$  является накрытием, индуцирующим эпиморфизм  $\eta_f : \pi_1(\hat{V}_f) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Положим  $\hat{W}_f^s = \bigcup_{p \in \Omega_1} \hat{W}_p^s$  и  $\hat{W}_f^u = \bigcup_{p \in \Omega_2} \hat{W}_p^u$ . Каждая компонента связности  $\hat{T}$  множеств  $\hat{W}_f^s$  и  $\hat{W}_f^u$  является  $\eta_f$ -существенным двумерным тором на многообразии  $(\hat{V}_f, \eta_f)$ , то есть  $\eta_f(j_{\hat{T}*}(\pi_1(\hat{T}))) \neq \{0\}$  для включения  $j : \hat{T} \rightarrow \hat{V}_f$ . Компоненты связности  $\hat{T}^s \subset \hat{W}_f^s$  и

$\hat{T}^u \subset \hat{W}_f^u$  либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально, либо пересекаются нетрансверсально с нарушением условия трансверсальности пересечения в точности в одной точке.

Пусть  $\sigma$  – седловая точка диффеоморфизма  $f \in \Psi$ . Обозначим через  $J_\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  линейный диффеоморфизм, определяемый жордановой формой линейной части диффеоморфизма  $f$  в окрестности точки  $\sigma$ . Точка  $O(0, 0, 0)$  является седловой точкой диффеоморфизма  $J_\sigma$  и имеет  $J_\sigma$ -инвариантную окрестность  $U_{J_\sigma}$ .

**О п р е д е л е н и е 1.1.**  $f$ -инвариантную окрестность  $U_\sigma$  седловой точки  $\sigma$  назовем  $C^1$ -линеаризующей, если существует  $C^1$ -диффеоморфизм  $\psi_\sigma : U_\sigma \rightarrow U_{J_\sigma}$ , сопрягающий диффеоморфизм  $f|_{U_\sigma}$  с диффеоморфизмом  $J_\sigma|_{U_{J_\sigma}}$ .

Согласно работе [4] у любой седловой точки  $\sigma$  диффеоморфизма  $f \in \Psi$  существует линеаризующая окрестность.

Для диффеоморфизма  $f$  обозначим через  $\mathcal{A}$  множество таких точек гетероклинического касания, которые образованы в результате касания двумерных инвариантных многообразий. Для любой точки  $a \in \mathcal{A}$  обозначим через  $\sigma_a^s$  и  $\sigma_a^u$  седловые точки такие, что  $a$  принадлежит пересечению инвариантных многообразий  $W_{\sigma_a^s}^s$  и  $W_{\sigma_a^u}^u$  диффеоморфизма  $f \in \Psi$ . Важным является то, что у  $\sigma_a^s$  обязательно есть одномерное неустойчивое многообразие, равно как у  $\sigma_a^u$  есть одномерное устойчивое многообразие. Обозначим через  $\mu_a$  и  $\lambda_a$  собственное число, соответствующее одномерному собственному направлению для  $J_{\sigma_a^s}$  и  $J_{\sigma_a^u}$  соответственно.

Для произвольной точки  $a \in \mathcal{A}$  определим параметр  $\Theta_a$ , где  $\Theta_a = \frac{\ln \mu_a}{\ln \lambda_a}$ . Доказательство следующего факта можно найти, например, в статьях [9] и [4].

**П р е д л о ж е н и е 1.1.** Если диффеоморфизмы  $f, f' \in \Psi$  топологически сопряжены посредством гомеоморфизма  $h$  такого, что  $h(a) = a'$  для точки  $a \in \mathcal{A}$ ,  $h(\sigma_a^s) = \sigma_{a'}^s$ ,  $h(\sigma_a^u) = \sigma_{a'}^u$ , то  $\Theta_a = \Theta_{a'}$ .

Положим  $\hat{\mathcal{A}} = p_f(\mathcal{A})$ . Для  $\hat{a} \in \hat{\mathcal{A}}$  выберем любую точку  $a \in p_f^{-1}(\hat{a})$  и положим  $\Theta_{\hat{a}} = \Theta_a$ . Заметим, что  $\Theta_{\hat{a}}$  не зависит от выбора точки в множестве  $p_f^{-1}(\hat{a})$ . Положим  $\hat{C}_f = \{\Theta_{\hat{a}}, \hat{a} \in \hat{\mathcal{A}}\}$ .

**О п р е д е л е н и е 1.2.** Набор  $S_f = (\hat{V}_f, \eta_f, \hat{W}_f^s, \hat{W}_f^u, \hat{C}_f)$  назовем схемой диффеоморфизма  $f \in \Psi$ .

**О п р е д е л е н и е 1.3.** Схемы  $S_f$  и  $S_{f'}$  диффеоморфизмов  $f, f' \in \Psi$  назовем эквивалентными, если существует гомеоморфизм  $\hat{\varphi} : \hat{V}_f \rightarrow \hat{V}_{f'}$  со следующими свойствами:

- 1)  $\eta_f([c]) = \eta_{f'} \hat{\varphi}_*$ ;
- 2)  $\hat{\varphi}(\hat{W}_f^s) = \hat{W}_{f'}^s$  и  $\hat{\varphi}(\hat{W}_f^u) = \hat{W}_{f'}^u$ ;
- 3)  $\Theta_{\hat{a}} = \Theta_{\hat{\varphi}(\hat{a})}$  для  $\Theta_{\hat{a}} \in \hat{C}_f$ .

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

**Т е о р е м а 1.1.** Диффеоморфизмы  $f, f' \in \Psi$  топологически сопряжены тогда и только тогда, когда схемы  $S_f$  и  $S_{f'}$  эквивалентны.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, “Грубые системы”, *Докл. АН СССР*, **14**:5 (1937), 247–250.
2. Д. В. Аносов, “Грубость геодезических потоков на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны”, *Докл. АН СССР*, **145**:4 (1962), 707–709.
3. В. З. Гринес, О. В. Починка, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, Институт компьютерных исследований, Ижевск, 2011, 438 с.
4. E. A. Grines, O. V. Pochinka, “Necessary conditions of topological conjugacy for three-dimensional diffeomorphisms with heteroclinic tangencies”, *Dinamicheskie Sistemy*, **3(31)**:3-4 (2013), 185–200.
5. W. De Melo, J. Palis, “Moduli of stability for diffeomorphisms”, *Lecture Notes in Mathematics*, **819** (1980), 318–339.
6. W. De Melo, S. J. Strien, “Diffeomorphisms on surfaces with a finite number of moduli”, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, **7** (1987), 415–462.
7. Т. М. Митрякова, О. В. Починка, “К вопросу о классификации диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом модулей топологической сопряженности”, *Нелинейная динам.*, **6**:1 (2010), 91–105.
8. Т. М. Митрякова, О. В. Починка, “Реализация каскадов с конечным числом модулей топологической сопряженности на поверхностях”, *Мат. зам.*, **93**:6 (2013), 902–919.
9. S. Newhouse, J. Palis, F. Takens, “Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms”, *Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques*, **57**:1 (1983), 5–71.
10. J. Palis, “A differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability”, *Asterisque*, **51** (1978), 335–346.
11. С. Смейл, “Структурно устойчивый дифференцируемый гомеоморфизм с бесконечным числом периодических точек”, *Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям*, **2** (1963), 365–366.

## On topological conjugacy of 3-manifolds diffeomorphisms with one orbit of heteroclinic tangency

© Т. М. Mitryakova<sup>3</sup>, О. V. Pochinka<sup>4</sup>

**Abstract.** In present paper we consider a class of 3-manifolds’ diffeomorphisms lying on the border of a set of gradient-like systems and different from the last not more than one tangencies’ orbits of two-dimensional separatrices. It is proved that for studying diffeomorphisms necessary and sufficient condition for topological conjugacy of two diffeomorphisms from this class is a coincidence of classes of equivalence of their schemes and moduli of stability corresponding tangencies’ orbits.

**Key Words:** Topological conjugacy, heteroclinic tangencies, moduli of stability.

<sup>3</sup> Docent of theory function chair of Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky; tatiana.mitryakova@yandex.ru

<sup>4</sup> Professor of Information Systems and Technology chair of National Research University Higher School of Economics; olga-pochinka@yandex.ru

УДК 519.245

# Статистический подход к моделированию процесса сополимеризации бутадиена со стиролом в эмульсии

© Т. А. Михайлова<sup>1</sup>, С. А. Мустафина<sup>2</sup>

**Аннотация.** В работе рассмотрен статистический подход к моделированию процесса сополимеризации бутадиена со стиролом. Описан алгоритм, в основе которого лежит метод Монте-Карло. Математическая модель позволяет проводить расчет молекулярно-массового распределения сополимера в любой момент времени, а также предсказывать значения основных молекулярных характеристик в зависимости от конверсии.

**Ключевые слова:** сополимеризация, бутадиен, стирол, молекулярно-массовое распределение, метод Монте-Карло

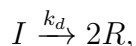
## 1. Введение

Производство полимерных материалов занимает одну из ведущих позиций в современной химической промышленности. Значительная часть производимых в настоящее время синтетических каучуков представляют собой бутадиен-стирольный сополимер, чем объясняется широкий интерес к вопросам моделирования процессов сополимеризации. При описании математических моделей со стороны понимания химических особенностей условно выделяются кинетический и статистический подходы. Кинетический метод моделирования может быть успешно использован для расчета усредненных молекулярных характеристик[1]. Для исследования структуры сополимера большой интерес представляет статистический подход, который несет в себе метод Монте-Карло, представляющий собой численный метод решения математических задач при помощи моделирования случайных величин.

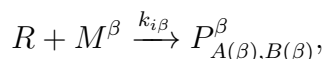
## 2. Алгоритм статистического подхода к моделированию

В основе данного подхода лежит имитация роста каждой макромолекулы и отслеживание процессов, происходящих с ней, что позволяет накапливать информацию о составе и длине образующихся цепей сополимера. Идея статистического подхода к моделированию основана на методе, предложенном в 1977 году американским физиком Gillespie[2]. Опишем алгоритм в виде последовательности шагов.

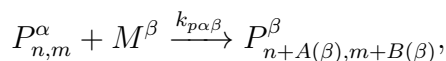
Шаг 1. Выпишем кинетическую схему процесса сополимеризации: распад инициатора



инициирование активных центров



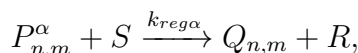
рост цепи



<sup>1</sup> Аспирант кафедры математического моделирования, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак; T.A.Mihailova@yandex.ru.

<sup>2</sup> Заведующий кафедрой математического моделирования, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак; Mustafina\_SA@mail.ru.

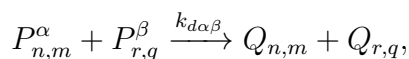
передача цепи



обрыв цепи рекомбинацией



обрыв цепи диспропорционированием



где  $\alpha, \beta = \overline{1, 2}$ ;  $M^1, M^2$  – мономеры первого и второго типа;  $P_{n,m}$  и  $Q_{n,m}$  – соответственно активные и неактивные цепи полимера длиной  $m + n$ , состоящие из  $n$  звеньев мономера  $M^1$  и  $m$  звеньев мономера  $M^2$ ;  $k_i, k_p, k_{reg}, k_d, k_r$  – константы элементарных стадий инициирования, роста, передачи цепи, диспропорционирования и рекомбинации соответственно;  $A(\beta) = \{1, \text{если } \beta = 1; \text{иначе } 0\}$ .

Шаг 2. Преобразуем константы скоростей элементарных реакций:

$\tilde{k} = k$  для реакций первого порядка;

$\tilde{k} = \frac{k}{V \cdot N_A}$  для реакций второго порядка ( $V$  – объем реакционной смеси,  $N_A$  – число Авогадро).

Шаг 3. Вычислим скорость каждой реакции:

$$R_i = \tilde{k}_i \cdot X_A \cdot X_B,$$

где  $\tilde{k}_i$  – константа, определяющая скорость  $i$ -й реакции, в которой участвуют реагенты  $A$  и  $B$ ;  $X_A, X_B$  – концентрации реагентов (количество молекул).

Посредством их суммирования получим общую скорость реакции:

$$R_{sum} = R_1 + R_2 + \dots + R_n,$$

где  $n$  – число элементарных реакций, образующих кинетическую схему процесса.

Шаг 4. Вычислим вероятность осуществления каждой реакции в данный момент времени:

$$p_i = \frac{R_i}{R_{sum}}, i = 1..n.$$

Очевидно, что  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ .

Шаг 5. Сгенерируем равномерно распределенное случайное число  $r$  на отрезке от 0 до 1 и подберем такое значение  $k$ , чтобы имело место неравенство:

$$\sum_{i=1}^{k-1} p_i < r < \sum_{i=1}^k p_i.$$

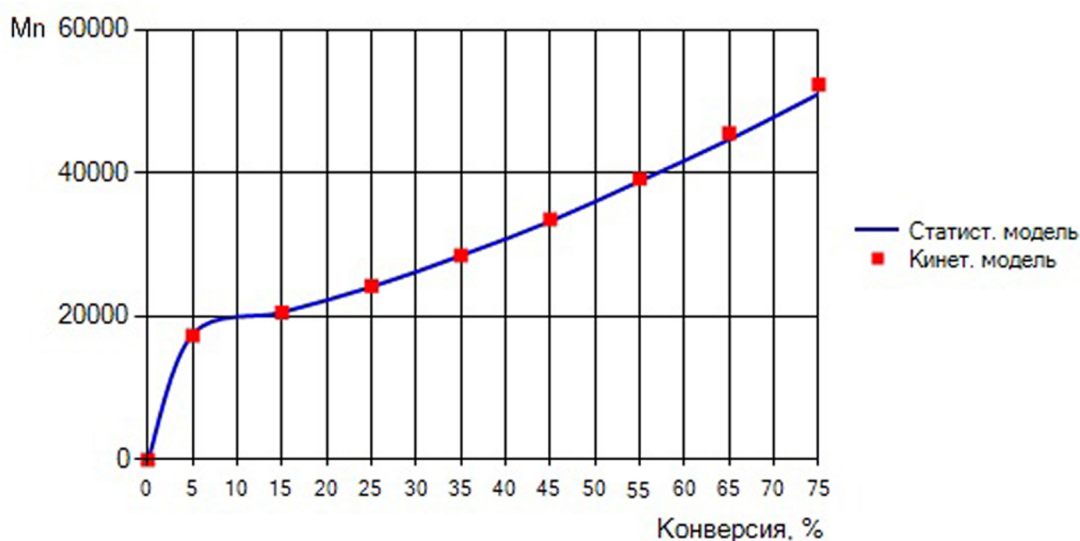
Следовательно, в результате имитационного выбора должна произойти реакция под индексом  $k$ .

Шаг 6. Продолжая рассуждения, аналогичным образом выстроим всю схему проведения реакции.

### 3. Результаты и выводы

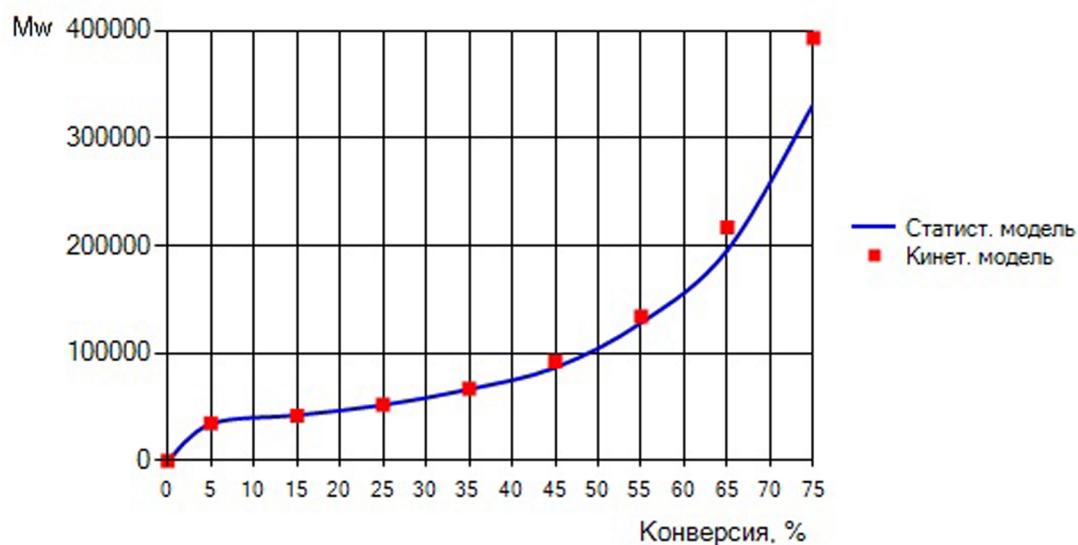
Алгоритм был использован при моделировании процесса эмульсионной сополимеризации бутадиена со стиролом в реакторе до конверсии мономеров 75%. При моделировании использовалась следующая рецептура: объем реакционной смеси – 3 т., дозировка бутадиена – 70 мас.ч., дозировка стирола – 30 мас.ч., дозировка инициатора (гидроперекись пинана) – 0.048 мас.ч., дозировка регулятора (трет-додецил меркаптан) – 0.28 мас.ч., рабочий объем полимеризатора – 10.8 м<sup>3</sup>.

Построенная модель позволяет исследовать свойства продукта сополимеризации и предсказывать значения молекулярных характеристик сополимера. Полученные значения среднечисленной и среднемассовой молекулярной массы показали удовлетворительное согласование с результатами, полученными из кинетической модели процесса (рис. 3.1, рис. 3.2) [3].



Р и с у н о к 3.1

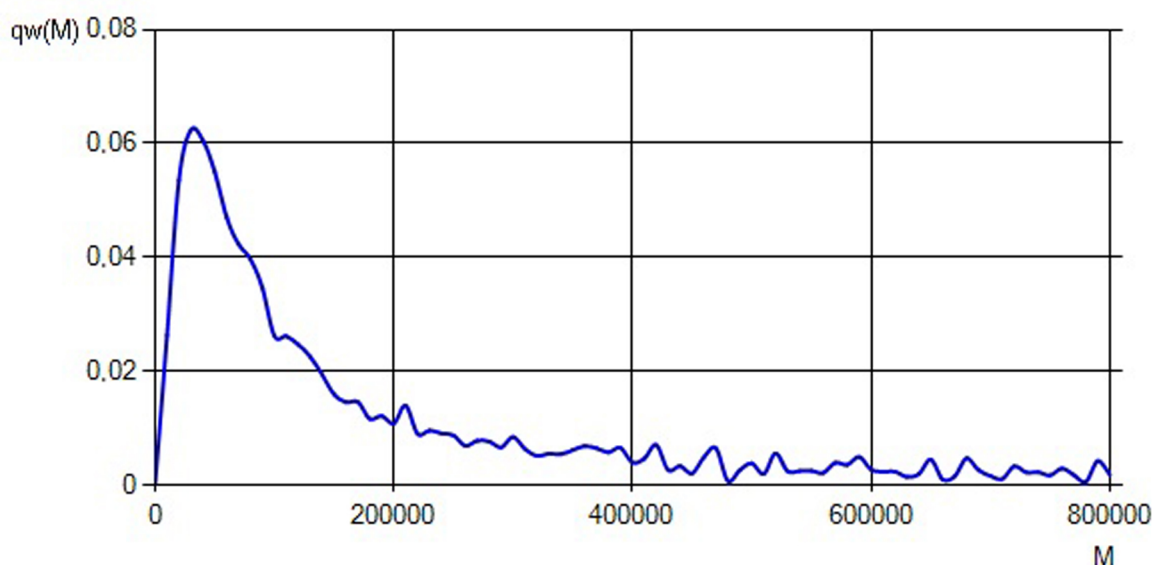
Зависимость значений среднечисленной молекулярной массы от конверсии



Р и с у н о к 3.2

Зависимость значений среднечисловой молекулярной массы от конверсии

Так как в любом образце полимера присутствуют макромолекулы разных размеров, то для оценки качества получаемого продукта важное значение представляет картина молекулярно-массового распределения, демонстрирующая соотношение количеств макромолекул различной молекулярной массы. На рис. 3.3 представлена кривая весового молекулярно-массового распределения сополимера при конверсии 75%, которая представляет собой зависимость между молекулярной массой и массовой долей фракций полимера. Ширина пика кривой соответствует полидисперсности полимера. Молекулярно-массовое распределение является узким, т.е. в сополимере преобладает фракция с определенной молекулярной массой. В рассматриваемом примере наблюдается преобладание фракции с молекулярной массой около  $5 \cdot 10^4 - 6 \cdot 10^4$ . Пик кривой соответствует значению среднечисленной молекулярной массы сополимера.



Р и с у н о к 3.3

Молекулярно-массовое распределение сополимера

Таким образом, рассмотренный в работе статистический подход позволяет провести исследование свойств продукта сополимеризации бутадиена со стиролом в эмульсии, в частности проведение расчета молекулярно-массового распределения и прогнозирование зависимостей изменения основных молекулярных характеристик сополимера от конверсии в любой момент времени.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Подвальный С. Л., *Моделирование промышленных процессов полимеризации*, Химия, М., 1979.
2. Gillespie D., “Exact stochastic simulation of coupled chemical reactions”, *The Journal of Physical Chemistry*, 1977, № 81(25), 2340–2361.
3. Мифтахов Э. Н., Насыров И. Ш. Мустафина С. А., “Решение прямой и обратной кинетических задач для процесса эмульсионной сополимеризации бутадиена со стиролом”, *Вестник Башкирского университета*, 2011, № 1, 21–24.

## Statistical approach to the Emulsion-type Butadiene-Styrene Copolymerization process

© Т. А. Mikhailova<sup>3</sup>, S. A. Mustafina<sup>4</sup>

**Abstract.** Statistical approach to the modelling of butadiene-styrene copolymerization process has been considered in the paper. The algorithm, which is based on the Monte-Carlo method has been described. The mathematical model allows to carry out the calculation of copolymer’s molecular-weight distribution for different instants and predict copolymer’s molecular characteristics depending on conversion.

**Key Words:** copolymerization, butadiene, styrene, molecular weight distribution, Monte Carlo method.

---

<sup>3</sup> Post-Graduate Student of Mathematical Modelling Chair, Bashkir State University, Sterlitamak; T.A.Mihailova@yandex.ru.

<sup>4</sup> Head of Mathematical Modelling Chair, Bashkir State University, Sterlitamak; Mustafina\_SA@mail.ru.

УДК 621.315.592

## Исследования кинетики неравновесных носителей в полупроводнике при периодическом оптическом возбуждении

© Е. В. Никишин<sup>1</sup>, Е. Е. Пескова<sup>2</sup>

**Аннотация.** В статье проведены теоретические исследования среднего значения неравновесной концентрации свободных носителей в полупроводнике при периодическом оптическом возбуждении. Расчеты сделаны для кремния, легированного золотом. Среднее значение концентрации свободных носителей зависит от частоты и формы импульсов возбуждения.

**Ключевые слова:** механизмы рекомбинации, кинетика фотопроводимости, Si, Au, рекомбинационные центры, периодическое возбуждение

Механизмы рекомбинации носителей заряда в кремнии, существенным образом определяющие кинетику фотопроводимости, изучены достаточно хорошо. При малых и средних уровнях инжекций, как правило, имеет место линейный закон рекомбинации. То есть скорость рекомбинации дырок  $g_p(t)$  и электронов  $g_n(t)$ , концентрации которых  $\Delta n$  и  $\Delta p$ , пропорциональна их избыточной концентрации:  $g_p(t) = \Delta p/\tau_p$ ,  $g_n(t) = \Delta n/\tau_n$ . Здесь  $\tau_p$  и  $\tau_n$  — времена жизни дырок и электронов; при линейном законе рекомбинации  $\tau_p = const$  и  $\tau_n = const$ . Увеличение уровней инжекции приводит к нелинейным законам рекомбинации неравновесных носителей заряда ( $\tau_p = \varphi_p(n, p)$ ,  $\tau_n = \varphi_n(n, p)$ ), обусловленной межзонной рекомбинацией, безызлучательной экситонной рекомбинацией, межзонной Оже – рекомбинацией. Нелинейность закона рекомбинации может быть связана с рекомбинацией через глубокие центры (рекомбинация Шокли – Рида), наличием концентраций мелких доноров и акцепторов [1]–[6].

В работе [7] показано, что при неизменной средней величине освещенности возбуждающего излучения, среднее значение концентрации неравновесных носителей (КНН) и эффективность фоторезистора, как приемника света, увеличивалась с увеличением частоты модуляции возбуждающего излучения. Объяснение эффекта связано с нелинейной рекомбинацией. Кинетические процессы моделировались нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка. Физические причины изменения среднего значения КНН в полупроводнике при изменении частоты модуляции света, при условии постоянной средней освещенности, связаны с различной скоростью процессов разгорания и затухания фотопроводимости, и, соответственно, различными постоянными времени нарастания ( $\tau_i$ ) и затухания ( $\tau_a$ ). Аналогичная ситуация возникает при возбуждении газоразрядных источников света высокочастотными модулированными электромагнитными импульсами. Изменение частоты модуляции приводит к изменению интенсивности свечения, следовательно, КПД источника при постоянной подводимой мощности [8].

Проведено исследование зависимости удельной проводимости от периода возбуждающих оптических импульсов. Полагалось, что поверхностные явления слабо сказываются на рекомбинационных явлениях, так же отсутствуют неоднородности в распределении дефектов и примесей в объеме полупроводника. Это без существенного ограничения общности позволяет описывать кинетические явления системой нелинейных обыкновенных

<sup>1</sup> Доцент кафедры экспериментальной физики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; nikishin57@mail.ru

<sup>2</sup> Ассистент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; Lizanika@mail.ru.

дифференциальных уравнений:

$$\frac{dn}{dt} = g(\omega t) - R_n(p, n), \quad (1.1)$$

$$\frac{dp}{dt} = g(\omega t) - R_p(p, n), \quad (1.2)$$

$$\frac{df_j}{dt} = \sigma_{nj}(n(1 - f_j) - n_{1j}f_j) - \sigma_{pj}(pf_j - p_{1j}(1 - f_j)), \quad (1.3)$$

$$R_n(p, n) = A(pn - n_i^2) + B_n n(np - n_i^2) + B_p p(np - n_i^2) + \sum_j [N_j \sigma_{nj}(n(1 - f_j) - n_{1j}f_j)], \quad (1.4)$$

$$R_p(p, n) = A(pn - n_i^2) + B_n n(np - n_i^2) + B_p p(np - n_i^2) + \sum_j [N_j \sigma_{pj}(pf_j - p_{1j}(1 - f_j))], \quad (1.5)$$

здесь  $g(\omega t)$  — темп генерации носителей заряда, функция периодическая с периодом  $T = 2\pi/\omega$ ;  $R_n(p, n)$  и  $R_p(p, n)$  — скорости рекомбинации электронов и дырок;  $n_{1j}$  и  $p_{1j}$  численно равны концентрации электронов и дырок, когда уровень Ферми совпадает с уровнем ловушки;  $N_j$  и  $f_j$  — концентрация примесных центров  $j$  — типа и вероятность нахождения на нем электрона;  $\sigma_{nj}$  и  $\sigma_{pj}$  — вероятности захвата электронов и дырок примесными центрами;  $A$ ,  $B_n$ ,  $B_p$  — коэффициент межзонной рекомбинации и коэффициенты Оже-рекомбинации соответственно.

Среднее значение темпа генерации, вызванного оптическим излучением, выбиралось не зависящим от частоты следования импульсов:  $\langle g_i \rangle = \int_t^{t+T} g_i(\omega t) dt / T = \text{const}$  Возбуждение осуществлялось импульсами различной формы, вид которых представлен на рис. 1. Для кривой 1 имеем  $g_1(\omega t) = \langle g \rangle (1 - \cos(2\pi t/T))$ . Для кривой 2 —  $g_2(\omega t) = 2 \langle g \rangle$  при  $(n+1/4)T < t < (n+1/4)T + T/2 \cup g_2(\omega t) = 0$  при  $(n+1/4)T + T/2 < t < (n+1/4)T + T$ . Для кривой 3 —  $g_3(\omega t) = 3.14 \langle g \rangle |\cos(2\pi t/T)|$  при  $(n+1/4)T < t < (n+1/4)T + T/2 \cup g_3(\omega t) = 0$  при  $(n+1/4)T + T/2 < t < (n+1/4)T + T$ . Для кривой 4 —  $g_4(\omega t) = 6 \langle g \rangle$  при  $(n+1/4)T < t < (n+1/4)T + T/6 \cup g_4(\omega t) = 0$  при  $(n+1/4)T + T/6 < t < (n+1/4)T + T$ .

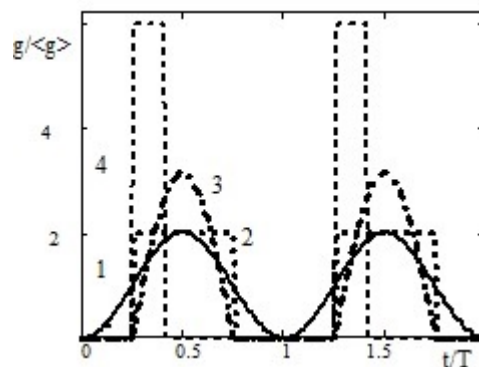
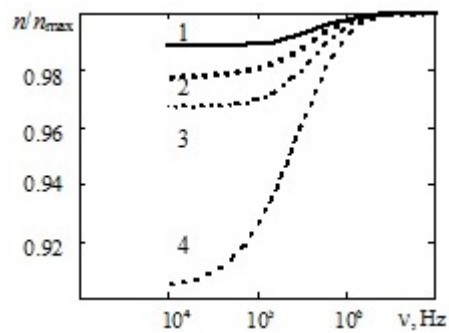


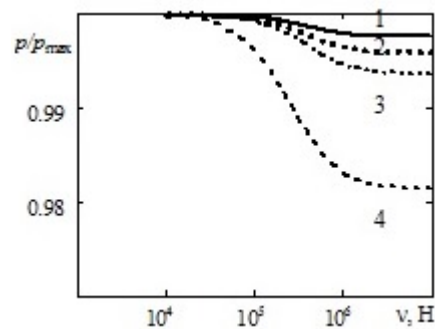
Рис. 1 Форма импульсов возбуждения.

На рис. 2а и 2б представлены зависимости неравновесных концентраций электронов и дырок от частоты следования импульсов света одинаковой средней интенсивности, темп генерации которых описывается функциями приведенными выше. Расчеты проведены для полупроводника, параметры которого соответствуют кремнию легированному

золотом и мелкими примесными центрами, являющимися уровнями прилипания. Известно, что золото в кремнии является амфотерной примесью, то есть, формирует донорный ( $E_v + 0.35 \text{ eV}$ ;  $(0/+)$ ) и акцепторный ( $E_c - 0.55 \text{ eV}$ ;  $(-/0)$ ) глубокие уровни [2]. В работе [1] показано, что в кремнии  $n$ -типа за эти уровни отвечают разные центры. В частности, акцепторный уровень является следствием образования пар с мелкими донорами. Вероятности захвата электронов и дырок соответственно равны:  $\sigma_{na} = 1,7 \cdot 10^{-9} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$ ,  $\sigma_{pa} = 1,1 \cdot 10^{-7} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$ ,  $\sigma_{nd} = 6,3 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$ ,  $\sigma_{pd} = 2,4 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$  [2]. Существует так же достаточно медленная реакция захвата электрона нейтральным донорным центром золота [6]. Численными методами исследовались уравнения 1 – 3, затем рассчитывались средние значения концентраций электронов и дырок. Для кривых рис. 2а, 2б использованы следующие параметры:  $N_a = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ ,  $N_d = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ,  $\langle g \rangle = 10^{20} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ ,  $n_0 = 10^{11} \text{ см}^{-3}$ .



а)



б)

Рис. 2. Зависимости концентрации электронов и дырок от частоты следования возбуждающих оптических импульсов: 1 —  $g = g_1(\omega t)$ ; 2 —  $g = g_2(\omega t)$ ; 3 —  $g = g_3(\omega t)$ ; 4 —  $g = g_4(\omega t)$ .

При малых частотах внешнего возбуждения, когда  $\omega$  КНН могут быть найдены из системы уравнений:

$$g(\omega t) - R_n(p, n) = 0, \quad (1.6)$$

$$g(\omega t) - R_p(p, n) = 0, \quad (1.7)$$

$$\sigma_{nj}(n(1 - f_j) - n_{1j}f_j) - \sigma_{pj}(pf_j - p_{1j}(1 - f_j)) = 0, \quad (1.8)$$

среднее значение КНН:

$$\langle p \rangle = (T)^{-1} \int_t^{t+T} p(\omega t) dt, \quad \langle n \rangle = (T)^{-1} \int_t^{t+T} n(\omega t) dt. \quad (1.9)$$

Для нахождения среднего значения КНН при больших частотах внешнего возбуждения можно использовать систему уравнений:

$$\langle g(\omega t) \rangle - R_n(\langle p \rangle, \langle n \rangle) = 0, \quad (1.10)$$

$$\langle g(\omega t) \rangle - R_p(\langle p \rangle, \langle n \rangle) = 0, \quad (1.11)$$

$$\sigma_{nj}(\langle n \rangle (1 - \langle f_j \rangle) - n_{1j} \langle f_j \rangle) - \sigma_{pj}(\langle p \rangle \langle f_j \rangle - p_{1j} (1 - \langle f_j \rangle)) = 0, \quad (1.12)$$

Концентрация электронов на несколько порядков превышает концентрацию избыточных дырок. В связи с этим зависимости удельной проводимости от частоты повторяют зависимости избыточной концентрации электронов от частоты. Переход системы от равновесного состояния к стационарному характеризует постоянная времени  $\tau_i$ ; от стационарного к равновесному —  $\tau_a$ . Если  $\tau_a > \tau_i$ , то среднее значения КНН увеличивается с увеличением частоты следования оптических импульсов, если  $\tau_a < \tau_i$ , то — уменьшается. Для кривых 1 – 4 рис. 2а выполняется неравенство  $\tau_{an} > \tau_{in}$ . При этом среднее значение концентрации электронов увеличивается с увеличением частоты. Для кривых 1 – 4 рис. 2б выполняется неравенство  $\tau_{ap} < \tau_{ip}$ . При этом среднее значение концентрации дырок уменьшается с увеличением частоты. По зависимостям  $\langle p \rangle = \langle p(\omega) \rangle$ ,  $\langle n \rangle = \langle n(\omega) \rangle$  можно судить о законе рекомбинации электронов и дырок.

На зависимости  $\langle p \rangle = \langle p(\omega) \rangle$ ,  $\langle n \rangle = \langle n(\omega) \rangle$  существенно влияет форма светового импульса, то есть вид функции  $g = g(\omega t)$ . Введем понятие математического ожидания и дисперсии для возбуждающего импульса. Используем при этом относительные единицы:

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{\langle g(2\pi\tau) \rangle} \int_0^{2\pi} \tau \cdot g(2\pi\tau) d\tau, \quad D = \frac{1}{\langle g(2\pi\tau) \rangle} \int_0^{2\pi} (\tau - \langle \tau \rangle)^2 \cdot g(2\pi\tau) d\tau. \quad (1.13)$$

Для импульсов 1 – 4, изображенных на рис. 1 соответственно имеем:  $\langle \tau_1 \rangle = 0.5$ ,  $\langle \tau_2 \rangle = 0.5$ ,  $\langle \tau_3 \rangle = 0.5$ ,  $\langle \tau_4 \rangle = 1/3$ ,  $D_1 = 0.033$ ,  $D_2 = 0.021$ ,  $D_3 = 0.012$ ,  $D_4 = 2.36 \cdot 10^{-3}$ . Уменьшение величины дисперсии импульсов возбуждения приводит к увеличению отношения среднего значения концентрации неравновесных электронов при больших частотах возбуждения к их средней концентрации при малых частотах. Для неравновесных дырок отношение аналогичных концентраций уменьшается.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lang D. V., Grimmeiss H. G., Meijer E., Jaros M., “Complex nature of gold-related deep levels in silicon”, *Phys. Rev.*, 1980, № 22, 3917 – 3925.
2. Милнс А., *Примеси с глубокими уровнями в полупроводниках*, Мир, М., 1977, 568 с.
3. Блекмор Д., *Статистика электронов в полупроводниках*, Мир, М., 1964, 392 с.

4. Бородовский П. А., Булдыгин А. Ф., Голод С. В., “Аномальная релаксация фотопроводимости в кремнии при высоких уровнях инжекции”, *ФТП*, **43**:3 (2009), 329 – 331.
5. Горюнов В. А., Гришаев В. Я., Никишин Е. В., “Об изменении времен жизни носителей заряда при импульсном фотовозбуждении в кремнии с глубокими примесными центрами”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2011, № 4, 118 – 126.
6. Баграев Н. Т., “Туннельные центры с отрицательным U и фотостимулированные реакции в полупроводниках”, *Письма в ЖЭТФ*, **39**:5 (1984), 211 – 213.
7. Denisov B. N., Nikishin E. V., “Investigations of the Kinetics of Nonequilibrium Carriers in a Semiconductor by the Average Value of the Photoconductivity under Periodic Optical Excitation”, *Semiconductors*, **48**:2 (2014), 163 – 166.
8. Денисов Б. Н., Гришаев В. Я., Никишин Е. В., “Способ питания безэлектродного источника света”, *Авт. свидет. №1723676*, 1992.

## Investigation of the kinetics of nonequilibrium carriers in semiconductors under periodic optical excitation.

© E. V. Nikishin<sup>3</sup>, E. E. Peskova<sup>4</sup>

**Abstract.** In this paper theoretical investigations of the mean value of non-equilibrium concentration of uncombined carriers in a semiconductor under the periodical optical excitation are carried out. Calculations are made for silicon doped with gold. The median concentration of free carriers depends on the frequency and shape of the excitation pulses.

**Key Words:** the recombination mechanisms, the kinetics of photoconductivity, Si, Au, recombination centers, periodic excitation.

---

<sup>3</sup> Associate professor of Experimental Physics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; Nikishin57@mail.ru

<sup>4</sup> Assistant of Applied Mathematics, Differential equations and Theoretical mechanics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; Lizanika@mail.ru.

УДК 519.71

# Доопределение системы с переменной структурой в областях переключения функции управления

© В. И. Сафонкин<sup>1</sup>

**Аннотация.** В статье изучение системы с переменной структурой строится на замене исходной системы последовательностью систем, в каждой из которых управляющая функция представлена последовательностью равномерно ограниченных функций  $u^\nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$ , принадлежащих множеству  $U(t, x)$  предельных значений функции управления.

**Ключевые слова:** системы с переменной структурой, дифференциальные включения, управление

## 1. Введение

Различные подходы изучения поведения систем с переменной структурой требуют соответствующего доопределения моделей реальных систем как в достаточно малой окрестности многообразий разрыва управляющей функции, так и на самих этих многообразиях. Каждый вид принимаемого доопределения диктуется или существующим режимом поведения реальной системы, или тем, который мы хотели бы синтезировать в модели. Существующие методы доопределения и используемые в исследовании систем, чаще всего базируются на предположении «мгновенного» переключения управляющего органа в реальных системах, что, как известно, не наблюдается в реальных системах.

Такой подход позволяет доопределить систему в достаточно малой окрестности многообразий переключения и тем самым установить условия перехода траекторий из одной области однозначности в смежную область, что оказывается чрезвычайно важным при организации «скользящих» режимов и других режимов в областях запаздывания срабатывания управляющего органа.

Известно, что обобщенной моделью систем с переменной структурой является система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u(t, x)), \quad (1.1)$$

где  $x \in R^n$ ,  $f(t, x, u)$  - непрерывная по совокупности аргументов функция, управляющая функция  $u(t, x)$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  претерпевает разрыв первого рода на некоторых поверхностях  $S_j$   $j = 1, 2, \dots, l$  в пространстве переменных  $(t, x) \in [t_0, T] \times R^n$ , задаваемых уравнениями  $s_j(x_1, \dots, x_n) = 0$  и представляющие собой множества  $M_j$  меры нуль, состоящие из точек границ областей  $s_j(x) > 0$  и  $s_j(x) < 0$ . Функция  $f(t, x, u(t, x))$  является непрерывной вплоть до общей границы указанных областей.

Исследования систем вида (1.1) при заданном виде функции  $u(t, x)$  в конечном счете сводятся к ее доопределению на многообразиях  $S_j$ . При этом приходится считаться с тем, что существующие методы доопределения (например [3],[7] и др.) приводят к излишне идеализированным моделям, которые не позволяют в полной мере оценить такие важные для практики параметры, как фактическая скорость процесса в режимах скольжения и в

<sup>1</sup> Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск

процессах близких к ним, а также определить допустимые размеры участков прошиваемости при обеспечении режима их форсирования и другие.

Учитывая реальные процессы в системах с переменной структурой при переходе траекторий из одной области однозначности в другую будем рассматривать функцию управления  $u(t, x)$  в виде:  $u(t, x) = u^+(t, x)$  при  $s(x) > \delta$ ;  $u(t, x) = u^-(t, x)$  при  $s_j(x) < -\delta$ ,  $s(x) = 0$ . При этом предполагается то, что функции  $u^+(t, x)$  и  $u^-(t, x)$  непрерывны в областях определения и дифференцируемы по обоим переменным в областях однозначности. Из вида функции  $u(t, x)$  следует, что в области  $|s(x)| \leq \delta$  сохраняется то значение, которое она имела накануне предыдущего переключения. Фактически во время неоднократного перехода решения  $x(t : t_0, x_0)$  из одной области однозначности в другую имеем дело с двумя многообразиями переключения  $S^+(t)$  и  $S^-(t)$ , на которых функция управления  $u(t, x)$  претерпевает разрыв.

Прежде, чем сформулировать задачу, введем несколько понятий и определений. При этом наряду с многообразиями  $S^+(s(x) - \delta = 0)$  и  $S^-(s(x) + \delta = 0)$  будем рассматривать многообразие  $S(s(x) = 0)$ , как многообразие меры нуль, каждая точка которого равно удалена от ближайших точек многообразий  $S^+(t)$  и  $S^-(t)$ . Тогда эти многообразия будут являться границей  $\delta$ -окрестности ( $S^\delta$ ) многообразия  $S(s(x) = 0)$ . Через  $(S^+)^{\varepsilon}$  и  $(S^-)^{\varepsilon}$  обозначим  $\varepsilon$ -окрестность многообразий  $S^+(t)$  и  $S^-(t)$  соответственно, при этом будем полагать  $\varepsilon < \delta$ .

Наряду с системой (1.1) будем рассматривать последовательность систем

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u^\nu(t, x)), \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad u^\nu(t, x) \in U(t, x), \quad (1.2)$$

где функции  $u^\nu(t, x)$  равномерно ограничены в областях их определения. Множество  $U(t, x)$  непустое, ограниченное и замкнутое. В работе [5] показана справедливость утверждения: если множество  $U(t, x)$  в точках разрыва содержит все точки, предельные для любых последовательностей вида  $\nu_k \in U(t_k, x_k)$ , где  $t_k \rightarrow t$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $(t, x) \in S^-$ , то система (1.2) равносильна системе (1.1). Введенную в (1.2) последовательность непрерывных равномерно ограниченных функций

$$u^\nu(t, x) \in U(t, x), \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

будем считать аппроксимирующей для функции  $u(t, x)$  в ограниченной замкнутой области  $G \in R^n$  при  $t \in [t_0, t_0 + T]$ . Кроме того, каждая последовательность (1.3) сходится равномерно в областях однозначности  $S^- < 0$  и  $S^+ > 0$  к значению  $u^-(t, x)$  или  $u^+(t, x)$  соответственно. Тогда каждой конкретной последовательности (1.3) в системе (1.1) отвечает одно решение  $x(t : t_0, x_0)$  из последовательности решений  $x^\nu(t)$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$ . Это решение будем представлять как частичный предел

$$x(t : t_0, x_0) = \lim x^\nu(t), \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (t_0, x_0) \in (S^-)^{\varepsilon}. \quad (1.4)$$

Множество пределов всех последовательностей обозначим через  $X(t)$ .

**О п р е д е л е н и е 1.1.** За решение системы (1.1) можно принимать любую абсолютно непрерывную функцию  $x(t) \in X(t)$ .

**О п р е д е л е н и е 1.2.** Под  $\delta$ -скользящим режимом системы (1.1) будем понимать такое ее поведение, когда траектории, пришедшие из  $\varepsilon$ -окрестности многообразий  $S^-(t)$  или  $S^+(t)$ , попадают в  $\delta$ -окрестность многообразия  $S$  в момент  $t = t_p$  и остаются в ней при  $t > t_p$ .

В силу свойств функций  $u^\nu(t, x) \in U(t, x)$  система (1.1), а, следовательно, и система (1.2), равносильны дифференциальному включению

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x, u(t, x)), \quad (1.5)$$

где  $t \in [t_0, T]$ ,  $x \in R^n$ ,  $u \in U(t, x)$ ,  $U \subset R^m$  - компакт.

При этом правая часть включения (1.5) должна удовлетворять следующим условиям:

- а)  $F(t, x, u)$  - выпуклый компакт при всех  $(t, x, u) \in [t_0, T] \times R^n \times R^m$ ;
- б) многозначное отображение  $(t, x, u) \mapsto F(t, x, u)$  непрерывно в точке  $p \in R^n$  по совокупности аргументов в хаусдорфовой метрике;
- в) множество  $F(t, x, u)$  непустое, ограниченное и замкнутое для всех  $(t, x, u) \in [t_0, T] \times R^n \times R^m$ .

Налагаемые условия а), б) и в) вытекают из свойств функции  $u^\nu(t, x) \in U(t, x)$  и из выполнения требований при любом доопределении системы (1.1).

## 2. Постановка задачи

Как известно, отличительной чертой систем с переменной структурой является то, что их поведение, как в областях однозначности, так и на многообразиях разрыва управляющей функции  $u(t, x)$  существенно зависит от характера поведения регулирующего органа реальных систем в областях переложения “рулей” с текущего их положения на противоположное. В связи с этим важно так доопределить систему путем наложения условий на управление, выполнение которых обеспечивало бы переход траекторий из областей однозначности в область  $|S(t, x)| \leq \delta$  и сохранение в ней движения в течение определенного времени. Очевидно, обеспечение таких требований заключается в необходимости такого доопределения заданной функции управлений  $u(t, x)$  и в определении такой топологии многообразий  $S^+(t)$  и  $S^-(t)$ , которые способны были бы обеспечивать режим «скольжения» в соответствии с определением 1.2. (см. выше). Насколько важно обеспечение такого режима, вытекает из решения задачи стабилизации в реальных системах с переменной структурой [2], [6].

## 3. Решение задачи

Вначале дополнительно введем следующие определения.

**О п р е д е л е н и е 3.1.** Множество векторов  $\{\dot{x}(t)\}$ , отвечающих последовательности решений  $x^\nu(t : t_0, x_0)$ ,  $(t_0, x_0) \in (S^-)^\varepsilon$  и входящих в достаточно малую окрестность точки  $(t_p, x_p) \in S^-$  из области  $S^- < 0$ , будем называть входным конусом  $C_{bx}$  для последовательности  $u^\nu \in U_{bx} \subset U$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$ . Точку  $(t_p, x_p) \in S^-$  будем называть точкой падения, которая является и общей вершиной как входного, так и выходного конуса. Образующими такого конуса являются векторы  $f^-(t, x, u^-(t, x)) = \lim f(t, x_*)$  ( $x_* \rightarrow x_p$ ,  $x_* \in S^- < 0$ ) и  $f(t, x, u_{eq})$ , где  $u_{eq} \in U(t, x)$ , получен при доопределении (например, [1]) системы (1.1) на многообразии  $S^-(s(x) - \delta = 0)$ .

**О п р е д е л е н и е 3.2.** Множество векторов  $\{\dot{x}(t)\}$ , отвечающих подмножеству  $U_{bx}^* \subset U_{bx}$ , будем называть входным подконусом  $C_{bx}^*$  конуса  $C_{bx}$ .

Разобьем интервал  $[t_0, t_p]$  точками  $t_k^\nu \in [t_0, t_p]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$ , где индекс  $\nu$  соответствует управлению  $u^\nu(t, x)$ , а точки  $(t_k, x_k)$  лежат на графиках этого решения и

принадлежат границе окрестности  $(S^-)^{\varepsilon(x_k)}$ . Таким образом, при  $(t_k, x_k) \rightarrow (t_p, x_p)$  граница окрестности  $(S^-)^{\varepsilon(x_k)}$  стремится к многообразию  $S^-$ .

Из выше приведенных определений следует, что все последовательности  $x^\nu(t)$ , отвечающие последовательностям  $u^\nu(t, x)$ , имеют свои предельные точки  $(t_*^\nu, x_*^\nu) \in S^-$  в достаточно малой окрестности  $((S^-)^{\varepsilon(x)}, \rho(x, S^-) \leq \varepsilon)$  точки  $(t_p, x_p) \in S^-$ .

Рассмотрим последовательность функций  $\{x^\nu(t)\}$ , отвечающих подмножеству  $U_{bx}^*$  и имеющих пределом точку. При этом оказывается справедливым следующее утверждение.

**Т е о р е м а 3.1.** *Если подмножество  $U_{bx}^* \subset U_{bx}$  образует сходящуюся последовательность  $u_{bx}^\nu \in U_{bx}$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$ , то последовательность  $x_{bx}^\nu$ , отвечающая подмножеству  $U_{bx}^*$ , имеет одну предельную точку.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Так как все функции  $u_{bx}^\nu \in U_{bx}$  равномерно ограничены при всех  $t \in [t_k^\nu, t_p]$ , а  $(t_k, x_k), k = 1, 2, \dots$  - точки на границе множества  $(S^-)^{\varepsilon(x_k)}$ , то множество  $\{\dot{x}^\nu\}$  также ограничено, то есть имеет место  $|\dot{x}^\nu| \leq \max F(t, x, \eta) = M$ ,  $M - \text{Const}$ . А это означает, что последовательность решений  $x^\nu(t : t_k^\nu, x_k^\nu)$  ограничена, то есть имеет место  $|x^\nu(t)| = |x_k^\nu| + M(t_p - t_k^\nu)$ . Из чего следует, что каждая последовательность точек на траекториях, отвечающих множеству  $U_{bx}^* \subset U_{bx}$ , сходится к точке  $(t_p, x_p) \in S^-$ , т.е.  $\lim x^\nu(t : t_k^\nu, x_k^\nu) = x(t_p), \nu = 1, 2, \dots$  Заметим, что существование подмножества  $U_{bx}^* \subset U_{bx}$  при этом обеспечивается выполнением условий теоремы Арцеля [7]. Что и требовалось доказать.

**Т е о р е м а 3.2.** *Если все сходящиеся последовательности  $x^\nu(t : t_k^\nu, x_k^\nu)$  равномерно ограничены и равномерно непрерывны на промежутке  $[t_k^\nu, t_p]$ , к тому же имеют один и тот же предел, то последовательности  $u_{bx}^\nu \in U_{bx}$  сходятся.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Действительно, из условий теоремы следует  $|f(t, x, u(t, x))| \leq M_1$ . Кроме того  $|\dot{x}^\nu| \leq \max |F(t, x, u)| = M_1$ ,  $|x^\nu(t)| \leq |x_0| + M_1(t_p - t_0)$ . Откуда следует  $|u(t, x)| \leq M$  при  $t_0 \leq t \leq t_p$ . Предположим, что последовательность  $u_{bx}^\nu \in U_{bx}$  не является сходящейся. Тогда из равномерно сходящейся последовательности  $x^\nu(t)$  следует существование такого  $M - \text{Const}$ , что имеет место  $|x^\nu(t) - x_k^\nu| \leq M(t_p - t_k^\nu)$ . Откуда имеем  $\{|\dot{x}^\nu|\} \leq \max |F(t, x, u_k^\nu(t, x))| = M_1$ ,  $u_k^\nu \in U_{bx}^*$ . Это означает, что семейство  $f(t, x, u_k^\nu)$  является равномерно сходящимся. Если предположить, что последовательности  $u_{bx}^\nu \in U_{bx}$  не являются сходящимися, то среди множества  $U_{bx}^*$  не существует предельной точки для данной последовательности. А это, согласно Теореме 3.1., означает, что последовательность  $x^\nu(t)$  не является сходящейся. Тогда мы приходим к противоречию. Теорема доказана.

Пусть уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u_{eg}) \quad (3.1)$$

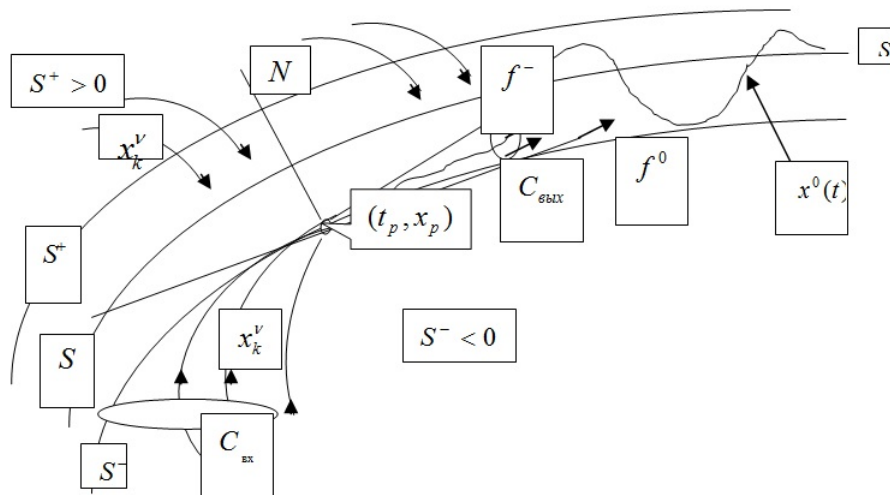
получено в процессе доопределения уравнения (1.1) на многообразии  $S^-$  одним из методов [7], где  $u_{eg}$  соответствует вектору скорости, расположенному на касательной поверхности к этому многообразию в точке  $(t_p, x_p)$ . Покажем, что при наложенных условиях на последовательность  $u^\nu(t, x)$  и на отображение  $F(t, x, u(t, x))$  в (1.3) при выполнении условий теорем 3.1. и 3.2., любое решение из множества  $\{x^\nu(t)\}$  приближается при  $t_k^\nu \rightarrow t_p$  к решению уравнения (3.1) на сколь угодно малую величину.

**Т е о р е м а 3.3.** *Пусть  $x^\nu(t, t_*^\nu, x_*^\nu)$  - одно из решений множества  $\{x^\nu(t)\}$ , отвечающее функции  $u^\nu(t) \in U_{bx}^*$ , а  $x^0(t : t_s^0, x_s^0)$  - решение уравнения (1.2) на многообразии*

$S^-$ ,  $(t_s^0, x_s^0) \in S^-$ . Тогда, если для  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такие, что  $|t_s^\nu - t_s^0| < \delta$ ,  $|x_s^\nu - x_s^0| < \delta$ ,  $\rho(u_s^\nu, u_{eg}) < \delta$ , то каждое решение  $x^\nu(t)$  отличается от решения  $x^0(t)$  не более чем на величину  $\varepsilon$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Поскольку функция  $u(t, x)$  разрывная в точке  $(t_p, x_p) \in S^-$  и непрерывна в точках  $(t_k^\nu, x_k^\nu) \rightarrow (t_p, x_p)$  при  $t_k^\nu \rightarrow t_p$ , то найдется такая точка непрерывности, что  $f^0(t_p, x_p, u_{eg}(t_p, x_p)) \in [f(t_s^\nu, x_s^\nu, u^\nu)]^\delta$ , т.е. при достаточно больших  $k = 1, 2, \dots$  точки на графиках решений содержатся в  $\varepsilon_0, \varepsilon_0 \in [0, \varepsilon]$  окрестности точки  $(t_p, x_p) \in S^-$ . Тогда согласно Теореме 3.1. можно утверждать, что при достаточно больших значениях  $k$  точки  $f(t_k^\nu, x_k^\nu)$  будут содержаться в сколь угодно малой окрестности множества  $F(t^\varepsilon, x^\varepsilon)$ , точка  $(t^\varepsilon, x^\varepsilon) \in (S^-)^\varepsilon$ . Если это не так, то для некоторого  $\varepsilon_0$  нашлась бы подпоследовательность точек  $f(t_k^\nu, x_k^\nu)$  не содержащаяся в  $(F(t^\varepsilon, x^\varepsilon))^{\varepsilon_0}$ . Как известно [5], из этой подпоследовательности можно выбрать другую подпоследовательность  $f(t_{k_j}^\nu, x_{k_j}^\nu)$ ,  $(k = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots)$ , которая при  $(t_{k_j}^\nu, x_{k_j}^\nu) \rightarrow (t_k^\nu, x_k^\nu)$ , будет стремиться к некоторому пределу  $\lambda \in F(t_k^\nu, x_k^\nu) \in F(t^\varepsilon, x^\varepsilon)$ , что противоречит утверждению: подпоследовательность  $f(t_k^\nu, x_k^\nu)$  не содержится в  $\varepsilon_0$ - окрестности множества  $F(t^\varepsilon, x^\varepsilon)$ . Что и требовалось доказать.

Поведение траекторий движений в окрестностях многообразий разрыва управляющей функции изображено на рисунке 3.1.



Р и с у н о к 3.1

Поведение траекторий движения в  $\delta$ -окрестности многообразия переключения  $S$ .

**Условие перехода траекторий из областей однозначности в область  $\|S(x) \geq \delta\|$ .**

Постановка задачи требует указать условия, при выполнении которых траектория, пришедшая из области однозначности функции  $u(t, x)$  в окрестность точки падения  $(t_p, x_p) \in S^-$ , сможет перейти в область  $\|S^-(x)\| \leq \delta$ .

Введем понятие вектора разрыва в нашем случае для точек поверхности  $S^-$ .

**О п р е д е л е н и е 3.3.** Под вектором разрыва  $r(t, x)$  предельного вектора  $f^-(t, x, u^-(t, x))$  и вектора скорости скольжения  $f^0(t, x, u_{eg})$  при  $(t_k^\nu, x_k^\nu) \rightarrow (t_p, x_p)$  будем понимать

$$r(t, x) = f^0(t, x) - f^-(t, x). \quad (3.2)$$

Очевидно, переход решений  $x(t : t_k^\nu x_k^\nu)$  из окрестности точки  $(t_p, x_p) \in S^-$  на многообразии  $S^-$  может произойти в том случае, когда для уравнения (1.1) или уравнения (1.2) имеет место правая единственность. В работе [7] показано, что это может произойти при условии, когда вектор  $r(t, x)$  направлен по нормали  $N$ , проведенной к поверхности  $S^-$  в точке  $(t_p, x_p)$ , в сторону этой поверхности, т.е.  $r_N(t, x) \leq 0$ .  $r_N(t, x)$  — проекция вектора на нормаль.

**С л е д с т в и е 3.1.** Если выполнены условия теорем 1 и 2, кроме того, для системы (1.1) имеет место правая единственность [7], а точка  $(t_p, x_p)$  не является точкой касания решения  $x(t : t_k^\nu, x_k^\nu)$  с поверхностью  $S^-$  при  $(t_k^\nu, x_k^\nu) \rightarrow (t_p, x_p)$ , то траектории движения  $x^\nu(t)$  из  $\varepsilon$ -окрестности многообразия  $S^-$  либо переходят в область  $\|S(x)\| \geq \delta$ , либо будут принадлежать этому многообразию.

Из выдвинутых условий и учитывая, что  $f_N^0 = 0$  следует  $|f^0(t, x, u_{eg}) - f(t, x, u(t_k^\nu, x_k^\nu))| \leq m|x_p - x_k^\nu|$ , где  $x_k^\nu \in (S^-)^\varepsilon$ ,  $m = \text{const}$ . Имея в виду то, что  $f(t_k^\nu, x_k^\nu, u^\nu) \rightarrow f^0(t_p, x_p, u_{eg})$  при  $x_k^\nu \rightarrow x_p$ , а также выполнение условий  $S_t^- + S_x f^- \neq 0$  ( $S^-(x) \neq 0$ ) и  $f_N^-(t, x) > 0$ , точка  $(t_p, x_p)$  будет являться точкой “срыва” траектории движения из  $\varepsilon$ -окрестности многообразия  $S^-$  либо на саму поверхность  $S^-$ , либо в область  $\|S(x)\| < \delta$ .

Следует также заметить, что решения уравнения (1.1), достигнув поверхности  $S^-$ , не могут сойти опять в область  $S^- < 0$  в силу теоремы 3.3..

**З а м е ч а н и е 3.1.** Выше рассмотрен случай перехода траекторий из области  $S^- < 0$  в область  $\|S(x)\| < \delta$ . Без каких либо изменений выше проведенные исследования переносятся на область  $S^+ > 0$ . Выполнение требований в обоих случаях и есть те условия, при которых траектории попадают вовнутрь области  $\|S(x)\| < \delta$ .

### П р и м е р 3.1.

В качестве примера рассмотрим простейшую систему управления вида

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = bf(\sigma), \quad \text{где } f(\sigma) = m \text{ при } \sigma > l_2, \quad f(\sigma) = -m \text{ при } \sigma < -l_1, (*)$$

где  $m, l_1, l_2$  — положительные величины,  $\sigma = c_1 x_1 + c_2 x_2$ ,  $c_1 \cdot c_2 < 0$ . Тогда многообразие  $S$  имеет вид  $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$ , а множества  $S^-$  и  $S^+$  — соответственно  $c_1 x_1 + c_2 x_2 = -\delta$  и  $c_1 x_1 + c_2 x_2 = \delta$ . При соответствующем выборе значения коэффициента  $b > 0$  в областях однозначности  $S^+ > 0$  и  $S^- < 0$  соответственно имеют место соотношения  $\lim \dot{S}^+ < 0$  при  $S^+ \rightarrow 0$  ( $S^+ > 0$ ) и  $\lim \dot{S}^- > 0$  при  $S^- \rightarrow 0$  ( $S^- < 0$ ). Это означает, что траектории из областей однозначности  $S^+ > 0$  и  $S^- < 0$  из  $\varepsilon$ -окрестностей многообразий  $S^+$  и  $S^-$  направлены внутрь области  $|S| \leq \delta$ .

Формально доопределим систему (1.1) методом эквивалентного управления на многообразии  $S$ , потребовав  $\dot{S}(x_1, x_2) \equiv 0$  в силу системы (\*). Откуда  $f(\sigma) = -\frac{1}{b}x_2$ . Подставив выражение  $f(\sigma)$  в систему, заключаем: на множестве  $S$  в области положительных значений  $x_2$  координата  $x_1$  изображающей точки при возрастании времени  $t$  возрастает, а в области  $x_2 < 0$  — убывает.

Поскольку фазовыми траекториями системы в областях однозначности в силу системы  $\frac{dx_1}{dx_2} = bx_2$  являются параболы, примыкающие к каждому из множеств  $S^-$  и  $S^+$  не под нулевыми углами. Это означает, что траектории со временем попадают в достаточно малую их  $\varepsilon$ -окрестность. А при выполнении требований теоремы 3.3. к функции  $f(\sigma)$  обеспечивается переход траекторий из областей однозначности  $S^-$  вовнутрь области  $|S| \leq \delta$ .

Таким образом, доопределение системы (1.1) с заданной функцией управления  $u(t, x)$  на многообразиях  $S$ ,  $S^-$ ,  $S^+$  и в их окрестностях показывает справедливость следующих выводов.

### В ы в о д ы.

1. При выполнении условий, наложенных на правые части уравнений (1.1) и (1.2), траектории движений  $x^\nu(t, x)$  из  $\varepsilon$ -окрестности многообразия  $S^-$  попадают в сколь угодно малую  $\varepsilon_0$ -окрестность ( $0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon$ ) точки  $(t_p, x_p) \in S^-$ . К тому же, если точка падения  $(t_p, x_p)$  является точкой без контакта, т.е.  $S_t + S_x f^- \neq 0$  ( $S_t, S_x$  — производные по соответствующим переменным),  $r(t, x) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow t_p$ , то траектории движений либо переходят из области  $S^- < 0$  в область  $S^- > 0$ , либо остаются на многообразии  $S^-(x)$ .

2. Проведенные исследования в отношении  $\varepsilon$ -окрестность  $S^-$  и полученные при этом результаты, без каких либо существенных изменений могут быть перенесены на окрестность многообразия  $S^+(x)$ . Как было отмечено ранее, полученные результаты могут иметь практическое значение при проведении исследований реальных систем с переменной структурой.

3. Наложённые условия на функцию управления  $u(t, x)$  и правые части уравнений (1.1) и (1.2) согласуются с требованиями, свойствами и поведением исследуемых физических систем в зоне переключения органа управления.

4. Как известно, определение скорости в режимах скольжения является одной из важнейших вопросов, решающих на этапе внедрения результатов исследования в практику.

Наличие в регуляторе зон нечувствительности, как в нашем случае, приводит к тому, что после попадания траектории движения в область  $|S(x)| \leq \delta$  скорость изображающей точки может иметь две составляющих. Одна из этих составляющих определяет движение вдоль множества  $S(t)$ , другая — определяет колебания вдоль этого многообразия. В любом случае определение скорости движения в “скользящем” режиме согласно определения ?? выводит на рассмотрение случая, при котором движение в полосе  $S(x) \leq \delta$  происходит по синусоидальной кривой в окрестности  $s(x) = 0$  с амплитудой, не превосходящей значения  $\delta$ . В связи с этим речь может идти об определении некоторой средней скорости. Рассматривая движение на четверти периода, когда изображающая точка по траектории  $x_k^\nu(t)$  попадает в окрестность точки  $(t_p, x_p)$  из области  $S^- < 0$ , далее продолжает свое дальнейшее движение в полосе  $|S(x)| \leq \delta$  под управлением  $u(t_p, x_p)$  до попадания в окрестность множества  $S^+$  в области  $S > 0$ . В этом случае величина перемещения изображающей точки вдоль множества  $S$  будет определяться приближенно как произведение скорости изображающей точки  $f(t, x, u^-(t, x))$  на время  $t = \frac{\pi}{2}$  (период  $T = 2\pi$ ), за которое изображающая точка попадает в  $\varepsilon$ -окрестность множества  $S^+$ . Вообще, время может быть определено из уравнения  $2\delta = t \cdot (\nabla s \cdot f^-)$ , где  $\nabla s$  — градиент  $s(x)$ ,  $f^-$  — предельное значение  $f$  при  $x^\nu \rightarrow x_p$ .

Если принять, что изображающая точка движется только вдоль касательной плоскости к одной из поверхностей  $S, S^-$  или  $S^+$ , то ее скорость будет определяться только вектором  $f^0(t : t_p, x_p, u^-)$ .

Таким образом, истинная скорость движения в скользящем режиме  $\dot{x}^s$  будет находиться в интервале  $(f^-, f^0)$ , т.е.  $f^- \leq \dot{x}^s \leq f^0$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барбащин Е. А., Алимов Ю. И., “К теории релейных дифференциальных уравнений”, *Известия вузов, сер. Матем.*, **1** (1962), 3–13.

2. Барбашин Е. А., *Введение в теорию устойчивости*, Наука, РЖМат., 1967, 576 с.
3. Емельянов С. В., *Теория систем с переменной структурой*, Наука, М., 1970, 576 с.
4. Сафонкин В. И., “Асимптотика поведения решений систем с переменной структурой”, *Труды Средневолжского математического общества*, **7:1** (2005), 251–256.
5. Пятницкий Е. С., *Избранные труды (теория управления). Т.1.*, Физматлит, М., 2004.
6. Уткин В. И., *Скольльзящие режимы в задачах оптимизации и управления.*, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, М., 1981.
7. Филиппов А. Ф., *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.*, Наука, М., 1985, 576 с.

## Extending the definition of variable structure system in areas switching control function

© V. I. Safonkin<sup>2</sup>

**Abstract.** The article analyzes the system with variable structure is based on replacing the original system sequence of systems, each of which control function is represented by a sequence of uniformly bounded functions  $u^\nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$ , belonging to the set  $U(t, x)$  limit values of control.

**Key Words:** variable structure system, differential inclusions, control

---

<sup>2</sup> Associate professor of Applied Mathematics, Differential Equations and theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk

УДК 517.95

# Продолжение функции из полупространства на все пространство с помощью ее сужения на границу

© Г. А. Смолкин<sup>1</sup>

**Аннотация.** Рассмотрено непрерывное продолжение функции из полупространства, вне которого, совпадающее с разбиением следа функции вдоль границы. Произведены оценки норм (по Соболеву) разбиения следа и продолжения через норму функции в полупространстве. Конструкция продолжения и ее модификации могут быть использованы при изучении априорных оценок в краевых задачах для вырождающихся вплоть до границы квазиэллиптических операторов.

**Ключевые слова:** преобразование Фурье, пространства С.Л. Соболева-Л.Н. Слободецкого, псевдодифференциальные операторы

В статье приняты следующие обозначения:

$R^n$  - евклидово пространство точек  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $n > 1$ ;  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  - двойственная переменная,  $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ ,  $x\xi = x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n$ ,  $i^2 = -1$ ,  $\Omega = \{x : x_1 > 0\}$ ,

$$\tilde{w} = \tilde{w}(\xi) = \int e^{-ix\xi} w(x) dx - \text{преобразование Фурье функции } w(x),$$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  - мультииндекс с целочисленными неотрицательными координатами,

$$\partial_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n; \quad \partial_k^j = \frac{\partial^j}{\partial x_k^j}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Пусть  $s \geq 0$ ,  $[s]$  - целая часть числа  $s$ .

Нормы  $\|\cdot\|_s$ ,  $\|\cdot\|_{s,\Omega}$  в пространствах С.Л.Соболева-Л.Н.Слободецкого определяются следующим образом:

$$\|U\|_s^2 = \int |\tilde{U}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2s} d\xi.$$

Если  $s$  - целое, то

$$\|U\|_{s,\Omega}^2 = \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\Omega} |\partial_x^\alpha U|^2 dx.$$

Если  $s$  - нецелое, то

$$\|U\|_{s,\Omega}^2 = \sum_{|\alpha| \leq [s]} \int_{\Omega} |\partial_x^\alpha U|^2 dx + \sum_{|\alpha| \leq [s]} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\partial_x^\alpha U(x) - \partial_x^\alpha U(y)|^2}{|x - y|^{n+2(s-[s])}} dx dy.$$

Постоянные, возникающие в неравенствах в качестве коэффициентов, будем обозначать буквой  $C$ , быть может с индексами.

Введем разбиение единицы двойственной переменной  $\xi$ . Пусть  $h(t) \in C_0^\infty(R)$ ,  $0 \leq h(t) \leq 1$ ;  $h(t) = 1$ , если  $|t| \leq 1$ ;  $h(t) = 0$ , если  $|t| \geq 2$ . Пусть

$$g_k(t) = h(t - k) / \sum_{j=0}^{\infty} h(t - j),$$

$$\Psi_k(\xi) = g_k(\ln((1 + |\xi|^2)^{1/2})), \quad k = 0, 1, \dots$$

<sup>1</sup> Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск

Очевидно, что в каждой точке  $\xi \in R^n$  пересекается конечное число носителей функций  $\Psi_k(\xi)$ ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k(\xi) = 1,$$

$$e^{-2}(1 + |\xi|^2)^{1/2} \leq e^k \leq e^2(1 + |\xi|^2)^{1/2}, \quad (1.1)$$

если  $\xi \in \text{supp} \Psi_k(\xi)$ .

Функции  $\Psi_k(\xi)$  соответствует псевдодифференциальный оператор  $\Psi_k(D)$ , определяемый по формуле

$$\Psi_k(D)w(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} \Psi_k(\xi) \tilde{w}(\xi) d\xi.$$

(Определение псевдодифференциальных операторов см., например, в работах [1], [3], [4].)

Теорема. Для каждой постоянной  $\tau \in [0, 1]$  существуют постоянные  $C_1, C_2, C_3$ , не зависящие от  $z(x) \in C^\infty(x_n \geq 0) \cap C_0^\infty(R^n)$  и такие, что

$$\|Z\|_\tau \leq C_1 \|z\|_{\tau, \Omega}, \quad (1.2)$$

$$\|w\|_\tau \leq C_2 \|z\|_{\tau, \Omega}, \quad (1.3)$$

$$\|v\|_\tau \leq C_3 \|z\|_{\tau, \Omega}, \quad (1.4)$$

где

$$Z(x) = \begin{cases} z(x), & \text{если } x_n \geq 0 \\ z(x_1, -x_2), & \text{если } x_n < 0, \end{cases}$$

$$w = w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} h(x_n e^k) \nu_k(x'),$$

$$v = v(x) = \begin{cases} z(x), & \text{если } x_n \geq 0 \\ w(x), & \text{если } x_n < 0, \end{cases}$$

$\nu_k(x') = Z_k(x', 0)$ ,  $Z_k(x) = \Psi_k(D)Z(x)$ ,  $w(x)$  назовем разбиением следа функции  $z(x)$  вдоль плоскости  $x_n = 0$ .

Доказательство.

Согласно работе Слободенцкого [2] функция  $Z(x)$  удовлетворяет неравенству (1.2).

Докажем неравенство (1.3). Из неравенства

$$\|w\|_\tau^2 \leq C \int (1 + |\xi|)^{2\tau} \left| \int e^{-ix_n \xi_n} \tilde{w}(\xi', x_n) dx_n \right|^2 d\xi'$$

следует

$$\|w\|_\tau^2 \leq C \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} \int \tilde{\nu}_l(\xi') \overline{\tilde{\nu}_k(\xi')} (1 + |\xi|)^{2\tau} I_l \bar{I}_k d\xi,$$

где

$$I_l = \int e^{-ix_n \xi_n} h(x_n e^l) dx_n, \quad I_k = \int e^{-iy_n \xi_n} h(y_n e^k) dy_n$$

После замены  $x_n e^l$  на  $x_n$ ,  $\xi_n e^{-l}$  на  $\xi_n$  получаем

$$\|w\|_\tau^2 \leq C \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} \int \tilde{\nu}_l(\xi') \overline{\tilde{\nu}_k(\xi')} (1 + |\xi'|^{2\tau} + \xi_n^{2\tau} e^{2l\tau}) J_l \bar{J}_k d\xi,$$

где

$$J_l = \int e^{-ix_n \xi_n} h(x_n) dx_n, \quad J_k = \int e^{-iy_n \xi_n e^l} h(y_n e^k) dy_n.$$

Очевидно  $|J_l| \leq C(1 + \xi_n^4)^{-1}$ ,  $|J_k| \leq C e^{-k}$ .

Поэтому, имеем

$$\|w\|_\tau^2 \leq C \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} \int \tilde{\nu}_l(\xi') \overline{\tilde{\nu}_k(\xi')} (1 + |\xi'|^{2\tau} + e^{2l\tau}) e^{-k} d\xi'. \quad (1.5)$$

Поскольку

$$\nu_k(\xi') = \int \Psi_k(\xi) \tilde{Z}(\xi) d\xi_n,$$

то из неравенства Коши-Буняковского и из (1.1) следует

$$|\nu_k(\xi')|^2 \leq C e^k \int |\Psi_k(\xi) \tilde{Z}(\xi)|^2 d\xi_n, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда, из (1.5), (1.1) и  $Z_k(x) = \Psi_k(D)Z(x)$ , получаем

$$\begin{aligned} \|w\|_\tau^2 &\leq C \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} \|Z_l\| \|Z_k\| e^{(l+k)/2} (e^{2\tau} + e^{2l\tau}) e^{-k} \\ &\leq C \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} \|Z_l\| \|Z_k\| e^{2l\tau + (l-k)/2} \leq C \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} (\|Z_l\|_\tau^2 + \|Z_k\|_\tau^2) e^{(l-k)/2} \\ &\leq C (\|Z\|_\tau^2 + \|Z_0\|_\tau^2 + e^{-1/2} \|Z_1\|_\tau^2 + e^{-2/2} \|Z_2\|_\tau^2 + \dots + e^{-k/2} \|Z_k\|_\tau^2 + \dots \\ &\quad + \|Z_1\|_\tau^2 + e^{-1/2} \|Z_2\|_\tau^2 + \dots + e^{(1-k)/2} \|Z_k\|_\tau^2 + \dots \\ &\quad + \|Z_2\|_\tau^2 + \dots + e^{(2-k)/2} \|Z_k\|_\tau^2 + \dots \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \|Z_k\|_\tau^2 + \dots) \\ &\leq C \|Z\|_\tau^2. \end{aligned}$$

Поэтому, из (1.2) следует оценка (1.3).

Осталось доказать неравенство (1.4).

Если  $\tau = 0$  или  $\tau = 1$ , то неравенство (1.4) следует из (1.2) и (1.3).

Пусть  $0 < \tau < 1$ . Имеем

$$\|v\|_\tau^2 \leq C(I_1 + I_2) \int (1 + |\xi'|^2 + \xi_n^2)^\tau |\tilde{v}(\xi)|^2 d\xi,$$

где

$$I_1 = \int (1 + |\xi'|^2)^\tau \int |\tilde{v}(\xi', x_n)|^2 dx_n d\xi', \quad I_2 = \int \xi_n^{2\tau} |\tilde{v}(\xi)|^2 d\xi.$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int (1 + |\xi'|^2)^\tau \int_{x_n > 0} |\tilde{Z}(\xi', x_n)|^2 dx_n d\xi' \\ &+ \int (1 + |\xi'|^2)^\tau \int_{x_n < 0} |\tilde{w}(\xi', x_n)|^2 dx_n d\xi' \leq C(\|Z\|_\tau^2 + \|w\|_\tau^2) \leq C\|z\|_{\tau, \Omega}^2. \end{aligned}$$

Из работы Слободецкого [2] имеем

$$I_1 \leq C(\|w\|^2 + J),$$

где

$$J = \int \int \int |w(x', x_n) - w(x', y_n)|^2 / |x_n - y_n|^{1+2\tau} dx_n dy_n dx' \\ \leq C(J_1 + J_2 + J_3) dx',$$

$$J_1 = \int \int_{y_n > 0} \int_{x_n > 0} |z(x', x_n) - z(x', y_n)|^2 / |x_n - y_n|^{1+2\tau} dx_n dy_n dx' \\ \leq C\|z\|_{\tau, \Omega}^2,$$

где

$$J_2 = \int \int_{y_n < 0} \int_{x_n < 0} |w(x', x_n) - w(x', y_n)|^2 / |x_n - y_n|^{1+2\tau} dx_n dy_n dx' \\ \leq C\|w\|_{\tau}^2 \leq C\|z\|_{\tau, \Omega}^2.$$

Последнее неравенство следует из (1.3).

$$J_3 = \int \int_{y_n < 0} \int_{x_n > 0} |z(x', x_n) - w(x', y_n)|^2 / |x_n - y_n|^{1+2\tau} dx_n dy_n dx' \\ \leq C(J_4 + J_5),$$

$$J_4 = \int \int_{y_n < 0} \int_{x_n > 0} |w(x', x_n) - w(x', y_n)|^2 / |x_n - y_n|^{1+2\tau} dx_n dy_n dx' \\ \leq C\|w\|_{\tau}^2 \leq C\|z\|_{\tau, \Omega}^2,$$

$$J_5 = \int \int_{y_n < 0} \int_{x_n > 0} |z(x', x_n) - w(x', x_n)|^2 / |x_n - y_n|^{1+2\tau} dx_n dy_n dx' \leq C J_6,$$

$$J_6 = \int \int_{x_n > 0} |z(x', x_n) - w(x', x_n)|^2 / |x_n|^{2\tau} dx_n dx'.$$

Далее, положим

$$g_k = g_k(x) = (1 - h(x_n e^k)) Z_k(x), \quad u_k = u_k(x) = h(x_n e^k) (Z_k(x) - Z_k(x', 0)).$$

Из равенств

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^k) Z_k(x_1, 0), \quad z(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(x) \text{ при } x_2 \geq 0$$

следует  $J_6 \leq C(J_7 + J_8)$ , где

$$J_7 = \int \int_{x_n > 0} \left| \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) \right|^2 / |x_n|^{2\tau} dx_n dx',$$

$$J_8 = \int \int_{x_n > 0} \left| \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \right|^2 / |x_n|^{2\tau} dx_n dx'.$$

Так как  $g_k(x) = 0$  при  $x_n \geq e^{-l}$ , то

$$\begin{aligned} J_7 &\leq \int \int_{x_n > 0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} |g_l(x)| |g_k(x)| e^{2l\tau} dx_n dx' \\ &\leq C \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} \|Z_l(x)\| \|Z_k(x)\| e^{2l\tau} \\ &\leq C \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} (\|Z_l(x)\|^2 e^{2l\tau + (l-k)\tau} + \|Z_k(x)\|^2 e^{2k\tau + (l-k)\tau}) \\ &\leq C \left( \sum_{l=0}^{\infty} (\|Z_l(x)\|_{\tau}^2 + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} \|Z_k(x)\|_{\tau}^2 e^{(l-k)\tau}) \right) \\ &\leq C (\|Z(x)\|_{\tau}^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \|Z_k(x)\|_{\tau}^2 e^{(l-k)\tau}) \leq C \|Z(x)\|_{\tau}^2. \end{aligned}$$

Оценим  $J_8$ .

Из формулы Ньютона-Лейбница и неравенства Коши-Буняковского следует

$$|Z_k(x) - Z_k(x', 0)| \leq |x_n|^{1/2} \left( \int \left| \frac{\partial}{\partial t} Z_k(x', t) \right|^2 dt \right)^{1/2}$$

. Отсюда получаем

$$J_8 \leq \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} \|D_2 Z_l\| \|D_2 Z_k\| \int h(x_n e^k) |x_n|^{1-2\tau} dx_n.$$

Заменив  $x_n e^k$  на  $x_2$  и учитывая (1.1), получаем

$$\begin{aligned} J_8 &\leq C \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} \|Z_l\| \|Z_k\| e^{2k\tau + l - k} \int h(x_n) |x_n|^{1-2\tau} dx_n. \\ &\leq C \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} \|Z_l\| \|Z_k\| e^{2k\tau + l - k} \\ &\leq C \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} (\|Z_l\|^2 e^{2l\tau + l - k} + \|Z_k\|^2 e^{-2l\tau + 2k\tau + l - k}) \\ &\leq C \sum_{l=0}^{\infty} \|Z_l\|^2 e^{2l\tau} + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} \|Z_k\|^2 e^{-2l\tau + 2k\tau + l - k} \\ &\leq C (\|Z\|_{\tau}^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \|Z_k\|^2 e^{-2l\tau + 2k\tau + l - k}) \leq C \|Z\|_{\tau}^2. \end{aligned}$$

Этим завершается доказательство теоремы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Егоров Ю. В., *Линейные дифференциальные уравнения главного типа*, Наука, М., 1984, 360 с.
2. Слободецкий Л. Н., “Обобщенные пространства С.Л.Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных”, *Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та*, 1958, № 197, 54-112.
3. Тейлор М., *Псевдодифференциальные операторы*, Мир, М., 1985, 472 с.
4. Хермандер Л., *Псевдодифференциальные операторы и гипотетические уравнения*, Мир, М., 1967.

## Continuation of the function of half of all space via its restriction to the boundary efootnote

© G. A. Smolkin<sup>2</sup>

**Abstract.** Consider a continuous extension of the half-space, which is coincident with trace partition function along the border. Produced estimates of the norms (Sobolev) partition trace and continue through the norm of the function in the half. design extension and its modifications can be used the study of a priori estimates in boundary value problems for degenerate up to the boundary of quasi-elliptic operators.

**Key Words:** Fourier transformation, space S.L. Sobolev - L.N. Slobodetskii, pseudodifferential operators

---

<sup>2</sup> Associate professor of Applied Mathematics, Differential Equations and theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk

УДК 517.9

# Нелокальная разрешимость одного варианта системы Франкля

© Т. А. Шемякина<sup>1</sup>

**Аннотация.** Получены условия нелокальной разрешимости задачи Коши для одного варианта системы Франкля. Исследование рассмотренной задачи основано на методе дополнительного аргумента.

**Ключевые слова:** система Франкля, квазилинейные дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка, задача Коши, метод дополнительного аргумента

## 1. Введение

Рассмотрим систему Франкля в общем виде, представимую нелинейной системой дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка:

$$\begin{cases} A_{11} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + B_{11} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} + B_{12} \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = f_1, \\ A_{21} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + B_{21} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} + B_{22} \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = f_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

где коэффициенты  $A_{ij}, B_{ij}, f_i (i, j = 1, 2)$  – нелинейные функции переменных  $x, y, u, v$ .

Система Франкля (1.1) относится к системе уравнений смешанного типа: при  $d > 0$ ,  $d_A \neq 0$  – гиперболический случай; при  $d < 0$ ,  $d_A \neq 0$  – эллиптический случай, где

$$d := \left( \begin{vmatrix} A_{11} & B_{12} \\ A_{21} & B_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_{11} & A_{12} \\ B_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \right)^2 - 4 * \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix}; \quad d_A := \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}.$$

Система Франкля (1.1) описывает различные задачи в области геофизики, гидрогазодинамики, механики газового спрайта, в теории переноса нейтронов, в теории термоупругости и т.д. В частном случае система (1.1) описывает процессы движения газа с дозвуковыми, сверхзвуковыми и трансзвуковыми скоростями. Ф.И. Франкль [1] впервые связал физические исследования уравнений газовой динамики с математическими исследованиями уравнений смешанного типа.

Исследуется система Франкля (1.1) методом дополнительного аргумента (МДА). Для частного случая системы Франкля разработан принципиально новый способ применения метода дополнительного аргумента и на его основе найдены условия локальной разрешимости отдельно для эллиптической и гиперболической областей, определены границы интервала существования гладкого ограниченного решения [2], [3], [4], [5].

В работе найдены условия нелокальной разрешимости задачи Коши для одного варианта системы Франкля – системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка (1.1).

<sup>1</sup> Доцент кафедры высшей математики, Санкт-Петербургский Государственный Политехнический университет, г. Санкт-Петербург; sh\_tat@mail.ru.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим систему Франкля (1.1) в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + b_{11} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + b_{12} \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} + b_{21} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + b_{22} \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где коэффициенты  $A_{11} = A_{22} = 1, A_{12} = A_{21} = 0; \quad B_{11} = B_{22} = b_{11} = b_{22} = \alpha \cdot u; \quad \alpha - \text{const}; \quad B_{12} = b_{12}(x, y, u, v), B_{21} = b_{21}(x, y, u, v), \quad f_1 = f_2 = 0.$

Матрицы имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha \cdot u & b_{12} \\ b_{21} & \alpha \cdot u \end{pmatrix}, \quad d = 4 \cdot b_{12} \cdot b_{21} > 0, \quad d_A = 1 \neq 0.$$

Система Франкля (2.1) является системой уравнений гиперболического типа. Матрица  $B$  обладает двумя независимыми вещественными собственными векторами и соответствующими различными собственными числами:

$$\vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{b_{12}}{b_{21}}} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{b_{12}}{b_{21}}} \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_{1,2} = \alpha \cdot u \mp c(v); \quad c(v) = \sqrt{b_{12}b_{21}}.$$

Поставим задачу Коши для системы уравнений (2.1) в области

$$\Omega = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq Y, Y > 0\}$$

с начальными условиями для неизвестных функций:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (2.2)$$

где  $u_0(x), v_0(x)$  – известные функции, удовлетворяющие условию:

$$u'_0(x) > \sqrt{b_{12} * b_{21}} = c(v_0). \quad (2.3)$$

Исследуем задачу Коши для системы Франкля (2.1), (2.2) в гиперболическом случае методом дополнительного аргумента.

## 3. Нелокальные условия существования решения

Для исследования разрешимости задачи Коши (2.1), (2.2) также как в работах [2], [3], [4], [5] будем применять метод дополнительного аргумента. При этом сначала приведем исходную систему Франкля (2.1) к характеристической форме, когда каждое уравнение содержит производные только одной неизвестной функции. Это осуществляется с помощью введения новых неизвестных функций, которые называют инвариантами Римана:

$$\begin{cases} z_1(x, y) = u(x, y) - \varphi(v), \\ z_2(x, y) = u(x, y) + \varphi(v); \quad \varphi(v) = \int \frac{c(v)}{b_{21}} dv = \int \sqrt{\frac{b_{12}}{b_{21}}} dv. \end{cases} \quad (3.1)$$

В результате алгебраических преобразований система уравнений Франкля (2.1) запишется в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1(x, y)}{\partial y} + (\alpha \cdot u(x, y) - c(v)) \frac{\partial z_1(x, y)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z_2(x, y)}{\partial y} + (\alpha \cdot u(x, y) + c(v)) \frac{\partial z_2(x, y)}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

В последней системе уравнений старые переменные  $u, v$  заменим новыми -  $z_1, z_2$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1(x, y)}{\partial y} + (a \cdot z_1(x, y) + b \cdot z_2(x, y)) \frac{\partial z_1(x, y)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z_2(x, y)}{\partial y} + (c \cdot z_1(x, y) + g \cdot z_2(x, y)) \frac{\partial z_2(x, y)}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Это следует из того, что преобразование (3.1) имеет обратное и однозначно определяются функции:

$$u(x, y) = \frac{z_1 + z_2}{2}, \quad \varphi(v) = \frac{z_2 - z_1}{2}.$$

Так как  $\varphi'(v) > 0$ , то из последней формулы также однозначно определяются

$$v = \varphi^{-1}(z_2 - z_1), \quad c(v) = c(\varphi^{-1}(z_2 - z_1)) = \psi(z_2 - z_1).$$

Пусть, в частном случае, имеем представление  $\psi(z_2 - z_1) = \beta(z_2 - z_1)$ , тогда получим выражения в виде:

$$\lambda_1 = \alpha \frac{z_1 + z_2}{2} - \beta(z_2 - z_1) = az_1 + bz_2;$$

$$\lambda_2 = \alpha \frac{z_1 + z_2}{2} + \beta(z_2 - z_1) = bz_1 + az_2.$$

Предполагаем, что справедливы соотношения:

$$a = \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) > 0, \quad b = \left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) > 0,$$

тогда следует неравенство для констант  $\alpha, \beta$ :

$$-\left(\frac{\alpha}{2}\right) < \beta < \left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Рассмотрим некоторые варианты коэффициентов собственных значений  $\lambda_{1,2}$ :

$$1. \alpha = 1, \beta = \frac{1}{4} : \quad a = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{4}; \quad 2. \alpha = 1, \beta = \frac{1}{6} : \quad a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3};$$

$$3. \alpha = 1, \beta = \frac{1}{10} : \quad a = \frac{3}{5}, b = \frac{2}{5}.$$

Простейшую модель неустановившегося движения газа – одномерного плоского изэнтропического течения газа [7], можно описать системой уравнений Франкля при следующих значениях:

$$\alpha = 1, \quad b_{12} = \frac{c^2(v)}{v}; \quad c^2(v) = v^{\gamma-1}, \quad c(v) = v^{\frac{\gamma-1}{2}},$$

$$\varphi(v) = \frac{2}{\gamma-1} c(v); \quad c(v) = \frac{(\gamma-1)(z_2 - z_1)}{4};$$

тогда имеем:

$$\lambda_1 = z_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma - 1}{4}\right) + z_2\left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma - 1}{4}\right) = az_1 + bz_2;$$

$$\lambda_2 = z_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma - 1}{4}\right) + z_2\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma - 1}{4}\right) = az_1 + bz_2;$$

В этих обозначениях газ описывается величинами:

$u$  – скорость течения газа;

$v$  – плотность газа т.е. масса, содержащаяся в единице объема;

$c(v)$  – изотермическая скорость звука;

$\gamma = \frac{c_P}{c_V}$  – показатель адиабаты, т.е. отношение удельных теплоемкостей при постоянном объеме и давлении соответственно.

При определенных значениях  $\gamma$  получим соответствующие варианты коэффициентов собственных значений  $\lambda_{1,2}$ :

$$1. \gamma = 2: \quad a = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{4}; \quad 2. \gamma = \frac{5}{3}: \quad a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}; \quad 3. \gamma = \frac{7}{5}: \quad a = \frac{3}{5}, b = \frac{2}{5},$$

где справедливы соотношения:

$$a = \left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma - 1}{4}\right) > 0, \quad b = \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma - 1}{4}\right) > 0, \quad \gamma \neq 1.$$

Определим условия для начальных функций  $z_{10}, z_{20}$  через коэффициенты исходной системы Франкля (2.1) и начальные условия (2.2):

$$z'_{10}(x, y) = u'_0(x, y) - c(v_0) > 0, \quad z'_{20}(x, y) = u'_0(x, y) + c(v_0) > 0.$$

Таким образом, система уравнений (3.2) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1(x, y)}{\partial y} + (a \cdot z_1 + b \cdot z_2) \frac{\partial z_1(x, y)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z_2(x, y)}{\partial y} + (b \cdot z_1 + a \cdot z_2) \frac{\partial z_2(x, y)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

с начальными условиями на неизвестные функции:

$$z_1(x, 0) = z_{10}(x), \quad z_2(x, 0) = z_{20}(x), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (3.4)$$

где  $(x, y) \in \Omega := (-\infty, \infty) \times [0, Y]$  ;

$a, b, c, g, Y, z'_{10}, z'_{20}$  – известные положительные константы.

Задача (3.3), (3.4) является характеристической формой для одного варианта системы Франкля (2.1). Для более общей характеристической формы (3.2) системы уравнений (2.1) в работе [6] получены условия нелокальной разрешимости системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Эти условия сформулированы в виде теоремы:

**Т е о р е м а 3.1.** Пусть функции  $z_{10}, z_{20} \in \bar{C}^2(R^1)$  и выполнены условия:

1.  $a > 0, b > 0, c > 0, g > 0$ ,

2.  $z'_{10} > 0, z'_{20} > 0$ .

Тогда для любого  $Y > 0$  задача Коши (3.2), (3.4) имеет единственное решение

$z_1(x, y) \in \bar{C}^{2,1,2}(R^1 \times [0, Y]), \quad z_2(x, y) \in \bar{C}^{2,1,2}(R^1 \times [0, Y]).$

Следовательно, для нелокальной разрешимости задачи Коши одного варианта системы Франкля (2.1), (2.2) с характеристической формой вида (3.3) необходимо потребовать выполнения еще условия (2.3).

В заключение отметим, что метод дополнительного аргумента работе в [6] позволил не только определить условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений с разными характеристическими направлениями гиперболического типа, найти глобальные оценки для решения задачи (3.2), (3.4), но и эффективно находить численное решение в исходных переменных.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Франкль Ф. И., *Избранные труды по газовой динамике*, Наука, М., 1973, 712 с.
2. Алексеенко С. Н., Шемякина Т. А., Круц К. Г., “Локальное существование ограниченного решения системы Франкля в гиперболическом случае”, *Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям*, 2006, № 35, 142–147.
3. Алексеенко С. Н., Шемякина Т. А., Чезганов В. Г., “Локальное существование ограниченного решения системы Франкля в эллиптическом случае”, *Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям*, 2006, № 35, 148–152.
4. Шемякина Т. А., “Условия существования и дифференцируемости решения системы Франкля в гиперболическом случае”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **13:2** (2011), 127–131.
5. Шемякина Т. А., “Теорема существования ограниченного решения задачи Коши для системы Франкля гиперболического типа”, *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*, 2012, № 2 (146), 130–131.
6. Алексеенко С. Н., Шемякина Т. А., Донцова М. В., “Условия нелокальной разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка”, *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*, 2012, № 3 (177), 190–201.
7. Рождественский Б. Л., *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*, Наука, М., 1978, 592 с.

Дата поступления 10.05.2014

## Nonlocal solvability of one embodiment of the Frankl system

© Т. А. Shemyakina<sup>2</sup>

**Abstract.** Conditions of a nonlocal resolvability of the Cauchy problem for a Frankl system are received. The investigation of the considered problem is based on the method of an additional argument.

**Key Words:** the Frankl system, the quasilinear first order partial differential equations, Cauchy problem, the method of an additional argument

<sup>2</sup> Associate professor of the higher mathematics Chair, St.-Petersburg State Polytechnic university, St.-Petersburg; sh\_tat@mail.ru.

УДК 517.9

# Суммарно-разностное уравнение в частных разностях высокого порядка

© Т. К. Юлдашев<sup>1</sup> А. С. Хритonenko<sup>2</sup>

**Аннотация.** В данной работе предлагается методика изучения конечной задачи для нелинейного суммарно-разностного уравнения с разностным гиперболическим оператором произвольной натуральной степени. Доказываются существование и единственность решения рассматриваемой задачи.

**Ключевые слова:** разностное уравнение первого порядка, нелинейная правая часть, однозначная разрешимость, метод последовательных приближений, метод сжимающих отображений

## 1. Постановка задачи

Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков. Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков [1].

Выражение уравнений в частных производных высокого порядка через суперпозицию дифференциальных операторов в частных производных первого порядка позволяет применять методов решения дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [2] - [5]. Локальная теория дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, основанная на понятиях производной по направлению и характеристик, хорошо развита. Характеристики замечательны тем, что выражения в левой части уравнений в частных производных первого порядка представляют собой производную неизвестной функции по направлению вдоль характеристики. Это позволяет, перейдя к новой переменной, представить уравнение в частных производных как обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее изменение неизвестной функции вдоль линии характеристик.

В данной работе как дискретный аналог уравнений в частных производных высокого порядка рассматривается суммарно-разностное уравнение с разностным гиперболическим оператором произвольной натуральной степени. Такое уравнение при конечных условиях заменяется с суммарным уравнением. Доказываются существование и единственность решения полученного суммарного уравнения.

На множестве  $D$  рассматривается нелинейное уравнение в частных разностях следующего вида

$$\left(\Delta_n^2 - \Delta_m^2\right)^k u(n, m) = f\left(n, m, \sum_{\nu=n_0}^{N-1} \sum_{\mu=-N}^{N-1} K(\nu, \mu) u(\nu, \mu)\right) \quad (1.1)$$

с конечными условиями

$$u(n, m)|_{n=N} = \varphi_1(m), \Delta_n^i u(n, m)|_{n=N} = \varphi_{i+1}(m), i = \overline{1, 2k-1}, \quad (1.2)$$

<sup>1</sup> Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, tursunbay@ Rambler.ru;

<sup>2</sup> Студентка института информатики и телекоммуникации, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск

где  $u(n, m)$  – неизвестная функция,  $f(n, m, u(n, m))$  определена для всех  $n \geq n_0$ ,  $\varphi_i(m)$  определены для всех  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $i = \overline{1, 2k}$ ,  $0 < \sum_{\nu=n_0}^{N-1} \sum_{\mu=-N}^{N-1} K(\nu, \mu) < \infty$ ,  $D \equiv D_N \times \mathbb{Z}$ ,  $D_N \equiv \{n_0 \leq n \leq N\}$ ,  $0 < n_0, n, N$  – натуральные числа,  $\mathbb{Z}$  – множество целых чисел,  $k$  – произвольное натуральное число,  $\Delta_n^2 u(n, m) = \Delta(\Delta_n u(n+1, m) - \Delta_n u(n, m)) = u(n+1, m) - 2u(n, m) + u(n-1, m)$ ,  $\Delta_m^2 u(n, m) = \Delta(\Delta_m u(n, m+1) - \Delta_m u(n, m)) = u(n, m+1) - 2u(n, m) + u(n, m-1)$ ,  $\Delta_n u(n, m) = u(n+1, m) - u(n, m)$ ,  $\Delta_m u(n, m) = u(n, m+1) - u(n, m)$ .

## 2. Сведение задачи (1.1), (1.2) к суммарному уравнению

При решении задачи (1.1), (1.2) используем дискретный аналог метода характеристик. Левую часть уравнения (1.1) запишем в виде

$$\left(\Delta_n^2 - \Delta_m^2\right)^k u(n, m) = \left(\Delta_n - \Delta_m\right)^k \left(\Delta_n + \Delta_m\right)^k u(n, m) = L_1^k [L_2^k [u]],$$

где  $L_1 [L_2^k [u]] \equiv (\Delta_n - \Delta_m) L_2^k [u]$ ,  $L_2 [u] \equiv (\Delta_n + \Delta_m) u(n, m)$ .

Тогда уравнение (1.1) приобретает вид

$$L_1^k [L_2^k [u]] = f\left(n, m, \sum_{\nu=n_0}^{N-1} \sum_{\mu=-N}^{N-1} K(\nu, \mu) u(\nu, \mu)\right). \quad (2.1)$$

Из (2.1) видно, что разностное уравнение (1.1) имеет два  $k$  – кратные характеристики: 1)  $m + N - n - 1 = C_1$ ; 2)  $m - N + n + 1 = C_2$ , где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные.

Суммируя уравнения (2.1)  $k$  раз вдоль линии второй характеристики, получаем

$$L_1^{k-1} [L_2^k [u]] = \Phi_1(m - N + n + 1) - \sum_{\nu=n}^{N-1} f\left(\nu, m, \sum_{\theta=n_0}^{N-1} \sum_{\mu=-N}^{N-1} K(\theta, \mu) u(\theta, \mu)\right), \quad (2.2)$$

$$L_1^{k-2} [L_2^k [u]] = \Phi_2(m - N + n + 1) - \Phi_1(m - N + n + 1)(N - n - 1) + \sum_{\nu_1=n}^{N-1} \sum_{\nu_2=\nu_1}^{N-1} f\left(\nu_2, m, \sum_{\theta=n_0}^{N-1} \sum_{\mu=-N}^{N-1} K(\theta, \mu) u(\theta, \mu)\right), \quad (2.3)$$

.....

$$L_2^k [u] = \sum_{i=1}^k \Phi_i(m - N + n + 1) \frac{(-1)^{i+1} (N - n - 1)^{k-i}}{(k-i)!} + (-1)^k \sum_{\nu_1=n}^{N-1} \sum_{\nu_2=\nu_1}^{N-1} \cdots \sum_{\nu_k=\nu_{k-1}}^{N-1} f\left(\nu_k, m, \sum_{\theta=n_0}^{N-1} \sum_{\mu=-N}^{N-1} K(\theta, \mu) u(\theta, \mu)\right), \quad (2.4)$$

где  $\Phi_i (i = \overline{1, k})$  – произвольные целые функции, которые подлежат определению.

Из (2.2)-(2.4), в силу конечных условий (1.2), получаем

$$\Phi_1(m) = \varphi_{2k}(m), \Phi_2(m) = \varphi_{2k-1}(m), \dots, \Phi_k(m) = \varphi_{k+1}(m). \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) в уравнение (2.4), имеем

$$L_2^k[u] = \sum_{i=1}^k \varphi_{k+i}(m - N + n + 1) \frac{(-1)^{i+1}(N - n - 1)^{i-1}}{(i-1)!} + \\ + (-1)^k \sum_{\nu_1=n}^{N-1} \sum_{\nu_2=\nu_1}^{N-1} \cdots \sum_{\nu_k=\nu_{k-1}}^{N-1} f \left( \nu_k, m, \sum_{\theta=n_0}^{N-1} \sum_{\mu=-N}^{N-1} K(\theta, \mu) u(\theta, \mu) \right). \quad (2.6)$$

Аналогично, суммируя уравнения (2.6)  $k$  раз вдоль линии первой характеристики, получаем

$$L_2^{k-1}[u] = \Phi_{k+1}(m + N - n - 1) - \\ - \sum_{j=1}^k \sum_{\nu=n}^{N-1} \frac{(-1)^{j+2}(N - \nu - 1)^{j-1}}{(j-1)!} \varphi_{k+j}(m - N + \nu + 1) + \\ + (-1)^{k+1} \sum_{\nu_1=n}^{N-1} \sum_{\nu_2=\nu_1}^{N-1} \cdots \sum_{\nu_{k+1}=\nu_k}^{N-1} f \left( \nu_{k+1}, m, \sum_{\theta=n_0}^{N-1} \sum_{\mu=-N}^{N-1} K(\theta, \mu) u(\theta, \mu) \right), \quad (2.7)$$

$$L_2^{k-2}[u] = \Phi_{k+2}(m + N - n - 1) - \Phi_{k+1}(m + N - n - 1)(N - n - 1) + \\ + \sum_{j=1}^k \sum_{\nu_1=n}^{N-1} \sum_{\nu_2=\nu_1}^{N-1} \frac{(-1)^{j+3}(N - \nu_2 - 1)^{j-1}}{(j-1)!} \varphi_{k+j}(m - N + \nu_2 + 1) + \\ + (-1)^{k+2} \sum_{\nu_1=n}^{N-1} \sum_{\nu_2=\nu_1}^{N-1} \cdots \sum_{\nu_{k+2}=\nu_{k+1}}^{N-1} f \left( \nu_{k+2}, m, \sum_{\theta=n_0}^{N-1} \sum_{\mu=-N}^{N-1} K(\theta, \mu) u(\theta, \mu) \right), \quad (2.8)$$

$$\dots \dots \dots \\ u(n, m) = \sum_{i=k+1}^{2k} \frac{(-1)^{i+1}(N - n - 1)^{2k-i}}{(2k-i)!} \Phi_i(m + N - n - 1) + \\ + \sum_{j=1}^k \sum_{\nu_1=n}^{N-1} \sum_{\nu_2=\nu_1}^{N-1} \cdots \sum_{\nu_k=\nu_{k-1}}^{N-1} \frac{(-1)^{j+k+1}(N - \nu_k - 1)^{j-1}}{(j-1)!} \varphi_{k+j}(m - N + \nu_k + 1) + \\ + (-1)^{2k} \sum_{\nu_1=n}^{N-1} \sum_{\nu_2=\nu_1}^{N-1} \cdots \sum_{\nu_{2k}=\nu_{2k-1}}^{N-1} f \left( \nu_{2k}, m, \sum_{\theta=n_0}^{N-1} \sum_{\mu=-N}^{N-1} K(\theta, \mu) u(\theta, \mu) \right), \quad (2.9)$$

где  $\Phi_i(i = \overline{k+1, 2k})$  произвольные целые функции, подлежащие определению.

Из (2.7)-(2.9), в силу условия (1.2), получаем

$$\Phi_{k+1}(m) = \varphi_k(m), \Phi_{k+2}(m) = \varphi_{k-1}(m), \dots, \Phi_{2k}(m) = \varphi_1(m). \quad (2.10)$$

С учетом (2.10) для конечной задачи (1.1), (1.2) получаем следующее нелинейное суммарное уравнение:

$$u(n, m) \equiv \Theta(n, m; u) = \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{i+1}(N - n - 1)^{i-1}}{(i-1)!} \varphi_i(m + N - n - 1) + \\ + \sum_{j=1}^k \sum_{\nu_1=n}^{N-1} \sum_{\nu_2=\nu_1}^{N-1} \cdots \sum_{\nu_k=\nu_{k-1}}^{N-1} \frac{(-1)^{j+k+1}(N - \nu_k - 1)^{j-1}}{(j-1)!} \varphi_{k+j}(m - N + \nu_k + 1) +$$

$$+(-1)^{2k} \sum_{\nu_1=n}^{N-1} \sum_{\nu_2=\nu_1}^{N-1} \cdots \sum_{\nu_{2k}=\nu_{2k-1}}^{N-1} f\left(\nu_{2k}, m, \sum_{\theta=n_0}^{N-1} \sum_{\mu=-N}^{N-1} K(\theta, \mu) u(\theta, \mu)\right), \quad (2.11)$$

где  $m$  – параметр.

### 3. Разрешимость задачи (1.1), (1.2)

Используем следующие обозначения:  $Bnd(M)$  – класс целых функций, ограниченных нормой с положительным числом  $M$ ;  $Lip\{L_{|u,v,\dots}\}$  – класс функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменным  $u, v, \dots$  с положительным числом  $L$ .

В качестве нормы в области  $D$  для произвольной целой функции  $x(n, m)$  мы берем евклидову норму

$$\|x(n, m)\| = \max\{|x(n, m)| : n \in D_N, m \in \mathbb{Z}\}.$$

**Т е о р е м а 3.1.** Пусть следующие условия выполняются:

1.  $\varphi_i(m) \in Bnd(M_i), 0 < \sum_{i=1}^{2k} M_i \frac{(N-1)^{i-1}}{(i-1)!} \leq \delta_0 < \infty$ ;
2.  $f(n, m, u) \in Bnd(M_0) \cap Lip\{L_{|u}\}, 0 < L = \text{const}$ ;
3.  $0 < M_0 \frac{(N-1)^{2k}}{(2k)!} \leq \delta_1 < \infty$ ;
4.  $\rho = L \frac{(N-1)^{2k}}{(2k)!} \sum_{\nu=n_0}^{N-1} \sum_{\mu=-N}^{N-1} K(\nu, \mu) < 1$ .

Тогда задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение в области  $D$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Используем метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений (см., напр. [6] - [8]). Рассмотрим следующий итерационный процесс Пикара:

$$\begin{cases} u_0(n, m) = 0, \\ u_{\gamma+1}(n, m) = \Theta(n, m; u_\gamma), \gamma = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $m$  – параметр.

Тогда, в силу условий теоремы, из (3.1) получаем, что справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} & \|u_1(n, m) - u_0(n, m)\| \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^{2k} M_i \frac{(N-1)^{i-1}}{(i-1)!} + \frac{(N-n-1)^{2k}}{(2k)!} \|f(n, m, 0)\| \leq \delta_0 + \delta_1, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & \|u_{\gamma+1}(n, m) - u_\gamma(n, m)\| \leq \\ & \leq \frac{(N-n-1)^{2k}}{(2k)!} \sum_{\nu=n_0}^{N-1} \sum_{\mu=-N}^{N-1} K(\nu, \mu) \|u_\gamma(\nu, \mu) - u_{\gamma-1}(\nu, \mu)\| \leq \\ & \leq \rho \cdot \|u_\gamma(n, m) - u_{\gamma-1}(n, m)\| < \|u_\gamma(n, m) - u_{\gamma-1}(n, m)\|. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из оценок (3.2) и (3.3) следует, что оператор в правой части (2.11) является сжимающим. Следовательно, задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение в области  $D$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.**

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгазин С. Д., Кийко И. А., *Флаттер пластин и оболочек*, Наука, М., 2006, 248 с.
2. Юлдашев Т. К., “Обратная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с гиперболическим оператором высокой степени”, *Вестник Южно-УралГУ. Серия: Математика. Механика. Физика*, **5**:1 (2013), 69–75.
3. Юлдашев Т. К., “Задача Коши для нелинейных уравнений с гиперболическим оператором высокой степени”, *Таврический вестник информатики и математики*, 2013, № 1, 89–98.
4. Юлдашев Т. К., “Об обратной задаче для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений высшего порядка”, *Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика*, 2014, № 1, 145–155.
5. Юлдашев Т. К. Середкина А. И., “Обратная задача для квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка”, *Вестник СамГТУ. Серия: Физ.-мат. науки*, **32**:3 (2013), 46–55.
6. Yuldashev T. K., “On a summery equation with weak nonlinear right-hand side”, *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, **15**:1 (2007), 95–98.
7. Yuldashev T. K., “On a solvability of nonlinear evolution summary equations with nonlinear deviation”, *Proc. of Jangjeon Math. Society*, **11**:1 (2008), 83–88.
8. Yuldashev T. K., “On a first order quasilinear partial difference equation”, *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, **23**:4 (2013), 677–680.

## Partial summary difference equation of the higher order

© Т. К. Yuldashev<sup>3</sup> А. S. Kharitonenko<sup>4</sup>

**Abstract.** It is proposed in this paper the method of studying the end-point problem for a nonlinear partial summary difference equation with difference hyperbolic operator of the arbitrary natural power. It is proved the theorem of existence and uniqueness of solution of the considering problem.

**Key Words:** difference equation of the first order, nonlinear right-hand side, one-value solvability, the method of successive approximations, the method of compressing mapping

<sup>3</sup> Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursunbay@rambler.ru;

<sup>4</sup> Student of Institute of Informatics and Telecommunication, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.929

### Исследование робастного поведения семейств дискретных полиномов

© В. И. Zubov<sup>1</sup>, И. В. Zubov<sup>2</sup>, А. Ф. Zubova<sup>3</sup>

**Аннотация.** В этой статье с помощью нового понятия, единичного радиуса с центром в нуле разделяющего полином по числу корней вне и внутри круга, обобщен принцип исключения нуля для исследования робастного поведения семейств дискретных полиномов. В частном случае, для дискретных интервальных полиномов приведен графический критерий их принадлежности классам  $(n, k)$  - эквивалентности дискретных полиномов. Обсуждается использование этой методики для других семейств полиномов.

**Ключевые слова:** интервальные полиномы, критерий Михайлова, годограф

Анализируя поведение дискретного семейства полиномов и принцип исключения нуля для таких семейств, видим, что можно сформулировать понятия и утверждения для исследования семейств дискретных полиномов на неустойчивость. Точнее, исследование их принадлежности некоторым однородным классам, разделяя дискретные полиномы по числу корней внутри и вне круга единичного радиуса с центром в нуле.

В этой статье ограничимся рассмотрением семейств дискретных интервальных полиномов.

Предварительно, введем понятие для общего случая.

**О п р е д е л е н и е 1.1.** Семейство полиномов степени  $n$

$$\tilde{F}(s, Q) = \{F(s, q) = a_0(q) + a_1(q)s + \dots + a_n(q)s^n, q \in Q\} \quad (1.1)$$

назовем принадлежащим классу  $(n, k)$  - эквивалентности дискретных полиномов, если каждый полином семейства (1.1) для всех значений параметра  $q \in Q \subset R^l$  имеет  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , корней внутри круга единичного радиуса с центром в нуле, а  $n - k$  корней - вне этого круга (с учетом кратностей).

Очевидно, семейство дискретных полиномов из класса  $(n, 0)$  - эквивалентности дискретных полиномов является робастно устойчивым в пространстве параметров  $Q$ . Требование одинакового порядка  $n$  полиномов в семействе требуется, чтобы число корней вне и внутри круга  $|s| \leq 1$  в сумме с учетом кратностей было одинаковым и равно порядку  $n$  полинома. Напомним, что для устойчивых дискретных полиномов условие постоянства порядка всех полиномов в семействе не требуется [4]. В общем случае для робастной устойчивости и робастной неустойчивости семейства дискретных полиномов справедлив аналог принципа исключения нуля.

**Т е о р е м а 1.1.** Пусть  $F(s, q^0) \in \tilde{F}(s, Q)$  для некоторого  $q^0 \in Q$ ,  $Q$  - связно,  $Q \in R^l$ , принадлежит классу  $(n, k)$  - эквивалентности дискретных полиномов. Тогда условие

<sup>1</sup> Аспирант кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

<sup>2</sup> Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

<sup>3</sup> Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

$$0 \notin S(\omega) = \{F(e^{j\omega}, q) : q \in Q, 0 \leq \omega < 2\pi\} \quad (1.2)$$

необходимо и достаточно для принадлежности всего семейства  $\gamma \leq \gamma_{\max}$ , классу  $(n, k)$ -эквивалентности дискретных полиномов.

**Доказательство. Необходимость.** условия (1.2) очевидна. Пусть  $Q$  для некоторых  $\omega^* \in [0, 2\pi)$ ,  $q^* \in Q$  и  $F(s, q) \in \tilde{F}(s, Q)$ . Тогда полином  $F(s, q)$  имеет корень на границе  $|s| = 1$  и потому не принадлежит классу  $(n, k)$ -эквивалентности дискретных полиномов ни при каком  $k$ .

**Достаточность.** Пусть условие (1.2) выполняется, но найдется полином  $F(s, q^1)$ ,  $q^1 \in Q$  не принадлежащий классу  $(n, k)$ -эквивалентности дискретных полиномов. Рассмотрим непрерывную кривую  $q(t) \in Q$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $q(0) = q^0$ ,  $q(1) = q^1$ . Такая кривая существует, так как  $Q$  - связное множество. Пусть  $s_i(t)$  - корни полинома  $F(s, q(t))$ . Поскольку  $a_n(q(t)) \neq 0$ , то по теореме о непрерывной зависимости корней полинома  $n$ -ой степени от параметров корни можно занумеровать так, что функции  $s_i(t)$  непрерывны. Однако, по меньшей мере, один корень (например, первый) полинома  $F(s, q^1)$  лежит внутри круга:  $|s_1(1)| \leq 1$ , в то время как  $|s_1(0)| > 1$  в силу принадлежности  $F(s, q^0)$  классу  $(n, k)$ -эквивалентности дискретных полиномов и именно первый корень оказался вне круга  $|s| \leq 1$ . Поэтому найдутся  $t^*$ ,  $0 \leq t^* \leq 1$  и  $q^* = q(t^*) \in Q$  также, что  $|s_1(t^*)| = 1$ . Но это означает, что  $F(s, q^*)$  имеет корень на окружности  $|s| = 1$ . Итак, мы получили, что  $0 = F(e^{j\omega^*}, q^*)$  для некоторых  $q^* \in Q$  и  $\omega^* \in [0, 2\pi)$ . Это противоречит условию (1.2).

Доказательство закончено.

**Замечание 1.1.** Для полиномов в непрерывном и дискретном случаях критерий Михайлова, принцип исключения нуля и их обобщения формулируется несколько по-разному. Для полиномов для непрерывного случая  $0 \leq \omega < +\infty$ , если полиномы с вещественными коэффициентами и  $-\infty < \omega < \infty$ , если полиномы с комплексными коэффициентами. Это объясняется тем, что в первом случае годографы центрально симметричны, а во втором - нет. Для дискретных полиномов в обоих случаях берется образ всей мнимой оси (окружность), чтобы годограф после отображения стал замкнутым. Для полиномов с вещественными коэффициентами такой годограф симметричен относительно вещественной оси, а для общего случая - нет.

Для простоты, здесь ограничимся только интервальными неопределенностями коэффициентов семейства дискретных полиномов с вещественными коэффициентами, т. е. семейство полиномов вида (кратко - интервальный дискретный полином):

$$F(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n, \quad |a_i - a_i^0| \leq \gamma \alpha_i, \quad (1.3)$$

$\alpha_i > 0$ ,  $i = \overline{0, n}$ ,  $\underline{a}_n \cdot \bar{a}_n > 0$ ,  $\gamma$  - размах неопределенности. Для непрерывного случая область  $S(\omega)$  для интервального полинома является прямоугольником.

В дискретном случае получим выпуклый многоугольник, который движется сложным образом, поворачиваясь и меняя форму, в то же время, оставаясь выпуклым многоугольником при изменении  $\omega$  от 0 до  $2\pi$ . Точнее,

$$S(\omega) = \{F_0(e^{j\omega}) + \gamma \sum_{m=0}^n \alpha_m \mu_m e^{j\omega m}\} = c_0 + \{\sum_{m=0}^n \mu_m s_m\}, \quad (1.4)$$

где  $c_0 = F_0(e^{j\omega})$ ,  $s_m = \gamma \alpha_m e^{j\omega m}$ ,  $\mu_m \in [-1, 1]$  - произвольные числа. Область  $S(\omega)$  - многоугольник с центром в точке  $c_0$  и сторонами расположенными под углами равными

$\arg s_m$ ,  $m = \overline{0, n}$ . Многоугольник выпуклый и имеет  $2n + 2$  ребер и столько же вершин, причем при изменении  $\omega$  от 0 до  $2\pi$  многоугольник  $S(\omega)$  трансформируется в  $2n$ -угольник,  $2n - 2$  угольник и т. д. вплоть до отрезка при  $\omega = 0$  и  $\omega = \pi$ . При некоторых  $\omega$  соседние ребра становятся общим (одним) ребром.

Сформулируем критерий принадлежности интервального полинома  $F(s)$  классу  $(n, k)$ -эквивалентности дискретных полиномов.

**Т е о р е м а 1.2.** Пусть номинальный дискретный полином

$$F_0(s) = a_0^0 + a_1^0 s + \dots + a_n^0 s^n,$$

$F_0(s) \in F(s)$ ,  $F(s)$  из (1.3) принадлежит классу  $(n, k)$ -эквивалентности дискретных полиномов. Тогда для того, чтобы интервальный полином  $F(s)$  принадлежал классу  $(n, k)$ -эквивалентности дискретных полиномов необходимо и достаточно, чтобы для размаха неопределенности  $\gamma$  выполнялось неравенство

$$\gamma \gamma_{\max}^k,$$

где

$$\gamma_{\max}^k = \min_{0 \leq \omega < 2\pi} \gamma(\omega), \quad (1.5)$$

$$\gamma(\omega) = \max_{\eta} \frac{|\sum_{i=0}^n a_i^0 \cos(i - \eta)\omega|}{\sum_{i=0}^n \alpha_i |\cos(i - \eta)\omega|}, \quad \omega \neq 0, \pi; \quad (1.6)$$

$$\gamma(0) = \frac{|\sum_{i=0}^n a_i^0|}{\sum_{i=0}^n \alpha_i}, \quad (1.7)$$

$$\gamma(\pi) = \frac{|\sum_{i=0}^n (-1)^i a_i^0|}{\sum_{i=0}^n \alpha_i}. \quad (1.8)$$

Назовем максимальный размах неопределенности  $\gamma_{\max}^k$  из (1.5) -  $k$ -радиусом интервального семейства дискретных полиномов.

Доказательство опирается на принцип исключения нуля для общего случая (теорема 1.1.) и не имеет принципиальных трудностей.

Очевидно, при  $k = 0$  из теоремы 1.2. получим критерий устойчивости дискретного интервального полинома. Формулы для вычисления  $k$ -радиуса  $\gamma_{\max}^k$  существенно отличаются от непрерывного случая.

**З а м е ч а н и е 1.2.** В дискретном случае нет аналога теорем о принадлежности семейств интервальных полиномов в непрерывном случае классам  $(n, k)$ -эквивалентности. В частности, в дискретном случае нет аналога теоремы Харитоновой ( $k = 0$ ). Причина в том, что  $S(\omega)$  в непрерывном случае это прямоугольник, ориентация которого не меняется, а в дискретном случае геометрия  $S(\omega)$  совершенно другая - многоугольник с меняющимся направлением и числом ребер (их число не превышает  $2n + 2$ ).

**З а м е ч а н и е 1.3.** Теорема 1.2. о принадлежности интервального полинома с вещественными коэффициентами классу  $(n, k)$ -эквивалентности дискретных полиномов обобщается и на интервальный дискретный полином с комплексными коэффициентами, но для экономии места здесь не приводится.

**З а м е ч а н и е 1.4.** Требование  $\alpha_i > 0$  для всех  $i = \overline{0, n}$  оставлено для простоты, так как, если некоторые  $m$  чисел  $\alpha_i = 0$ , то параллелепипед коэффициентов  $Q$  поменяет размерность с  $n + 1$  на  $n - m + 1$ , а наибольшее число ребер многоугольника  $S(\omega)$  станет меньше, т. е.  $2(n - m) + 2$ .

Чтобы семейство  $F(s)$  оставалось интервальным и не вырождалось в номинальный полином  $F_0(s)$  можно условие  $\alpha_i > 0$  для всех  $i = \overline{0, n}$  заменить на условия

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i > 0, \alpha_i \geq 0, i = \overline{1, n}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-00624).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.Д. Блистанова И.В. Зубов Н.В. Зубов Н.А. Северцев, *Конструктивные методы теории устойчивости и их применение к задачам численного анализа*, ООП НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2002, 119 с.
2. Г.А. Зеленков, “Робастная устойчивость в системах первого приближения”, *Вопросы теории безопасности и устойчивости систем*, **7(2)** (2005), 13-15.
3. Г.А. Зеленков Н.В. Зубов В.Ф. Неронов, “Критерии существования выпуклых множеств неустойчивых многочленов.”, *Труды Института системного анализа РАН «Динамика нелинейных систем».*, **17(1)** (2005), 145-148.
4. Б.Т. Поляк П.С. Щербаков, *Робастная устойчивость и управление*, Наука, М, 2002, 303 с.
5. М.М. Постников, *Устойчивые многочлены*, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, М, 1981, 176 с.
5. В. Стрейц, *Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления*, Наука, М, 1985
6. V. Kucera, *Discrete linear control*, John Wiley, New York, 1979.

## The investigation of robust behavior interval polynoms

© V. I. Zubov<sup>4</sup>, I. V. Zubov<sup>5</sup>, A. F. Zubova<sup>6</sup>

**Abstract.** In this article with help new definition, the unit radius with center in zero is divides polynomial on number roots outside and inside circle, is summarizes principle of exception zero for investigation robust behavior of families discreet polynomials. In partial case, for discreet interval polynomials is results graphic criteria they is belong to classes  $(n, k)$  - equivalent discreet polynomials. Is discusses the employing this method for another families polynomials.

**Key Words:** interval polynomials, Mikhailov criterion, hodograph

<sup>4</sup> Post-graduate chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

<sup>5</sup> Professor chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

<sup>6</sup> Professor chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

УДК 519.71

# Соотношения оптимальности в линейно-квадратичной задаче управления

© В. В. Афонин<sup>1</sup>, С. М. Мурюмин<sup>2</sup>

**Аннотация.** Работа посвящена анализу задачи оптимальной стабилизации линейным стационарным объектом. Показаны соотношения оптимальности, связывающие между собой параметры объекта и регулятора. Проверены численные эксперименты, подтверждающие полученные соотношения оптимальности.

**Ключевые слова:** управление, оптимальный регулятор, квадратичный функционал, модель.

## 1. Постановка задачи

1.1. Рассмотрим вполне управляемую модель объекта в виде

$$\frac{\partial X(t)}{\partial t} = AX(t) + BU(t), \quad (1.1)$$

Где  $X(t)$  -  $n$ -мерный вектор состояния,  $U(t)$  -  $r$ -мерный вектор управления,  $A$  - матрица состояния, матрица действительных чисел размера  $n \times n$ ,  $B$  - матрица входа, матрица действительных чисел размера  $n \times r$ .

Предполагается, что на управления  $u_j(t) (j = 1, 2, \dots, r)$  ограничения не наложены. Управление должно быть выбрано так, чтобы при произвольном начальном условии  $X(0)$  минимизировать квадратичный функционал

$$J = \left[ \int_0^{\infty} [X^T(t)QX(t) + U^T(t)RU(t)] dt \right], \quad (1.2)$$

Где  $Q$  - положительно определенная симметрическая матрица действительных чисел размера  $n \times n$ ,  $R$  - положительно-определенная симметрическая матрица действительных чисел размера  $r \times r$ ,  $T$  - символ транспонирования [3].

Решение задачи (1.1), (1.2) имеет вид

$$U(t) = -R^{-1}B^T P X(t), \quad (1.3)$$

где  $P$  -  $(n \times n)$  симметрическая матрица, положительно-определенное решение нелинейного матричного алгебраического уравнения Риккати

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (1.4)$$

Обозначим:

$$K_p = R^{-1}B^T P. \quad (1.5)$$

Тогда (1.3) перепишем

$$U(t) = -K_p X(t) \quad (1.6)$$

где  $K_p$  - постоянная матрица оптимального регулятора размера  $r \times n$ .

Предполагается, что все переменные состояния доступны для измерения.

<sup>1</sup> Доцент кафедры АСОИУ, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; vvafonin53@yandex.ru

<sup>2</sup> Доцент кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарева, г. Саранск.

**Т е о р е м а 1.1.** задача (1.1) - (1.2) имеет решение, то

$$R = B^T S^T Q S B + (E + B^T S^T K_p^T) R (E + K_p S B), \quad (1.7)$$

где  $S = (A - B K_p)^{(-1)}$ ,  $E$  - единичная матрица размера  $n \times n$ .

Формула (1.7) аналитически связывает между собой параметры объекта (матрицы  $A$ ,  $B$ ), весовые матрицы функционала  $Q$ ,  $R$  и матрицу оптимального регулятора  $K_p$  [1,2].

1.2. Рассмотрим задачу оптимальной стабилизации вполне управляемого по выходу линейного объекта. К описанию объекта управления

$$\frac{\partial X(t)}{\partial t} = A X(t) + B U, \quad (1.8)$$

добавляется уравнение выхода:

$$Y(t) = C X(t), \quad (1.9)$$

где  $Y(t)$  -  $m$ -мерный вектор выхода,  $C$  - матрица выхода, матрица действительных чисел размера  $m \times n, m \times n$ .

Необходимо найти управление такое, чтобы минимизировать квадратичный функционал вида

$$J = \left[ \int_0^\infty [Y^T(t) Q_y Y(t) + U^T(t) R U(t)] dt \right], \quad (1.10)$$

где  $Q_y$  - положительно-определенная диагональная матрица действительных чисел размера  $m \times m$ ,  $R$  - положительно-определенная симметрическая матрица действительных чисел размера  $n \times n$ ,  $T$  - символ транспонирования [3].

Управление для минимизации функционала (1.10) имеет вид

$$U(t) = -R^{(-1)} B^T P_y X(t), \quad (1.11)$$

где  $P_y$  - постоянная симметрическая положительно-определенная матрица размера  $n \times n$ , являющаяся решением нелинейного матричного алгебраического уравнения типа Риккати

$$R_y A + A^T P_y - P_y B R^{(-1)} B^T P_y + C^T Q_y C = 0 \quad (1.12)$$

Обозначим:

$$K_p y = R^{(-1)} B^T P_y. \quad (1.13)$$

С учетом (1.13) оптимальное управление (1.11) запишем в виде

$$U(t) = -K_p y X(t) \quad (1.14)$$

где  $K_p y$  - матрица оптимального регулятора размера  $n \times n$ .

Предполагается, что все переменные состояния и выхода доступны для измерения.

**Т е о р е м а 1.2.** Если задача (1.8) - (1.10) имеет решение, то

$$R = B^T S_y^T C^T Q_y C S_y B + (E + B^T S_y^T K_p y^T) R (E + K_p y S_y B), \quad (1.15)$$

где  $S_y = (A - B K_p y)^{(-1)}$ ,  $E$  - единичная матрица размера  $n \times n$ .

**Т е о р е м а 1.3.** Если задача (1.1), (1.2) имеет решение, то матрица  $R$  квадратичного функционала находится (восстанавливается) из решения следующего уравнения Ляпунова [4]:

$$M * R - R * N = C, \quad (1.16)$$

где  $M = E_r + B^T S^T K^T$ ,  $N = -(E_r + KSB)^{(-1)}$ ,  $C = -(B^T S^T QSB) * (E_r + KSB)^{(-1)}$ ,  $S = (A - BK)^{(-1)}$ ,  $E_r$  - единичная матрица размером  $r \times r$ ,  $K$  - матрица оптимального регулятора,  $A$ ,  $B$  - матрицы объекта управления,  $Q$  - матрица квадратичного функционала.

Доказательство вытекает из решения уравнения (1.7) относительно искомой матрицы  $R$ .

**Т е о р е м а 1.4.** Если задача (1.8) - (1.10) имеет решение, то матрица  $R$  квадратичного функционала находится (восстанавливается) из решения следующего уравнения Ляпунова:

$$My * R - R * Ny = Cy, \quad (1.17)$$

где  $My = E_r + B^T S_y^T K_y^T$ ,  $Ny = -(E_r + K_y S_y B)^{(-1)}$ ,  $Cy = -(B^T S_y^T C^T Q_y C S_y B) * (E_r + K_y S_y B)^{(-1)}$ ,  $S_y = (A - BK_y)^{(-1)}$ ,  $E_r$  - единичная матрица размером  $r \times r$ ,  $K_y$  - матрица оптимального регулятора по выходу,  $A$ ,  $B$  - матрицы объекта управления,  $Q_y$  - матрица квадратичного функционала (1.10),  $C$  - матрица выхода объекта управления.

Доказательство вытекает из решения уравнения (1.15) относительно искомой матрицы  $R$ .

## 2. Результаты численного эксперимента

Проверка приведенных соотношений выполнялась в системе MATLAB с пакетом Control System Toolbox, в котором имеются функции для решения уравнений Риккати и Ляпунова, а также обеспечены многие матричные операции.

При моделировании матрицы объекта создавались случайным образом с последующей проверкой на управляемость пары  $A, B$  и  $A, CB$ ). Положительно определенные матрицы квадратичного функционала формировались на основе стандартных матриц, входящих в галерею матриц системы MATLAB. Проверялось также при диагональных матрицах функционала. В качестве примера принимались фиксированные размеры матриц объекта и функционала; использовалось также псевдообращение матриц по методу Мура-Пенроуза. В случае не полностью управляемой системы уравнение Ляпунова не имеет решения в виде положительно определенной матрицы.

Из полученных результатов видно, что абсолютные погрешности укладываются в допустимую точность вещественного типа данных с двойной точностью - тип double.

## Optimality relations in the linear-quadratic control problem

© V. V. Afonin<sup>3</sup>, S. M. Muryumin<sup>4</sup>

**Abstract.** This paper analyzes the problem of optimal stabilization of a linear stationary object. Showing optimality ratio relating the parameters of the object and the regulator. The numerical experiments, confirming the relations obtained optimality.

**Key Words:** control, optimal regulator, quadratic functional, model.

<sup>3</sup> Associate professor of ASOIU, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; vvafonin53@yandex.ru

<sup>4</sup> Associate professor of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk.

# Правила оформления рукописей для публикации в журнале «Журнал СВМО»

*Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья не будет опубликована.*

Текст доклада должен быть набран в издательской системе  $\TeX$  (или одном из ее клонов). Для верстки рукописи следует использовать преамбулу, которую можно получить на сайте <http://www.svmo.ru>.

Объем статьи не должен превышать 10 страниц. Текст статьи должен быть помещен в файл с именем <фамилия автора>.tex (который включается командой `\input` в преамбуле). Например,

```
\input{voskresensky.tex}
```

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Для оформления заголовка статьи на русском языке следует использовать команду `\headerRus`. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerRus{УДК}{название статьи}{автор(ы)}{Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Для оформления заголовка статьи на английском языке следует использовать команду `\headerEn`. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerEn{название статьи}{Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Если статья на английском языке, то для оформления заголовка статьи необходимо использовать команду `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerRus`.

Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром:

```
\sect{Заголовок}
```

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defn**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды `\R`, `\Rn`, `\C`, `\Z`, `\N` и т.д.

Для вставок букв  $\varphi$  и  $\varepsilon$  необходимо использовать команды `\phi`, `\epsilon` соответственно. Символы частных производных  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  и  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  вставляются командами `\px{i}` и `\pxtog{u}{i}`.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды `\textrm`, `\textit`. Например, для вставок формул  $\Gamma_i$ ,  $\mathcal{D}_i$  в текст статьи необходимо набрать команды `\textrm{\Gamma}_i`, `\textit{\mathcal{D}}_i`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия\_АвтораНомер\_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т.п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

`\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}`

где **степень\_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

`\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}`

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

`\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}`

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

`\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}`

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

**Внимание! Новые правила.** Для оформления списка литературы на русском языке следует использовать окружение **thebibliography**. Список цитируемой литературы должен быть оформлен в формате AMSBIB. Подробности смотрите в прилагаемом файле *amsbib.pdf*. Для правильной работы данного стиля оформления литературы необходимо использовать стилевой файл *svmobib.sty* (прилагается).

Список литературы на английском языке оформлять не нужно.

Список литературы на русском языке оформляется в виде последовательности команд `\Rbibitem{метка для ссылки на источник}`.

Для приведенного выше примера в качестве метки для пункта 7 в списке литературы нужно использовать строку 'ivanovb7'. Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду `\cite` или `\pgcite` (параметры см. в преамбуле).

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Компиляция журнала производится при помощи MiKTeX 2.9, дистрибутив которого можно получить на сайте <http://www.miktex.org>.

## Алфавитный указатель

Афонин В. В.	118	Мустафина С. А.	80
Бадюкина Т. Е.	26	Нечаев А. И.	57
Гринес В. З.	20	Никишин Е. В.	85
Гулакова С. В.	26	Носкова М. К.	20
Гуревич Е. Я.	46	Пескова Е. Е.	85
Жалнин Р. В.	7	Попов В. Н.	36
Жужома Е. В.	63	Починка О. В.	20, 76
Зубов А. В.	57	Русак Ю. Б.	26
Зубов В. И.	114	Рябова Е. А.	69
Зубов И. В.	114	Сафонкин В. И.	90
Зубова А. Ф.	114	Смолкин Г. А.	98
Исаенкова Н. В.	63	Спивак С. И.	14
Каляда Л. Г.	57	Сяинова Д. Т.	46
Кантор О. Г.	14	Тишкин В. Ф.	7
Кузенков О. А.	69	Ужегов И. Г.	57
Ладонкина М. Е.	7	Харитоненко А. С.	109
Масягин В. Ф.	7	Шемякина Т. А.	104
Митрякова Т. М.	76	Шишенкова А. Е.	63
Михайлова Т. А.	80	Юлдашев Т. К.	109
Мурюмин С. М.	118	Юнусова Д. С.	14

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

*Уважаемые читатели и подписчики!*

*Подписка на журнал «Журнал Средневолжского математического общества» осуществляется через отделения почтовой связи «Почта России» на всей территории Российской Федерации.*

*Подписной индекс журнала в Объединенном каталоге «Пресса России» – 94016.*