ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2012, том 445, № 3, с. 274–277

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ МОДУЛЯРНО СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

© 2012 г. В. В. Чистяков

Представлено академиком И.А. Таймановым 28.02.2012 г.

Поступило 06.03.2012 г.

Согласно теореме Банаха любое сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет единственную неподвижную точку. Этот классический результат, имеющий многочисленные приложения [10, 13], обобщался в рамках теории метрических пространств в различных направлениях, среди которых отметим [2, 11] (и ссылки в этих работах). В том случае, когда нормы на линейных пространствах заданы неявно (как, например, в теории пространств Орлича и теории модулярных пространств [14, 15]), обобщения теоремы Банаха получены в [1, 12].

Цель настоящей работы – представить результат о существовании неподвижных точек для нелинейных отображений в контексте теории метрических модуляр [5–7], развивающей одновременно и теорию модулярных пространств над линейными пространствами, и теорию метрических пространств. В этом случае (модулярное) сжатие касается не расстояний между точками пространства, а некоторых обобщенных усредненных скоростей, соответствующих заданным модулярам. Кроме того, возникает новое понятие модулярной сходимости на модулярных множествах, которое значительно слабее, чем метрическая сходимость.

В разделе 1 приводятся основные факты, касающиеся модулярных (метрических) пространств. В разделе 2 определяется новое понятие модулярной сходимости и устанавливается необходимое и достаточное условие на модуляру, при котором модулярная сходимость эквивалентна метрической сходимости (лемма 2). В разделе 3 вводится понятие модулярно сжимающих отображений, изучается их связь с непрерывными по Липшицу отображениями относительно соответствующих метрик (теорема 1) и формулируется центральный результат работы о существовании неподвижных точек модулярно сжимающих отображений (теорема 2). Наконец, в разделе 4 приводится приложение теоремы 2 к существованию решений дифференциальных уравнений типа Каратеодори с правой частью из пространства Орлича.

Нижегородский филиал
Национального исследовательского университета
“Высшая школа экономики”

1. МОДУЛЯРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Приведем основные определения, обозначения и вспомогательные факты из работ [5, 7], необходимые для дальнейшего.

Модулярой на непустом множестве X называется однопараметрическое семейство $w = \{w_\lambda\}_{\lambda > 0}$ отображений вида $w_\lambda: X \times X \to [0, \infty]$ при $\lambda \in (0, \infty)$, удовлетворяющее для всех $x, y, z \in X$ следующим трем условиям:

(i) $x = y$ тогда и только тогда, когда $w_\lambda(x, y) = 0$ для всех $\lambda > 0$;

(ii) $w_\lambda(x, y) = w_\lambda(y, x)$ для всех $\lambda > 0$;

(iii) $w_{\lambda+\mu}(x, y) \le w_\lambda(x, z) + w_\mu(y, z)$ для всех $\lambda, \mu > 0$.

Модуляра w на X называется:

а) строгой, если в дополнение к (i) из условия $w_\lambda(x, y) = 0$ хотя бы при одном $\lambda > 0$ следует, что $x = y$;

б) выпуклой, если вместо неравенства в (iii) для всех $\lambda, \mu > 0$ и $x, y, z \in X$ выполняется неравенство

(iv) $w_{\lambda+\mu}(x, y) \le \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} w_\lambda(x, z) + \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} w_\mu(y, z)$.

Например, если (X, d) – метрическое пространство с метрикой d, то семейство $w = \{w_\lambda\}_{\lambda > 0}$, определенное правилом $w_\lambda(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{\lambda}$ для всех $x, y \in X$, является строгой выпуклой модулярой на X, которую естественно интерпретировать как поле абсолютных значений средних скоростей между точками x и y. В общем случае модуляра представляет собой некоторое семейство обобщенных (неклассических) средних скоростей: если $w_\lambda(x, y) = \infty$ при $\lambda \le d(x, y)$ и $w_\lambda(x, y) = 0$ при $\lambda > d(x, y)$, то $w = \{w_\lambda\}_{\lambda > 0}$ есть нестрогая модуляра на X. Многочисленные примеры (выпуклых) модуляр приведены в [4–7], а также в разделе 4.

Основным свойством модуляры w на X является невозрастание функции $\lambda \mapsto w_\lambda(x, y)$ на $(0, \infty)$ при любых $x, y \in X$, а в случае выпуклой модуляры еще и функции $\lambda \mapsto \lambda w_\lambda(x, y)$, так что в $[0, \infty]$ существуют предел справа $w_{\lambda+0}(x, y)$ и предел слева $w_{\lambda-0}(x, y)$, которые связаны соотношениями $w_{\lambda+0}(x, y) \le w_\lambda(x, y) \le w_{\lambda-0}(x, y)$ [7].

Зафиксируем элемент $x_0 \in X$ произвольным образом. Модулярными пространствами (вокруг x_0) называются следующие два множества:

$$X_w = \{x \in X: \lim_{\lambda \to \infty} w_\lambda(x, x_0) = 0\}$$

и

$$X_w^* = \{x \in X: w_\lambda(x, x_0) < \infty \text{ при некотором } \lambda = \lambda(x) > 0\}.$$

Ясно, что $X_w \subset X_w^*$ (вообще говоря, включение строгое), а в случае выпуклой модуляры w на X эти пространства совпадают. В [5–7] показано, что X_w является метрическим пространством относительно (неявно заданной) метрики $d_w(x, y) = \inf\{\lambda > 0: w_\lambda(x, y) \le \lambda\}$ для $x, y \in X_w$; в случае выпуклой модуляры w на X метрику на $X_w^* = X_w$ можно определить по правилу $d_w^*(x, y) = \inf\{\lambda > 0: w_\lambda(x, y) \le 1\}$ для $x, y \in X_w^*$.

Обычно проверка аксиом модуляры (i)–(iv) не является трудной, что позволяет эффективно определять нетривиальные метрики в различных функциональных пространствах по указанным выше формулам [5–7]. В следующем разделе будет показано, что модуляра позволяет определить новый тип сходимости, более слабой, чем сходимость по метрике.

2. МОДУЛЯРНАЯ СХОДИМОСТЬ

Известно [7], что если w – выпуклая модуляра на множестве X, $\{x_n\}$ – последовательность в X_w^* и $x \in X_w^*$, то условие $\lim\limits_{n\to\infty} d_w^*(x_n, x) = 0$ эквивалентно условию $\lim\limits_{n\to\infty} w_\lambda(x_n, x) = 0$ для всех $\lambda > 0$ (подобное утверждение справедливо для любой модуляры w, если выше заменить X_w^* на X_w и d_w^* – на d_w). Ослабление понятия метрической сходимости возникает, если потребовать выполнения условия справа в утверждении выше не для всех, а лишь для некоторых $\lambda > 0$.

Пусть w – модуляра на X. Последовательность $\{x_n\}$ из X_w^* называется модулярно сходящейся к элементу $x \in X$, если найдется такое число $\lambda = \lambda(\{x_n\}, x) > 0$, что $\lim\limits_{n\to\infty} w_\lambda(x_n, x) = 0$ (в краткой записи $x_n \xrightarrow{w} x$). Любой такой элемент x называется модулярным пределом $\{x_n\}$.

Л е м м а 1. *Для модуляры w на X имеем*:

а) *модулярные пространства X_w и X_w^* замкнуты относительно модулярной сходимости* (*т.е. если $\{x_n\}$ лежит в X_w или X_w^*, $x \in X$ и $x_n \xrightarrow{w} x$, то соответственно $x \in X_w$ или $x \in X_w^*$*);

б) *если w – строгая модуляра на X, то модулярный предел определен однозначно* (*если существует*).

В следующей лемме выявлены условия, при которых сходимость относительно метрики (d_w или d_w^*) эквивалентна модулярной сходимости.

Л е м м а 2. *Метрическая сходимость на X_w^* (относительно d_w для модуляры w и относительно d_w^* в случае выпуклой модуляры w) совпадает с модулярной сходимостью тогда и только тогда, когда модуляра w удовлетворяет следующему Δ_2-условию: если $\{x_n\} \subset X_w^*$, $x \in X_w^*$ и $\lambda > 0$ – такое, что $\lim\limits_{n\to\infty} w_\lambda(x_n, x) = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} w_{\lambda/2}(x_n, x) = 0$.*

Аналогом полноты метрического пространства в контексте модулярной сходимости является следующее понятие.

Модулярное пространство X_w^* называется модулярно полным, если из условий $\{x_n\} \subset X_w^*$ и $\lim\limits_{n, m\to\infty} w_\lambda(x_n, x_m) = 0$ при некотором $\lambda > 0$ вытекает, что существует элемент $x \in X_w^*$, для которого $\lim\limits_{n\to\infty} w_\lambda(x_n, x) = 0$.

3. МОДУЛЯРНО СЖИМАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Прежде всего опишем в терминах модуляры w на множестве X непрерывные по Липшицу в метриках d_w и d_w^* отображения $T: X_w^* \to X_w^*$. Пусть $k > 0$ – некоторая постоянная и $x, y \in X_w^*$.

Т е о р е м а 1. а) *Условие $d_w(Tx, Ty) \le k d_w(x, y)$ эквивалентно условию $w_{k\lambda+0}(Tx, Ty) \le k\lambda$ для всех $\lambda > 0$, таких что $w_\lambda(x, y) \le \lambda$*;

б) *Для выпуклой модуляры w на X имеем*: *$d_w^*(Tx, Ty) \le k d_w^*(x, y)$ тогда и только тогда, когда $w_{k\lambda+0}(Tx, Ty) \le 1$ для всех тех $\lambda > 0$, для которых $w_\lambda(x, y) \le 1$.*

Отсюда, в частности, вытекает, что если $w_{k\lambda}(Tx, Ty) \le k w_\lambda(x, y)$ для всех $\lambda > 0$, то $d_w(Tx, Ty) \le k d_w(x, y)$, а для выпуклой модуляры w имеем: если $w_{k\lambda}(Tx, Ty) \le w_\lambda(x, y)$ для всех $\lambda > 0$, то $d_w^*(Tx, Ty) \le k d_w^*(x, y)$.

В следующем определении дается развитие понятия сжимающего отображения на случай отображений в модулярных пространствах.

Пусть w – модуляра на X. Отображение T: $X_w^* \to \to X_w^*$ называется модулярно сжимающим (сильно модулярно сжимающим), если существуют постоянные $0 < k < 1$ и $\lambda_0 > 0$, такие что $w_{k\lambda}(Tx, Ty) \le \le w_\lambda(x, y)$ (соответственно $w_{k\lambda}(Tx, Ty) \le kw_\lambda(x, y)$) для всех $0 < \lambda \le \lambda_0$ и $x, y \in X_w^*$.

Центральный результат работы – следующая теорема о существовании неподвижных точек для модулярно сжимающих отображений.

Т е о р е м а 2. *Пусть w – строгая выпуклая модуляра на множестве X, такая что X_w^* модулярно полно, и T: $X_w^* \to X_w^*$ – модулярно сжимающее отображение, для которого при любом $\lambda > 0$ найдется $x_\lambda \in X_w^*$, такое что $w_\lambda(x_\lambda, Tx_\lambda) < \infty$.*

Тогда T имеет неподвижную точку, т.е. $Tx_* = x_*$ для некоторого $x_* \in X_w^*$. Если в дополнение модуляра w принимает лишь конечные значения на $(0, \infty) \times \times X_w^* \times X_w^*$, то последнее предположение относительно T излишне, неподвижная точка x_* отображения T определена однозначно и для любого $\bar{x} \in X_w^*$ последовательность итераций $\{T^n\bar{x}\}_{n=1}^\infty$ модулярно сходится к x_*.

Эта теорема остается справедливой, если заменить термины "строгая выпуклая модуляра" на "строгая модуляра" и "модулярно сжимающее отображение" – на "сильно модулярно сжимающее отображение". Одно из приложений теоремы 2 приведено в следующем разделе.

4. ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть φ: $[0, \infty) \to [0, \infty)$ – выпуклая функция, $\varphi(u) = 0$ лишь при $u = 0$, и $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{\varphi(u)}{u} = \infty$, $[a, b]$ – отрезок в $\mathbb{R}$ $(a < b)$ и $(M, \|\cdot\|)$ – рефлексивное банахово пространство (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) с нормой $\|\cdot\|$. Для $x_0 \in M$ обозначим через X множество всех функций x: $[a, b] \to M$, таких что $x(a) = x_0$. Для $\lambda > 0$ и $x, y \in X$ положим

$$w_\lambda(x, y) = \\ = \sup_P \sum_{i=1}^m \varphi\left(\frac{\|x(t_i) + y(t_{i-1}) - x(t_{i-1}) - y(t_i)\|}{\lambda(t_i - t_{i-1})}\right)(t_i - t_{i-1}),$$

где верхняя грань берется по всем разбиениям $P = \{t_i\}_{i=0}^m$ отрезка $[a, b]$, т.е. $m \in \mathbb{N}$ и $a = t_0 < < t_1 < \ldots < t_{m-1} < t_m = b$. Тогда [3, 4] семейство $w = \{w_\lambda\}_{\lambda>0}$ есть строгая выпуклая модуляра на X, и можно показать, что (нелинейное) модулярное пространство X_w^* (вокруг постоянной функции $x_0(t) \equiv x_0$, $t \in [a, b]$) модулярно полно. Напомним, что функция x: $[a, b] \to M$ лежит в X_w^* тогда и только тогда, когда $x(a) = x_0$ и найдется такая постоянная $\lambda = \lambda(x) > 0$, что

$$w_\lambda(x, x_0) = \\ = \sup_P \sum_{i=1}^m \varphi\left(\frac{\|x(t_i) - x(t_{i-1})\|}{\lambda(t_i - t_{i-1})}\right)(t_i - t_{i-1}) < \infty;$$

величину $w_\lambda(x, x_0)$ при $\lambda = 1$ принято называть полной φ-вариацией функции x в смысле Ф. Рисса, Ю.Т. Медведева и В. Орлича [4].

Обозначим через AC($[a, b]$; M) множество всех абсолютно непрерывных функций x: $[a, b] \to M$, через $L^1([a, b]; M)$ – множество всех сильно измеримых и суммируемых по Бохнеру функций x: $[a, b] \to \to M$ и через $L^\varphi([a, b]; M)$ – пространство Орлича всех сильно измеримых функций x: $[a, b] \to M$, для которых $\int_a^b \varphi\left(\frac{\|x(t)\|}{\lambda}\right) dt < \infty$ при некотором $\lambda > 0$.

Известен [3, 4, 8] следующий критерий принадлежности функции x: $[a, b] \to M$ модулярному пространству X_w^* : $x \in X_w^*$ тогда и только тогда, когда $x \in$ AC ($[a, b]$; M), $x(a) = x_0$ и для некоторой постоянной $\lambda = \lambda(x) > 0$ имеем $w_\lambda(x, x_0) = = \int_a^b \varphi\left(\frac{\|x'(t)\|}{\lambda}\right) dt < \infty$, так что сильная (вычисленная в норме $\|\cdot\|$) производная x', определенная почти всюду на $[a, b]$, лежит в пространстве $L^\varphi([a, b]; M)$.

Т е о р е м а 3. *Пусть f: $[a, b] \times M \to M$ – функция (типа Каратеодори), удовлетворяющая следующим двум условиям:*

(С.1) *при любом $x \in M$ функция $f(\cdot, x) = [t \mapsto f(t, x)]$: $[a, b] \to M$ сильно измерима и $f(\cdot, y_0) \in L^\varphi([a, b]; M)$ при некотором $y_0 \in M$;*

(С.2) *существует постоянная $L > 0$, такая что $\|f(t, x) - f(t, y)\| \le L\|x - y\|$ для почти всех $t \in [a, b]$ и всех $x, y \in M$.*

Тогда интегральный оператор

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_a^t f(s, x(s))ds, \quad x \in X_w^*, \quad t \in [a, b],$$

отображает модулярное пространство X_w^* в себя и имеет место следующее неравенство:

$$w_{L(b-a)\lambda}(Tx, Ty) \le w_\lambda(x, y) \text{ для всех} \\ \lambda > 0 \text{ и } x, y \in X_w^*.$$

В качестве следствия отметим, что в предположениях (С.1) и (С.2) теоремы 3 для любого $x_0 \in M$ и отрезка $[a, b]$, такого что $L(b - a) < 1$, по теореме 2 интегральный оператор T имеет неподвижную точку $x \in X_w^*$, а потому задача Коши $x'(t) = f(t, x(t))$ для почти всех $t \in [a, b]$ и $x(a) = x_0$ имеет решение $x \in X_w^*$. Это обобщает результаты о существовании абсолютно непрерывных решений уравнений Каратеодори в предположении, что $f(\cdot, y_0) \in L^1([a, b]; M)$ для некоторого $y_0 \in M$ (см. [9]).

Наконец, укажем, что модуляра w, определенная в начале этого раздела, была выбрана на том основании, что в соответствующем модулярном пространстве X_w^* модулярная сходимость не эквивалентна метрической.

Пример. Положим $\varphi(u) = e^u - 1$ при $u \geq 0$, $[a, b] = [0, 1]$, $M = \mathbb{R}$ и $x_0 = 0$. Определим последовательность функций $x_n \in X_w^*$, $n \in \mathbb{N}$, следующим образом: $x_n(t) = t - (t + \alpha_n)\log(t + \alpha_n) + \alpha_n\log\alpha_n$ для всех $0 \leq t \leq 1$, где $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$, и положим $x(t) = t - t\log t$ при $0 < t \leq 1$ и $x(0) = 0$. Тогда $x \in X_w^*$, x_n равномерно на $[0, 1]$ сходится к функции x при $n \to \infty$, $w_\lambda(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$ лишь при $\lambda > 1$ (а потому $x_n \xrightarrow{w} x$), и в то же время $d_w^*(x_n, x) \geq 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

В данной научной работе использованы результаты, полученные в ходе выполнения проекта № 10–01–0071, реализованного в рамках Программы “Научный фонд НИУ ВШЭ” в 2010—2012 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ait Taleb A., Hanebaly E.* // Proc. Amer. Math. Soc. 2000. V. 128. № 2. P. 419–426.
2. *Арутюнов А.В.* // ДАН. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.
3. *Чистяков В.В.* // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематич. обзоры. Т. 61. Труды Междунар. конф., посвящ. 90-летию со дня рожд. Л. С. Понтрягина. Т. 2. Негладкий анализ и оптимизация. М.: ВИНИТИ, 1999. С. 167–189.
4. *Chistyakov V.V.* // J. Appl. Anal. 2004. V. 10. № 1. P. 1–82.
5. *Чистяков В.В.* // ДАН. 2006. Т. 406. № 2. С. 165–168.
6. *Chistyakov V.V.* // Folia math. 2008. V. 15. № 1. P. 3–24.
7. *Chistyakov V.V.* // Nonlin. Anal. 2010. V. 72. № 1. P. 1–30.
8. *Cybertowicz Z., Matuszewska W.* // Comment. math. Prace Mat. 1977. V. 20. P. 29–52.
9. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
10. *Goebel K., Kirk W.A.* Topics in Metric Fixed Point Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. 244 p.
11. Handbook of Metric Fixed Point Theory / W.A. Kirk, B. Sims, Eds. Dordrecht: Kluwer, 2001. 708 p.
12. *Khamsi M.A., Kozłowski W.M., Reich S.* // Nonlin. Anal. 1990. V. 14. № 11. P. 935–953.
13. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. 6-е изд. М.: Наука, 1989. 624 с.
14. *Musielak J.* Orlicz Spaces and Modular Spaces // Lect. Notes Math. 1983. V. 1034. 222 p.
15. *Orlicz W.* Collected Papers. Pt I / II. Warszawa: PWN; Polish Sci. Publ., 1988. 1688 p.