СОДЕРЖАНИЕ

Данный выпуск посвящается столетию академика
Андрея Николаевича ТИХОНОВА,
выдающегося русского ученого и основателя
факультета Вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета

СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, с. 3–7

УДК 519.7

О РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОЦЕНОК НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КОМПЬЮТЕРАХ

© 2006 г. Е. Ю. Абраменко

lenaizkoroleva@mail.ru

Кафедра Математических методов прогнозирования

Введение.

Цель данной работы — поиск и реализация эффективного метода обучения алгоритмов вычисления оценок (АВО), т.е. метода настройки его параметров таким образом, чтобы алгоритм правильно классифицировал максимальное количество объектов контрольной выборки. При этом предполагается, что вычисления происходят на компьютере с высоким уровнем распараллеливания.

Каждый алгоритм в модели АВО представим в виде суперпозиции распознающего оператора и решающего правила: $A = B \cdot C$, где C — решающее правило, B — распознающий оператор.

Для каждого объекта S, предъявляемого для распознавания, оператор B вычисляет вектор оценок по классам $K_1, \ldots, K_l$, $(\Gamma_1(S), \ldots, \Gamma_l(S))$. Решающее правило C, основываясь на полученных оценках, относит или не относит S к каждому из этих классов. Процесс обучения АВО обычно сводится к задаче максимизации функционала качества или минимизации функционала ошибки. Однако в силу сложности структуры модели голосования решить эту задачу в чистом виде практически невозможно.

1. Постановка задачи.

Рассматривается задача распознавания с классами $K_1, \ldots, K_l$. Исходная информация состоит из объектов $S_1, \ldots, S_m$, принадлежность которых данным классам известна. Для распознавания предъявляются объекты $S^1, \ldots, S^q$, правильная классификация которых также известна.

Мощность системы опорных множеств k изменяется в интервале $[1, [\sqrt{n}]]$, порог функции близости ε — в интервале $[0, [\sqrt{k}]]$.

Для каждого признака с номером i значение порога ε_i составляет множество точек на числовой прямой, равноудалённых от всевозможных пар значений этого признака объеков обучения и контроля.

Параметры x_{11} и x_{00} изменяются в интервалах (0,1]. Разобьём (0,1] для x_{11} и x_{00} на N_1 и N_2 равных частей соответственно. x_{10} и x_{01} примем равными 0.

Про веса объектов $\vec{W}$ и признаков $\vec{w}$ известно только то, что все их компоненты неотрицательны.

Необходимо построить алгоритм вычисления оценок, который будет правильно распознавать максимальное количество объектов контроля. Для этого следует минимизировать функционал ошибки алгоритма распознавания для каждого набора параметров. Тот набор, при котором будет достигнут минимум, и задаёт искомый АВО.

2. Описание метода.

Пусть, без ограничения общности, классу K_j принадлежат первые m_j объектов обучения, не принадлежат оставшиеся $(m - m_j)$. Обозначим: $Y_j = \{S_1, \ldots, S_{m_j}\}$, $\bar{Y}_j = \{S_{m_j+1}, \ldots, S_m\}$.

Аналогично, пусть множество контрольных объектов класса K_j состоит из первых q_j объектов, а множество контрольных объектов, не принадлежащих ему, — из оставшихся $(q - q_j)$.

Оценка объекта S^t, $t = 1, \ldots, q$, по классу K_j, $j = 1, \ldots, l$, равна

$$\Gamma_j(S^t) = \frac{x_{11}}{N|Y_j|} \cdot \sum_{S_i \in Y_j} \sum_{\tilde{\omega} \leftrightarrow \Omega \in \Omega_A} \Gamma_{\tilde{\omega}}(S^t, S_i) + \frac{x_{00}}{N|\bar{Y}_j|} \cdot \sum_{S_i \in \bar{Y}_j} \sum_{\tilde{\omega} \leftrightarrow \Omega \in \Omega_A} \Gamma_{\tilde{\omega}}(S^t, S_i),$$

$$\Gamma_{\tilde{\omega}}(S^t, S_i) = W(S_i)(w_{i_1} + \dots + w_{i_k}) B_{\tilde{\omega}}(S^t, S_i),$$

где $B_{\tilde{\omega}}(S^t, S_i)$ — функция близости, а опорное множество Ω, которому сопоставлен характеристический вектор $\tilde{\omega}$, состоит из элементов $i_1, \dots, i_k$.

Поскольку система опорных множеств, по которым ведётся суммирование, имеет фиксированную мощность, оценку можно выразить следующим образом:

$$\Gamma_j(S^t) = \frac{x_{11}}{N|Y_j|} \sum_{S_i \in Y_j} W(S_i) \left\{ \left(\tilde{\delta}(S^t, S_i), \vec{w} \right) V_+^1 + \left(\bar{\tilde{\delta}}(S^t, S_i), \vec{w} \right) V_+^0 \right\} +$$

$$+ \frac{x_{00}}{N|\bar{Y}_j|} \sum_{S_i \in \bar{Y}_j} W(S_i) \left\{ \left(\tilde{\delta}(S^t, S_i), \vec{w} \right) V_-^1 + \left(\bar{\tilde{\delta}}(S^t, S_i), \vec{w} \right) V_-^0 \right\}.$$

$$V_+^1(S^t, S_i) = \sum_{u=max(0,k-q)}^{min(\varepsilon,n-q)} C_{n-q}^u \cdot C_{q-1}^{k-u-1},$$

$$V_+^0(S^t, S_i) = \sum_{u=max(1,k-q)}^{min(\varepsilon,n-q)} C_{n-q-1}^{u-1} \cdot C_q^{k-u},$$

$$V_-^1(S^t, S_i) = \sum_{u=max(\varepsilon+1,k-q)}^{min(k-1,n-q)} C_{n-q}^u \cdot C_{q-1}^{k-u-1},$$

$$V_-^1(S^t, S_i) = \sum_{u=max(\varepsilon+1,k-q)}^{min(k,n-q)} C_{n-q-1}^{u-1} \cdot C_q^{k-u},$$

$q = q(S^t, S_i)$ — число единичных координат в $\tilde{\delta}(S^t, S_i)$.

Обозначим:

$$\left(\vec{Z}_j\right)^{ti} = \begin{cases} \left(\tilde{\delta}(S^t, S_i) V_+^1 + \bar{\tilde{\delta}}(S^t, S_i) V_+^0\right), & \text{для } S^t \in Y_j, \\ \left(\tilde{\delta}(S^t, S_i) V_-^1 + \bar{\tilde{\delta}}(S^t, S_i) V_-^0\right), & \text{для } S^t \in \bar{Y}_j. \end{cases}$$

Тогда оценку $\Gamma_j(S^t)$ можно выразить как скалярное произведение:

$$\Gamma_j(S^t) =$$

$$\left(\frac{x_{11}}{N|Y_j|} \left(\left(\vec{Z}_j\right)^{t1}, \vec{w} \right), \dots, \frac{x_{11}}{N|Y_j|} \left(\left(\vec{Z}_j\right)^{tm_j}, \vec{w} \right), \frac{x_{00}}{N|\bar{Y}_j|} \left(\left(\vec{Z}_j\right)^{tm_j+1}, \vec{w} \right), \dots, \frac{x_{00}}{N|\bar{Y}_j|} \left(\left(\vec{Z}_j\right)^{tm}, \vec{w} \right) \right) \cdot$$

$$\cdot \left(W_1, \dots, W_{m_j}, W_{m_j+1}, \dots, W_m\right)^T.$$

Пусть решающее правило для класса K_j, $j = 1, \dots, l$, имеет вид:

$$\Gamma_j(S^t) \le C_1^j \Rightarrow S^t \notin K_j,$$

$$\Gamma_j(S^t) \ge C_2^j \Rightarrow S^t \in K_j,$$

где $C_1^j > C_2^j > 0$ — некоторые наперёд заданные константы.

Функционал ошибки алгоритма можно выразить следующим образом:

$$Q(\vec{W}) = \sum_{j=1}^{l} \|A_j \vec{W} - f_j\|^2,$$

где элемент $(A_j)^{ti}$ матрицы A_j имеет вид

$$(A_j)^{ti} = \frac{x_{11}}{N|Y_j|}\left(\left(\vec{Z}_j\right)^{ti}, \vec{w}\right)$$

или

$$(A_j)^{ti} = \frac{x_{00}}{N|\bar{Y}_j|}\left(\left(\vec{Z}_j\right)^{ti}, \vec{w}\right).$$

Тогда для каждого вектора желаемых оценок

$$f_j = \left(\Gamma_j^{\text{true}}(S^1), \ldots, \Gamma_j^{\text{true}}(S^{q_j}), \Gamma_j^{\text{true}}(S^{q_j+1}), \ldots, \Gamma_j^{\text{true}}(S^q)\right)$$

выполнены неравенства

$$\begin{cases} \Gamma_j^{\text{true}}(S^1) \geq C_2^j \\ \ldots \\ \Gamma_j^{\text{true}}(S^{q_j}) \geq C_2^j \\ \Gamma_j^{\text{true}}(S^{q_j+1}) \leq C_1^j \\ \ldots \\ \Gamma_j^{\text{true}}(S^q) \leq C_1^j \end{cases}$$

Значения желаемых оценок будем подбирать по ходу решения задачи оптимизации

$$Q(\vec{W}) = \sum_{j=1}^{l} \|A_j\vec{W} - f_j\|^2 \to \min_{\vec{W}} \tag{1}$$

Оценку $\Gamma_j(S^t)$ также можно выразить следующим образом:

$$\Gamma_j(S^t) = \frac{x_{11}}{N|Y_j|}\left(\sum_{S_i \in Y_j} W(S_i)\left(\vec{Z}_j\right)^{ti}, \vec{w}\right) + \frac{x_{00}}{N|\bar{Y}_j|}\left(\sum_{S_i \in \bar{Y}_j} W(S_i)\left(\vec{Z}_j\right)^{ti}, \vec{w}\right).$$

$$Q(\vec{w}) = \sum_{j=1}^{l} \|B_j\vec{w} - f_j\|^2,$$

где строка $(B_j)^t$ матрицы B_j имеет вид

$$(B_j)^t = \frac{x_{11}}{N|Y_j|}\sum_{S_i \in Y_j} W(S_i)\left(\vec{Z}_j\right)^{ti} + \frac{x_{00}}{N|\bar{Y}_j|}\sum_{S_i \in \bar{Y}_j} W(S_i)\left(\vec{Z}_j\right)^{ti}.$$

Получаем задачу оптимизации

$$Q(\vec{w}) = \sum_{j=1}^{l} \|B_j\vec{w} - f_j\|^2 \to \min_{\vec{w}}. \tag{2}$$

Будем минимизировать функционал Q методом градиентного спуска попеременно по $\vec{W}$ и $\vec{w}$, причём после проведения итерационного процесса минимизации по каждой из этих векторных переменных будем изменять векторы f_j.

Очевидно, все компоненты векторов весов $\vec{W}$ и $\vec{w}$ должны быть неотрицательны. Поэтому будем решать задачи (1) и (2) до того момента, пока не найдётся оптимальное решение или среди компонент $\vec{W}$ и $\vec{w}$ не появятся отрицательные числа.

Пусть $\left(\vec{W}_*^{(0)}, \vec{w}_*^{(0)}, f_*^{(0)}\right)$ — первое приближение параметров в задачах (1) и (2). В процессе их решения будем получать тройки $\left(\vec{W}_*^{(x)}, \vec{w}_*^{(x)}, f_*^{(2x)}\right)$ и $\left(\vec{W}_*^{(x)}, \vec{w}_*^{(x-1)}, f_*^{(2x-1)}\right)$.

Для $t = 1, \ldots, q_j$ и $j = 1, \ldots, l$ $\left(f_j^{(2x-1)}\right)_t = \begin{cases}(A_j)_t\vec{W}_*^{(x)} \text{ при } (A_j)_t\vec{W}_*^{(x)} \geq C_2^j,\\ C_2^j, \text{ иначе,}\end{cases}$

для $t = q_j+1, \ldots, q$ и $j = 1, \ldots, l$ $\left(f_j^{(2x-1)}\right)_t = \begin{cases}(A_j)_t\vec{W}_*^{(x)} \text{ при } (A_j)_t\vec{W}_*^{(x)} \leq C_1^j,\\ C_1^j, \text{ иначе.}\end{cases}$

Для $t = 1, \ldots, q_j$ и $j = 1, \ldots, l$ $\left(f_j^{(2x)}\right)_t = \begin{cases}(B_j)_t\vec{w}_*^{(x)} \text{ при } (B_j)_t\vec{w}_*^{(x)} \geq C_2^j,\\ C_2^j, \text{ иначе,}\end{cases}$

для $t = q_j+1, \ldots, q$ и $j = 1, \ldots, l$ $\left(f_j^{(2x)}\right)_t = \begin{cases}(B_j)_t\vec{w}_*^{(x)} \text{ при } (B_j)_t\vec{w}_*^{(x)} \leq C_1^j,\\ C_1^j, \text{ иначе.}\end{cases}$

На некотором шаге получим тройку $\left(\vec{W}_*, \vec{w}_*, f_*\right)$, $f_* = ((f_1)_*, \ldots, (f_l)_*)$, такую, что: или выполнен один из стандартных критериев остановки, или первый шаг итерационного процесса по $\vec{W}$ и первый шаг итерационного процесса по $\vec{w}$ дают отрицательные компоненты векторов $\vec{W}_*$ и $\vec{w}_*$ соответственно.

Заметим, что указанный метод поиска $\left(\vec{W}_*, \vec{w}_*, f_*\right)$ сходится.

Рассмотрим случай, когда первый шаг итерационного процесса по $\vec{W}$ и первый шаг итерационного процесса по $\vec{w}$ дают отрицательные компоненты $\vec{W}_*$ и $\vec{w}_*$. Можно попробовать ещё сильнее уменьшить значение функционала Q.

Пусть $\vec{W}_* = \arg\min\limits_{\vec{W}} Q(\vec{W}, \vec{w})$. Постараемся свести задачу минимизации

$$Q(\vec{W}, \vec{w}) = \sum_{j=1}^{l} \|A_j\vec{W} - f_j\|^2 \to \min_{\vec{W}} \tag{1}$$

к задаче

$$Q'(\vec{W}, \vec{w}) = \sum_{j=1}^{l} \|A_j\vec{W} - f'_j\|^2 \to \min_{\vec{W}} \tag{3}$$

такой, что $\arg\min\limits_{\vec{W}} Q'(\vec{W}, \vec{w}) = \vec{W}'_* = \vec{W}_* + \vec{W}_*^{\Delta}$, где

$$\left(\vec{W}_*^{\Delta}\right)_t = \begin{cases}0, \text{при} \left(\vec{W}_*\right)_t \geq 0,\\ -\left(\vec{W}_*\right)_t, \text{при} \left(\vec{W}_*\right)_t < 0,\end{cases}$$

а $f'_j = f_j + f_j^{\Delta}$.

Задачи (1) и (3) будут эквивалентны при условии

$\forall j = 1, \ldots, l$ $f_j^{\Delta} = A_j\vec{W}_*^{\Delta}$.

Положим,

$$C_1^{j\prime} = \max_{t=q_j+1,\ldots,q} \left(f'_j\right)_t,$$

$$C_2^{j\prime} = \min_{t=1,\ldots,q_j} \left(f'_j\right)_t.$$

Если $C_1^{j\prime} \geq C_2^{j\prime}$, то задача (3) будет противоречить условиям решающего правила, и указанные преобразования делать нельзя. Если же $C_1^{j\prime} < C_2^{j\prime}$, то изменим пороги решающего правила:

$$C_1^j = C_1^{j\prime}, C_2^j = C_2^{j\prime}.$$

Значение функционала удалось уменьшить. Аналогичные рассуждения можно провести для векторной переменной $\vec{w}$.

Итак, получен метод минимизации функционала ошибки. Заметим, что для различных наборов параметров $\{\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}, k, \varepsilon, x_{11}, x_{00}\}$ настройка алгоритмов происходит независимо. Поэтому можно успешно применять технологию распараллеливания. Однако, в некоторых ветвях нашего параллельного процесса происходит вычисление одинаковых величин, поэтому для более эффективной реализации следует выделить общие части и вычислить эти величины один раз.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев Ю.И.* Избранные научные труды. // М. Магистр 1998.
2. *Журавлев Ю.И.* Алгоритмы распознавания, основанные на вычислении оценок. Содержательный смысл параметров, задающих алгоритм. // Труды международного симпозиума по практическим применениям методов распознавания образов. М., ВЦ АН СССР, 1973, 205-218.
3. *http://www.parallel.ru* (Информационно-аналитический центр по параллельным вычислениям.)

СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, с. 8–31

УДК 517.956.2

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

© 2006 г. С. В. Афонин

slusla@yandex.ru

Кафедра Общей математики

Введение. Рассмотрим произвольный дифференциальный оператор L, порожденный дифференциальной операцией

$$lu \equiv u' + a_0(x)u, \qquad x \in G = (0,1),$$

на классе функций D, абсолютно непрерывных на $\overline{G} = [0,1]$;

$$a_0(x) \in L^s(G), \qquad s \geq 1. \tag{1}$$

В работе [1] установлены оценки скорости равносходимости спектральных разложений по корневым функциям оператора L второго порядка в метрике L^p, $p \in [1,\infty]$, на любом отрезке $K \subset G$ с разложением той же функции в обычный тригонометрический ряд Фурье. В работе [2] этот результат обобщен на случай любого оператора четного порядка.

В настоящей работе получены аналогичные оценки для операторов первого порядка. Хотя обычно на внутреннем отрезке рассматривают равномерную равносходимость разложений, в работе рассматривается равносходимость в метрике L^p, поскольку во многих задачах функции разлагаются в ряды под знаком интеграла и достаточно бывает оценок в интегральной метрике. В работе показано, что если $s < p$, то скорость равносходимости разложений существенно зависит от s. Для получения указанных оценок не привлекается оператор L^*, сопряженный с L, существование которого налагает условия гладкости на коэффициент $a_0(x)$. Система функций, биортогонально сопряженная с системой корневых функций оператора L, может быть не связана с сопряженным оператором. Работа основана на применении и развитии спектрального метода В.А. Ильина [4-6].

1. Постановка задачи. Дадим определение корневых функций (т.е. собственных и присоединенных функций) и приведем основные условия на операторы. Корневые функции оператора L определим в обобщенном (по Ильину) смысле, рассматривая их как регулярные решения дифференциальных уравнений и освобождая их от требования удовлетворения каким-либо конкретным краевым условиям. Ограничения при этом налагаются на свойства спектра и корневых функций оператора. Это позволяет изучить как системы функций типа системы экспонент, не удовлетворяющих никаким краевым условиям без спектрального параметра, так и корневые функции конкретных краевых задач. Рассмотрены два типа спектральных задач (отличающихся нормировкой присоединенных функций). Под *собственной функцией оператора* L, отвечающей собственному значению $\lambda \in C$, будем понимать любую не равную тождественному нулю функцию $\overset{0}{u}(x) \in D$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $l\overset{0}{u} - \omega\lambda\overset{0}{u} = 0$, где $\omega = +i$ при $Re\lambda < 0$ и $\omega = -i$ при $Re\lambda \geq 0$. Под *присоединенной функцией порядка* $m, m = 1, 2...$, отвечающей тому же λ и собственной функции $\overset{0}{u}(x)$, будем понимать любую функцию $\overset{m}{u}(x)$, которая почти всюду удовлетворяет уравнению $l\overset{m}{u} - \omega\lambda\overset{m}{u} = \mu_m \overset{m-1}{u}$. Здесь либо $\mu_m = 1$ (спектральная задача 1), либо $\mu_m = \lambda$ при $|\lambda| \geq 1$, $\mu_m = 1$ при $|\lambda| < 1$ (спектральная задача 2). Приведем основные ограничения на рассматриваемые системы корневых функций. В случае конкретных краевых задач эти условия достаточно легко проверяются.

Фиксируем произвольную систему собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и произвольную систему $\{u_k(x)\}$ корневых функций оператора L, отвечающую этим собственным значениям, удовлетворяющие следующим трем *условиям Ильина*, назовем их *условиями A :*

1. система $\{u_k(x)\}$ замкнута и минимальна в $L^r(G)$ при некотором $r \in [1, \infty)$;

2. существуют $c_1, c_2 = const > 0$ такие, что

$$|Im\lambda_k| \leq c_1 \quad \forall k, \qquad \sum_{0 \leq |\lambda_k| - \lambda \leq 1} 1 \leq c_2 \quad \forall \lambda \geq 0; \tag{2}$$

3. существует $c_3 = const > 0$ такая, что

$$\|u_k\|_r \|v_k\|_{r'} \leq c_3 \quad \forall k, \tag{3}$$

где $\{v_k\}$ — биортогонально сопряженная с $\{u_k\}$ система функций: $v_k \in L^{r'}(G)$, $(u_k, v_j) = \delta_{kj} \forall k, j \in N, r' = r/(r-1); \| \cdot \|_r$ — обозначение нормы в $L^r(G)$.

Будем также обозначать через $\|f\|_{r,E}$ норму функции $f(x) \in L^r(E), \quad r \in [1, \infty]$. Если $E = G$, то будем писать $\|f\|_r$.

Для произвольной функции $f(x) \in L^r(G)$ составим частичные суммы биортогонального разложения

$$\sigma_\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} f_k u_k(x), \qquad \lambda > 0, \qquad f_k \equiv (f, v_k).$$

Через $S_\lambda(x, f)$ обозначим частичную сумму тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, рассматриваемого как ортогональное разложение $f(x)$ для оператора $L_0 u = u''$ с условиями периодичности в 0 и 1.

Наложим дополнительно ограничение на систему $\{u_k, v_k\}$ и функции $f(x)$:

$$\exists \nu = const > 0: \qquad \alpha_k f_k = O\left(\lambda_k{}^{-\nu}\right), \qquad |\lambda_k| \geq 1, \tag{4}$$

где $\alpha_k = \|v_k\|_{r'}^{-1}$. Предположим далее, что для оператора L_0 в условии (4) показатель $\nu_0 \geq \nu$, т.е. коэффициенты тригонометрического ряда Фурье удовлетворяют асимптотическому соотношению (4).

Замечание 1. Следуя традициям теории функций, теории рядов Фурье, условие (4) нужно было бы записать в терминах требований гладкости на функцию $f(x)$. Но специфика рассматриваемых задача такова, что в ряде случаев существенную роль на параметр ν в (4) оказывают функции $v_k(x)$. В примере, приведенном в [1], показано, что даже для функции $f(x) \in C^\infty(G), \quad f \equiv 1$, показатель ν может меняться в пределах $(1 - 1/r, 1], \quad r \in (1, \infty)$, в зависимости от выбора системы u_k, v_k. Поэтому в терминах только функций $f(x)$ условие (4) записать нельзя.

Основная задача состоит в том, чтобы установить факт равносходимости спектральных разложений $\sigma_\lambda(x, f)$ и $S_\lambda(x, f)$ функции $f(x)$ в метрике пространства $L^p, p \geq 1$, на любом отрезке $K \subset G$ и оценить скорость равносходимости указанных разложений (или, другими словами, оценить погрешность аппроксимации одного разложения другим). Из этой оценки будет следовать, в частности, что оба разложения сходятся или расходятся в метрике данного пространства L^p одновременно. Требуется при этом выявить степень зависимости оценок скорости равносходимости от показателя s.

2. Основная теорема. Фиксируем произвольно число $p \in [1, \infty)$.

Теорема 1. *Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (1), (4) и условия А. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедлива оценка*

$$\|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_{L^p(K)} \leq c\, max(1/\lambda, \lambda^{-\nu+1} \ln^2 \lambda, \lambda^{1/s - 1/p - \nu + 1} \ln \lambda) \tag{5}$$

с постоянной c, не зависящей от λ.

Замечание 2. Если у собственных функций дифференциального оператора нет присоединенных функций, то из указанной оценки следует убрать член $\lambda^{-\nu+1} \ln^2 \lambda$. Также, если $a_0(x) \equiv 0$, то нужно убрать член $\lambda^{1/s - 1/p - \nu + 1} \ln \lambda$.

Замечание 3. При $s \geq p$ из оценки (5) следует убрать третий член. При $s < p$ нужно убрать второй член, оценка в этом случае существенно зависит от степени суммируемости s.

3. Доказательство основной теоремы. Пусть $\Theta_\lambda(x,y) = \sum\limits_{|\lambda_k| \leq \lambda} u_k(x)\overline{v}_k(y)$ — спектральная функция оператора L, $D_\lambda(x,y)$ — ядро Дирихле, спектральная функция оператора L_0; $\sigma_\lambda(x,f) = \int\limits_{\bar{G}} \Theta_\lambda(x,y)f(y)dy$. Фиксируем любой отрезок $K = [a,b] \subset G$. Нас интересует оценка разности при $\lambda \to +\infty$:

$$\triangle_\lambda \equiv \int\limits_K |\sigma_\lambda(x,f) - S_\lambda(x,f)|^p \, dx = \int\limits_K |f(y) \left[\Theta_\lambda(x,y) - D_\lambda(x,y)\right] dy|^p \, dx \tag{6}$$

Зафиксировав произвольное число $R_0 \in (0, (1/2)dist(K, \partial G))$, для любого числа $R \in [R_0/2, R_0]$ и любого $x \in K$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$w_\lambda(\rho, R) \;=\; \begin{cases} (\sin \lambda\rho)/(\pi\rho), & |\rho| \leq R, \; \rho = x - y, \\ 0, & |\rho| > R. \end{cases} \tag{7}$$

Далее, как в работах В.А. Ильина [4, 5], усредним функцию (7) по R:

$$S_0[w_\lambda(\rho,R)] = \frac{8}{3R_0^2} \int\limits_{R_0/2}^{R_0} R w_\lambda(\rho,R) dR \qquad (S_0[1] = 1), \tag{8}$$

добавим и вычтем под знаком модуля в правой части (6) выражение (8) и оценим модуль суммы через сумму модулей ($c_p = 2^{p-1}, v_0(x,y) = S_0[w_\lambda(\rho,R)]$):

$$\triangle_\lambda \leq c_p \int\limits_K \left| \int\limits_{\bar{G}} f(y) \left[\Theta_\lambda(x,y) - v_0(x,y)\right] dy \right|^p dx +$$

$$+ c_p \int\limits_K \left| \int\limits_{\bar{G}} f(y) \left[D_\lambda(x,y) - v_0(x,y)\right] dy \right|^p dx \equiv c_p \left(I_1 + I_2\right). \tag{9}$$

Оценим первый интеграл I_1 в правой части (9); интеграл I_2 оценивается аналогично.

1^0. Заменим функцию $v_0(x,y)$ биортогональным рядом. При выполнении условия (1) и условий А справедливо равенство (см. [12]) $\forall p \in [1,\infty), \forall f(x) \in L^r(G)$:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \left\| \int\limits_{\bar{G}} f(y) \left[v_0(x,y) - \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} (v_0, \bar{u}_k)\bar{v}_k(y) \right] dy \right\|_{p,K} = 0. \tag{10}$$

Замечание 4. Равенство (10) может быть верно и в равномерной метрике. Действительно пусть для некоторого $\alpha \in [1,\infty)$

$$f(y) \overset{L^\alpha(K_0)}{=} \sum_k f_k u_k(y), \qquad K_0 = [a - R_0, b + R_0]. \tag{11}$$

Здесь и далее обозначено через $\sum\limits_k$ сумма $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$. Умножим обе части (11) скалярно на фунцию $S_0[w_e(\rho,R)]$. Так как ряд в (11) сходится в $L^\alpha(K_0)$, то на K_0 его можно почленно интегрировать, а вне K_0 функция $S_0[w_\lambda(\rho,R)]$ как функция y при $x \in K$ равна нулю. Получаем равенство

$$\int\limits_{\bar{G}} f(y)v_0(x,y)dy = \sum_k f_k \int\limits_{\bar{G}} u_k(y)v_0(x,y)dy \qquad \forall x \in K. \tag{12}$$

2^0 Для функции u_k имеет место *формула среднего значения* (легко получаемая интегрированием по частям после замены A_1u_k на $u_k' - \omega\lambda u_k$). Обозначим

$$s_t(u_k(x)) = u_k(x+t) + u_k(x-t). \tag{13}$$

Тогда $\forall \lambda_k \in C, x \pm t \in \bar{G}$:

$$s_t(u_k(x)) = 2u_k(x)\cos\lambda_k t - h_k(x,t), \tag{14}$$

где

$$h_k(x,t) = \int\limits_0^t \left[\exp\{\omega\lambda_k(\tau - t)\}A_1u_k(x-\tau) - \exp\{-\omega\lambda_k(\tau-t)\}A_1u_k(x+\tau)\right]d\tau,$$

а $A_1u_k \equiv -a_0u_k$, если u_k — собственная функция, $A_1u_k \equiv \mu_m \overset{m-1}{u_k} - a_0u_k$, если $u_k = \overset{m}{u_k}$ — m -я присоединенная функция. Исследуем в правых частях (10), (12) структуру коэффициентов:

$$\int\limits_{\bar{G}} S_0[w_\lambda(\rho,R)]u_k(y)dy = \frac{1}{\pi}S_0\left[\int\limits_{x-R}^{x+R} \frac{\sin\lambda(x-y)}{x-y}u_k(y)dy\right] = \frac{1}{\pi}S_0\left[\int\limits_0^R \frac{\sin\lambda t}{t}s_t(u_k(x))dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}S_0\left[2u_k(x)\int\limits_0^R \frac{\sin\lambda t\cos\lambda_k t}{t}dt - \int\limits_0^R \frac{sin\lambda t}{t}h_k(x,t)dt\right] =$$

$$= u_k(x)\delta_k^\lambda + u_k(x)I_k^\lambda(R_0) - \frac{1}{\pi}S_0\left[\int\limits_0^R \frac{sin\lambda t}{t}h_k(x,t)dt\right]. \tag{15}$$

Здесь в проведенных преобразованиях мы сделали замены переменных $y - x = t$ при $y \geq x$ и $x - y = t$ при $y < x$, воспользовались формулой среднего (14) и леммой о разрывном множителе Дирихле в C [9]. По этой лемме справедливы соотношения

$$\frac{2}{\pi}S_0[\int\limits_0^R \frac{\sin\lambda t\cos\lambda_k t}{t}dt] = \delta_k^\lambda + I_k^\lambda(R_0),$$

$$\delta_k^\lambda = \begin{cases} 1, & |\lambda_k| \leq \lambda, \\ 0, & |\lambda_k| > \lambda, \end{cases} \quad I_k^\lambda(R_0) = \begin{cases} O(1), & \forall\lambda_k \in C, \\ O(|\lambda - |\lambda_k||^{-2}), & |\lambda_k| \geq 1, |\lambda - |\lambda_k|| \geq 1. \end{cases} \tag{16}$$

Подставим правую часть (15) в (10), (12) и соответственно в первый интеграл I_1 в (9). Учитывая структуру δ_k^λ из (16), для интеграла I_1 получаем выражение

$$I_1 = \int\limits_K \left|\int\limits_{\bar{G}} f(y)\left[\Theta_\lambda(x,y) - v_0(x,y)\right]dy\right|^p dx = \int\limits_K \left|\int\limits_{\bar{G}} f(y)v_0(x,y)dy - \int\limits_{\bar{G}} f(y)\Theta_\lambda(x,y)dy\right|^p dx =$$

$$= \int\limits_K \left| \sum_k f_k \int\limits_{\bar{G}} u_k(y) v_0(x,y) dy - \sum_{|\lambda_k| \le \lambda} \int\limits_{\bar{G}} f(y) u_k(x) \overline{v}_k(y) dy \right|^p dx =$$

$$= \int\limits_K \left| \sum_k f_k \int\limits_{\bar{G}} u_k(y) v_0(x,y) dy - \sum_{|\lambda_k| \le \lambda} f_k u_k(x) \right|^p dx =$$

$$= \int\limits_K \left| \sum_k f_k \left\{ u_k(x) \delta_k^\lambda + u_k(x) I_k^\lambda(R_0) - \frac{1}{\pi} S_0 \left[\int\limits_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} h_k(x,t) dt \right] \right\} - \sum_{|\lambda_k| \le \lambda} f_k u_k(x) \right|^p dx =$$

$$= \int\limits_K \left| \sum_k f_k \left\{ u_k(x) I_k^\lambda(R_0) - \frac{1}{\pi} S_0 \left[\int\limits_0^R \frac{\sin \lambda t}{t} h_k(x,t) dt \right] \right\} \right|^p dx. \qquad (17)$$

3^0. Исследование выражения (17) связано с некоторыми вспомогательными оценками. Приведем их в виде лемм. Фиксируем произвольно числа $\alpha, \beta \in \overline{G}, \alpha < \beta$, $R \in [R_0/2, R_0], \tau \in [0, R], s \in R, s > 1, \lambda > 0$ — достаточно большое число $(\lambda > 4)$, $\{\lambda_k\} \in C$, $|Im\lambda_k| \le c = const < \infty$, $\lambda_k \ne 0, k = 1, 2...$ Рассмотрим следующие интегралы (для определенности положим $\omega = -i$, т.е. тем самым $Re\lambda_k \ge 0$):

$$K_0(\lambda, \lambda_k, \tau, R) \equiv \int\limits_\tau^R \frac{\sin \lambda r \exp \omega \lambda_k (r - \tau)}{r} dr,$$

$$A_k^s(\lambda, \alpha, \beta, R) \equiv \left(\int\limits_\alpha^\beta |K_0(\lambda, \lambda_k, \tau, R)|^s d\tau \right)^{1/s}, \qquad A_k \equiv A_k^1(\lambda, \alpha, \beta, R).$$

Далее, положим $K_0 \equiv \lambda_k [K_1 - iK_2]$, где

$$K_1(\lambda, \lambda_k, \tau, R) \equiv \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_\tau^R \frac{\sin \lambda r \cos \lambda_k (r - \tau)}{r} dr,$$

$$K_2(\lambda, \lambda_k, \tau, R) \equiv \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_\tau^R \frac{\sin \lambda r \sin \lambda_k (r - \tau)}{r} dr.$$

Положим также

$$A_{1k}^s(\lambda, \alpha, \beta, R) \equiv \left(\int\limits_\alpha^\beta |K_1(\lambda, \lambda_k, \tau, R)|^s d\tau \right)^{1/s}, \qquad A_{1k} \equiv A_{1k}^1(\lambda, \alpha, \beta, R),$$

$$A_{2k}^s(\lambda, \alpha, \beta, R) \equiv \left(\int\limits_\alpha^\beta |K_2(\lambda, \lambda_k, \tau, R)|^s d\tau \right)^{1/s}, \qquad A_{2k} \equiv A_{2k}^1(\lambda, \alpha, \beta, R).$$

Лемма 1. *Равномерно по* $\alpha, \beta, R, \lambda, \lambda_k$ *из указанных выше множеств имеют место следующие оценки:*

1) $I_k^\lambda = O(\lambda^{-2})$ при $|\lambda_k| \le 1$;
2) $I_k^\lambda = O(\lambda^{-2})$ при $1 \le |\lambda_k| \le \lambda/2$;

3) $I_k^\lambda = O((\lambda|\lambda_k|)^{-1})$ при $|\lambda_k| \geq 3\lambda/2$;
4) $I_k^\lambda = O(1)$ при $|\lambda - |\lambda_k|| \leq 2/R_0$;
5) $I_k^\lambda = O(|\lambda - |\lambda_k||^{-2})$ при $2/R_0 \leq |\lambda - |\lambda_k|| \leq \lambda/2$.

Лемма 2. *Равномерно по* $\alpha, \beta, R, \lambda, \lambda_k$ *из указанных выше множеств имеют место следующие оценки:*

1) $A_{1k} = O\left((\lambda|\lambda_k|)^{-1}\right)$, $A_{1k}^s = O\left((\lambda|\lambda_k|)^{-1}\right)$ при $|\lambda_k| \leq 1$;
2) $A_{1k} = O((\lambda|\lambda_k|)^{-1}\ln\lambda)$, $A_{1k}^s = O(\lambda^{-1/s}|\lambda_k|^{-1})$ при $1 \leq |\lambda_k| \leq \lambda/2$;
3) $A_{1k} = O(|\lambda_k|^{-2}\ln\lambda)$, $A_{1k}^s = O(\lambda^{1-1/s}|\lambda_k|^{-2})$ при $|\lambda_k| \geq 3\lambda/2$;
4) $A_{1k} = O(\lambda^{-1})$, $A_{1k}^s = O(\lambda^{-1})$ при $|\lambda - |\lambda_k|| \leq 2/R_0$;
5) $A_{1k} = O((|\lambda_k||\lambda - |\lambda_k||)^{-1}\ln\lambda)$, $A_{1k}^s = O(\lambda^{1-1/s}(|\lambda_k||\lambda - |\lambda_k||)^{-1}) = O(\lambda^{-1/s}|\lambda - |\lambda_k||^{-1})$ при $2/R_0 \leq |\lambda - |\lambda_k|| \leq \lambda/2$.

Лемма 3. *Равномерно по* $\alpha, \beta, R, \lambda, \lambda_k$ *из указанных выше множеств имеют место следующие оценки:*

1) $A_{2k} = O(\lambda^{-1})$, $A_{2k}^s = O(\lambda^{-1})$ при $|\lambda_k| \leq 1$;
2) $A_{2k} = O((\lambda|\lambda_k|)^{-1}\ln|\lambda_k|)$, $A_{2k}^s = O(\lambda^{-1}|\lambda_k|^{-1/s})$ при $1 \leq |\lambda_k| \leq \lambda/2$;
3) $A_{2k} = O(|\lambda_k|^{-2}\ln\lambda)$, $A_{2k}^s = O(\lambda^{1-1/s}|\lambda_k|^{-2})$ при $|\lambda_k| \geq 3\lambda/2$;
4) $A_{2k} = O(\lambda^{-1}\ln\lambda)$, $A_{2k}^s = O(\lambda^{-1/s})$ при $|\lambda - |\lambda_k|| \leq 2/R_0$;
5) $A_{2k} = O((|\lambda_k||\lambda - |\lambda_k||)^{-1}\ln\lambda)$, $A_{2k}^s = O(\lambda^{1-1/s}(|\lambda_k||\lambda - |\lambda_k||)^{-1}) = O(\lambda^{-1/s}|\lambda - |\lambda_k||^{-1})$ при $2/R_0 \leq |\lambda - |\lambda_k|| \leq \lambda/2$.

Лемма 4. *Равномерно по* $\alpha, \beta, R, \lambda, \lambda_k$ *из указанных выше множеств имеют место следующие оценки:*

1) $A_k = O(\lambda^{-1})$, $A_k^s = O(\lambda^{-1})$ при $|\lambda_k| \leq 1$;
2) $A_k = O(\lambda^{-1}\ln\lambda)$, $A_k^s = O(\lambda^{-1/s})$ при $1 \leq |\lambda_k| \leq \lambda/2$;
3) $A_k = O(|\lambda_k|^{-1}\ln\lambda)$, $A_k^s = O(\lambda^{1-1/s}|\lambda_k|^{-1})$ при $|\lambda_k| \geq 3\lambda/2$;
4) $A_k = O(\ln\lambda)$, $A_k^s = O(\ln\lambda)$ при $|\lambda - |\lambda_k|| \leq 2/R_0$;
5) $A_k = O((|\lambda - |\lambda_k||)^{-1}\ln\lambda)$, $A_k^s = O(\lambda^{1-1/s}(|\lambda - |\lambda_k||)^{-1})$ при $2/R_0 \leq |\lambda - |\lambda_k|| \leq \lambda/2$.

Доказательство Леммы 1 и Леммы 3 получено в [1]. Лемма 4 является следствием соотношений, установленных в Леммах 2 и 3. Доказательство Леммы 2 приведено в п.6 доказательства основной теоремы.

В соответствии с произведенным разбиением множества $\{\lambda_k\}$ в леммах введем обозначения для сумм по рассматриваемым множествам значений λ_k : $\sum_1$ — сумма по тем λ_k , для которых справедливо неравенство $|\lambda_k| \leq 1$; $\sum_2 : 1 \leq |\lambda_k| \leq \lambda/2$; $\sum_3 : |\lambda_k| \geq 3\lambda/2$; $\sum_4 : |\lambda - |\lambda_k|| \leq 2/R_0$; $\sum_5 : 2/R_0 \leq |\lambda - |\lambda_k|| \leq \lambda/2$.

4^0 . Рассмотрим выражение в правой части (17), содержащие $I_k^\lambda(R_0)$. Воспользовавшись для I_k^λ оценками из леммы 1 и применив неравенство (см. [3])

$$\exists c = const: \qquad \|u_k\|_\infty \alpha_k^{-1} \leq c \quad \forall k \in N, \tag{18}$$

для достаточно больших λ получаем

$$\sum_k \left| f_k u_k(x) I_k^\lambda(R_0) \right| \leq$$

$$\leq c\left[\lambda^{-2}\sum\nolimits_1 |\hat{f}_k| + \lambda^{-2}\sum\nolimits_2 |\hat{f}_k| + \lambda^{-1}\sum\nolimits_3 |\hat{f}_k \lambda_k{}^{-1}| + \sum\nolimits_4 |\hat{f}_k| + \sum\nolimits_5 |\hat{f}_k||\lambda - |\lambda_k||^{-2}\right],$$

$$\hat{f}_k \equiv \alpha_k f_k,$$

равномерно по $x \in \bar{G}$ (обозначение α_k введено в условии (4)). Оценим суммы в правой части последнего неравенства. В сумме $\sum_1$ используем неравенство Гёльдера для $f_k = (f, v_k)$ и второе условие из (2), получаем $\lambda^{-2}\sum_1 |\hat{f}_k| \leq c_2\|f\|_r\lambda^{-2}$. Для остальных сумм используем оценку (4) и также второе условие из (2). Оценим сумму $\sum_2$ следующим образом:

$$\lambda^{-2}\sum_2|\hat{f}_k|\le c\lambda^{-2}\sum_2||\lambda_k||^{-\nu}\le c\lambda^{-2}\sum_{n=1}^{[\lambda/2]}\sum_{n\le|\lambda_k|\le n+1}|\lambda_k|^{-\nu}\le$$

$$\le c\lambda^{-2}\sum_{n=1}^{[\lambda/2]}n^{-\nu}\sum_{0\le|\lambda_k|-n\le1}1\le cc_2\lambda^{-2}\sum_{n=1}^{[\lambda/2]}n^{-\nu}=\varphi(\lambda),$$

где $\varphi(\lambda)=O(\lambda^{-1-\nu})$ при $\nu<1$, $\varphi(\lambda)=O(\lambda^{-2}\ln\lambda)$ при $\nu=1$ и $\varphi(\lambda)=O(\lambda^{-2})$ при $\nu>1$. Для суммы $\sum_3$, действуя по той же схеме и применяя второе условие из (2), получаем

$$\lambda^{-1}\sum_3|\hat{f}_k\lambda_k{}^{-1}|\le c\lambda^{-1}\sum_{n\ge[3\lambda/2]}n^{-1-\nu}=O\left(\lambda^{-1-\nu}\right).$$

Сумма $\sum_4$, очевидно, имеет оценку $O(\lambda^{-\nu})$, а сумма $\sum_5$ оценивается следующим образом

$$\sum_5|\hat{f}_k||\lambda-|\lambda_k||^{-2}\le c\lambda^{-\nu}\sum_{n=1}^{[\lambda/2]}n^{-2}=O\left(\lambda^{-\nu}\right).$$

Объединяя установленные оценки, получаем равномерно по $x\in\bar{G}$

$$\sum_k|f_ku_k(x)I_k^\lambda(R_0)|=O\left(max\left(\lambda^{-\nu},\lambda^{-2}\right)\right). \tag{19}$$

5^0. Будем считать далее, не ограничивая общности, что $\lambda_k\ne0$. Преобразуем оставшуюся часть под знаком интеграла в (17), подставив в нее формулу для $h_k(x,t$ и поменяв местами пределы интегрирования. Получим

$$S(x)\equiv-\frac{1}{\pi}S_0\left[\int_0^R\frac{\sin\lambda t}{t}h_k(x,t)dt\right]=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\sum_k f_kS_0\left[\int_0^R\frac{\sin\lambda t}{t}\left(\int_0^t A_1u_k(x-\tau)\exp\left(\omega\lambda_k(\tau-t)\right)d\tau-\int_0^t A_1u_k(x+\tau)\exp\left(\omega\lambda_k(t-\tau)\right)d\tau\right)dt\right]=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\sum_k f_kS_0\left[\int_0^R\int_\tau^R\frac{\sin\lambda t\exp\left(\omega\lambda_k(\tau-t)\right)}{t}A_1u_k(x-\tau)dtd\tau-\right.$$

$$\left.-\int_0^R\int_\tau^R\frac{\sin\lambda t\exp\left(-\omega\lambda_k(\tau-t)\right)}{t}A_1u_k(x+\tau)dtd\tau\right]=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\sum_k f_kS_0\left[\int_0^R K_0(\lambda,-\lambda_k,\tau,R)A_1u_k(x-\tau)d\tau-\int_0^R K_0(\lambda,\lambda_k,\tau,R)A_1u_k(x+\tau)d\tau\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_k f_kS_0\left[\int_0^R K_0(\lambda,\lambda_k,\tau,R)A_1u_k(x+\tau)d\tau\right]-\frac{1}{\pi}\sum_k f_kS_0\left[\int_0^R K_0(\lambda,-\lambda_k,\tau,R)A_1u_k(x-\tau)d\tau\right]=$$

$$=S'-S''. \tag{20}$$

Оценим S'; S'' оценивается аналогично. В S' расщепим A_1u_k на два слагаемых в соответствии с обозначением после формулы (14) и представим S' в виде суммы $S_1'+S_2'$ (считаем, что $u_k=\overset{m}{u}_k$ — присоединенная функция), где

$$S_1'(x) = \frac{1}{\pi}\sum_k f_k S_0\left[\int\limits_0^R K_0(\lambda,\lambda_k,\tau,R)\left(-a_0(x+\tau)\overset{m}{u}_k(x+\tau)\right)d\tau\right],$$

$$S_2'(x) = \frac{1}{\pi}\sum_k f_k S_0\left[\int\limits_0^R K_0(\lambda,\lambda_k,\tau,R)\left(\mu\overset{m-1}{u}_k(x+\tau)\right)d\tau\right].$$

Покажем, что операция усреднения (8) не влияет на последующие преобразования. Будем использовать обобщенное неравенство Минковского (см. [10, с.38]):

$$\left\|\int\limits_R f(t,\tau)dt\right\|_p \le \int\limits_R \|f(t,\tau)\|_p\,d\tau.$$

Обозначим $\int\limits_0^R K_0(\lambda,\lambda_k,\tau,R)A_1u_k(x+\tau)d\tau = F(x,R)$.Справедливы оценки:

$$\|S_0\left[F(x,R)\right]\|_p = \frac{8}{3R_0^2}\left\|\int\limits_{R_0/2}^{R_0} RF(x,R)dR\right\|_p \le \frac{8}{3R_0^2}\int\limits_{R_0/2}^{R_0} R\|F(x,R)\|_p\,dR = S_0\left[\|F(x,R)\|_p\right]. \quad (21)$$

Поскольку оценки леммы 4 для интегралов A_k^s, A_k равномерны по R, а операция усреднения введена так, что $S[1]=1$, то на последующие оценки эта операция не оказывает влияния. Указанная операция существенна использована лишь при рассмотрении (16).

Рассмотрим сначала сумму $S_2'(x)$. С помощью так называемой [4] *оценки антиаприорного типа* $\|\mu_m \overset{m-1}{u_k}\|_\infty \le c(1+|\lambda_k|)\|\overset{m}{u_k}\|_\infty$, справедливой при условиях (2) (см. [7,12]), соотношений (18), (21) и оценок леммы 4 для A_k имеем

$$\|S_2'(x)\| \le c\sum_k |\hat{f}_k\lambda_k||S_0[A_k^1(\lambda,0,R_0,R)]| \le c_0\left[\lambda^{-1}\sum\nolimits_1|\hat{f}_k| + \lambda^{-1}\sum\nolimits_2|\hat{f}_k\lambda_k|\ln|\lambda_k| + \right.$$

$$\left. + \ln\lambda\sum\nolimits_3|\hat{f}_k| + \ln\lambda\sum\nolimits_4|\hat{f}_k\lambda_k| + \ln\lambda\sum\nolimits_5|\hat{f}_k\lambda_k||\lambda-\lambda_k|\right]. \quad (22)$$

Оценим правую часть при условиях (2), (4).

$$\lambda^{-1}\sum\nolimits_1|\hat{f}_k| \le c_2\|f\|_r\lambda^{-1} = O(\lambda^{-1}),$$

$$\lambda^{-1}\sum\nolimits_2|\hat{f}_k\lambda_k|\ln|\lambda_k| \le c\lambda^{-1}\sum_{n\le\lambda/2} n^{-\nu+1}\ln(n+1) = \varphi\lambda,$$

где $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-\nu+1}\ln\lambda)$ при $\nu<2$, $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-1}\ln^2\lambda)$ при $\nu=2$ и $\varphi(\lambda)=O(\lambda^{-1})$ при $\nu>2$.

$$\ln\lambda\sum\nolimits_3|\hat{f}_k| =\le c\ln\lambda\sum_{n\ge3\lambda/2} n^{-\nu} = O(\ln\lambda)\,O\left(\lambda^{-(\nu-1)}\right) = O\left(\lambda^{-\nu+1}\ln\lambda\right),$$

$$\ln\lambda\sum\nolimits_4|\hat{f}_k\lambda_k| = O\left(\lambda^{-\nu+1}\ln\lambda\right),$$

$$\ln\lambda\sum\nolimits_5|\hat{f}_k\lambda_k||\lambda-|\lambda_k||^{-1} \le c\lambda^{-(\nu-1)}\ln\lambda\sum\nolimits_5|\lambda-|\lambda_k||^{-1} = O(\lambda^{-\nu+1}\ln^2\lambda).$$

В результате получаем, что

$$S_2'(x) = O\left(max(\lambda^{-1}, O(\lambda^{-\nu+1}\ln^2\lambda)\right) \tag{23}$$

равномерно по $x \in K$. Оценивая сумму $S_1'(x)$, содержащую коэффициент $a_0(x)$, будем использовать оценку $\|u_k'\|_\infty \le c(1+|\lambda_k|)\|u_k\|_\infty$, [7,12]. По условию $a_0(x) \in L^s(G)$. Рассмотрим сначала случай $s \ge p$, тогда $a_0(x) \in L^p$. Применим под знаком интеграла указанную оценку производной, перейдем от нормы суммы к сумме норм и применим обобщенное неравенство Минковского к L^p-норме следующего интеграла:

$$J(x) = \int\limits_0^R S_0\left[|K_0(\lambda,\lambda_k,\tau,R)|\right]|a_0(x+\tau)|d\tau, \tag{24}$$

получим

$$\|S_1\|_{p,K} \le c_1\|a_0\|_p \sum_k \|\hat{f}_k\lambda_k\||S_0[A_k^1(\lambda,0,R_0,R)]|, \qquad p \ge 1,$$

где при последнем переходе мы также использовали соотношение (21). Сравнивая правую часть последнего неравенства и левую часть (22), получаем, что для $\|S_1\|_{p,K}$ в случае $s \ge p$ имеет место оценка (23).

Пусть $s < p$. Проведем те же преобразования, что и в случае $s \ge p$, но к интегралу (24) применим неравенство Юнга [11]: $\|J\|_{p,K} \le 2\|a_0\|_s\|S_0[|K_0|]\|_{\zeta,(0,R_0)} \le 2\|a_0\|_s S_0[A_k^\zeta(\lambda,0,R_0,R)]$, где также воспользовались на последнем шаге соотношением (21). Параметр ζ связан с параметрами задачи следующим образом:

$$1/\zeta = 1 + 1/p - 1/s < 1, \qquad \zeta = ps'/(p+s') < s' \qquad (s < p, \quad s' = s/(s-1)). \tag{25}$$

Учитывая оценки леммы 4 для A_k^ζ для S_1 получаем:

$$\|S_1\|_{p,K} \le c\|a_0\|_s \sum_k |\hat{f}_k\lambda_k|S_0[A_k^\zeta(\lambda,0,R_0,R)] \le c_0\|a_0\|_s\left[\lambda^{-1}\sum\nolimits_1|\hat{f}_k| + \lambda^{-1/\zeta}\sum\nolimits_2|\hat{f}_k\lambda_k| + \right.$$

$$\left. + \lambda^{1-1/\zeta}\sum\nolimits_3|\hat{f}_k| + \ln\lambda\sum\nolimits_4|\hat{f}_k\lambda_k| + \lambda^{1-1/\zeta}\sum\nolimits_5|\hat{f}_k\lambda_k||\lambda-|\lambda_k||^{-1}\right].$$

Оценим правую часть последнего равенства при условиях (2), (4) по прежней схеме:

$$\lambda^{-1}\sum\nolimits_1|\hat{f}_k| = O(\lambda^{-1}),$$

$$\lambda^{-1/\zeta}\sum\nolimits_2|\hat{f}_k\lambda_k| \le c\lambda^{-1/\zeta}\sum_{n\le\lambda/2}\lambda^{-\nu+1} \le c_3\lambda^{-1/\zeta}\sum_{n=1}^{[\lambda/2]} = \varphi(\lambda),$$

где $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{2-\nu-1/\zeta})$ при $\nu < 2$, $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-1/\zeta}\ln 2\lambda)$ при $\nu = 2$ и $\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-1/\zeta})$ при $\nu > 2$.

$$\lambda^{1-1/\zeta}\sum\nolimits_3|\hat{f}_k|O\left(\lambda^{1-1/\zeta}\right)O\left(\lambda^{\nu+1}\right) = O(\lambda^{2-\nu-1/\zeta}) = O\left(\lambda^{1/s-1/p-\nu+1}\right),$$

$$\ln\lambda\sum\nolimits_4|\hat{f}_k\lambda_k| = O\left(\lambda^{-\nu+1}\ln\lambda\right),$$

$$\lambda^{1-1/\zeta}\sum\nolimits_5|\hat{f}_k\lambda_k||\lambda-|\lambda_k||^{-1} = O\left(\lambda^{2-\nu-1/\zeta}\ln\lambda\right).$$

Теперь можно получить оценку для $\|S_1'\|_{p,k}$:

$$\|S_1'\|_{p,k} = O\left(max(\lambda^{-1}, \lambda^{1/s-1/p-\nu+1}\ln\lambda\right). \tag{26}$$

Объединяя оценки (19), (23) и (26), получаем оценку (5) теоремы. Обоснование теоремы завершено.

6^0. **Доказательство Леммы 2 об оценках интегралов**.

1) Пусть $|\lambda_k| \le 1$. Выведем сначала оценку для интеграла $K_1(\lambda, \lambda_k, \tau, R)$, которую затем используем при получении оценок для интегралов A_{1k} и A_{1k}^s. Проинтегрируем K_1 один раз по частям, применим под интегралом формулу Маклорена для $\cos\lambda_k(r-\tau)$ и $\sin\lambda_k(r-\tau)$, приведем подобные члены. Получаем:

$$K_1(\lambda,\lambda_k,\tau,R) = \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_\tau^R \frac{\sin\lambda r\cos\{\lambda_k(r-\tau)\}}{r}dr = -\frac{1}{\lambda\lambda_k}\int\limits_\tau^R \frac{\cos\lambda_k(r-\tau)}{r}d\cos\lambda r =$$

$$= -\frac{1}{\lambda\lambda_k}\left[\frac{\cos\lambda r\cos\lambda_k(r-\tau)}{r}\Big|_\tau^R - \int\limits_\tau^R \cos\lambda r\left\{\frac{-\lambda_k\sin\lambda_k(r-\tau)}{r} - \frac{\cos\lambda_k(r-\tau)}{r^2}\right\}dr\right] =$$

$$= -\frac{1}{\lambda\lambda_k}\left[\frac{\cos\lambda R\cos\lambda_k(R-\tau)}{R} - \frac{\cos\lambda\tau}{\tau} - \int\limits_\tau^R \cos\lambda r\left\{\frac{-\lambda_k^2(r-\tau)}{r} - \frac{1-\frac{\lambda_k^2(r-\tau)^2}{2}}{r^2}\right\}dr\right] =$$

$$= -\frac{1}{\lambda\lambda_k}\left[\frac{\cos\lambda R\cos\lambda_k(R-\tau)}{R} - \frac{\cos\lambda\tau}{\tau} - \int\limits_\tau^R \cos\lambda r\left\{-\frac{\lambda_k^2}{2} - \frac{1}{r^2} + \frac{\lambda_k^2\tau^2}{2r^2}\right\}dr\right] =$$

$$= -\frac{1}{\lambda\lambda_k}\left[\frac{\cos\lambda R\cos\lambda_k(R-\tau)}{R} - \frac{\cos\lambda\tau}{\tau} + \frac{\lambda_k^2}{2}\int\limits_\tau^R \cos\lambda r dr + \left(1-\frac{\lambda_k^2\tau^2}{2}\right)\int\limits_\tau^R \frac{\cos\lambda r}{r^2}dr\right] =$$

$$= -\frac{1}{\lambda\lambda_k}\left[\frac{\cos\lambda R\cos\lambda_k(R-\tau)}{R} - \frac{\cos\lambda\tau}{\tau} + \frac{\lambda_k^2}{2\lambda}[\sin\lambda R - \sin\lambda\tau] + \left(1-\frac{\lambda_k^2\tau^2}{2}\right)\int\limits_\tau^R \frac{\cos\lambda r}{r^2}dr\right].$$

Так как $|\lambda_k| \le 1$ и все значения $|\sin z|$ и $|\cos z|$ при $Imz < C$ ограничены (мнимые части аргументов косинусов ограничены в силу того, что $|Im\lambda_k| \le c_1 \quad \forall k$), то первое и третье слагаемое в квадратных скобках имеют порядок соответственно $O(1)$ и $O(1/\lambda)$. Оставшийся интеграл проинтегрируем один раз по частям. Получаем:

$$K_1(\lambda,\lambda_k,\tau,R) = -\frac{1}{\lambda\lambda_k}\left[O(1) - \frac{\cos\lambda\tau}{\tau} + \left(\frac{\lambda_k^2\tau^2}{2}-1\right)\lambda\left\{\frac{\cos r}{r}\Big|_{\lambda\tau}^{\lambda R} + \int\limits_{\lambda\tau}^{\lambda R}\frac{\sin r}{r}dr\right\}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\lambda\lambda_k}\left[O(1) - \frac{\cos\lambda\tau}{\tau} + \left(\frac{\lambda_k^2\tau^2}{2}-1\right)\frac{\cos\lambda R}{R} - \frac{\lambda_k^2\tau}{2}\cos\lambda\tau + \frac{\cos\lambda\tau}{\tau} + \left(\frac{\lambda_k^2\tau^2}{2}-1\right)\lambda\int\limits_{\lambda\tau}^{\lambda R}\frac{\sin r}{r}dr\right] =$$

$$-\frac{1}{\lambda\lambda_k}\left[O(1) + \left(\frac{\lambda_k^2\tau^2}{2}-1\right)\lambda\int\limits_{\lambda\tau}^{\lambda R}\frac{\sin r}{r}dr\right].$$

Учтем теперь, что $\left|\int\limits_x^\infty \sin t/tdt\right| < 6(1+x)^{-1}, \quad \forall x \ge 0$ (см. [14]) и $\left(\frac{\lambda_k^2\tau^2}{2}-1\right) = O(1)$. Тогда

$$K_1(\lambda,\lambda_k,\tau,R) = -\frac{1}{\lambda\lambda_k}\left[O(1) + O\left(\frac{\lambda}{1+\lambda\tau}\right)\right] = O\left(\frac{1}{|\lambda_k|(1+\lambda\tau)}\right).$$

Посчитаем теперь A_{1k} и A^s_{1k}, $s>1$:

$$A_{1k}\equiv\int\limits_\alpha^\beta |K_1(\lambda,\lambda_k,\tau,R)|d\tau=O\left(\frac{1}{|\lambda_k|}\right)\int\limits_\alpha^\beta\frac{1}{1+\lambda\tau}d\tau=O\left(\frac{1}{\lambda|\lambda_k|}\right)\int\limits_{1+\lambda\alpha}^{1+\lambda\beta}\frac{1}{t}dt=$$

$$=O\left(\frac{1}{\lambda|\lambda_k|}\right)\ln\frac{1+\lambda\beta}{1+\lambda\alpha}=O\left(\frac{1}{\lambda|\lambda_k|}\right).$$

$$A^s_{1k}\equiv\left(\int\limits_\alpha^\beta |K_1(\lambda,\lambda_k,\tau,R)|^s d\tau\right)^{1/s}=O\left(\frac{1}{|\lambda_k|}\right)\left(\int\limits_\alpha^\beta\left\{\frac{1}{1+\lambda\tau}\right\}^s d\tau\right)^{1/s}=$$

$$=O\left(\frac{1}{|\lambda_k|}\right)\left(\frac{1}{\lambda}\int\limits_{1+\lambda\alpha}^{1+\lambda\beta}\frac{1}{t^s}dt\right)^{1/s}=O\left(\frac{1}{|\lambda_k|}\right)\left(\frac{1}{\lambda}\quad\frac{1}{-s+1}\left\{\frac{1}{(1+\lambda\beta)^{s-1}}-\frac{1}{(1+\lambda\alpha)^{s-1}}\right\}\right)^{1/s}=$$

$$=O\left(\frac{1}{|\lambda_k|}\right)\left[O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left\{O\left(\frac{1}{\lambda^{s-1}}\right)+O(1)\right\}\right]^{1/s}=O\left(\frac{1}{\lambda|\lambda_k|}\right).$$

2) Пусть $1\le|\lambda_k|\le\lambda/2$.

2а) Рассмотрим те λ_k (если они есть), для которых выполнено $|\lambda_k|>\alpha$, тогда

$$A_{1k}\equiv\int\limits_\alpha^\beta |K_1(\lambda,\lambda_k,\tau,R)|d\tau=\int\limits_\alpha^{1/|\lambda_k|}|K_1|\,d\tau+\int\limits_{1/|\lambda_k|}^\beta|K_1|\,d\tau\equiv A'_{1k}+A''_{1k}.$$

В A'_{1k} интеграл K_1 разбиваем на две части: $r\in[\tau,1/|\lambda_k|]$ и $r\in[1/|\lambda_k|,R]$; с первым из них работаем, как в случае 1), а во втором сделаем замену переменной $\xi=|\lambda_k|r$ и применим вторую формулу среднего — формулу Боннэ [13, т.1, с. 340] v. Получаем

$$A'_{1k}=\int\limits_\alpha^{1/|\lambda_k|}\left|\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_\tau^R\frac{\sin\lambda r\cos\lambda_k(r-\tau)}{r}dr\right|d\tau=$$

$$=\frac{1}{|\lambda_k|}\int\limits_\alpha^{1/|\lambda_k|}\left|-\frac{1}{\lambda}\int\limits_\tau^{1/|\lambda_k|}\frac{\cos\lambda_k(r-\tau)}{r}d\cos\lambda r+\int\limits_{1/|\lambda_k|}^R\frac{\sin\lambda r\cos\lambda_k(r-\tau)}{r}dr\right|d\tau=$$

$$=\frac{1}{|\lambda_k|}\int\limits_\alpha^{1/|\lambda_k|}\left|-\left.\frac{\cos\lambda r\cos\lambda_k(r-\tau)}{\lambda r}\right|_\tau^{1/|\lambda_k|}+\frac{1}{\lambda}\int\limits_\tau^{1/|\lambda_k|}\cos\lambda r\left[-\frac{\lambda_k\sin\lambda_k(r-\tau)}{r}-\frac{\cos\lambda_k(r-\tau)}{r^2}\right]dr+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{1/|\lambda_k|}^R\frac{\sin\lambda r\cos\lambda_k(r-\tau)}{r}dr\right|d\tau=\frac{1}{|\lambda_k|}\int\limits_\alpha^{1/|\lambda_k|}\left|-\frac{\cos\frac{\lambda}{|\lambda_k|}\cos\lambda_k(\frac{1}{|\lambda_k|}-\tau)}{\lambda}|\lambda_k|+\frac{\cos\lambda\tau}{\lambda\tau}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\lambda}\int\limits_\tau^{1/|\lambda_k|}\cos\lambda r\left[-\frac{\lambda_k^2(r-\tau)}{r}-\frac{1-(\lambda_k(r-\tau))^2/2}{r^2}\right]dr+\int\limits_1^{|\lambda_k|R}\frac{\sin\frac{\lambda}{|\lambda_k|}\xi\cos\left(\frac{\lambda_k\xi}{|\lambda_k|}-\lambda_k\tau\right)}{\xi}d\xi\right|d\tau=$$

$$=\frac{1}{|\lambda_k|}\int\limits_\alpha^{1/|\lambda_k|}\left|O\left(\frac{|\lambda_k|}{\lambda}\right)+\frac{\cos\lambda\tau}{\lambda\tau}+\frac{1}{\lambda}\int\limits_\tau^{1/|\lambda_k|}\cos\lambda r\left[-\frac{\lambda_k^2}{2}-\frac{1}{r^2}+\frac{\lambda_k^2\tau^2}{2r^2}\right]dr+\right.$$

$$\left.+\int\limits_1^{\xi_1}\sin\frac{\lambda}{|\lambda_k|}\xi\cos\left(\frac{\lambda_k\xi}{|\lambda_k|}-\lambda_k\tau\right)d\xi+\frac{1}{|\lambda_k|R}\int\limits_{\xi_1}^{|\lambda_k|R}\sin\frac{\lambda}{|\lambda_k|}\xi\cos\left(\frac{\lambda_k\xi}{|\lambda_k|}-\lambda_k\tau\right)d\xi\right|d\tau=$$

$$= \frac{1}{|\lambda_k|} \int\limits_{\alpha}^{1/|\lambda_k|} \left| O\left(\frac{|\lambda_k|}{\lambda}\right) + \frac{\cos\lambda\tau}{\lambda\tau} - \frac{\lambda_k^2}{2\lambda} \int\limits_{\tau}^{1/|\lambda_k|} \cos\lambda r dr + \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\lambda_k^2\tau^2}{2} - 1\right] \int\limits_{\tau}^{1/|\lambda_k|} \frac{\cos\lambda r}{r^2} dr + \int\limits_{1}^{\xi_1} + \int\limits_{\xi_1}^{|\lambda_k|R} \right| d\tau =$$

$$= \frac{1}{|\lambda_k|} \int\limits_{\alpha}^{1/|\lambda_k|} \left| O\left(\frac{|\lambda_k|}{\lambda}\right) + O\left(\frac{|\lambda_k|^2}{\lambda^2}\right) + \frac{\cos\lambda\tau}{\lambda\tau} - \left(\frac{\lambda_k^2\tau^2}{2} - 1\right)\left[\frac{\cos r}{r}\Big|_{\lambda\tau}^{\frac{\lambda}{|\lambda_k|}} + \int\limits_{\lambda\tau}^{\lambda/|\lambda_k|} \frac{\sin r}{r} dr\right] + \int\limits_{1}^{\xi_1} + \int\limits_{\xi_1}^{|\lambda_k|R} \right| d\tau =$$

$$= \frac{1}{|\lambda_k|} \int\limits_{\alpha}^{1/|\lambda_k|} \left| O\left(\frac{|\lambda_k|}{\lambda}\right) + O\left(\frac{|\lambda_k|^2}{\lambda}\right)\tau + O\left(\frac{|\lambda_k|^3}{\lambda}\right)\tau^2 + \left(1 - \frac{\lambda_k^2\tau^2}{2}\right) O\left(\frac{1}{1+\lambda\tau}\right) + \int\limits_{1}^{\xi_1} + \int\limits_{\xi_1}^{|\lambda_k|R} \right| d\tau.$$

Здесь мы использовали, как и в случае 1), оценку $\int\limits_{\lambda\tau}^{\lambda/|\lambda_k|} \frac{\sin r}{r} dr = O\left(\frac{1}{1+\lambda\tau}\right)$. Оценим два внутренних интеграла, обозначим их Q_1 и Q_2. Приведем оценки для первого интеграла, второй оценивается аналогично:

$$Q_1 = \int\limits_{1}^{\xi_1} \sin\frac{\lambda\xi}{|\lambda_k|} \cos\left(\frac{\lambda_k\xi}{|\lambda_k|} - \lambda_k\tau\right) d\xi = \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{\xi_1} \sin\left(\frac{\lambda+\lambda_k}{|\lambda_k|} - \lambda_k\tau\right) d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{\xi_1} \sin\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{|\lambda_k|} + \lambda_k\tau\right) d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{|\lambda_k|}{\lambda+\lambda_k}\right)\cos\left(\frac{\lambda+\lambda_k}{|\lambda_k|}\xi - \lambda_k\tau\right)\Big|_1^{\xi_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{|\lambda_k|}{\lambda-\lambda_k}\right)\cos\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{|\lambda_k|}\xi + \lambda_k\tau\right)\Big|_1^{\xi_1} =$$

$$= O\left(\frac{|\lambda_k|}{|\lambda+\lambda_k|}\right) + O\left(\frac{|\lambda_k|}{|\lambda-\lambda_k|}\right) = O\left(\frac{|\lambda_k|}{\lambda}\right).$$

Здесь мы использовали ограниченность всех подстановок и следующие оценки, справедливые при $1 \le |\lambda_k| \le \lambda/2$:

$$\frac{|\lambda_k|}{|\lambda-\lambda_k|} = O\left(\frac{|\lambda_k|}{\lambda}\right), \qquad \frac{|\lambda_k|}{|\lambda+\lambda_k|} = O\left(\frac{|\lambda_k|}{\lambda}\right).$$

Вернемся к A'_{1k}:

$$A'_{1k} = \frac{1}{|\lambda_k|} \int\limits_{\alpha}^{1/|\lambda_k|} \left| O\left(\frac{|\lambda_k|}{\lambda}\right) + O\left(\frac{|\lambda_k|^2}{\lambda}\right)\tau + O\left(\frac{|\lambda_k|^3}{\lambda}\right)\tau^2 + \left(1 - \frac{\lambda_k^2\tau^2}{2}\right) O\left(\frac{1}{1+\lambda\tau}\right) + \right| \le$$

$$\le O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \int\limits_{\alpha}^{1/|\lambda_k|} 1 d\tau + O\left(\frac{|\lambda_k|}{\lambda}\right) \int\limits_{\alpha}^{1/|\lambda_k|} \tau d\tau + O\left(\frac{|\lambda_k|^2}{\lambda}\right) \int\limits_{\alpha}^{1/|\lambda_k|} \tau^2 d\tau + O\left(\frac{1}{|\lambda_k|}\right) \int\limits_{\alpha}^{1/|\lambda_k|} \frac{1}{1+\lambda\tau} d\tau +$$

$$+ O(|\lambda_k|) \int\limits_{\alpha}^{1/|\lambda_k|} \frac{\tau^2}{1+\lambda\tau} d\tau \le O\left(\frac{1}{|\lambda_k|\lambda}\right) + O\left(\frac{1}{|\lambda_k|}\right) \int\limits_{\alpha}^{1/|\lambda_k|} \frac{1}{1+\lambda\tau} d\tau + O(|\lambda_k|) \int\limits_{\alpha}^{1/|\lambda_k|} \frac{\tau^2}{1+\lambda\tau} d\tau.$$

Проведем оценки для последних двух интегралов:

$$\int\limits_{\alpha}^{1/|\lambda_k|} \frac{1}{1+\lambda\tau} d\tau = \frac{1}{\lambda} \int\limits_{1+\lambda\alpha}^{1+\frac{\lambda}{|\lambda_k|}} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{\lambda} \ln\frac{|\lambda_k| + \lambda}{|\lambda_k|(1+\lambda\alpha)} = O\left(\frac{1}{\lambda}\ln\frac{\lambda}{|\lambda_k|}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda}\ln\lambda\right).$$

$$\int\limits_{\alpha}^{1/|\lambda_k|} \frac{\tau^2}{1+\lambda\tau} d\tau = \frac{1}{\lambda} \int\limits_{1+\lambda\alpha}^{1+\frac{\lambda}{|\lambda_k|}} \frac{(t-1)^2}{\lambda^2 t} dt = \frac{1}{\lambda^3} \int\limits_{1+\lambda\alpha}^{1+\frac{\lambda}{|\lambda_k|}} \left(t - 2 + \frac{1}{t}\right) dt =$$

$$=\frac{1}{\lambda^3}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda}{|\lambda_k|}\right)^2-\frac{1}{2}(1+\lambda\alpha)^2-2\left(1+\frac{\lambda}{|\lambda_k|}-1-\lambda\alpha\right)+\ln\frac{|\lambda_k|+\lambda}{|\lambda_k|}-\ln(1+\lambda\alpha)\right]=$$

$$=O\left(\frac{1}{\lambda|\lambda_k|^2}\right)+O\left(\frac{1}{\lambda^2|\lambda_k|}\right)+O\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda^3}\right)=O\left(\frac{1}{\lambda|\lambda_k|^2}\right).$$

Теперь можем написать итоговую оценку для $A_{1k}^{'}$:

$$A_{1k}^{'}=O\left(\frac{1}{\lambda|\lambda_k|}\right)+O\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda|\lambda_k|}\right)=O\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda|\lambda_k|}\right).$$

В интеграле $A_{1k}^{''}$ сделаем замену переменной $\xi=|\lambda_k|r$ и применим формулу Боннэ:

$$A_{1k}^{''}\equiv\int\limits_{1/|\lambda_k|}^{\beta}\left|\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{\tau}^{R}\frac{\sin\lambda r\cos\lambda_k(r-\tau)}{r}dr\right|d\tau=\int\limits_{1/|\lambda_k|}^{\beta}\left|\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{|\lambda_k|\tau}^{|\lambda_k|R}\frac{\sin\frac{\lambda}{|\lambda_k|}\xi\cos\left(\frac{\lambda_k}{|\lambda_k|}\xi-\lambda_k\tau\right)}{\xi}d\xi\right|d\tau=$$

$$=\int\limits_{1/|\lambda_k|}^{\beta}\left|\frac{1}{\lambda_k}\frac{1}{|\lambda_k|\tau}\int\limits_{|\lambda_k|\tau}^{\xi_1}\sin\frac{\lambda\xi}{|\lambda_k|}\cos\left(\frac{\lambda_k\xi}{|\lambda_k|}-\lambda_k\tau\right)d\xi+\frac{1}{\lambda_k}\frac{1}{|\lambda_k|R}\int\limits_{\xi_1}^{|\lambda_k|R}\sin\frac{\lambda\xi}{|\lambda_k|}\cos\left(\frac{\lambda_k\xi}{|\lambda_k|}-\lambda_k\tau\right)d\xi\right|d\tau.$$

Два внутренних интеграла оцениваются точно так же, как Q_1 и Q_2 на предыдущей странице. Получаем:

$$A_{1k}^{''}=\int\limits_{1/|\lambda_k|}^{\beta}\left|\frac{1}{\lambda_k|\lambda_k|\tau}O\left(\frac{|\lambda_k|}{\lambda}\right)+\frac{1}{\lambda_k|\lambda_k|R}O\left(\frac{|\lambda_k|}{\lambda}\right)\right|d\tau\leq O\left(\frac{1}{\lambda|\lambda_k|}\right)\int\limits_{1/|\lambda_k|}^{\beta}\left(\frac{1}{\tau}+1\right)d\tau=$$

$$=O\left(\frac{1}{\lambda|\lambda_k|}\right)[\ln\tau+\tau]|_{\frac{1}{|\lambda_k|}}^{\beta}=O\left(\frac{\ln|\lambda_k|}{\lambda|\lambda_k|}\right).$$

Теперь мы можем получить оценку для A_{1k}:

$$A_{1k}\equiv A_{1k}^{'}+A_{1k}^{''}=O\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda|\lambda_k|}\right)+O\left(\frac{\ln|\lambda_k|}{\lambda|\lambda_k|}\right)=O\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda|\lambda_k|}\right).$$

Проведем оценки для A_{1k}^{s}:

$$A_{1k}^{s}\equiv\left(\int\limits_{\alpha}^{\beta}|K_1(\lambda,\lambda_k,\tau,R)|^s d\tau\right)^{1/s}\leq\left(\int\limits_{\alpha}^{1/|\lambda_k|}|K_1|^s\,d\tau\right)^{1/s}+\left(\int\limits_{1/|\lambda_k|}^{\beta}|K_1|^s\,d\tau\right)^{1/s}$$

При оценках последних двух интегралов воспользуемся полученными выше соотношениями для $|K_1|$:

$$\left(\int\limits_{\alpha}^{1/|\lambda_k|}|K_1|^s\,d\tau\right)^{1/s}=$$

$$=\frac{1}{|\lambda_k|}\left[\int\limits_{\alpha}^{1/|\lambda_k|}\left|O\left(\frac{|\lambda_k|}{\lambda}\right)+O\left(\frac{|\lambda_k|^2}{\lambda}\right)\tau+O\left(\frac{|\lambda_k|^3}{\lambda}\right)\tau^2+O\left(\frac{1}{1+\lambda\tau}\right)\left(1-\frac{{\lambda_k}^2\tau^2}{2}\right)\right|^s d\tau\right]^{1/s}\leq$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda_k|}\left[\int\limits_{\alpha}^{1/|\lambda_k|}\left(O\left(\frac{|\lambda_k|^s}{\lambda^s}\right)+O\left(\frac{|\lambda_k|^{2s}}{\lambda^s}\right)\tau^s+O\left(\frac{|\lambda_k|^{3s}}{\lambda^s}\right)\tau^{2s}+\frac{O(1)}{(1+\lambda\tau)^s}+\frac{O\left(|\lambda_k|^{2s}\right)\tau^{2s}}{(1+\lambda\tau)^s}\right)d\tau\right]^{1/s}=$$

$$=\frac{1}{|\lambda_k|}\left[O\left(\frac{|\lambda_k|^s}{\lambda^s}\right)O\left(\frac{1}{|\lambda_k|}\right)+O\left(\frac{|\lambda_k|^{2s}}{\lambda^s}\right)O\left(\frac{1}{|\lambda_k|^{s+1}}\right)+O\left(\frac{|\lambda_k|^{3s}}{\lambda^s}\right)O\left(\frac{1}{|\lambda_k|^{2s+1}}\right)+\right.$$

$$\left.+O(1)\int\limits_{\alpha}^{1/|\lambda_k|}\frac{d\tau}{(1+\lambda\tau)^s}+O\left(|\lambda_k|^{2s}\right)\int\limits_{\alpha}^{1/|\lambda_k|}\frac{\tau^{2s}d\tau}{(1+\lambda\tau)^s}\right]^{1/s}.$$

Проведем отдельно оценку двух последних интегралов:

$$\int\limits_{\alpha}^{1/|\lambda_k|}\frac{d\tau}{(1+\lambda\tau)^s}=\frac{1}{\lambda}\int\limits_{1+\lambda\alpha}^{1+\lambda/|\lambda_k|}\frac{1}{t^s}dt=\frac{1}{\lambda(-s+1)}\left[\frac{1}{(1+\lambda/|\lambda_k|)^{s-1}}-\frac{1}{(1+\lambda\alpha)^{s-1}}\right]=$$

$$=O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left[O\left(\frac{|\lambda_k|^{s-1}}{\lambda^{s-1}}\right)+O\left(1\right)\right]=O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

$$\int\limits_{\alpha}^{1/|\lambda_k|}\frac{\tau^{2s}}{(1+\lambda\tau)^s}d\tau=\frac{1}{\lambda^{2s+1}}\int\limits_{1+\lambda\alpha}^{1+\lambda/|\lambda_k|}\frac{(t-1)^{2s}}{t^s}dt=\frac{1}{\lambda^{2s+1}}\int\limits_{1+\lambda\alpha}^{1+\lambda/|\lambda_k|}\left[t-2+\frac{1}{t}\right]^s dt\leq$$

$$\leq O\left(\frac{1}{\lambda^{2s+1}}\right)\int\limits_{1+\lambda\alpha}^{1+\lambda/|\lambda_k|}\left(t^s+1+\frac{1}{t^s}\right)dt=O\left(\frac{1}{\lambda^{2s+1}}\right)\left[\frac{1}{s+1}\left(1+\frac{\lambda}{|\lambda_k|}\right)^{s+1}-\frac{1}{s+1}\left(1+\lambda\alpha\right)^{s+1}+\right.$$

$$\left.1+\frac{\lambda}{|\lambda_k|}-1-\lambda\alpha+\frac{1}{-s+1}\left(\frac{1}{(1+\frac{\lambda}{|\lambda_k|})^{s-1}}-\frac{1}{(1+\lambda\alpha)^{s-1}}\right)\right]=$$

$$=O\left(\frac{1}{\lambda^{2s+1}}\right)\left(O\left(\frac{\lambda^{s+1}}{|\lambda_k|^{s+1}}\right)+O\left(\frac{\lambda}{|\lambda_k|}\right)+O\left(\frac{|\lambda_k|^{s-1}}{\lambda^{s-1}}\right)+O(1)\right)=O\left(\frac{1}{\lambda^s|\lambda_k|^{s+1}}\right).$$

Итак

$$\left(\int\limits_{\alpha}^{1/|\lambda_k|}|K_1|^s\,d\tau\right)^{1/s}=\frac{1}{|\lambda_k|}\left[O\left(\frac{|\lambda_k|^{s-1}}{\lambda^s}\right)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]^{1/s}=\frac{1}{|\lambda_k|}\left[O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]^{1/s}=O\left(\frac{1}{\lambda^{1/s}|\lambda_k|}\right).$$

Далее

$$\left(\int\limits_{1/|\lambda_k|}^{\beta}|K_1|^s\,d\tau\right)^{1/s}=$$

$$=\left(\int\limits_{1/|\lambda_k|}^{\beta}\left|\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{\tau}^{R}\frac{\sin\lambda r\cos\lambda_k(r-\tau)}{r}dr\right|^s d\tau\right)^{1/s}=\left(\int\limits_{1/|\lambda_k|}^{\beta}\left|O\left(\frac{1}{|\lambda_k|\lambda}\right)\frac{1}{\tau}+O\left(\frac{1}{|\lambda_k|\lambda}\right)\frac{1}{R}\right|^s d\tau\right)^{1/s}=$$

$$=O\left(\frac{1}{|\lambda_k|\lambda}\right)\left(\int\limits_{1/|\lambda_k|}^{\beta}\left|\frac{1}{\tau}+\frac{1}{R}\right|^s d\tau\right)^{1/s}\leq O\left(\frac{1}{|\lambda_k|\lambda}\right)\left(\int\limits_{1/|\lambda_k|}^{\beta}\left(\frac{1}{\tau^s}+\frac{1}{R^s}\right)d\tau\right)^{1/s}=$$

$$= O\left(\frac{1}{|\lambda_k|\lambda}\right)\left(\frac{1}{-s+1}\left[\frac{1}{\beta^{s-1}} - |\lambda_k|^{s-1}\right] + \left(\frac{1}{R}\right)^s\left[\beta - \frac{1}{|\lambda_k|}\right]\right)^{1/s} = O\left(\frac{1}{|\lambda_k|\lambda}\right) O\left(|\lambda_k|^{\frac{s-1}{s}}\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{\lambda|\lambda_k|^{1/s}}\right).$$

Возвращаемся к оценке A_{1k}^s:

$$A_{1k}^s \leq \left(\int\limits_{\alpha}^{1/|\lambda_k|} |K_1|^s\,d\tau\right)^{1/s} + \left(\int\limits_{1/|\lambda_k|}^{\beta} |K_1|^s\,d\tau\right)^{1/s} = O\left(\frac{1}{\lambda^{1/s}|\lambda_k|}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda|\lambda_k|^{1/s}}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda^{1/s}|\lambda_k|}\right).$$

Таким образом случай 2а) леммы полностью доказан.

2б) Пусть $|\lambda_k| \leq \alpha$. В интеграле K_1 делаем замену переменной $\xi = |\lambda_k|r$, применяем формулу Боннэ. Выкладки аналогичны выводу оценки для $A_{1k}^{''}$ из случая 2а). Получаем

$$A_{1k} = O\left(\frac{1}{\lambda|\lambda_k|}\right)\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{1}{\tau}+1\right)d\tau = O\left(\frac{\ln|\lambda_k|}{\lambda|\lambda_k|}\right).$$

$$A_{1k}^s = O\left(\frac{1}{|\lambda_k|\lambda}\right)\left(\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left|\frac{1}{\tau}+1\right|^s d\tau\right)^{1/s} = O\left(\frac{1}{\lambda|\lambda_k|^{1/s}}\right).$$

3) Пусть $|\lambda_k| \geq 3\lambda/2$.

3а) Сначала рассмотрим $\alpha < 1/\lambda$. Снова разбиваем интеграл A_{1k} на две части:

$$A_{1k} = \int\limits_{\alpha}^{1/\lambda}|K_1|\,d\tau + \int\limits_{1/\lambda}^{\beta}|K_1|\,d\tau \equiv A_{1k}^{'} + A_{1k}^{''}.$$

Введем также в рассмотрение следующие интегралы (их мы будем использовать при оценке A_{1k}^s):

$$A_{1k}^{s'} = \left(\int\limits_{\alpha}^{1/\lambda}|K_1|^s\,d\tau\right)^{1/s}, \qquad A_{1k}^{s''} = \left(\int\limits_{1/\lambda}^{\beta}|K_1|^s\,d\tau\right)^{1/s}.$$

В $A_{1k}^{'}$ разбиваем интеграл K_1 на две части: $r \in [\tau, 1/|\lambda_k|]$ и $r \in [1/|\lambda_k|, R]$. Первый из них интегрируем по частям и под знаком интеграла применяем формулу Маклорена. Во втором делаем замену переменной $\xi = \lambda r$ и применяем формулу Боннэ. Получаем

$$A_{1k}^{'} = \int\limits_{\alpha}^{1/\lambda}\left|\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{\tau}^{R}\frac{\sin\lambda r\cos\lambda_k(r-\tau)}{r}dr\right|d\tau =$$

$$= \frac{1}{|\lambda_k|}\int\limits_{\alpha}^{1/\lambda}\left|\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{\tau}^{1/\lambda}\frac{\sin\lambda r}{r}d\sin\lambda_k(r-\tau) + \int\limits_{1/\lambda}^{R}\frac{\sin\lambda r\cos\lambda_k(r-\tau)}{r}dr\right|d\tau =$$

$$= \frac{1}{|\lambda_k|}\int\limits_{\alpha}^{1/\lambda}\left|\left.\frac{\sin\lambda r\sin\lambda_k(r-\tau)}{\lambda_k r}\right|_{\tau}^{1/\lambda} - \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{\tau}^{1/\lambda}\sin\lambda_k(r-\tau)\left[\frac{\lambda\cos\lambda r}{r} - \frac{\sin\lambda r}{r^2}\right]dr + \right.$$

$$+\int\limits_1^{\lambda R}\frac{\sin\xi\cos\left(\frac{\lambda_k\xi}{\lambda}-\lambda_k\tau\right)}{\xi}d\xi\Bigg|d\tau=\frac{1}{|\lambda_k|}\int\limits_\alpha^{1/\lambda}\Bigg|\frac{\lambda\sin 1\sin\left(\frac{\lambda_k}{\lambda}-\lambda_k\tau\right)}{\lambda_k}-$$

$$-\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_\tau^{1/\lambda}\sin\lambda_k(r-\tau)\left[\frac{\lambda\left(1-\frac{(\lambda r)^2}{2}\right)}{r}-\frac{\lambda r}{r^2}\right]dr+\int\limits_1^{\xi_1}\sin\xi\cos\left(\frac{\lambda_k\xi}{\lambda}-\lambda_k\tau\right)d\xi+$$

$$+\frac{1}{\lambda R}\int\limits_{\xi_1}^{\lambda R}\sin\xi\cos\left(\frac{\lambda_k\xi}{\lambda}-\lambda_k\tau\right)d\xi\Bigg|d\tau=\frac{1}{|\lambda_k|}\int\limits_\alpha^{1/\lambda}\Bigg|O\left(\frac{\lambda}{|\lambda_k|}\right)-\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_\tau^{1/\lambda}\sin\lambda_k(r-\tau)\left[\frac{\lambda}{r}-\frac{\lambda^3 r}{2}-\frac{\lambda}{r}\right]dr+$$

$$+\int\limits_1^{\xi_1}+\int\limits_{\xi_1}^{\lambda R}\Bigg|d\tau=\frac{1}{|\lambda_k|}\int\limits_\alpha^{1/\lambda}\Bigg|O\left(\frac{\lambda}{|\lambda_k|}\right)+O\left(\frac{\lambda^3}{|\lambda_k|}\right)\int\limits_\tau^{1/\lambda}r\sin\lambda_k(r-\tau)dr+\int\limits_1^{\xi_1}+\int\limits_{\xi_1}^{\lambda R}\Bigg|d\tau.$$

Оценки для двух последних интегралов проводится по той же схеме, что и оценки для Q_1 и Q_2 из случая 2а). Приведем выкладки для первого из них:

$$\int\limits_1^{\xi_1}\sin\xi\cos\left(\frac{\lambda_k\xi}{\lambda}-\lambda_k\tau\right)d\xi=\frac{1}{2}\int\limits_1^{\xi_1}\sin\left(\frac{\lambda+\lambda_k}{\lambda}\xi-\lambda_k\tau\right)d\xi+\frac{1}{2}\int\limits_1^{\xi_1}\sin\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda}\xi+\lambda_k\tau\right)d\xi=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_k}\right)\cos\left(\frac{\lambda+\lambda_k}{\lambda}\xi-\lambda_k\tau\right)\Bigg|_1^{\xi_1}-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_k}\right)\cos\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda}\xi+\lambda_k\tau\right)\Bigg|_1^{\xi_1}=$$

$$=O\left(\frac{\lambda}{|\lambda+\lambda_k|}\right)+O\left(\frac{\lambda}{|\lambda-\lambda_k|}\right)=O\left(\frac{\lambda}{|\lambda_k|}\right).$$

Здесь мы использовали ограниченность всех подстановок (т.к. ограничены мнимые части аргументов функции косинус) и справедливые для всех $|\lambda_k|\geq 3\lambda/2$ неравенства:

$$\frac{\lambda}{|\lambda+\lambda_k|}=O\left(\frac{\lambda}{|\lambda_k|}\right),\qquad\frac{\lambda}{|\lambda-\lambda_k|}=O\left(\frac{\lambda}{|\lambda_k|}\right).$$

Посчитаем первый интеграл из оценки, полученной для A'_{1k}:

$$\int\limits_\tau^{1/\lambda}r\sin\lambda_k(r-\tau)dr=-\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_\tau^{1/\lambda}r\,d\cos\lambda_k(r-\tau)=-\frac{1}{\lambda_k}\left[r\cos\lambda_k(r-\tau)|_\tau^{1/\lambda}-\int\limits_\tau^{1/\lambda}\cos\lambda_k(r-\tau)dr\right]=$$

$$=-\frac{1}{\lambda_k}\left[\frac{\cos\left(\frac{\lambda_k}{\lambda}-\lambda_k\tau\right)}{\lambda}-\tau-\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^{\lambda_k(\frac{1}{\lambda}-\tau)}\cos y\,dy\right]=\frac{1}{\lambda_k}\left[O\left(\frac{1}{\lambda}\right)-\frac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k(r-\tau)|_\tau^{1/\lambda}\right]=$$

$$=O\left(\frac{1}{|\lambda_k|}\right)\left(O\left(\frac{1}{\lambda}\right)+O\left(\frac{1}{|\lambda_k|}\right)\right)=O\left(\frac{1}{\lambda|\lambda_k|}\right).$$

Теперь можем получить окончательную оценку для A'_{1k}

$$A'_{1k}=\frac{1}{|\lambda_k|}\int\limits_\alpha^{1/\lambda}\left|O\left(\frac{\lambda}{|\lambda_k|}\right)+O\left(\frac{\lambda^3}{|\lambda_k|}\right)O\left(\frac{1}{\lambda|\lambda_k|}\right)+O\left(\frac{\lambda}{|\lambda_k|}\right)+\frac{1}{\lambda R}O\left(\frac{\lambda}{|\lambda_k|}\right)\right|d\tau=$$

$$=O\left(\frac{\lambda}{|\lambda_k|^2}\right)O\left(\frac{1}{\lambda}\right)=O\left(\frac{1}{|\lambda_k|^2}\right).$$

Посчитаем также $A^{s'}_{1k}$:

$$A^{s'}_{1k}=\left(\int\limits_{\alpha}^{1/\lambda}|K_1|^s\,d\tau\right)^{1/s}=\frac{1}{|\lambda_k|}\left(\int\limits_{\alpha}^{1/\lambda}\left|O\left(\frac{\lambda}{|\lambda_k|}\right)\right|^s d\tau\right)^{1/s}=$$

$$=O\left(\frac{1}{|\lambda_k|}\right)\left[O\left(\frac{\lambda^{s-1}}{|\lambda_k|^s}\right)\right]^{1/s}=O\left(\frac{\lambda^{1-\frac{1}{s}}}{|\lambda_k|^2}\right).$$

В интеграле A''_{1k} сделаем замену переменной $\xi=\lambda r$ и применим формулу Боннэ:

$$A''_{1k}=\int\limits_{1/\lambda}^{\beta}\left|\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{\tau}^{R}\frac{\sin\lambda r\cos\lambda_k(r-\tau)}{r}dr\right|d\tau=\int\limits_{1/\lambda}^{\beta}\left|\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{\lambda\tau}^{\lambda R}\frac{\sin\xi\cos\left(\frac{\lambda_k\xi}{\lambda}-\lambda_k\tau\right)}{\xi}d\xi\right|d\tau=$$

$$=\int\limits_{1/\lambda}^{\beta}\left|\frac{1}{\lambda_k}\frac{1}{\lambda\tau}\int\limits_{\lambda\tau}^{\xi_1}\sin\xi\cos\left(\frac{\lambda_k\xi}{\lambda}-\lambda_k\tau\right)d\xi+\frac{1}{\lambda_k}\frac{1}{\lambda R}\int\limits_{\xi_1}^{\lambda R}\sin\xi\cos\left(\frac{\lambda_k\xi}{\lambda}-\lambda_k\tau\right)d\xi\right|d\tau=$$

$$=\int\limits_{1/\lambda}^{\beta}\left|O\left(\frac{1}{\lambda|\lambda_k|}\right)O\left(\frac{\lambda}{|\lambda_k|}\right)\frac{1}{\tau}+O\left(\frac{1}{\lambda|\lambda_k|}\right)O\left(\frac{\lambda}{|\lambda_k|}\right)\right|d\tau=O\left(\frac{1}{|\lambda_k|^2}\right)\int\limits_{1/\lambda}^{\beta}\left(1+\frac{1}{\tau}\right)d\tau=$$

$$=O\left(\frac{1}{|\lambda_k|^2}\right)+O\left(\frac{\ln\lambda}{|\lambda_k|^2}\right)=O\left(\frac{\ln\lambda}{|\lambda_k|^2}\right).$$

Получим оценку для $A^{s''}_{1k}$:

$$A^{s''}_{1k}=\left(\int\limits_{1/\lambda}^{\beta}|K_1|^s\,d\tau\right)^{1/s}=\left(\int\limits_{1/\lambda}^{\beta}\left\{O\left(\frac{1}{|\lambda_k|^2}\right)\left(\frac{1}{\tau}+1\right)\right\}^s d\tau\right)^{1/s}=$$

$$=O\left(\frac{1}{|\lambda_k|^2}\right)\left(\int\limits_{1/\lambda}^{\beta}\left(\frac{1}{\tau}+1\right)^s d\tau\right)^{1/s}\leq O\left(\frac{1}{|\lambda_k|^2}\right)\left(\int\limits_{1/\lambda}^{\beta}\left(\frac{1}{\tau^s}+1\right)d\tau\right)^{1/s}=$$

$$=O\left(\frac{1}{|\lambda_k|^2}\right)\left(\beta-\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{-s+1}\left[\beta^{-s+1}-\lambda^{s-1}\right]\right)^{1/s}=O\left(\frac{1}{|\lambda_k|^2}\right)\left(O(1)+O\left(\lambda^{s-1}\right)\right)^{1/s}=O\left(\frac{\lambda^{1-\frac{1}{s}}}{|\lambda_k|^2}\right).$$

Теперь можем посчитать A_{1k} и A^s_{1k}

$$A_{1k}\equiv A'_{1k}+A''_{1k}=O\left(\frac{1}{|\lambda_k|^2}\right)+O\left(\frac{\ln\lambda}{|\lambda_k|^2}\right)=O\left(\frac{\ln\lambda}{|\lambda_k|^2}\right),$$

$$A^s_{1k}\equiv\left(\int\limits_{\alpha}^{\beta}|K_1(\lambda,\lambda_k,\tau,R)|^s d\tau\right)^{1/s}\leq\left(\int\limits_{\alpha}^{1/\lambda}|K_1|^s\,d\tau\right)^{1/s}+\left(\int\limits_{1/\lambda}^{\beta}|K_1|^s\,d\tau\right)^{1/s}=$$

$$=A^{s'}_{1k}+A^{s''}_{1k}=O\left(\frac{\lambda^{1-\frac{1}{s}}}{|\lambda_k|^2}\right)+O\left(\frac{\lambda^{1-\frac{1}{s}}}{|\lambda_k|^2}\right)=O\left(\frac{\lambda^{1-\frac{1}{s}}}{|\lambda_k|^2}\right).$$

Таким образом случай 3a) леммы полностью доказан. smallskip

3б) Пусть $\alpha \geq 1/\lambda$. В интеграле K_1 делаем замену переменной $\xi = \lambda r$, применяем формулу Боннэ. Выкладки аналогичны выводу оценки для A''_{1k} из случая 3а). Получаем

$$A_{1k} = O\left(\frac{1}{|\lambda_k|^2}\right)\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{1}{\tau}+1\right)d\tau = O\left(\frac{1}{|\lambda_k|^2}\right)(\beta-\alpha+\ln\beta-\ln\alpha) = O\left(\frac{\ln\lambda}{|\lambda_k|^2}\right),$$

$$A^s_{1k} = \left(\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left\{O\left(\frac{1}{|\lambda_k|^2}\right)\left(\frac{1}{\tau}+1\right)\right\}^s d\tau\right)^{1/s} = O\left(\frac{1}{|\lambda_k|^2}\right)\left(\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{1}{\tau}+1\right)^s d\tau\right)^{1/s} \leq$$

$$\leq O\left(\frac{1}{|\lambda_k|^2}\right)\left(\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{1}{\tau^s}+1\right)d\tau\right)^{1/s} = O\left(\frac{1}{|\lambda_k|^2}\right)\left(\beta-\alpha+\frac{1}{-s+1}\left[\beta^{-s+1}-\alpha^{-s+1}\right]\right)^{1/s} =$$

$$= O\left(\frac{1}{|\lambda_k|^2}\right)\left(O(1)+O\left(\lambda^{s-1}\right)\right)^{1/s} = O\left(\frac{\lambda^{1-\frac{1}{s}}}{|\lambda_k|^2}\right).$$

4) Пусть $|\lambda - |\lambda_k|| \leq 2/R_0$.

4а) Рассмотрим $\alpha < 1/\lambda$. Как в случае 3а), разбиваем интеграл A_{1k} на A'_{1k} и A''_{1k}, определяем интегралы $A^{s'}_{1k}$ и $A^{s''}_{1k}$. В A'_{1k} разбиваем интеграл K_1 на две части: $r \in [\tau, 1/|\lambda_k|]$ и $r \in [1/|\lambda_k|, R]$. Первый из них интегрируем по частями и под знаком интеграла применяем формулу Маклорена. Во втором делаем замену переменной $\xi = \lambda r$. Получаем

$$A'_{1k} = \int\limits_{\alpha}^{1/\lambda}\left|\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{\tau}^{R}\frac{\sin\lambda r\cos\lambda_k(r-\tau)}{r}dr\right|d\tau =$$

$$= \frac{1}{|\lambda_k|}\int\limits_{\alpha}^{1/\lambda}\left|\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{\tau}^{1/\lambda}\frac{\sin\lambda r}{r}d\sin\lambda_k(r-\tau) + \int\limits_{1/\lambda}^{R}\frac{\sin\lambda r\cos\lambda_k(r-\tau)}{r}dr\right|d\tau =$$

$$= \frac{1}{|\lambda_k|}\int\limits_{\alpha}^{1/\lambda}\left|\frac{\sin\lambda r\sin\lambda_k(r-\tau)}{\lambda_k r}\right|_{\tau}^{1/\lambda} - \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{\tau}^{1/\lambda}\sin\lambda_k(r-\tau)\frac{\lambda r\cos\lambda r-\sin\lambda r}{r^2}dr + \int\limits_{1}^{\lambda R}\frac{\sin\xi\cos\lambda_k(\frac{\xi}{\lambda}-\tau)}{\xi}d\xi\left|d\tau.\right.$$

Для подстановки и первого внутреннего интеграла справедливы оценки, полученные в случае 3а). Будем учитывать, что $O\left(|\lambda_k|^{-1}\right) = O\left(\lambda^{-1}\right)$. Заметим, что нельзя применить формулу среднего для оценки второго внутреннего интеграла, так как в этом случае при дальнейших преобразованиях появятся коэффициенты $(\lambda_k \pm \lambda)^{-1}$). Вместо этого оценим максимум модуля числителя дроби под интегралом ($|\sin\xi\cos(\frac{\lambda_k\xi}{\lambda} - \lambda_k\tau)| \leq 1$). Итак имеем:

$$A'_{1k} = \frac{1}{|\lambda_k|}\int\limits_{\alpha}^{1/\lambda}\left|O\left(\frac{\lambda}{|\lambda_k|}\right)+O\left(\frac{\lambda^3}{|\lambda_k|}\right)O\left(\frac{1}{\lambda|\lambda_k|}\right)+\int\limits_{1}^{\lambda R}\frac{\sin\xi\cos\lambda_k(\frac{\xi}{\lambda}-\tau)}{\xi}d\xi\right|d\tau \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda_k|}\int\limits_{\alpha}^{1/\lambda}\left|O(1)+\int\limits_{1}^{\lambda R}\frac{1}{\xi}d\xi\right|d\tau = \frac{1}{|\lambda_k|}\int\limits_{\alpha}^{1/\lambda}|O(1)+O(\ln\lambda)|\,d\tau = O\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda^2}\right).$$

Теперь посчитаем $A^{s'}_{1k}$:

$$A_{1k}^{s'} = \left(\int\limits_{\alpha}^{1/\lambda} |K_1|^s \, d\tau \right)^{1/s} = \frac{1}{|\lambda_k|} \left(\int\limits_{\alpha}^{1/\lambda} |O(\ln \lambda)|^s \, d\tau \right)^{1/s} = O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda^{1+1/s}} \right).$$

В интеграле A_{1k}'' сделаем замену переменной $\xi = \lambda r$ и оценим максимум модуля числителя дроби под интегралом:

$$A_{1k}'' = \int\limits_{1/\lambda}^{\beta} \left| \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_{\tau}^{R} \frac{\sin \lambda r \cos \lambda_k (r-\tau)}{r} dr \right| d\tau = \int\limits_{1/\lambda}^{\beta} \left| \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_{\lambda\tau}^{\lambda R} \frac{\sin \xi \cos\left(\frac{\lambda_k \xi}{\lambda} - \lambda_k \tau \right)}{\xi} d\xi \right| d\tau \leq$$

$$\leq \int\limits_{1/\lambda}^{\beta} \left| \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_{\lambda\tau}^{\lambda R} \frac{1}{\xi} d\xi \right| d\tau = O\left(\frac{1}{\lambda} \right) \int\limits_{1/(\lambda R)}^{\beta/R} |\ln \tau| \, d\tau.$$

Если $\frac{\beta}{R} \leq 1$ имеем:

$$A_{1k}'' = O\left(\frac{1}{\lambda} \right) \int\limits_{1/(\lambda R)}^{\beta/R} |\ln \tau| \, d\tau = O\left(\frac{1}{\lambda} \right) \left| \int\limits_{1/(\lambda R)}^{\beta/R} \ln \tau d\tau \right| = O\left(\frac{1}{\lambda} \right) \left| \frac{\beta}{R} \ln \frac{\beta}{R} - \frac{\beta}{R} - \frac{1}{\lambda R} \ln \frac{1}{\lambda R} + \frac{1}{\lambda R} \right| \leq$$

$$\leq O\left(\frac{1}{\lambda} \right) \left| O(1) + O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda} \right) + O\left(\frac{1}{\lambda} \right) \right| = O\left(\frac{1}{\lambda} \right).$$

Если $\frac{\beta}{R} > 1$ имеем:

$$A_{1k}'' = O\left(\frac{1}{\lambda} \right) \int\limits_{1/(\lambda R)}^{\beta/R} |\ln \tau| \, d\tau = O\left(\frac{1}{\lambda} \right) \left(\int\limits_{1/(\lambda R)}^{1} |\ln \tau| \, d\tau + \int\limits_{1}^{\beta/R} |\ln \tau| \, d\tau \right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{\lambda} \right) \left(\left| \int\limits_{1/(\lambda R)}^{1} \ln \tau d\tau \right| + \int\limits_{1}^{\beta/R} \ln \tau d\tau \right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{\lambda} \right) \left(\left| -1 - \frac{1}{\lambda R} \ln \frac{1}{\lambda R} + \frac{1}{\lambda R} \right| + \frac{\beta}{R} \ln \frac{\beta}{R} - \frac{\beta}{R} + 1 \right) = O\left(\frac{1}{\lambda} \right).$$

Итак, $A_{1k}'' = O\left(\frac{1}{\lambda} \right)$. Посчитаем $A_{1k}^{s''}$ (пусть $\frac{\beta}{R} \leq 1$, для $\frac{\beta}{R} > 1$ рассуждения аналогичные):

$$A_{1k}^{s''} = \left(\int\limits_{1/\lambda}^{\beta} |K_1|^s \, d\tau \right)^{1/s} = O\left(\frac{1}{\lambda} \right) \left(\int\limits_{1/(\lambda R)}^{\beta/R} |\ln \tau|^s \, d\tau \right)^{1/s}.$$

Разобьем отрезок $[1/(\lambda R), \beta/R]$ на две области Ω_1 и Ω_2, такие что $\ln \tau \leq 1$ при $\tau \in \Omega_1$ и $\ln \tau > 1$ при $\tau \in \Omega_2$. Имеем

$$A_{1k}^{s''} = O\left(\frac{1}{\lambda} \right) \left(\int\limits_{1/(\lambda R)}^{\beta/R} |\ln \tau|^s \, d\tau \right)^{1/s} = O\left(\frac{1}{\lambda} \right) \left(\int_{\Omega_1} |\ln \tau|^s \, d\tau + \int_{\Omega_2} |\ln \tau|^s \, d\tau \right)^{1/s}.$$

Оценим отдельно последние два интеграла.

$$\int_{\Omega_1} |\ln\tau|^s\,d\tau \le \int_{\Omega_1} |1|^s\,d\tau = O\,(1)\,.$$

Введем в рассмотрение наименьшее целое, не превосходящее s (напомним $s>1$): $k=[s]+1\ge 2$. Будем использовать легко доказываемое по индукции равенство:

$$\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - nx(\ln x)^{n-1} + n(n-1)(\ln x)^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} n! x\ln x + (-1)^n n! x =$$

$$= x\sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^{n-l} n!}{l!}(\ln x)^l, \quad \forall n\in Z.$$

Итак, оценим второй интеграл. Для достаточно больших λ справедливо

$$\int_{\Omega_2} |\ln\tau|^s\,d\tau \le \int\limits_{1/(\lambda R)}^{\beta/R} |\ln\tau|^s\,d\tau \le \int\limits_{1/(\lambda R)}^{\beta/R} |\ln\tau|^k\,d\tau = \left|\int\limits_{1/(\lambda R)}^{\beta/R} (\ln\tau)^k d\tau\right| =$$

$$= \left|\left(\tau\sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^{k-l}k!}{l!}(\ln\tau)^l\right)\Bigg|_{1/(\lambda R)}^{\beta/R}\right| \le \left|\frac{\beta}{R}\sum_{l=0}^{k}\frac{(-1)^{k-l}k!}{l!}(\ln\frac{\beta}{R})^l\right| + \left|\frac{1}{(\lambda R)}\sum_{l=0}^{k}\frac{(-1)^{k-l}k!}{l!}(\ln\frac{1}{(\lambda R)})^l\right| \le$$

$$\le O(1) + O\left(\frac{(\ln\lambda)^k}{\lambda}\right) = O(1).$$

Таким образом

$$A_{1k}^{s''} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(\int_{\Omega_1}|\ln\tau|^s\,d\tau + \int_{\Omega_2}|\ln\tau|^s\,d\tau\right)^{1/s} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)(O(1)+O(1))^{1/s} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Теперь мы можем написать оценки для A_{1k} и A_{1k}^s.

$$A_{1k} = A_{1k}^{'} + A_{1k}^{''} = O\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda^2}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$A_{1k}^s \le A_{1k}^{s'} + A_{1k}^{s''} = O\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda^{1+1/s}}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

4б) Пусть $\alpha\ge 1/\lambda$. В интеграле K_1 делаем замену переменной $\xi=\lambda r$. Выкладки аналогичны выводу оценки для $A_{1k}^{''}$ из случая 4а). Получаем

$$A_{1k} = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left|\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{\tau}^{R}\frac{\sin\lambda r\cos\lambda_k(r-\tau)}{r}dr\right|d\tau = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\int\limits_{\alpha/R}^{\beta/R}|\ln\tau|\,d\tau = O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$A_{1k}^s = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(\int\limits_{\alpha/R}^{\beta/R}|\ln\tau|^s\,d\tau\right)^{1/s} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Случай 4) полностью доказан.

5) Пусть $2/R_0 \le |\lambda - |\lambda_k|| \le \lambda/2$.

5а) Рассмотрим $\alpha < 1/\lambda$. Как и в случае 3), разбиваем интеграл A_{1k} на $A^{'}_{1k}$ и $A^{''}_{1k}$, определяем интегралы $A^{s'}_{1k}$ и $A^{s''}_{1k}$. . В $A^{'}_{1k}$ разбиваем интеграл K_1 на две части: $r \in [\tau, 1/|\lambda_k|]$ и $r \in [1/|\lambda_k|, R]$. Будем учитывать, что $O\left(\lambda^{-1}\right) = O\left(|\lambda_k|^{-1}\right)$

$$A^{'}_{1k} = \int\limits_{\alpha}^{1/\lambda} \left| \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_{\tau}^{R} \frac{\sin \lambda r \cos \lambda_k (r-\tau)}{r} dr \right| d\tau \le$$

$$\le \frac{1}{|\lambda_k|} \int\limits_{\alpha}^{1/\lambda} \left| \int\limits_{\tau}^{1/\lambda} \frac{\sin \lambda r \cos \lambda_k (r-\tau)}{r} dr \right| d\tau + \frac{1}{|\lambda_k|} \int\limits_{\alpha}^{1/\lambda} \left| \int\limits_{1/\lambda}^{R} \frac{\sin \lambda r \cos \lambda_k (r-\tau)}{r} dr \right| d\tau.$$

Первый интеграл оценивается так же, как и в случае 3а), и для него справедлива оценка $O(\lambda^{-2})$. Второй интеграл, обозначим его S, исследуем отдельно. Заменяя в S переменную $\xi = \lambda r$ и использую формулу $\sin x \cos y = 1/2(\sin(x+y) + \sin(x-y))$ получаем

$$S = \frac{1}{2|\lambda_k|} \int\limits_{\alpha}^{1/\lambda} \left| \int\limits_{1}^{\lambda R} \sin\left(\frac{\lambda+\lambda_k}{\lambda}\xi - \lambda_k \tau\right) \frac{1}{\xi} d\xi + \int\limits_{1}^{\lambda R} \sin\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda}\xi + \lambda_k \tau\right) \frac{1}{\xi} d\xi \right| d\tau.$$

В первом внутреннем интеграле сделаем замену переменной $\rho = \lambda^{-1}|\lambda + |\lambda_k||\xi$, во втором $\rho = \lambda^{-1}|\lambda - |\lambda_k||\xi$:

$$S = \frac{1}{2|\lambda_k|} \int\limits_{\alpha}^{1/\lambda} \left| \int\limits_{\lambda^{-1}|\lambda+|\lambda_k||}^{R|\lambda+|\lambda_k||} \sin\left(\frac{\lambda+\lambda_k}{|\lambda+|\lambda_k||}\rho - \lambda_k \tau\right) \frac{1}{\rho} d\rho + \int\limits_{\lambda^{-1}|\lambda-|\lambda_k||}^{R|\lambda-|\lambda_k||} \sin\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{|\lambda-|\lambda_k||}\rho + \lambda_k \tau\right) \frac{1}{\rho} d\rho \right| d\tau.$$

Заметим, что $|\lambda - |\lambda_k||R \ge 2R/R_0 \ge 1$, так как по определению $R \ge R_0/2$. Разобьем второй внутренний интеграл на два: $\rho \in [\lambda^{-1}|\lambda - |\lambda_k||, 1]$ и $\rho \in [1, R|\lambda - |\lambda_k||]$ и после этого перейдем от модуля суммы интегралов к сумме модулей:

$$S \le \frac{1}{2|\lambda_k|} \int\limits_{\alpha}^{1/\lambda} \left| \int\limits_{\lambda^{-1}|\lambda+|\lambda_k||}^{R|\lambda+|\lambda_k||} \sin\left(\frac{\lambda+\lambda_k}{|\lambda+|\lambda_k||}\rho - \lambda_k \tau\right) \frac{1}{\rho} d\rho \right| d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2|\lambda_k|} \int\limits_{\alpha}^{1/\lambda} \left| \int\limits_{\lambda^{-1}|\lambda-|\lambda_k||}^{1} \sin\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{|\lambda-|\lambda_k||}\rho + \lambda_k \tau\right) \frac{1}{\rho} d\rho \right| d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2|\lambda_k|} \int\limits_{\alpha}^{1/\lambda} \left| \int\limits_{1}^{R|\lambda-|\lambda_k||} \sin\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{|\lambda-|\lambda_k||}\rho + \lambda_k \tau\right) \frac{1}{\rho} d\rho \right| d\tau$$

Обозначим последние три интеграла соответственно I_1, I_2 и I_3. В интеграле I_2 учтем ограниченность синуса (так как ограничена мнимая часть его аргумента). Имеем для I_2

$$I_2 \le \frac{1}{2|\lambda_k|} \int\limits_{\alpha}^{1/\lambda} \int\limits_{\lambda^{-1}|\lambda-|\lambda_k||}^{1} \frac{1}{\rho} d\rho = O\left(\lambda^{-2} \ln \frac{\lambda}{|\lambda - |\lambda_k||}\right).$$

Интегралы I_1 и I_3 проинтегрируем по частям:

$$I_1=\frac{1}{2|\lambda_k|}\int\limits_{\alpha}^{1/\lambda}\left|-\frac{|\lambda+|\lambda_k||}{\lambda+|\lambda_k|}\int\limits_{\lambda^{-1}|\lambda+|\lambda_k||}^{R|\lambda+|\lambda_k||}\frac{1}{\rho}d\cos\left(\frac{\lambda+\lambda_k}{|\lambda+|\lambda_k||}\rho-\lambda_k\tau\right)\right|d\tau=$$

$$=\frac{1}{2|\lambda_k|}\int\limits_{\alpha}^{1/\lambda}\left|-\frac{|\lambda+|\lambda_k||}{\lambda+|\lambda_k|}\left[\frac{1}{\rho}\cos\left(\frac{\lambda+\lambda_k}{|\lambda+|\lambda_k||}\rho-\lambda_k\tau\right)\Big|_{\lambda^{-1}|\lambda+|\lambda_k||}^{R|\lambda+|\lambda_k||}+\int\limits_{\lambda^{-1}|\lambda+|\lambda_k||}^{R|\lambda+|\lambda_k||}\frac{1}{\rho^2}\cos\left(\frac{\lambda+\lambda_k}{|\lambda+|\lambda_k||}\rho-\lambda_k\tau\right)d\rho\right]\right|d\tau,$$

$$I_3=\frac{1}{2|\lambda_k|}\int\limits_{\alpha}^{1/\lambda}\left|-\frac{|\lambda-|\lambda_k||}{\lambda-|\lambda_k|}\int\limits_{1}^{R|\lambda-|\lambda_k||}\frac{1}{\rho}d\cos\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{|\lambda-|\lambda_k||}\rho+\lambda_k\tau\right)\right|d\tau=$$

$$=\frac{1}{2|\lambda_k|}\int\limits_{\alpha}^{1/\lambda}\left|-\frac{|\lambda-|\lambda_k||}{\lambda-|\lambda_k|}\left[\frac{1}{\rho}\cos\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{|\lambda-|\lambda_k||}\rho+\lambda_k\tau\right)\Big|_{1}^{R|\lambda-|\lambda_k||}+\int\limits_{1}^{R|\lambda-|\lambda_k||}\frac{1}{\rho^2}\cos\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{|\lambda-|\lambda_k||}\rho+\lambda_k\tau\right)d\rho\right]\right|d\tau.$$

Заметим, что подстановки в обоих интегралах I_1 и I_3 есть $O(1)$. Действительно, значения косинусов ограничены в силу ограниченности мнимых частей их аргументов. Для подстановок функции $1/\rho$ справедливы неравенства:

$$\frac{1}{R|\lambda\pm|\lambda_k||}\le 1,\qquad \frac{\lambda}{\lambda+|\lambda_k|}\le 1.$$

Внутренние интегралы в I_1 и I_3 мажорируются интегралом $\int\limits_1^\infty 1/\rho^2 d\rho\le const$. А для внешних коэффициентов справедливы оценки

$$\frac{|\lambda-|\lambda_k||}{|\lambda-\lambda_k|}\le 1,\qquad \frac{\lambda+|\lambda_k|}{|\lambda+\lambda_k|}=\frac{\lambda+\sqrt{(Re\lambda_k)^2+(Im\lambda_k)^2}}{\sqrt{(\lambda+Re\lambda_k)^2+(Im\lambda_k)^2}}\le 2.$$

Таким образом

$$I_1=I_3=\frac{1}{2|\lambda_k|}\int\limits_{\alpha}^{1/\lambda}O(1)d\tau=O\left(\lambda^{-2}\right).$$

Теперь можем написать оценки для S, A'_{1k} и $A^{s'}_{1k}$:

$$S\le I_1+I_2+I_3=O\left(\lambda^{-2}\ln\frac{\lambda}{|\lambda-|\lambda_k||}\right),\qquad A'_{1k}\le O(\lambda^{-2})+S=O\left(\lambda^{-2}\ln\frac{\lambda}{|\lambda-|\lambda_k||}\right).$$

$$A^{s'}_{1k}=\frac{1}{2|\lambda_k|}\left(\int\limits_{\alpha}^{1/\lambda}\left|\ln\frac{\lambda}{|\lambda-|\lambda_k||}\right|^s d\tau\right)^{1/s}=O\left(\frac{1}{\lambda^{1+1/s}}\ln\frac{\lambda}{|\lambda-|\lambda_k||}\right).$$

В интеграле A''_{1k} делаем замену переменной $\xi=\lambda r$, и такие же замены через ρ, что и в A'_{1k}. Получаем

$$A''_{1k}=\int\limits_{1/\lambda}^{\beta}\left|\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{\tau}^{R}\frac{\sin\lambda r\cos\lambda_k(r-\tau)}{r}dr\right|d\tau=\int\limits_{1/\lambda}^{\beta}\left|\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{\lambda\tau}^{\lambda R}\frac{\sin\xi\cos\left(\frac{\lambda_k\xi}{\lambda}-\lambda_k\tau\right)}{\xi}d\xi\right|d\tau=$$

$$= \frac{1}{2|\lambda_k|}\int\limits_{1/\lambda}^{\beta}\left|\int\limits_{\lambda\tau}^{\lambda R}\sin\left(\frac{\lambda+\lambda_k}{\lambda}\xi-\lambda_k\tau\right)\frac{1}{\xi}d\xi+\int\limits_{\lambda\tau}^{\lambda R}\sin\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda}\xi+\lambda_k\tau\right)\frac{1}{\xi}d\xi\right|d\tau=$$

$$= \frac{1}{2|\lambda_k|}\int\limits_{1/\lambda}^{\beta}\left|\int\limits_{\tau|\lambda+|\lambda_k||}^{R|\lambda+|\lambda_k||}\sin\left(\frac{\lambda+\lambda_k}{|\lambda+|\lambda_k||}\rho-\lambda_k\tau\right)\frac{1}{\rho}d\rho+\int\limits_{\tau|\lambda-|\lambda_k||}^{1}\sin\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{|\lambda-|\lambda_k||}\rho+\lambda_k\tau\right)\frac{1}{\rho}d\rho+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{1}^{R|\lambda-|\lambda_k||}\sin\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{|\lambda-|\lambda_k||}\rho+\lambda_k\tau\right)\frac{1}{\rho}d\rho\right|d\tau.$$

Перейдем от модуля суммы интегралов к сумме их модулей, обозначим получившиеся повторные интегралы через I_1, I_2 и I_3. Для оценки каждого из этих интегралов применим формулу среднего Боннэ. Для I_2 имеем

$$I_2=\frac{1}{2|\lambda_k|}\int\limits_{1/\lambda}^{\beta}\left|\int\limits_{\tau|\lambda-|\lambda_k||}^{1}\sin\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{|\lambda-|\lambda_k||}\rho+\lambda_k\tau\right)\frac{1}{\rho}d\rho\right|d\tau=$$

$$=\frac{1}{2|\lambda_k|}\int\limits_{1/\lambda}^{\beta}\left|\frac{1}{\tau|\lambda-|\lambda_k||}\int\limits_{\tau|\lambda-|\lambda_k||}^{\rho_1}\sin\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{|\lambda-|\lambda_k||}\rho+\lambda_k\tau\right)d\rho+\int\limits_{\rho_1}^{1}\sin\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{|\lambda-|\lambda_k||}\rho+\lambda_k\tau\right)d\rho\right|d\tau.$$

Первый внутренний интеграл оценим через $O(1)$, второй посчитаем точно:

$$I_2=\frac{1}{2|\lambda_k|}\int\limits_{1/\lambda}^{\beta}\left|\frac{1}{\tau|\lambda-|\lambda_k||}O(1)-\frac{|\lambda-|\lambda_k||}{\lambda-\lambda_k}\cos\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{|\lambda-|\lambda_k||}\rho+\lambda_k\tau\right)\Big|_{\rho_1}^{1}\right|d\tau\le$$

$$\le O\left(\frac{1}{\lambda|\lambda-|\lambda_k||}\right)\int\limits_{1/\lambda}^{\beta}\frac{1}{\tau}d\tau+O\left(\frac{1}{|\lambda_k|}\right)\int\limits_{1/\lambda}^{\beta}\cos\left(\lambda_k\tau+C_1\right)d\tau+O\left(\frac{1}{|\lambda_k|}\right)\int\limits_{1/\lambda}^{\beta}\cos\left(\lambda_k\tau+C_2\right)d\tau=$$

$$=O\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda|\lambda-|\lambda_k||}\right)+O\left(\frac{1}{|\lambda_k|^2}\right)\sin\left(\lambda_k\tau+C_1\right)\Big|_{1/\lambda}^{\beta}+O\left(\frac{1}{|\lambda_k|^2}\right)\sin\left(\lambda_k\tau+C_2\right)\Big|_{1/\lambda}^{\beta}.$$

Все подстановки здесь ограничены в силу ограниченности мнимых частей аргументов синусов. Получаем

$$I_2=O\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda|\lambda-|\lambda_k||}\right)+O\left(\frac{1}{|\lambda_k|^2}\right)=O\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda|\lambda-|\lambda_k||}\right).$$

Проделывая аналогичные преобразования с I_1 и I_3, получим

$$I_3=O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),\qquad I_1=O\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda^2}\right).$$

Оценим A''_{1k} и $A^{s''}_{1k}$:

$$A''_{1k}\le I_1+I_2+I_3=O\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda|\lambda-|\lambda_k||}\right)$$

$$A_{1k}^{s''} = \frac{1}{|\lambda_k|}\left(\int\limits_{1/\lambda}^{\beta}\left|O\left(\frac{1}{\lambda|\lambda-|\lambda_k||}\right)\frac{1}{\tau}\right|^s d\tau\right)^{1/s} =$$

$$= O\left(\frac{1}{\lambda|\lambda-|\lambda_k||}\right)\left(\frac{1}{\lambda^{-s+1}}-\beta^{-s+1}\right)^{1/s} = O\left(\frac{1}{\lambda|\lambda-|\lambda_k||}\right)O\left(\lambda^{1-1/s}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda^{1/s}|\lambda-|\lambda_k||}\right).$$

Объединяя оценки для A_{1k}', $A_{1k}^{s'}$, A_{1k}'' и $A_{1k}^{s''}$, получим оценки для A_{1k} и A_{1k}^s:

$$A_{1k} = A_{1k}' + A_{1k}'' = O\left(\lambda^{-2}\ln\frac{\lambda}{|\lambda-|\lambda_k||}\right) + O\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda|\lambda-|\lambda_k||}\right) = O\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda|\lambda-|\lambda_k||}\right),$$

$$A_{1k}^s \le A_{1k}^{s'} + A_{1k}^{s''} = O\left(\frac{1}{\lambda^{1+1/s}}\ln\frac{\lambda}{|\lambda-|\lambda_k||}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^{1/s}|\lambda-|\lambda_k||}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda^{1/s}|\lambda-|\lambda_k||}\right).$$

5б) Случай $\alpha \ge \lambda^{-1}$ полностью аналогичен схеме вывода оценок для интегралов A_{1k}'' и $A_{1k}^{s''}$ в 5а) и оценка та же. Обоснование леммы 2 завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ломов И.С.* // Дифференц. уравнения. 1998. Т.34, №5. С. 619-628; №8. С.1066-1077.
2. *Ломов И.С.* // Дифференц. уравнения. 2001. Т.37, №3. С. 328-342.
3. *Ломов И.С.* // Дифференц. уравнения. 1996. Т.32, №1. С. 58-69.
4. *Ильин В.А.* // Дифференц. уравнения. 1980. Т.16, №5. С. 771-794; №6. С. 980-1006.
5. *Ильин В.А.* // Докл. РАН. 1983. Т.273, №4. С.789-793.
6. *Ильин В.А.* Спектральная теория дифференциальных операторов. М., 1991.
7. *Ломов И.С.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т.27, № 1 С. 80-93.
8. *Самарская Т.А.* // Дифференц. уравнения. 1988. Т.24, № 1 С. 155-166.
9. *Ильин В.А.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т.27, № 4 С. 577-597.
10. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М., 1965. Т.1.
11. *Бесов О.В., Ильин В.П, Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., 1975.
12. *Ломов И.С.* // Докл. РАН. 1979. Т.248, №6. С. 1303-1306.
13. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. М., 1980. Т. 1,2.
14. *Йо И., Коморник В. (Joo I., Komornick V.)* On the equiconvergence of expansions by Riesz bases formed by eigenfunctions of the Schrodinger operator. //Acta Sci. Math. 1983, V.46, p.357-375.

СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, с. 32–43

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ БЕЛЛМАНА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ

© 2006 г. М. П. Ващенко*

m_vashchenko@mail.ru

Кафедра Системного анализа

1. Общее описание модели. Рассматривается модель инвестиционной деятельности, в которой финансовые потоки поступают в дискретные моменты времени с равномерным единичным шагом $t = 0, 1, \dots$. Инвестиционные проект описывается вектором $\vec{a} = \{a_0, a_1, .., a_r\}$ финансовых потоков в последовательные моменты времени, где $1 \le r < \infty$ - продолжительность реализации проекта. Положительные значения a_i - определяют доход, получаемый в $i-$ момент времени после его начала, а отрицательные значения - вложения в тот же момент времени, необходимые для его осуществления. Предполагается, что инвестиционная деятельность осуществляется в условиях самофинансирования, т.е. вложения в проект могут осуществляться за счет имеющихся у инвестора денежных средств или доходов, полученных от ранее осуществленных проектов.Если проекты доступны для инвестиций, то они могут осуществляться в произвольном объеме $u \ge 0$, чему соответствую финансовые потоки $u\vec{a} = \{ua_0, ua_1, \dots, ua_r\}$.

2. Модель Кантора-Липмана. Дополнительно делаются следующие предположения:

- Горизонт планирования деятельности инвестора конечен - n . Цель инвестора - максимизация терминального дохода за n шагов. Доходом считаются деньги, оказавшиеся на руках у инвестора.
- Первоначальный капитал инвестора равен 1
- Инвестиции разрешены в первые $n - r$ моментов времени (горизонт инвестирования)
- Инвестиционные проект стационарен, т.е. доступен для вложений в любой момент времени на горизонте инвестирования
- Не разрешены операции по заему денежных средств и кредитованию. Но считается, что всегда доступен проект $< -1, 1 >$ (Save money project).

Вводятся следующие обозначения: u_m - интенсивность вложений в проект в момент времени m , s_m - сальдо счета инвестора. В соответствии с общим описанием модели накладываются следующие ограничения:

$$\begin{aligned} &u_m \ge 0 && m = 0, 1, 2, \dots, n - r \\ &u_m = 0 && m > n - r \\ &s_m = s_{m-1} + \sum_{i=0}^{r} a_i u_{m-i} && m \ge 1 \\ &s_0 = 1 + a_0 u_0 && \\ &s_m \ge 0 && m = 0, 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

*Настоящая работа подготовлена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №05-01-00942, 04-01-00606), по программе государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ № 1843.2003.1), при финансовой поддержке программы фундаментальных исследований ОМН РАН №3, при поддержке программы фундаментальных исследований РАН №16.

Т.к. инвестиции разрешены только в первые $n-r$ моментов времени, а время реализации проекта - r, то все операции будут завершены к моменту времени n. Т.е. можно считать, что s_n - терминальный доход. Цель инвестора: выбрать вектор $\vec{u} =< u_i >$ таким образом, чтобы максимизировать s_n, обозначим $V_n = \max\limits_{\vec{u}} s_n$. Будем считать характеристикой проекта: $g = \lim_{n\to\infty} V_n^{1/n}$ - internal rate of return (IRR). Так же будем ставить в соответствие каждому проекту полином следующего вида $a(z) = \sum_{i=0}^{r} a_i z^i$. Тогда верны следующие результаты.

Теорема 1. [2] *Если* $a(0) < 0$ *и* $a(1) > 0$, *а также в последовательности* $a_0, a_1, \ldots, a_r$ *смена знака происходит ровно один раз, то*

$$\theta^{-(n-r+1)} \leq V_n \leq \theta^{-n},$$

где θ *- максимальный из корней* $a(z)$, *принадлежащих интервалу* $(0,1)$.

Теорема 2. [2] *Если* $a(1) \leq 0$, *тогда* $V_n = 1$ *для* $\forall n$. *Если* $a(1) > 0$ *и* $a(z)$ *не имеет корней на интервале* $(0,1)$, *тогда существует конечное* $n: \quad V_n = \infty$. *Если* $a(1) > 0$ *и* $a(z)$ *имеет корни на интервале* $(0,1)$, *тогда существуют положительные константы* $\lambda_1 < \lambda_2$ *такие, что:*

$$\lambda_1 \theta^{-n}/n^h \leq V_n \leq \lambda_2 \theta^{-n}/n^h,$$

где θ *- максимальный из корней* $a(z)$, *принадлежащих интервалу* $(0,1)$, *(* $h+1$ *) - кратность* θ. *Т.е.* $g = \dfrac{1}{\theta}$.

3. Модель с неопределенностью.

Будем описывать финансовое состояние инвестора вектором $\vec{s}(t) \in \mathbb{R}^{r+1}$, i-ая компонента которого равна денежным остаткам в момент времени $t+i$ при условии, что начиная с момента времени t, новые проекты не начинались. Если обозначить через $u(t)$ объемы вложений в инвестиционный проект в момент времени t, то динамика финансовых состояний будет описываться уравнением:

$$\vec{s}(t+1) = A(\vec{s}(t) + u(t)\vec{b}), \tag{1}$$

где

$$\vec{b} = b_0, b_1, .., b_r \quad b_i = \sum_{j=0}^{i} a_j \quad A_{(r+1)\times(r+1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Условие самофинансирования означает, что денежные остатки у инвестора должны быть неотрицательны в любой момент времени: $s_i(t) \geq 0,\ i = 1, \ldots, r$.

Будем полагать, что субъективная с точки зрения инвестора вероятность прекращения спроса на инвестиции в каждый момент времени одинакова и равна $\Delta = const$. Обозначим через $V(s)$ функцию Беллмана, которая будет оценивать наилучший результат инвестирования в описанных условиях при начальном финансовом состоянии $\vec{s}$. Тогда:

$$V(\vec{s}) = \max_{\{u | u \geq 0, \vec{s}+u\vec{b} \geq 0\}} [\Delta(\vec{s} + u\vec{b})_r + (1-\Delta)V(A(\vec{s} + u\vec{b}))]$$

Этому уравнению соответствует оператор Беллмана:

$$BW(\vec{s}) = \max_{\{u | u \geq 0, \vec{s}+u\vec{b} \geq 0\}} [\Delta(\vec{s} + u\vec{b})_r + (1-\Delta)W(A(\vec{s} + u\vec{b}))]$$

Стратегию, соответствующую решению уравнения Беллмана,

$$u(\vec{s}) = arg \max_{\{u | u \geq 0, \vec{s}+u\vec{b} \geq 0\}} [\Delta(\vec{s} + u\vec{b})_r + (1-\Delta)V(A(\vec{s} + u\vec{b}))]$$

назовем оптимальной стратегией инвестирования.

Возникает вопрос, существует ли такая вероятность $0 < \Delta < 1$ при которой оптимальной будет "осторожная"стратегия, т.е., когда

$$u(\vec{s}) = arg \max_{\{u|u\geq 0, \vec{s}+u\vec{b}\geq 0\}} [\Delta(\vec{s}+u\vec{b})_r + (1-\Delta)V(A(\vec{s}+u\vec{b}))] =$$
$$= arg \max_{\{u|u\geq 0, \vec{s}+u\vec{b}\geq 0\}} [\Delta(\vec{s}+u\vec{b})_r] \,?$$

4. Обсуждение. Для начала определим, какова же эта осторожная стратегия. Отметим, что $b_r = \sum\limits_{j=0}^{r} a_j > 0$, т.к. мы считаем проект априори прибыльным (иначе нам не за чем было бы инвестировать в него деньги). Это означает, что функция $f(u) = s_r + ub_r$ - выпукла, а значит ее максимум будет достигаться на границе рассматриваемой области $D(u) = \{u|u \geq 0, \vec{s}+u\vec{b} \geq 0\}$. Т.е. оптимальной "осторожной"стратегией будет $\phi(s) = \min\limits_{b_i<0}\left(-\frac{s_i}{b_i}\right)$. Заметим, что $\phi(s) > 0$, т.к. в условиях сделанных выше предположениях $s_0 > 0,\ b_0 < 0$.

Лемма 1. [1]

Пусть $W(\vec{s})$ монотонная, вогнутая, положительно однородная функция, тогда ее образ, под действием оператора $BW(\vec{s})$ также монотонная, вогнутая, положительно однородная функция.

Лемма 2. [1]

Пусть K - выпуклый компакт, такой, что $0 \in K$, $K \subset \mathbb{R}_+^{r+1} \subseteq Co\,K$. Обозначим $\|V(\vec{s})\| = \sup_{\vec{s}\in K}|V(\vec{s})|$. Тогда для любых линейно-однородных функций $V_1(\vec{s})$ и $V_2(\vec{s})$ определенных на $\mathbb{R}_+^{r+1}$ справедливо неравенство:

$$\|BV_2(\vec{s}) - BV_1(\vec{s})\| \leq a^{-1}(1-\Delta)\|V_2(\vec{s}) - V_1(\vec{s})\| \quad ,$$

где

$$a = \sup_{u\geq 0, \vec{s}+u\vec{b}\geq 0} \inf_q \left\{ q \geq 0 \,\middle|\, 1/q\ (A(\vec{s}+u\vec{b})) \in K \right\}$$

Теорема 3. [1] *Если $0 \leq 1-\Delta < a$, то уравнение Беллмана имеет единственное решение $V(\vec{s})$ в классе положительно однородных функций. При этом функция $V(\vec{s})$ монотонная, вогнутая, положительно однородная функция.*

Попробуем найти функцию Беллмана методом последовательных приближений. Положим $V_0 = 0$. Тогда:

$$V_1(\vec{s}) = \max_{u\geq 0, \vec{s}+u\vec{b}\geq 0} [\Delta(\vec{s}+u\vec{b})_r] = \Delta(s_r + \phi(\vec{s})b_r)$$
$$V_2(\vec{s}) = \max_{u\geq 0, \vec{s}+u\vec{b}\geq 0} [\Delta(\vec{s}+u\vec{b})_r + (1-\Delta)V_1(A(\vec{s}+u\vec{b}))] =$$
$$= \Delta \max_{u\geq 0, \vec{s}+u\vec{b}\geq 0} [b_r(u + (1-\Delta)u + (1-\Delta)\phi(A(\vec{s}+u\vec{b})) + \Omega'(\vec{s})] =$$
$$= \Delta \max_{u\geq 0, \vec{s}+u\vec{b}\geq 0} [b_r u(2-\Delta+(1-\Delta)\frac{b_{k_u+1}}{b_{k_u}}) + \Omega'(\vec{s})]$$
$$b_{k_u} = arg \min_{b_i<0} \left(\frac{s_{i+1}+ub_{i+1}}{-b_i}\right)$$

$\Omega'(\vec{s})$ - некоторая функция от $\vec{s}$ (вид ее нам не важен) †.
Т.е. если окажется, что $[2-\Delta+(1-\Delta)\frac{b_{k_u+1}}{b_{k_u}}]>0 \quad \forall k_u$, то оптимальной стратегией инвестирования снова будет $u=\phi(\vec{s})=\min\limits_{b_i<0}\left(-\frac{s_i}{b_i}\right)$.

Теорема 4.
Обозначим:

$$\hat{b} = \max_{1\le t\le r} |b_t|$$
$$\check{b} = \min_{1\le t\le r: b_t<0} |b_t|$$

Тогда при условии:

$$\Delta > 1 - \frac{\check{b}}{4\hat{b}}$$

$$\phi^i(\vec{s}) = arg \max_{\{u|u\ge0,\vec{s}+u\vec{b}\ge0\}} [\Delta(\vec{s}+u\vec{b})_r + (1-\Delta)V_{i-1}(A(\vec{s}+u\vec{b}))] = \phi(\vec{s}) \quad \forall i,$$

где

$$\phi(s) = \min_{0\le i\le r: b_i<0}\left(-\frac{s_i}{b_i}\right).$$

Доказательство. Будем доказывать утверждение по индукции. База была уже проверена. Пусть

$$\phi^j(\vec{s}) = arg \max_{\{u|u\ge0,\vec{s}+u\vec{b}\ge0\}} [\Delta(\vec{s}+u\vec{b})_r + (1-\Delta)V_{j-1}(A(\vec{s}+u\vec{b}))] = \phi(\vec{s}) \quad \forall j < i+1,$$

докажем, что тогда

$$\phi^{i+1}(\vec{s}) = arg \max_{\{u|u\ge0,\vec{s}+u\vec{b}\ge0\}} [\Delta(\vec{s}+u\vec{b})_r + (1-\Delta)V_i(A(\vec{s}+u\vec{b}))] = \phi(\vec{s}). \tag{2}$$

Обозначим:

$$g(\cdot) : (\vec{s}, u) \to A(\vec{s}+u\vec{b})$$
$$g^i(\vec{s}, u) = A^i\vec{s} + A^iu\vec{b} + \sum_{k=1}^{i-1} A^k\phi(g^{i-k}(\vec{s}, u))b \quad \forall i > 1$$
$C_u(f)$ - коэффициент при u у функции f

Лемма 3. *В условиях принятых выше обозначений справедливо следующее:*

$$g^i(g(\vec{s}, u), \phi(g(\vec{s}, u))) = g^{i+1}(\vec{s}, u)$$

Доказательство. База индукции:

$$g(g(\vec{s}, u), \phi(g(\vec{s}, u))) = A(A(\vec{s}+u\vec{b}) + \phi(g(\vec{s}, u))\vec{b}) =$$
$$= A^2\vec{s} + A^2u\vec{b} + A\phi(g(\vec{s}, u))\vec{b} = g^2(\vec{s}, u)$$

† Далее по тексту $\Omega(\vec{s})$ и $\Omega'(\vec{s})$ - некоторые функция от $\vec{s}$ (вид их нам не важен).

Пусть утверждение верно для $g^{k-1}(\vec{s},u) \quad \forall k<i$, докажем его для $g^{i}(\vec{s},u)$:

$$g^{i-1}(g(\vec{s},u),\phi(g(\vec{s},u))) = A^{i-1}(A(\vec{s}+u\vec{b})+\phi(g(\vec{s},u))\vec{b}) + \sum_{k=1}^{i-2} A^k\phi(g^{i-k-1}(g(\vec{s},u),\phi(g(\vec{s},u))))b =$$

$$= A^i\vec{s} + A^i u\vec{b} + A^{i-1}\phi(g(\vec{s},u))\vec{b} + \sum_{k=1}^{i-2} A^k\phi(g^{i-k}(\vec{s},u))b =$$

$$= A^i\vec{s} + A^i u\vec{b} + \sum_{k=1}^{i-1} A^k\phi(g^{i-k}(\vec{s},u))\vec{b} = g^i(\vec{s},u)$$

Лемма 4. *Если*

$$\phi^j(\vec{s}) = arg \max_{\{u|u\geq 0,\vec{s}+u\vec{b}\geq 0\}} [\Delta(\vec{s}+u\vec{b})_r + (1-\Delta)V_{j-1}(A(\vec{s}+u\vec{b}))] = \phi(\vec{s}) \quad \forall j\leq i,$$

то

$$V_i(g(\vec{s},u)) = \Delta\sum_{j=1}^{i-1}(1-\Delta)^{j-1}((g^j(\vec{s},u)+\phi(g^j(\vec{s},u))\vec{b})_r)$$

Доказательство. База индукции была рассмотрена выше. Пусть теперь утверждение леммы верно для $V_{i-1}(\vec{s})$, докажем его для $V_i(\vec{s})$:

$$V_i(g(\vec{s},u)) = \max_{\{u|u\geq 0, g(\vec{s},u)+u\vec{b}\geq 0\}} [\Delta(g(\vec{s},u)+u\vec{b})_r + (1-\Delta)(V_{i-1}(g(g(\vec{s},u),u))] \overset{\text{Условие леммы}}{=}$$

$$= \Delta(g(\vec{s},u)+\phi(g(\vec{s},u))\vec{b})_r + (1-\Delta)(V_{i-1}(g(g(\vec{s},u),\phi(g(\vec{s},u)))) \overset{\text{Предположение индукции}}{=}$$

$$= \Delta(g(\vec{s},u)+\phi(g(\vec{s},u))\vec{b})_r +$$

$$+ \Delta(1-\Delta)\sum_{j=1}^{i-2}(1-\Delta)^{j-1}((g^j(g(\vec{s},u),\phi(g(\vec{s},u))) + \phi(g^j(g(\vec{s},u),\phi(g(\vec{s},u))))\vec{b})_r)) \overset{\text{Лемма 4}}{=}$$

$$= \Delta(g(\vec{s},u)+\phi(g(\vec{s},u))\vec{b})_r + \Delta\sum_{j=1}^{i-2}(1-\Delta)^{j}((g^{j+1}(\vec{s},u)+\phi(g^{j+1}(\vec{s},u))\vec{b})_r) =$$

$$= \Delta(g(\vec{s},u)+\phi(g(\vec{s},u))\vec{b})_r + \Delta\sum_{j=2}^{i-1}(1-\Delta)^{j-1}((g^{j}(\vec{s},u)+\phi(g^{j}(\vec{s},u))\vec{b})_r) =$$

$$= \Delta\sum_{j=1}^{i-1}(1-\Delta)^{j-1}((g^j(\vec{s},u)+\phi(g^j(\vec{s},u))\vec{b})_r)$$

Следствие 1. *Если*

$$\phi^j(\vec{s}) = arg \max_{\{u|u\geq 0,\vec{s}+u\vec{b}\geq 0\}} [\Delta(\vec{s}+u\vec{b})_r + (1-\Delta)V_{j-1}(A(\vec{s}+u\vec{b}))] = \phi(\vec{s}) \quad \forall j\leq i,$$

то

$$V_{i+1}(\vec{s}) = \max_{\{u|u\geq 0,\vec{s}+u\vec{b}\geq 0\}} [\Delta(\vec{s}+u\vec{b})_r + \Delta\sum_{j=1}^{i-1}(1-\Delta)^{j}((g^j(\vec{s},u)+\phi(g^j(\vec{s},u))\vec{b})_r)]$$

Доказательство.

$$V_{i+1}(\vec{s}) = \max_{\{u|u\geq 0, \vec{s}+u\vec{b}\geq 0\}} [\Delta(\vec{s}+u\vec{b})_r + (1-\Delta)V_i(g(\vec{s},u))] \overset{\text{Условие следствия и Лемма 4}}{=}$$

$$= V_{i+1}(\vec{s}) = \max_{\{u|u\geq 0, \vec{s}+u\vec{b}\geq 0\}} [\Delta(\vec{s}+u\vec{b})_r + \Delta\sum_{j=1}^{i-1}(1-\Delta)^j((g^j(\vec{s},u)+\phi(g^j(\vec{s},u))\vec{b})_r)]$$

Лемма 5.

$$\phi(g^i(\vec{s},u)) = \min_{b_p<0}\left[-\frac{s_{p+i}+ub_{p+i}+\sum\limits_{k=1}^{i-1}\phi(g^{i-k}(\vec{s},u))b_{p+k}}{b_p}\right]$$

Доказательство. Отметим, что:

$$A^i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \underbrace{1}_{i+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1\}_{r-i+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^i\vec{s} = (s_i, s_{i+1}, \dots, \underbrace{s_r}_{r-i+1}, \dots, s_r)$$

$$[g^i(\vec{s},u)]_p = s_{p+i}+ub_{p+i}+\sum_{k=1}^{i-1}\phi(g^{i-k}(\vec{s},u))b_{p+k}$$

Отсюда сразу вытекает утверждение леммы:

$$\phi(g^i(\vec{s},u)) = \min_{b_p<0}\left(\frac{[g^i(\vec{s},u)]_p}{-b_p}\right) = \min_{b_p<0}\left[-\frac{s_{p+i}+ub_{p+i}+\sum\limits_{k=1}^{i-1}\phi(g^{i-k}(\vec{s},u))b_{p+k}}{b_p}\right]$$

Лемма 6. *Ввиду сделанных выше обозначений справедлива следующая оценка:*

$$|C_u(\phi(g^i(\vec{s},u)))| \leq \frac{1}{2}(\frac{2\hat{b}}{\check{b}})^i$$

Доказательство.
Рассмотрим сначала $\phi(g^i(\vec{s},u))$:

$$\phi(g^i(\vec{s},u)) \overset{\text{Лемма 5}}{=} \min_{b_p<0}\left[-\frac{s_{p+i}+ub_{p+i}+\sum\limits_{k=1}^{i-1}\phi(g^{i-k}(\vec{s},u))b_{p+k}}{b_p}\right]$$

Докажем приведенную оценку по индукции. Пусть

$$|C_u(\phi(g^j(\vec{s},u)))| \le \frac{1}{2}(\frac{2\hat{b}}{\check{b}})^j \quad \forall j < i$$

Из вида функции $\phi(g^i(\vec{s},u))$ следует:

$$|C_u(\phi(g^i(\vec{s},u))| \le \frac{\hat{b}}{\check{b}} + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\hat{b}}{\check{b}} |C_u(\phi(g^{i-k}(\vec{s},u)))|$$

Далее:

$$\frac{\hat{b}}{\check{b}} + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\hat{b}}{\check{b}} |C_u(\phi(g^{i-k}(\vec{s},u)))| \le \frac{\hat{b}}{\check{b}}(1 + \sum_{k=1}^{i-1} |C_u(\phi(g^{i-k}(\vec{s},u)))|) \overset{\text{Предположение индукции}}{\le}$$

$$\le \frac{\hat{b}}{\check{b}}(1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{i-1}(\frac{2\hat{b}}{\check{b}})^{i-k}) = \frac{\hat{b}}{\check{b}}\left(1 + \frac{\frac{2\hat{b}}{\check{b}}((\frac{2\hat{b}}{\check{b}})^{i-1} - 1)}{2(\frac{2\hat{b}}{\check{b}} - 1)}\right) = \frac{\hat{b}}{\check{b}}\left(\frac{\frac{\hat{b}}{\check{b}} - 1 + \frac{1}{2}(\frac{2\hat{b}}{\check{b}})^i}{\frac{2\hat{b}}{\check{b}} - 1}\right) \le$$

$$\le \frac{\hat{b}}{\check{b}}\left(\frac{\frac{1}{2}(\frac{2\hat{b}}{\check{b}})^i}{\frac{\hat{b}}{\check{b}}}\right) = \frac{1}{2}(\frac{2\hat{b}}{\check{b}})^i$$

Следствие 2.

$$|C_u((g^i(\vec{s},u) + \phi(g^i(\vec{s},u))\vec{b})_r)| \le b_r(\frac{2\hat{b}}{\check{b}})^i$$

Доказательство.

$$|C_u((g^i(\vec{s},u) + \phi(g^i(\vec{s},u))\vec{b})_r)| \overset{\text{Лемма 5}}{=} |C_u(s_r + ub_r + \sum_{k=1}^{i-1}\phi(g^{i-k}(\vec{s},u))b_r + \phi(g^i(\vec{s},u))b_r)| \le$$

$$\le b_r(1 + \sum_{k=1}^{i} C_u(\phi(g^{i-k}(\vec{s},u))b_r)) \overset{\text{Лемма}}{\le} b_r(1 + \sum_{k=1}^{i}\frac{1}{2}(\frac{2\hat{b}}{\check{b}})^k) = b_r\left(1 + \frac{\frac{2\hat{b}}{\check{b}}((\frac{2\hat{b}}{\check{b}})^i - 1)}{2(\frac{2\hat{b}}{\check{b}} - 1)}\right) =$$

$$= b_r\left(\frac{\frac{\hat{b}}{\check{b}} - 1 + \frac{1}{2}(\frac{2\hat{b}}{\check{b}})^{i+1}}{\frac{2\hat{b}}{\check{b}} - 1}\right) \le b_r\left(\frac{\frac{1}{2}(\frac{2\hat{b}}{\check{b}})^{i+1}}{\frac{\hat{b}}{\check{b}}}\right) = b_r(\frac{2\hat{b}}{\check{b}})^i.$$

Следствие 3.

$$C_u((g^i(\vec{s},u) + \phi(g^i(\vec{s},u))\vec{b})_r) \ge -b_r(\frac{2\hat{b}}{\check{b}})^i$$

Закончим доказательство теоремы 2.
В силу Следствия 1 и предположения индукции:

$$V_{i+1}(\vec{s}) = \max_{\{u|u\ge 0, \vec{s}+u\vec{b}\ge 0\}}[\Delta(\vec{s} + u\vec{b})_r + \Delta\sum_{j=1}^{i-1}(1-\Delta)^j((g^j(\vec{s},u) + \phi(g^j(\vec{s},u))\vec{b})_r)]$$

Т.е. достаточным условием для того, чтобы выполнялось (2) будет положительность коэффициент при u у выражения, стоящего под знаком максимума. В силу следствия 3:

$$C_u(\Delta(s_r + ub_r + \sum_{j=1}^{i}(1-\Delta)^j((g^j(\vec{s},u) + \phi(g^j(\vec{s},u))\vec{b})_r))) \geq$$

$$\geq C_u(\Delta b_r u(1 - \sum_{j=1}^{i}((1-\Delta)2\frac{\hat{b}}{\check{b}})^j) = \Delta b_r(1 - \sum_{j=1}^{i}((1-\Delta)2\frac{\hat{b}}{\check{b}})^j)$$

Т.к. Δ и b_r - величины положительные, то достаточно рассмотреть знак следующего выражения:

$$1 - \sum_{j=1}^{i}((1-\Delta)2\frac{\hat{b}}{\check{b}})^j = \{Q(\vec{b}) = 2(1-\Delta)\frac{\hat{b}}{\check{b}}\} =$$

$$= 1 + \frac{Q(\vec{b})(Q(\vec{b})^i - 1)}{1 - Q(\vec{b})} = \frac{1 - 2Q(\vec{b}) + Q(\vec{b})^{i+1}(1+\hat{b})}{1 - Q(\vec{b})}$$

Отсюда вытекает, что условие

$$\frac{1 - 2Q(\vec{b}) + Q(\vec{b})^{i+1}(1+\hat{b})}{1 - Q(\vec{b})} > 0 \quad \forall i$$

является достаточным условием для того, чтобы выполнялось (2). Это приводит у условию на Δ:

$$Q(\vec{b}) < \frac{1}{2}.$$

Т.е. достаточно выбрать Δ следующим образом:

$$\Delta > 1 - \frac{\check{b}}{4\hat{b}}.$$

Следствие 4. *При условии:*

$$\Delta > 1 - \frac{\check{b}}{4\hat{b}}$$

выполнено следующее равенство:

$$arg \max_{\{u|u\geq 0, \vec{s}+u\vec{b}\geq 0\}} [\Delta(\vec{s} + u\vec{b})_r + (1-\Delta)V(A(\vec{s}+u\vec{b}))] = \phi(\vec{s}) \quad \forall i,$$

где

$$\phi(s) = \min_{0\leq i\leq r: b_i<0}\left(-\frac{s_i}{b_i}\right).$$

Будем далее рассматривать систему (1) при $\Delta > 1 - \frac{\check{b}}{4\hat{b}}$. Как было показано (Следствие 4), при таком условии оптимальной стратегией инвестирования является $\phi(\vec{s}) = \min_{0\leq i\leq r: b_i<0}\left(-\frac{s_i}{b_i}\right)$. Таким образом мы приходим к системе:

$$\vec{s}(t+1) = \mathcal{A}\vec{s}(t) = A(\vec{s}(t) + \phi(\vec{s}(t))\vec{b}) \tag{3}$$

Т.е. на каждом шаге $t = 1, 2, ...$ применяется один из операторов

$$\mathcal{A}_i : \mathcal{A}_i\vec{s}(t) = A(\vec{s}(t) + \left(-\frac{s_i^t}{b_i}\right)\vec{b}) \quad \text{, где } i: \quad b_i < 0 \tag{4}$$

Найдем оценки на максимальный темп роста капитала в системе (3).

Определение 1. *Будем называть вектор $\vec{s}$ вектором сбалансированного роста с темпом роста $\lambda > 0$ для системы (3) если $\mathcal{A}\vec{s} = \lambda\vec{s}$*

Замечание 1. *Если у системы (3) существует режим сбалансированного роста с темпом роста $\lambda > 0$, то λ является оценкой снизу на максимальный темп роста в системе (3).*

Утверждение 1. *Рассмотрим траекторию системы (3) $\{\vec{s}(t)\}$ $t = 1, 2, \dots$. Если для некоторого T вектор $\vec{s}(T)$ является вектором сбалансированного роста с темпом роста $\lambda > 0$, то*

$$\vec{s}(T+i) = \lambda^i \vec{s}(T) \quad i = 0, 1, 2, \dots. \tag{5}$$

Доказательство. Докажем утверждение по индукции. При $i = 1$ равенство (5) следует из определения вектора сбалансированного роста. Пусть для некоторого i верно, что $\vec{s}(T+i) = \lambda^i \vec{s}(T)$. Тогда $\vec{s}(T+i+1) = \mathcal{A}\vec{s}(T+i) = \mathcal{A}(\lambda^i \vec{s}(T)) = \lambda^{i+1}\vec{s}(T)$

Теорема 5. *В системе (3) существует вектор сбалансированного роста iff существует $0 \le j \le r$, для которого совместна следующая система неравенств*

$$\begin{cases} J(\lambda) = \sum\limits_{t=0}^{r-j-t} \lambda^{r-j-t}(b_{j+t+1} - b_{j+t}) + b_j \lambda^{r-j+1} = 0 & \\ F_1^k(\lambda) = \sum\limits_{t=1}^{k} b_{j-t}\lambda^t \ge 0 & \forall k: \quad b_{j-k} < 0 \\ F_2^k(\lambda) = \sum\limits_{t=0}^{k-1} b_{j+t}\lambda^{k-t} \le 0 & \forall k: \quad b_{j+k} < 0 \end{cases} \tag{6}$$

Доказательство. Распишем равенство из определения вектора сбалансированного роста покомпонентно:

$$\begin{cases} \lambda s_k = s_{k+1} + \phi(\vec{s}) b_{k+1} & 0 \le k \le r-1 \\ \lambda s_r = s_r + \phi(\vec{s}) b_r \end{cases} \tag{7}$$

Пусть в некоторый момент времени t для траектории системы (3) выполнено:

$$\phi(\vec{s}(t)) = \min_{0 \le i \le r : b_i < 0} \left(-\frac{s_i^t}{b_i}\right) = \left(-\frac{s_j^t}{b_j}\right) \tag{8}$$

(далее индекс времени будет опускаться, чтобы не загромождать выкладки).

Тогда равенства (7) будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \lambda s_k = s_{k+1} + \left(-\dfrac{s_j}{b_j}\right) b_{k+1} & 0 \le k \le r-1 \\ \lambda s_r = s_r + \left(-\dfrac{s_j}{b_j}\right) b_r \end{cases} \tag{9}$$

Выпишем отдельно равенство для $k = j-1$:

$$\lambda s_{j-1} = s_j + \left(-\frac{s_j}{b_j}\right) b_j = 0 \qquad (10).$$

Из (10) следует, что $s_{j-1} = 0$ (т.к. $\lambda > 0$).

В силу (10) равенства (9) можно переписать следующим образом:

$$s_{j+k} = \frac{s_j}{b_j} \sum_{t=0}^{k} b_{j+t} \lambda^{k-t} \quad k > 0,\ j+k \leq r \tag{11}$$

$$s_{j-k} = \left(-\frac{s_j}{b_j}\right) \sum_{t=1}^{k-1} b_{j-t} \lambda^{t-k} \quad k > 0,\ j-k \geq 0 \tag{12}$$

$$\lambda s_r = \left(-\frac{s_j}{b_j}\right) b_r (\lambda - 1)^{-1} \tag{13}$$

Приравняем выражения для s_r из (11) и (13) (при $k = r - j$):

$$\frac{s_j}{b_j} \sum_{t=0}^{r-j} b_{j+t} \lambda^{r-j-t} = \left(-\frac{s_j}{b_j}\right) b_r (\lambda - 1)^{-1}$$

$$b_r + (\lambda - 1) \sum_{t=0}^{r-j} b_{j+t} \lambda^{r-j-t} = 0$$

$$b_r + \sum_{t=0}^{r-j} b_{j+t} \lambda^{r-j-t+1} - \sum_{t=0}^{r-j} b_{j+t} \lambda^{r-j-t} = 0$$

$$b_r + \sum_{t=0}^{r-j-1} b_{j+t+1} \lambda^{r-j-t} + b_j \lambda^{r-j+1} - \sum_{t=0}^{r-j-1} b_{j+t} \lambda^{r-j-t} - b_r = 0$$

$$\sum_{t=0}^{r-j-t} \lambda^{r-j-t} (b_{j+t+1} - b_{j+t}) + b_j \lambda^{r-j+1} = 0$$

Равенство (8) выполнено эквивалентно следующим неравенствам $\left(-\frac{s_k}{b_k}\right) \geq \left(-\frac{s_j}{b_j}\right)$ для $\forall k:\ b_k < 0$. Используя представления (11) и (12) это можно переписать в следующем виде:

При $k > 0,\ j - k \geq 0$

$$\left(-\frac{s_{j-k}}{b_{j-k}}\right) \geq \left(-\frac{s_j}{b_j}\right)$$

$$\left(-\frac{s_j}{b_j}\right) \sum_{t=1}^{k-1} \left(-\frac{b_{j-t}}{b_{j-k}}\right) \lambda^{t-k} \geq \left(-\frac{s_j}{b_j}\right)$$

$$\sum_{t=1}^{k-1} \left(-\frac{b_{j-t}}{b_{j-k}}\right) \lambda^{t-k} \geq 1$$

$$\sum_{t=1}^{k-1} \left(-\frac{b_{j-t}}{b_{j-k}}\right) \lambda^{t} \geq \lambda^k$$

$$\sum_{t=1}^{k} \left(-\frac{b_{j-t}}{b_{j-k}}\right) \lambda^{t} \geq 0$$

$$\sum_{t=1}^{k} b_{j-t} \lambda^{t} \geq 0$$

Аналогично при $k > 0,\ j + k \le r$

$$\left(-\frac{s_{j+k}}{b_{j+k}}\right) \ge \left(-\frac{s_j}{b_j}\right)$$

$$\left(-\frac{s_j}{b_j}\right) \sum_{t=0}^{k} \frac{b_{j+t}}{b_{j+k}} \lambda^{k-t} \ge \left(-\frac{s_j}{b_j}\right)$$

$$\sum_{t=0}^{k} \frac{b_{j+t}}{b_{j+k}} \lambda^{k-t} \ge 1$$

$$\sum_{t=0}^{k-1} \frac{b_{j+t}}{b_{j+k}} \lambda^{k-t} \ge 0$$

$$\sum_{t=0}^{k-1} b_{j+t} \lambda^{k-t} \le 0$$

Следствие 5. *У полинома $J(\lambda)$ существует корень $\lambda > 1$.*

Доказательство. Утверждение следует из того, что $J(1) = b_r > 0$ и коэффициент при старшей степени равен $b_j < 0$.

Дадим оценку сверху на темп роста капитала в системе (3).

Замечание 2. *Оценка Кантора-Липмана (IRR проекта $\vec{a}$) является оценкой сверху на максимальный темп роста капитала в системе (3). Данное замечание является следствием Теоремы 2.*

Определение 2. *Совместным спектральным радиусом операторов $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k \in L(\mathbb{R}^{r+1})$ называется число*

$$\hat{\rho}(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_d) = \lim_{m \to \infty} \max_{\sigma} (\| \mathcal{A}_{\sigma(1)} \ldots \mathcal{A}_{\sigma(m)} \|^{\frac{1}{m}}) \quad ,$$

где максимум берется по всевозможным функциям $\sigma(x)$, где $\sigma : 1, \ldots, m \to 1, \ldots, d$. В системе (3) оценкой сверху на тем роста капитала будет совместный спектральный радиус операторов (4). Далее будем рассматривать матрицы $\{A_k : k = 1, \ldots, d\}$, соответствующие операторам (4).

Определение 3. *Произведением Кронекера двух матриц $A \in \mathbb{R}^{p_1 \times q_1}$ и $B \in \mathbb{R}^{p_2 \times q_2}$ является матрица размера $p_1 p_2 \times q_1 q_2$, определенная следующим соотношением:*

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{1,1}B & \ldots & A_{1,q_1}B \\ & \ldots & \\ A_{p_1,1}B & \ldots & A_{p_1,q_1}B \end{pmatrix}$$

Определение 4. *Степенью k Кронекера матрицы A является матрица определенная следующим соотношением:*

$$A^{\otimes k} = \underbrace{A \otimes A \ldots A \otimes A}_{k \text{ раз}}.$$

Теорема 6. [6] *Пусть существует правильный (т.е. замкнутый, с непустой внутренностью, выпуклый, заостренный) конус, инвариантный относительно каждого из операторов $\{A_k : k = 1, \ldots, d\}$. Тогда*

$$\frac{1}{m^{1/k}} \rho^{1/k}(A_1^{\otimes k} + \cdots + A_d^{\otimes k}) \le \hat{\rho}(A_1, \ldots, A_d) \le \rho^{1/k}(A_1^{\otimes k} + \cdots + A_d^{\otimes k})$$

Теорема 7. [6] *Пусть $\{A_k \in \mathbb{R}^{(r+1)\times(r+1)} : k = 1, \ldots, d\}$, и M_A - матрица линейного* *оператора* $X \to AXA^T : S \to S$ *, где* S *- симметрическая матрица. Тогда*

$$\hat{\rho}(M_{A_1}, \dots, M_{A_d}) = \hat{\rho}(A_1 \otimes A_1, \dots, A_d \otimes A_d) = \hat{\rho}^2(A_1, \dots, A_d)$$

Теорема 8. [6] *Пусть* $\{A_k \in \mathbb{R}^{(r+1)\times(r+1)} : k = 1, \dots, d\}$ *, и* M_A *- матрица линейного оператора* $X \to AXA^T : S \to S$ *, где* S *- симметрическая матрица. Тогда*

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\rho^{1/2}(M_{A_1} + \dots + M_{A_d}) \le \hat{\rho}(A_1, \dots, A_d) \le \rho^{1/2}(M_{A_1} + \dots + M_{A_d})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шананин А.А., Л.И. Биккинина.* К теории доходности инвестиционных проектов в условиях несовершенного финансового рынка. XLVI конференция МФТИ, стр. 136-137.
2. *David G. Cantor, Steven A.Lipman.* Investment selection with imperfect capital markets. Econometrica, Vol. 51, No.4 (July, 1983), p.1121 - 1144
3. *Sonin I.M.* Growth rate, internal rates of return and turn pikes in an investment model. Economic theory, 5, pp. 383-400, 1995.
4. *Беленький В.З.* Экономическая динамика: анализ инвестиционных проектов в рамках линейной модели Неймана-Гейла./Препринт WP/2002/137/ - М.: ЦЭМИ РАН, 2002. - 78 с.
5. *Протасов В.Ю.* Совместный спектральный радиус и инвариантные множества линейных операторов. Фундаментальная и прикладная математика 1996, 2, N1, 205-231.
6. *V.Yu.Protasov.* The generalized joint spectral radius. A geometric approach Izvestiya RAN: Ser. Mat. 61:5 99-136

СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, с.44–49

УДК 517.956.2

О ВОЗМОЖНОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СВЕРХКОРОТКИХ ЛАЗЕРНЫХ ИМПУЛЬСОВ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ ФЕМТОСЕКУНДНОГО ИМПУЛЬСА В ОПТИЧЕСКОМ ВОЛОКНЕ

© 2006 г. А. Г. Волков

agvolkov@cs.msu.su

Лаборатория математического моделирования в физике

Введение. Использование эффектов распространения фемтосекундного импульса в оптическом волокне представляет большой интерес для многих приложений в информационных технологиях. Уменьшение длительности импульса приводит к увеличению скорости передачи информации. С другой стороны, формирование аттосекундных импульсов важно для различных приложений в науке и технике. В работе показана новая возможность формирования аттосекундных импульсов, что имеет место когда формируется оптическая ударная волна, при распространении фемтосекундного импульса в оптическом волокне с учетом временной дисперсии нелинейности. Для формирования аттосекундных импульсов необходимо увеличение ширины спектра по сравнению с начальным импульсом, это получается в результате формирования оптической ударной волны. Далее предложен и описан новый способ получения лазерных импульсов аттосекундной длительности.

1. Постановка задачи. Процесс распространения фемтосекундного импульса в среде с кубичной нелинейностью с учетом временной производной от нелинейного отклика среды (дисперсии нелинейности) при отсутствии влияния дифракции оптического излучения (что реализуется либо при его распространении в оптическом волокне, либо при длине среды много меньшей дифракционной длины светового пучка) и с учетом дисперсии второго порядка описывается следующим безразмерным комбинированным (обобщенным) нелинейным уравнением Шрёдингера относительно медленно изменяющейся в пространстве и во времени комплексной амплитуды $A(z,t)$ [1,2]

$$\varepsilon \ = 0.5(A\exp(i\bar{\omega}t - ikz)) + k.c.) \,,$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} + iD\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i\alpha|A|^2 A + \alpha\gamma\frac{\partial |A|^2 A}{\partial t} = 0 \ , \ z > 0, \ 0 < t < L_t \tag{1}$$

с начальными и граничными условиями

$$A\,|_{z=0} \,= A_0\,(t)\,, \quad A\,|_{t=0,L_t} \,= 0, \quad \frac{\partial A}{\partial t}\,|_{t=0,L_t} \,= 0. \tag{2}$$

Последним условиям в (2) легко удовлетворить из-за финитности начального распределения светового поля на входе в нелинейную среду ($z = 0$) . Заметим, что они необходимы для записи некоторых инвариантов распространения светового импульса даже в случае $\gamma = 0$. Параметры $\bar{\omega}$ и k соответственно безразмерная частота и волновое число светового импульса, $A\,(z,t)$ – нормированная на максимальное значение на входе в нелинейную среду амплитуда, распространяющегося вдоль координаты z , которая измеряется в единицах длины среды, t – время, нормированное на длительность импульса в сопровождающей его системе координат, D – коэффициент, равный отношению длины среды к дисперсионной длине, α – отношение начальной мощности импульса к характерной мощности самовоздействия, γ – параметр, обратно пропорциональный произведению длительности импульса на его частоту, L_t – безразмерный временной интервал, в пределах которого анализируется процесс распространения импульса.

В процессе взаимодействия лазерного импульса с веществом сохраняется его энергия:

$$I_A(z) = \int_0^{L_t} |A|^2 dt = const. \tag{3}$$

Для записи других инвариантов нелинейного распространения лазерного импульса введем новую функцию $E\,(z,t)$ [4]:

$$E(z,t) = \int_0^t A(z,\eta) e^{\frac{i(\eta - t)}{\gamma}} d\eta, \tag{4}$$

которая удовлетворяет релаксационному уравнению

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{i}{\gamma} E = A. \tag{5}$$

В новых переменных уравнение (1) преобразуется к виду

$$\frac{\partial E}{\partial z} + iD \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \alpha\gamma \left|A\right|^2 A = 0. \tag{6}$$

При этом из способа введения функций $E\,(z,t)$ следует, что имеют место краевые условия

$$E\left|_{t=0}\right. = \frac{\partial E}{\partial t}\left|_{t=0}\right. = \left(\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{i}{\gamma} E\right)\left|_{t=L_t}\right. = 0. \tag{7}$$

Используя уравнения (5) и (6), краевое условие (2) относительно производной по времени от комплексной амплитуды можно преобразовать к следующему виду

$$\left(\frac{\partial E}{\partial z} - \frac{iD}{\gamma^2} E\right)\left|_{t=L_t}\right. = 0. \tag{8}$$

На входе в нелинейную среду начальное распределение относительно функции $E(z,t)$ связано с распределением комплексной амплитуды $A(z,t)$ соотношением

$$E(0,t) = E_0(t) = \int_0^t A_0(\eta) e^{\frac{i(\eta - t)}{\gamma}} d\eta. \tag{9}$$

Таким образом, процесс распространения фемтосекундного импульса описывается уравнениями (5), (6) с начальным и граничными условиями (7)-(9). Заметим, что уравнение (6) является более удобным для численного моделирования, так как не содержит производной по времени от нелинейного отклика.

Анализируемая задача обладает ещё инвариантами:

$$I_1(z) = \int_0^{L_t} \left(i\left|E\right|^2 - i\gamma Im(E \frac{\partial E^*}{\partial t}) \right) dt = const, \tag{10}$$

$$I_2(z) = \int_0^{L_t} E A^* dt = const, \tag{11}$$

а также спектральным инвариантом[6]:

$$I_{SP}(z)=\int\limits_0^{L_t} Ae^{\frac{it}{\gamma}}dt=e^{\frac{iDz}{\gamma^2}}\int\limits_0^{L_t} A_0(t)e^{\frac{it}{\gamma}}dt, \quad I_{SP}(z)=I_{SP}(0)e^{\frac{iDz}{\gamma^2}}, \tag{12}$$

который в терминах функции $E(z,t)$ имеет вид:

$$E(z,L_t)=e^{\frac{iDz}{\gamma^2}}E_0(L_t). \tag{13}$$

2. Консервативная разностная схема. Запишем консервативную разностную схему (КРС) для задачи распространения фемтосекундного импульса в среде с кубичной нелинейностью с учетом временной производной от нелинейного отклика среды определим на сетке (14)

$$w_z=\{z_m=mh, m=\overline{0,N_z}, hN_z=L_z\}, w_t=\{t_n=n\tau, n=\overline{0,N_t}, \tau N_t=L_t\}. \tag{14}$$

сеточные функции A и E и введем следующие обозначения [3]:

$$\begin{aligned}
&A=A(z_m,t_n), \hat{A}=A(z_{m+1},t_n), A_{\pm1}=A(z_m,t_{n\pm1}), \overset{0.5}{A}=0.5(\hat{A}+A),\\
&E=E(z_m,t_n), \hat{E}=E(z_{m+1},t_n), E_{\pm1}=E(z_m,t_{n\pm1}), \overset{0.5}{E}=0.5(\hat{E}+E),\\
&\overset{0.5}{|A|^2}=0.5(|\hat{A}|^2+|A|^2), \Lambda_{\bar{t}t}u=\tfrac{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}{\tau^2}, n=1,...,N_t-1.
\end{aligned} \tag{15}$$

Тогда КРС для уравнений (5)-(8) запишется в виде [5]:

$$\frac{\hat{E}-E}{h}+iD\Lambda_{\bar{t}t}\overset{0.5}{E}+\alpha\gamma\overset{0.5}{|A|^2}\overset{0.5}{A}=0, \tag{16}$$

$$\frac{\overset{0.5}{E}_{+1}-\overset{0.5}{E}_{-1}}{2\tau}+\frac{i}{\gamma}\overset{0.5}{E}=\overset{0.5}{A}. \tag{17}$$

Уравнения (16), (17) необходимо дополнить разностными соотношениями в соответствующих граничных точках:

$$E_0=E_1=A_0=A_1=0, \tag{18}$$

$$\frac{\overset{0.5}{E}_{N_t}-\overset{0.5}{E}_{N_t-1}}{\tau}+\frac{i}{\gamma}\overset{0.5}{E}_{N_t}-\tau\frac{\overset{0.5}{E}_{N_t}}{\gamma^2}=0, \tag{19}$$

$$\frac{\hat{E}_{N_t}-E_{N_t}}{h}=\frac{iD}{\gamma^2}\overset{0.5}{E}_{N_t}. \tag{20}$$

Условия (19) и (20) аппроксимируют соответственно последнее условие в (7) и (8). Как следствие их имеем следующее разностное уравнения в граничной точке $n=N_t$:

$$\frac{\hat{E}_{N_t}-E_{N_t}}{h}-\frac{iD}{\tau}\left(\frac{\overset{0.5}{E}_{N_t}-\overset{0.5}{E}_{N_t-1}}{\tau}+\frac{i}{\gamma}\overset{0.5}{E}_{N_t}\right)=0, \tag{21}$$

которое используется при построении КРС.

Начальное условие для сеточной функции E задаётся в виде:

$$E(0,t_n)=E_0(t_n), \qquad n=0,...,N_t. \tag{22}$$

Так как построенная разностная схема (16) - (22) является нелинейной, то для её разрешения воспользуемся методом простой итерации:

$$\frac{(\overset{s+1}{\hat{E}} - E)}{h} + iD\Lambda_{\bar{t}t} \overset{s+1}{\overset{0.5}{E}} + \alpha\gamma|\overset{s}{\overset{0.5}{A}}|^2 \overset{s}{\overset{0.5}{A}} = 0, \quad \frac{\overset{s}{\overset{0.5}{E}}_{+1} - \overset{s}{\overset{0.5}{E}}_{-1}}{2\tau} + \frac{i}{2\gamma}(\overset{s}{\overset{0.5}{E}}_{+1} + \overset{s}{\overset{0.5}{E}}_{-1}) = \overset{s}{\overset{0.5}{A}}, \qquad (23)$$

$$\frac{\overset{s+1}{\hat{E}}_{N_t} - E_{N_t}}{h} - \frac{iD}{\tau}\left(\frac{\overset{s+1}{\overset{0.5}{E}}_{N_t} - \overset{s+1}{\overset{0.5}{E}}_{N_t-1}}{\tau} + \frac{i}{\gamma}\overset{s+1}{\overset{0.5}{E}}_{N_t}\right) = 0, \quad s = 0, 1, 2, \ldots \quad .$$

Значения функций на нулевой итерации (s=0) берутся с предыдущего слоя по z $\overset{s=0}{\hat{E}} = E$. Итерации в (23) прекращаются, если выполнено следующее условие

$$\max_n \left| \overset{s+1}{\hat{E}_n} - \overset{s}{\hat{E}_n} \right| \le \delta_1 \max_n \left| \overset{s}{\hat{E}_n} \right| + \delta_2, \quad \delta_1 > 0, \ \delta_2 = 10^{-2}\delta_1. \qquad (24)$$

Схема (16)-(22) консервативна. Она сохраняет, в частности разностные аналоги инвариантов:

$$I_1(z_m) = \sum_{n=1}^{N_t-1} \tau\{i|E|^2 - i\gamma Im(E\frac{E^*_{+1} - E^*_{-1}}{2\tau})\} = const, \qquad (25)$$

$$I_2(z_m) = \sum_{n=1}^{N_t-1} \tau A E^* = const. \qquad (26)$$

3. Результаты компьютерного моделирования. Эволюция распространения фемтосекундного импульса показана на рис. 1. Рассмотрим одновременно формирование оптической ударной волны и формирование аттосекундных импульсов полученных на фронте оптической ударной волны. Важно подчеркнуть, что скорость оптической ударной волны больше чем групповая скорость полученных субимпульсов. Однако, субимпульсы возникают только на ограниченной трассе. Более детальное распространение рассмотрим на рис. 2 . Как следует из рис.2, появляется несколько субимпульсов на трассе, длина которой (0.035;0.045). После некоторого значения продольной координаты ударная волна исчезает. Подобное преобразование лазерного импульса имеет место для различных параметров распространения, в частности при изменении дисперсии второго порядка и соответствующей временной дисперсии нелинейного отклика среды.

Рис. 1. Формирование оптической ударной волны и получение последовательности импульсов аттосекундной длительности при распространении первоначально Гауссова импульса для параметров D =0.1, α =10, γ =1.

Рис. 2. Детальное формирование оптической ударной волны и получение импульсов аттосекундной длительности в процессе распространения первоначально Гауссова импульса для параметров $D = 0.1$, $\alpha = 10$, $\gamma = 1$.

Основные результаты компьютерного моделирования: число импульсов может варьироваться в широком диапазоне с дисперсией второго порядка, с ростом длительности импульса число субимпульсов увеличивается. Линейная фазовая модуляция амплитуды начального распределения импульса не влияет на формирование оптической ударной волны и количество субимпульсов. Следовательно, можно сделать важный вывод - формирование оптической ударной волны и последовательности субимпульсов не зависит от влияния фазовой модуляции импульса, а изменяется только длина трассы, на которой формируются сверхкороткие импульсы.

В заключении отметим, что формирование аттосекундных импульсов с длительностью до 50 раз меньше первоначальной длительности, происходит из-за расширения спектра импульса при воздействии оптической ударной волны.

Настоящая работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 05-01-00507).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С.* Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М.: Наука, 1988.
2. *Агравал Г.П.* Нелинейная волоконная оптика. // Пер. с англ. М.: Мир, 1996.
3. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М., Наука, 1989.
4. *Трофимов В.А.* О новом подходе к моделированию распространения сверхкоротких лазерных импульсов // ЖВМиМФ. 1998. Т. 38. № 5. С. 835–839.
5. *Варенцова С.А., Волков А.Г., Трофимов В.А.* Консервативная разностная схема для задачи распространения фемтосекундного лазерного импульса в кубично нелинейной среде // ЖВМиМФ. 2003 . Т. 43. № 11. С. 1709–1721.
6. *Волков А.Г., Трофимов В.А.* О роли спектрального инварианта при компьютерном моделировании нелинейного распространения фемтосекундных импульсов //Вестник МГУ. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2005. № 1. С. 29–35.

СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, с. 50–54

УДК 517.956.2

О ВРЕМЕНИ САМООЧИЩЕНИЯ ЛЕГОЧНЫХ СТРУКТУР В ДОПУСТИМЫХ СРЕДАХ

© 2006 г. Ю. Г. Гераськина

ger_julia@mail.ru

Кафедра Математической теории интеллектуальных систем
Механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

В работе строится математическая модель легких человека, находится сложность (время) их самоочищения при произвольном начальном запылении легких и описываются все внешние среды, в которых легкие нормально функционируют.

Представим легкие полным дихотомическим ориентированным к корню деревом, которое будем называть *I-деревом* и обозначать D^{-1}, со следующими параметрами.

Пусть l, $l \in \mathbb{N}$, - глубина этого I-дерева. Считаем, что ребро I-дерева D^{-1}, инцидентное корню, имеет глубину 1.

Каждое ребро из D^{-1} разделено на n, $n \in \mathbb{N}$, равных частей, называемых *ресничками*, и занумерованных числами i, $i = 1, 2, \ldots, n$, возрастающими в направлении, обратном ориентации ребра.

Припишем каждому ребру глубины j, $j = 1, 2, \ldots, l$, два числа $2^{l-j}b$ и $2^{l-j}r$, где $b, r \in \mathbb{N}$ и $r \leq b$, называемых *максимальной нагрузкой* и *мерой переброса* ресничек ребер глубины j соответственно.

Такое I-дерево D^{-1} с описанными выше параметрами b, r, n и l обозначим $D^{-1}(b, r, n, l)$.

Свяжем с ним некоторый процесс, который назовем *процессом дыхания.* Он обусловлен рядом допущений.

Считаем, что в $D^{-1}(b, r, n, l)$ заданы распределения значений нагрузок по всем ресничкам, учитывая, что нагрузка может быть нулевой. Пусть V' — суммарная нагрузка по всем ресничкам, а V — максимально возможная суммарная нагрузка по всем ресничкам. V назовем *объемом I-дерева (легких)*, а V' — *исходным объемом загруженности I-дерева.*

I-дерево $D^{-1}(b, r, n, l)$ с исходным объемом загруженности V' обозначим $D^{-1}(b, r, n, l; V')$.

Пусть $\delta \in (0; 1]$, тогда *предельно допустимым порогом* будем называть объем загруженности I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l; V')$, равный $]\delta V[$, то есть наименьшему натуральному числу, не меньшему, чем δV. Далее будем писать δV вместо $]\delta V[$, считая, что $\delta V \in \mathbb{N}$.

Каждая ресничка осуществляет прием вещества извне и переброс своей нагрузки на следующую ресничку с меньшим номером внутри ребра.

Прием ресничкой вещества, имеющего массу d, $d \in \mathbb{N}_0$ и $d \leqslant V - V'$, из внешней среды внутри ребра осуществляется по следующему правилу (для этого правила ориентация считается обратной к заданной).

А$_1$) Если ресничка имеет максимальную нагрузку, то прием вещества не осуществляется.

Б$_1$) При немаксимальной нагрузке d_1 первой такой реснички она осуществляет прием вещества максимально возможной массы d_2, такой, что $d_1 + d_2 \leqslant \min(b, d)$, где b - максимальная нагрузка этой реснички.

В$_1$) Следующая за ресничкой из Б$_1$) принимает массу d_3, как и в Б$_1$), с заменой там d на $d - d_2$.

Г$_1$) Оставшаяся масса вещества опускается до следующей реснички с большим номером в ребре, для которой не выполняется условие А$_1$). Она осуществляет прием вещества по правилу В$_1$) или Б$_1$).

Д$_1$) Если ресничка в рассматриваемом ребре является последней, не удовлетворяющей условию А$_1$), то оставшаяся масса вещества делится пополам (если число нечетное, то одна из частей на единицу больше другой); и каждая из частей вещества воспринимается соответствующими ребрами, как описано выше.

Е$_1$) Процесс, описываемый позициями А$_1$)–Д$_1$), начинается с ребра, которое инцидентно корню.

Переброс ресничкой вещества осуществляется на следующую ресничку с меньшим номером внутри ребра по такому правилу.

А$_2$) Если следующая ресничка имеет не нулевую нагрузку, то переброс с реснички не осуществляется.

Б$_2$) Если нагрузка реснички не превосходит r, где r - ее мера переброса, и не выполнено условие А$_2$), то перебрасывается на следующую вся нагрузка реснички и считается, что ее нагрузка становится равной нулю.

В$_2$) Если на ресничке нагрузка m и $m > r$, то она перебрасывает на следующую ресничку нагрузку r и оставляет у себя нагрузку $m - r$.

Если ресничка в ребре последняя, то переброс нагрузки осуществляется по правилам А$_2$), Б$_2$), В$_2$).

Г$_2$) Если ребро инцидентно корню, то переброс с наименьшей по номеру реснички осуществляется в среду по правилам Б$_2$) и В$_2$) в предположении, что среда играет роль реснички с нулевой нагрузкой.

Д$_2$) Если ребро не инцидентно корню, то есть его вершина инцидентна следующему ребру, то нагрузка с наименьшей по номеру реснички этого ребра передается наибольшей по номеру ресничке другого ребра по правилам А$_2$), Б$_2$), В$_2$).

Считаем, что процесс дыхания осуществляется в дискретные моменты времени $t = 1, 2, 3, \ldots$

В первый момент I-дерево $D^{-1}(b, r, n, l; V')$ имеет заданное распределение нагрузок по его ресничкам.

Ко второму моменту осуществляется прием вещества массой $d(1)$ по правилам А$_1$)–Е$_1$), и затем осуществляется переброс нагрузок с реснички на ресничку во всем I-дереве или выброс в среду в соответствии с правилами А$_2$), Б$_2$), В$_2$), Г$_2$), Д$_2$). А если в легкие подается масса d, не превосходящая объема легких, то та ее часть, которая не осела на ресничках, выбрасывается в среду.

Другими словами, за один момент (шаг) происходит «вдох» и «выдох».

Если в каждый момент времени $t = 1, 2, 3, \ldots$ все реснички I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l; V')$ осуществляют прием вещества нулевой массы, то такой процесс называется *процессом самоочищения* этого I-дерева. Процесс самоочищения заканчивается в такой момент времени t, в котором нагрузки всех ресничек I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l; V')$ впервые стали равными нулю.

Под распределением загрузки V' I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l; V')$ будем понимать любое из возможных распределений нагрузок всех его ресничек таких, что суммарный объем их нагрузок равен V'. Ясно, что $V' \le V$, где V - объем I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l; V')$ и $V = 2^{l-1}bnl$. Такие распределения будем называть *конфигурациями* загрузки V'.

Пусть Q - множество всевозможных конфигураций загрузок V', $V' \le V$; Q_δ - подмножество всех таких конфигураций из Q, загрузки V' которых не превосходят предельно допустимого порога δV, где $0 < \delta \le 1$.

Введем функцию $L(b, r, n, l, V')$ для I-дерева $D^{-1}(b, r, n, l; V')$, которая равна наибольшему из времен, за которое заканчивается процесс самоочищения $D^{-1}(b, r, n, l; V')$ при произвольном начальном распределении загрузки V' этого I-дерева. Эту функцию обычно называют сложностной функцией Шеннона.

Теорема. *Если I-дерево $D^{-1}(b, r, n, l; V')$ имеет объем V, равный $2^{l-1}bnl$, где b, r, n, l, V, $V' \in \mathbb{N}$ и $0 < V' \le V$, то функция $L(b, r, n, l, V')$ в зависимости от значений параметров b, r, n, l и V' принимает следующие значения:*

а) если $(2^l - 1)bn \le V' \le V$, то $L(b, r, n, l, V') =]\frac{b}{r}[(2nl - 1)$;

б) если $0 < V' < (2^l - 1)bn$, то

при $r = 1$ имеем

если $V' \le bn$, то

$$L(b, 1, n, l, V') = \begin{cases} V' + b(n-1), & \text{\textit{если} } l = 1 \text{ \textit{и} } n =]\frac{V'}{b}[, \\ 2V' -]\frac{V'}{b}[+ nl - 1, & \text{\textit{иначе},} \end{cases}$$

если $bn < V' \leq bn + (l-1)n$, *то* $L(b,1,n,l,V') = V' + n(l+b-1) - 1$,
если $V' > bn + (l-1)n$, *то*

$$L(b,r,n,l,V') = \begin{cases}]\frac{b_{h_3}}{2^{l-1}}[+2b(nl-1), & \text{если } k_3 = 1 \text{ и } h_3 = 1, \\ 2\left(]\frac{b_{h_3}}{2^{l-k_3}}[+(b-1)(n(l-k_3+1)-h_3)+nl-\frac{3}{2}\right), & \text{иначе,} \end{cases}$$

при $r > 1$ *имеем*
если $V' \leq nl$, *то* $L(b,r,n,l,V') = V' + nl - 1$,
если $V' > nl$, *то*

$$L(b,r,n,l,V') = \begin{cases}]\frac{b_{h_3}}{2^{l-1}r}[+2]\frac{b}{r}[(nl-1), & \text{если } k_3 = 1 \text{ и } h_3 = 1, \\ 2\left(]\frac{b_{h_3}}{2^{l-k_3}r}[+(]\frac{b}{r}[-1)(n(l-k_3+1)-h_3)+nl-\frac{3}{2}\right), & \text{иначе,} \end{cases}$$

где

$$k_3 = 1 + [l - log_2(\tfrac{V'-nl}{(b-1)n} + 1)], \qquad h_3 = n -]\frac{V'-nl-(2^{l-k_3}-1)(b-1)n}{2^{l-k_3}(b-1)}[+1,$$

$$b_{h_3} = V' - nl - (2^{l-k_3}-1)(b-1)n - 2^{l-k_3}(b-1)(n-h_3) + 1.$$

Пусть A^m — множество всех слов $\alpha^m = a(1)a(2)\dots a(m)$, где $a(t) \in \mathbb{N}_V \cup \{0\}$ при $t = 1,2,\dots m$, на котором вводим отношение частичного порядка $\leqslant$, полагая $\alpha^m \leqslant \alpha'^m$, если $a(t) \leqslant a'(t)$ для всех $t = 1,2,\dots,m$.

Для I -дерева $D^{-1}(b,r,n,l;V')$ слово α^m из A^m назовем *допустимым*, если при подаче на него буквы $a(t)$ из α^m в каждый момент времени t всегда выполнено $a(t)+V(t) \leqslant \delta V$, где $V(t)$ — объем загруженности I -дерева $D^{-1}(b,r,n,l;V')$ в момент t , $t = 1,2,\dots,m$. Такое слово называется *предельно допустимым* для I -дерева $D^{-1}(b,r,n,l;V')$, если не существует допустимого слова α'^m из A^m такого, что $\alpha'^m \geqslant \alpha^m$ и $\alpha'^m \neq \alpha^m$.

Пусть $A^* = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A^m$, а A^ω — множество всех сверхслов (то есть слов бесконечной длины) $\alpha^\omega = a(1)a(2)\dots a(t)\dots$, где $a(t) \in \mathbb{N}_0$, на котором вводим отношение частичного порядка $\leqslant$, полагая $\alpha^\omega \leqslant \alpha'^\omega$, если $a(t) \leqslant a'(t)$ для всех t из $\mathbb{N}$.

Для I -дерева $D^{-1}(b,r,n,l;V')$ сверхслово α^ω из A^ω назовем *допустимым*, если при подаче на него буквы $a(t)$ из α^ω в каждый момент времени t всегда выполнено $a(t)+V(t) \leqslant \delta\mathbf{V}$, где $V(t)$ — объем загруженности I -дерева $D^{-1}(b,r,n,l;V')$ в момент t , $t = 1,2,\dots$ Такое сверхслово называется *предельно допустимым* для I -дерева $D^{-1}(b,r,n,l;V')$, если не существует допустимого сверхслова α'^ω из A^ω такого, что $\alpha'^\omega \geqslant \alpha^\omega$ и $\alpha'^\omega \neq \alpha^\omega$.

Ясно, что предельно допустимые сверхслова существуют. Например, при $\delta V \leqslant r$ сверхслово $(\delta V - V')\delta V \delta V \dots \delta V \dots$ является предельно допустимым.

Более того, можно показать, что для всякого допустимого сверхслова α^ω найдется предельно допустимое α'^ω такое, что $\alpha^\omega \leqslant \alpha'^\omega$.

Множество $A = A^* \cup A^\omega$ будем называть множеством квазислов. Распространим понятия допустимости и предельной допустимости на квазислова.

Нашей задачей будет описание всех допустимых квазислов, а также выяснение того, будут ли множества допустимых и предельно допустимых слов и сверхслов регулярны и общегерулярны, соответственно, в автоматном смысле [3].

Ясно, что, указав все предельно допустимые квазислова, мы тем самым опишем все множество допустимых квазислов.

Занумеруем все реснички I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l;V')$ таким образом, что ресничка с номером ijk является k -ой ресничкой j -го ребра глубины i , где $1 \leq i \leq l$, $1 \leq j \leq l-i$, $1 \leq k \leq n$, а нумерация ребер одной глубины идет слева направо. Тогда в каждый момент t конфигурацию загрузки $V'(t)$ в I-дереве $D^{-1}(b,r,n,l;V')$ можно задать набором

$$q(t)=(q_{111}(t),q_{112}(t),\dots,q_{ijk}(t),\dots,q_{l2^{l-1}n}(t))\,,$$

в котором каждая координата $q_{ijk}(t)$ равна нагрузке реснички с номером ijk в момент t, причем $0\le q_{ijk}(t)\le 2^{l-i}b$ и $\sum_{111}^{l2^{l-1}n} q_{ijk}(t)=V'(t)$.

Пусть конфигурации загрузки $V'(t)$ в каждый момент t изменяются по правилам $A_1)-E_1)$ и $A_2)-Д_2)$ под воздействием квазислов из $A^*\cup A^\omega$.

Процесс "дыхания" можно представить некоторым инициальным конечным автоматом [3] $A_{q_0}=(A,Q\cup q',\varphi,q_0)$ без выхода, где Q - множество таких конфигураций

$$q=(q_{111},q_{112},\dots,q_{ijk},\dots,q_{l2^{l-1}n})\,,$$

для которых выполнено $\sum_{111}^{l2^{l-1}n} q_{ijk}(t)\le V$, а q' - такое состояние автомата A_{q_0}, в которое он переходит под воздействием такой входной буквы $a(t)$, что загрузка $V'(t)$ I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l;V')$ в момент t после подачи этой буквы стала больше объема V этого I-дерева. Изменению конфигураций загрузок $V'(t)$ в каждый момент t по соответствующим правилам ставится в соответствие функция $\varphi: Q\times A\to Q$ переходов автомата A_{q_0}, которая доопределяется для состояния q' так: $\varphi(q',a)=q'$ для любой буквы a из A. Множеству Q_δ поставим в соответствие множество Q_δ таких состояний $q=(q_{111},q_{112},\dots,q_{ijk},\dots,q_{l2^{l-1}n})$ автомата A_{q_0}, для которых выполнено $\sum_{111}^{l2^{l-1}n} q_{ijk}(t)\le\delta V$.

Пусть проекция вектора q на координату ijk есть q_{ijk}, то есть $pr^{ijk}q=q_{ijk}$. Обозначим через $|q|$ сумму всех координат вектора q, то есть $|q|=\sum_{111}^{l2^{l-1}n} q_{ijk}$.

Введенный автомат $A_{q_0}=(A,Q\cup\{q'\},\varphi,q_0)$, где $q_0\in Q_\delta$, назовем *автоматом, ассоциированным с I-деревом* $D^{-1}(b,r,n,l;V')$.

Пусть $Q_{D^{-1}}(\delta V,b,r,n,l)$ - множество всех допустимых слов для I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l;V')$, $T_{D^{-1}}(\delta V,b,r,n,l)$ - множество всех предельно допустимых слов для I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l;V')$, $Q^\omega_{D^{-1}}(\delta V,b,r,n,l)$ - множество всех допустимых сверхслов для I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l;V')$ и $T^\omega_{D^{-1}}(\delta V,b,r,n,l)$ - множество всех предельно допустимых сверхслов для этого I-дерева.

Приведем вариант утверждения из [2], описывающего все множество $T_{D^{-1}}(\delta V,b,r,n,l)$, а, следовательно, и все множество $Q_{D^{-1}}(\delta V,b,r,n,l)$.

Теорема. *Слово $\alpha^m=a(1)a(2)\dots a(t)\dots a(m)$ из A^* принадлежит $T_{D^{-1}}(\delta V,b,r,n,l)$ точно тогда, когда для него выполнены следующие рекуррентные соотношения: а) для всех $t=1,\dots,m-1$ имеем*

$$a(t)\in\begin{cases}\{0\}\cup[2^{l-1}r,\ \delta V-|q(t)|], & \textit{если}\ (pr^{111}q(t)=0)\wedge(|q(t)|\ne 0),\\ [2^{l-1}r\dot{-}pr^{111}q(t),\ \delta V-|q(t)|], & \textit{иначе},\end{cases}$$

б) для $t=m$ имеем $a(m)=\delta V-|q(t)|$.

Удается также на автоматном языке описать множества $Q_{D^{-1}}(\delta V,b,r,n,l)$, $T_{D^{-1}}(\delta V,b,r,n,l)$, $Q^\omega_{D^{-1}}(\delta V,b,r,n,l)$ и $T^\omega_{D^{-1}}(\delta V,b,r,n,l)$.

Теорема. *Множества $Q_{D^{-1}}(\delta V,b,r,n,l)$ и $T_{D^{-1}}(\delta V,b,r,n,l)$ регулярны, а множества $Q^\omega_{D^{-1}}(\delta V,b,r,n,l)$ и $T^\omega_{D^{-1}}(\delta V,b,r,n,l)$ общерегулярны.*

Обозначим мощность множества $T^m_{D^{-1}}(\delta V,b,r,n,l)$ через $N(m)$.

Теорема. *Для $N(m)$ выполнены следующие соотношения:*
а) если $\delta V\le 2^{l-1}r$, то $N(m)=1$,
б) если $\delta V>2^{l-1}r$, то $log_2N(m)\asymp m$ при $m\to\infty$.

Автор выражает благодарность академикам Кудрявцеву Валерию Борисовичу и Чучалину Александру Григорьевичу за постановку задачи и научное руководство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гераськина Ю.Г.* Модель самоочищения легочных структур // Интеллектуальные системы 2002-2003. Т. 7, вып 1-4. С. 41–54.
2. *Гераськина Ю.Г.* Модель процесса дыхания живых организмов // Интеллектуальные системы 2003. Т. 8, вып 1-4. С. 429–456.
3. *Кудрявцев В.Б., Алёшин С.В., Подколзин А.С.* Введение в теорию автоматов. М. Наука. Физматлит. 1985. 320 с.

СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, с. 55–64

УДК 519.7:004.855.5

МЕТОД БЫСТРОЙ КЛАССИФИКАЦИИ МНОГОТЕМНЫХ ТЕКСТОВЫХ ДОКУМЕНТОВ

© 2006 г. В. В. Глазкова, М. И. Петровский

glazv@mail.ru, michael@cs.msu.su

Кафедра Автоматизации систем вычислительных комплексов

Лаборатория Технологий программирования

Введение. Задача классификации многотемных документов является одной из основных подзадач в проблеме фильтрации Web-трафика. В рамках этой проблемы классификация многотемных документов может применяться в целях:

- обеспечения контроля использования интернет-ресурсов на корпоративном уровне;
- предотвращения утечки конфиденциальной информации;
- осуществления мониторинга подозрительной и запрещённой активности пользователей.

Для построения классификатора многотемных документов используется коллекция обучающих документов, предварительно отрубрицированная человеком. Используя модель векторного пространства, каждый *документ* (текстовый или Web) будем представлять как вектор в про-странстве $\mathcal{X} = \mathrm{R}^n$ входных векторов, называемом пространством признаков: $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$. Будем называть документ *многотемным (multi-label)*, если он может быть отнесён более чем к одной теме (классу, категории), которые называются *уместными* для данного документа.

Алгоритм машинного обучения строит процедуру классификации документов, используя математические методы извлечения знаний из заданного набора обучающих документов, каждому из которых сопоставлен свой набор уместных тем из предопределённого набора тем. Обозначим этот набор возможных тем через $\mathcal{Y}$, а число различных тем в этом наборе обозначим через q (то есть $\mathcal{Y} = \{1, ..., q\}$, $q = |\mathcal{Y}|$). Выходное пространство для алгоритмов multi-label классификации будем рассматривать как пространство, образованное всеми наборами целых чисел от 1 до q. Такое выходное пространство состоит из 2^q различных наборов, и каждый выход соответствует одному набору тем.

Цель алгоритмов *multi-label классификации* состоит в том, чтобы на основе обучающей совокупности $S = \{(\vec{x}_i, y_i) | 1 \le i \le m, \vec{x}_i \in \mathrm{R}^n, y_i \subset \mathcal{Y}\}$ построить классифицирующую темы функцию $f : \mathcal{X} \to 2^q$, которая получает тестовый документ $\vec{x}$ и определяет уместные для него темы. Вывод алгоритмов multi-label классификации есть набор уместных тем $y \subset \mathcal{Y}$ (размер которого заранее не известен), и качество предсказания измеряется точностью определения этого набора.

Существующие методы классификации многотемных документов можно разделить на три группы:

1. методы, основанные на сведении multi-label проблемы к набору бинарных проблем [1];
2. методы multi-label классификации, основанные на оценке апостериорных вероятностей наборов тем [2,3];
3. методы multi-label классификации, основанные на методах ранжирования с порогом [1,4,5].

В *методах первой группы* используется подход “каждый-против-остальных”, создающий одну бинарную проблему для каждой из q тем. В бинарной проблеме для темы r все примеры, помеченные этой темой, считаются положительными, а все остальные примеры считаются отрицательными. Далее к каждой из q полученных бинарных проблем применяется бинарный алгоритм обучения. В результате получаются q гипотез, которые должны быть объединены. Однако бинарные подходы не учитывают семантические связи между различными темами классифицируемого документа и, следовательно, не всегда отражают структуру пробле-мы многотемной классификации. Поэтому имеет смысл развивать “настоящие” многотемные подхо-ды – группы методов 2 и 3.

Методы, основанные на оценке апостериорных вероятностей наборов тем, обеспечивают прямое определение наиболее вероятного набора тем, не прибегая к выбору пороговой функции. Однако такие методы могут быть недостаточно эффективны, когда количество тем q велико (так как исследование всех наборов требует 2^q вычислительных шагов), поэтому в этом случае необходимы приближённые схемы исследования пространства наборов тем.

Исследование существующих методов классификации многотемных документов применительно к задаче фильтрации Web-трафика показало, что эти методы недостаточно эффективны по времени и памяти.

1. Постановка задачи и построение решения. Цель данной работы – разработка метода классификации многотемных документов, удовлетворяющего специфике задачи фильтрации Web-трафика:

- большая размерность пространства признаков R^n (порядка количества слов в словаре);
- большая мощность набора $\mathcal{Y}$ возможных тем;
- большое количество документов в обучающем наборе;
- необходимость классификации в режиме online.

Ввиду специфики задачи фильтрации Web-трафика (количество тем q велико) и важности информации о ранжировании тем, для решения рассматриваемой задачи наиболее пригодны и эффективны методы multi-label классификации, основанные на методах ранжирования с порогом. Решение поставленной задачи на основе метода ранжирования с порогом можно представить в виде двух подзадач. Первая подзадача – построение функции ранжирования тем. Вторая подзадача – определение размера набора уместных тем для осуществления multi-label классификации, используя построенную функцию ранжирования.

В связи со спецификой задачи фильтрации Web-трафика для построения функции ранжирования был выбран алгоритм Multiclass-Multilabel Perceptron (MMP) [6], который позволяет работать в online-режиме и даёт хорошее качество ранжирования. Этот алгоритм осуществляется интерактивно на предоставленном обучающем наборе, и результирующий набор прототипов тем, полученный после одного прохода обучающих данных, используется как окончательная гипотеза для ранжирования тем новых документов. В силу своей интерактивности, MMP становится особенно удобен, когда обучающий набор очень большой, так как этот алгоритм требует небольшого объёма памяти. А в силу того, что результирующий набор прототипов тем определяется на фазе обучения и далее не изменяется, вычислительные затраты на этапе ранжирования новых документов невелики.

Этот метод ранжирования нами был модифицирован в метод multi-label классификации путём введения пороговой функции сначала в пространстве векторов релевантностей тем - пространстве векторов, координатами которых являются значения функции ранжирования тем для документов. Для задачи текстовой классификации размерность этого пространства в сотни раз меньше размерности пространства признаков, в котором ранее вводилась пороговая функция (A. Elisseeff, J. Weston, [4]). Однако метод multi-label классификации, предложенный в [4], неприменим для задачи текстовой классификации, ввиду того, что он требует в худшем случае количество памяти, пропорциональное mq^2 (m - количество обучающих документов, q - количество тем).

2. Описание и анализ выбранного метода ранжирования. Алгоритм Multiclass-Multilabel Perceptron (MMP) [6] заимствует основную идею алгоритма персептрона и обобщает её для более сложной проблемы ранжирования тем. Цель алгоритма MMP заключается в ранжировании тем для многотемных документов. Алгоритм ранжирования MMP поддерживает набор из q прототипов - $\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_q$. Аналогично представлению документов, каждый прототип - это вектор $\vec{w}_r \in \mathrm{R}^n$. Алгоритм MMP является *интерактивным* алгоритмом: он получает обучающий документ, производит ранжирование и модифицирует гипотезу, которую он поддерживает, - то есть набор прототипов $\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_q$. Это осуществляется для всех документов из обучающего набора $S = \{(\vec{x}_i, y_i) | 1 \le i \le m, \vec{x}_i \in \mathrm{R}^n, y_i \subset \mathcal{Y}\}$.

Ранжирование тем осуществляется набором прототипов в соответствие с их близостью с вектором данного документа. То есть, задавая документ $\vec{x}$, скалярные произведения $\vec{w}_1 \cdot \vec{x}$, $\vec{w}_2 \cdot \vec{x}, ..., \vec{w}_q \cdot \vec{x}$ производят упорядочение уровня релевантности каждой темы. Считается, что тема r *ранжируется выше*, чем тема s , если $\vec{w}_r \cdot \vec{x} > \vec{w}_s \cdot \vec{x}$. Задавая набор уместных тем y для документа $\vec{x}$, определим, что ранжирование, произведённое прототипами, *совершенно*, если все уместные темы ранжируются выше, чем неуместные темы. При совершенном ранжировании для любых пар тем $r \in y$ и $s \notin y$ $(s \in \mathcal{Y} \backslash y)$ оценки, произведённые $\vec{w}_r$, выше, чем оценки, произведённые $\vec{w}_s$, то есть $\vec{w}_r \cdot \vec{x} > \vec{w}_s \cdot \vec{x}$. Определим *качество совершенного ранжирования тем* размером промежутка между самой низкой оценкой среди уместных тем и самой высокой оценкой среди неуместных тем: $\min\limits_{r \in y}\{ \vec{w}_r \cdot \vec{x}\} - \max\limits_{s \notin y}\{ \vec{w}_s \cdot \vec{x}\}$.

Ранжированием $rank(\vec{x}, r)$ *темы* r относительно документа $\vec{x}$, произведённым скалярными произведениями $\vec{w}_1 \cdot \vec{x}, \vec{w}_2 \cdot \vec{x}, ..., \vec{w}_q \cdot \vec{x}$ между векторами прототипов и вектором документа, назовём индекс темы r в списке тем, отсортированных в порядке убывания этих скалярных произведений. То есть $rank(\vec{x}, r) = j$, если $|\{s : \vec{w}_s \cdot \vec{x} > \vec{w}_r \cdot \vec{x}\}| = j$. Фактически, $rank(\vec{x}, r)$ показывает, насколько уместна тема r относительно документа $\vec{x}$. Обозначим $R = (rank(\vec{x}, 1), ..., rank(\vec{x}, q))$ - ранжирование всех тем относительно документа $\vec{x}$, полученное применением прототипов $\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_q$ к документу $\vec{x}$.

Рассматриваемый алгоритм работает итерационно. На итерации i интерактивный алгоритм обучения получает документ $\vec{x}_i$. Для документа $\vec{x}_i$, алгоритм обучения производит ранжиро-вание $R_i = (rank(\vec{x}_i, 1), ..., rank(\vec{x}_i, q))$, которое осуществляется скалярными произведениями $\vec{w}_1^i \cdot \vec{x}_i, \vec{w}_2^i \cdot \vec{x}_i, ..., \vec{w}_q^i \cdot \vec{x}_i$. Далее алгоритм получает правильный набор уместных тем y_i . Получая y_i и предсказанное ранжирование тем R_i , алгоритм вычисляет соответствующую ошибку ранжирования – так называемую *потерю*, - обозначаемую $l_i = loss(y_i, R_i)$. Если $l_i = 0$, то алгоритм не изменяет набор используемых прототипов. Иначе он обновляет правило ранжиро-вания, изменяя набор прототипов $\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_q$ пропорционально потере l_i . Цель интерактив-ного алгоритма ранжирования тем заключается в том, чтобы свести к нулю совокупную потерю $\sum\limits_i l_i$. Нулевая совокупная потеря достигается на наборе прототипов $\vec{w}_1^*, \vec{w}_2^*, ..., \vec{w}_q^*$, чьё предсказанное ранжирование всегда совершенно.

Описываемый алгоритм использует понятие ошибки, основанное на исследовании всех пар тем. Всякий раз, когда $l_i = loss(y_i, R_i) > 0$ и предсказанное ранжирование несовершенно, должно быть не менее одной пары тем (r, s) , чьё упорядочение, согласно предсказанному ранжированию R_i , не согласуется с набором уместных тем y_i , то есть тема r ранжируется не выше темы s $(\vec{w}_r^i \cdot \vec{x}_i \le \vec{w}_s^i \cdot \vec{x}_i)$, но тема r - одна из уместных тем, в то время как тема s не уместна $(r \in y_i, s \notin y_i)$.Следовательно, *набор ошибок* для $(\vec{x}_i, y_i)$ определяется как набор всех пар, предсказанное ранжирование которых не согласуется с набором уместных тем для документа:

$$E_i = \left\{(r, s) \in y_i \times (\mathcal{Y}/y_i) : \vec{w}_r^i \cdot \vec{x}_i \le \vec{w}_s^i \cdot \vec{x}_i\right\}$$

Теперь опишем, как в алгоритме MMP осуществляется обновление прототипов. Сначала предположим, что на каждом документе, для которого предсказанное ранжирование тем не совершенно, претерпеваемая потеря l_i равна единице (для совершенного ранжирования потеря равна нулю). Ограниченность потери l_i при несовершенном ранжировании следует из теоремы об ограниченности совокупной ошибки ранжирования [6].

Набор ошибок E_i играет главную роль в обновлении прототипов. Алгоритм MMP перемещает каждый прототип, соответствующий уместной теме из набора ошибок к документу $\vec{x}_i$ и, аналогично, каждый прототип, соответствующий неуместной теме из набора ошибок, от документа $\vec{x}_i$. Однако, может быть довольно много тем, которые ранжируются правильно. Эти темы включают все уместные темы, которые ранжированы наверху списка тем (выше всех неуместных тем), и неуместные темы, ранжированные внизу списка (ниже любой уместной темы). По определению, индексы неправильно упорядоченных пар тем составляют набор оши-бок. Для каждой пары (r, s) уместной и неуместной тем из набора ошибок назначается вес, обозначаемый $\alpha^i_{r,s}$. Полагается, что веса $\alpha^i_{r,s} = 0$ для пар тем, не принадлежащих набору ошибок. Налагается два довольно общих ограничения на $\alpha^i_{r,s}$. Первое - неотрицательность каждого $\alpha^i_{r,s}$. Второе – ограничение суммы всех $\alpha^i_{r,s}$ единицей. Задавая конкретный набор значений $\alpha^i_{r,s}$, который удовлетворяет ограничениям, определим теперь значение, на которое прототип каждой уместной темы из набора ошибок перемещается по направлению к документу $\vec{x}_i$ и, аналогично, значение, на которое прототип каждой неуместной темы из набора ошибок отодвигается от документа $\vec{x}_i$.Для уместной темы r $(r \in y_i)$ определим $\tau^i_r = \sum\limits_{s \notin y_i} \alpha^i_{r,s}$ и прибавим к $\vec{w}^i_r$ текущий обучающий документ $\vec{x}_i$, отмасштабированный τ^i_r, то есть $\vec{w}^{i+1}_r := \vec{w}^i_r + \tau^i_r \vec{x}_i$. Поэтому уместные темы, предсказанный ранг которых низкий, будут перемещены более активно к $\vec{x}_i$ по сравнению с уместными темами, предсказанный ранг которых относи-тельно высок. Точно так же неуместные темы отодвигаются от $\vec{x}_i$ в различных пропорциях, в зависимости от того, как высоко они неправильно ранжированы. Общий вид этого обновления прототипов увеличивает значение скалярных произведений между $\vec{x}_i$ и прототипами уместных тем из набора ошибок и, аналогично, уменьшает значения скалярных произведений между $\vec{x}_i$ и прототипами неуместных тем из набора ошибок.

Модификация алгоритма для общего случая ограниченных потерь довольно проста. Умножим каждое из значений τ^i_r и τ^i_s на потерю l_i. Тогда значение, на которое изменяются прототипы, будет зависеть от того, как хорошо (или плохо) выполнено предсказанное ранжирование. На итерациях, где предсказанное ранжирование довольно плохое, прототипы изменяются более активно.

В алгоритме MMP понятие граничной полосы довольно неявное, однако, оно играет важную роль при анализе алгоритма. При анализе качества ранжирования используется понятие обоб-щённой граничной полосы [6]. *Граничная полоса* относительно набора прототипов $\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_q$ *на всём обучающем наборе* S определяется как минимальная граничная полоса, достигаемая на документах из S:

$$\gamma_S = \min_{(\vec{x},y)\in S} \left\{ \min_{r \in y} \{ \vec{w}_r \cdot \vec{x} \} - \max_{s \notin y} \{ \vec{w}_s \cdot \vec{x} \} \right\}$$

На рис. 1. показана граничная полоса в случае совершенного ранжирования (слева) и несовершенного ранжирования (справа). В обоих случаях рассматривается 9 различных тем. Уместные темы помечены кружочками, а неуместные - квадратиками. Значение граничной полосы - это длина стрелки, причём положительное значение обозначается стрелкой, указывающей вниз, а отрицательное значение граничной полосы - стрелкой, указывающей вверх.

Рис. 1. Иллюстрация понятия граничной полосы для совершенного ранжирования (слева) и несовершенного (справа).

3. Предложенное решение нахождения пороговой функции в пространстве векторов релевантностей тем для определения размера набора уместных тем. Пусть $\vec{r}(\vec{x}) = (r_1(\vec{x}), ..., r_q(\vec{x}))$ - функция ранжирования тем (например, для алгоритма MMP эта функция имеет вид $\vec{r}(\vec{x}) = (\vec{w}_1 \cdot \vec{x}, ..., \vec{w}_q \cdot \vec{x}))$. Обозначим через $s(\vec{x})$ размер набора уместных тем для документа $\vec{x}$. Будем считать, что тема l принадлежит набору уместных тем для $\vec{x}$, если $r_l(\vec{x})$ есть среди $s(\vec{x})$ наибольших элементов $(r_1(\vec{x}), r_2(\vec{x}), ..., r_q(\vec{x}))$. Для преобразования методов ранжирования в методы multi-label классификации необходим предсказатель размера $s(\vec{x})$ набора тем, уместных для документа $\vec{x}$. Решение этой подзадачи [4] может быть найдено по аналогии с бинарным подходом. Бинарный подход может интерпретироваться как система ранжирования, ранги которой получаются, исходя из действительных значений $(f_1, ..., f_q)$, произведённых функцией бинарной классификации. Тогда предсказатель размера набора уместных тем весьма прост: $s(\vec{x}) = |\{f_l(\vec{x}) > 0\}|$ - количество значений f_l, которые больше 0. То есть функция $s(\vec{x})$ вычисляется на основе порогового значения, которое отличает одни темы от других.

Для подхода ранжирования можно обобщить эту идею, используя функцию $s(\vec{x}) = |\{r_l(\vec{x}) > t(\vec{x})\}|$, то есть функция $s(\vec{x})$ вычисляется на основе порогового значения, которое отличает значения, произведённые функцией ранжирования для одних тем, от соответствующих значений для других тем. Тогда для полного решения всей multi-label задачи остаётся выбрать порог $t(\vec{x})$. Однако, заметим, что метод построения пороговой функции в пространстве признаков [4] наиболее подходит (по критерию скорости работы) для задач с невысокой размерностью пространства признаков. Для задач текстовой классификации размерность n пространства признаков порядка количества слов в словаре данного языка. Ввиду этого исполь-зование пороговой гиперплоскости в пространстве признаков (для модификации метода ранжи-рования в метод multi-label классификации) не обеспечивает скорости работы, необходимой для online-фильтрации.

Для сокращения времени обучения нами предлагается находить пороговую функцию не в n-мерном пространстве признаков, а в q-мерном пространстве векторов релевантностей тем ($q << n$), то есть в пространстве векторов, координатами которых являются значения функции ранжирования тем для документов. Например, для метода MMP предлагается находить пороговую гиперплоскость в пространстве скалярных произведений $\overrightarrow{dp_i} = (\vec{w}_1 \cdot \vec{x}_i, ..., \vec{w}_q \cdot \vec{x}_i)$ между прототипами тем и вектором документа.

Опишем процесс определения пороговой функции (гиперплоскости) в пространстве векторов релевантностей тем.

Для каждого из обучающих документов находится пороговое значение $t(\overrightarrow{dp_i})$. Это делается следующим образом. Сначала вычисляется значение функции ранжирования $\overrightarrow{dp_i} \equiv \vec{r}(\vec{x}_i) = (r_1(\vec{x}_i), ..., r_q(\vec{x}_i))$; затем значения $r_1(\vec{x}_i), ..., r_q(\vec{x}_i)$ упорядочиваются в порядке возрастания: $r_{j_1}(\vec{x}_i), ..., r_{j_q}(\vec{x}_i)$ и наносятся на числовую ось t. Затем мы ищем значение $t\left(\overrightarrow{dp_i}\right)$, при котором достигается минимум целевой функции - количества неправильно классифицированных уместных и неуместных тем. Так как на каждом из полусегментов $[r_{j_k}(\vec{x}_i), r_{j_k+1}(\vec{x}_i))$, $k = 1, ..., q-1$ целевая функция $|l \in y_i : r_l(\vec{x}_i) \le t\}| + |\{l \in \bar{y}_i : r_l(\vec{x}_i) > t\}|$ принимает постоянное для данного полусегмента значение, то минимум ищется при значениях t, соответствующих серединам отрезков $[r_{j_k}(\vec{x}_i), r_{j_k+1}(\vec{x}_i)]$, $k = 1, ..., q-1$. То есть значение $t\left(\overrightarrow{dp_i}\right)$ находится следующим образом:

$$t\left(\overrightarrow{dp_i}\right) = \arg \min_{t \in \left\{\frac{r_{j_{k+1}}(\vec{x}_i) - r_{j_k}(\vec{x}_i)}{2},\ k=1,...,q-1\right\}} (|\{l \in y_i : r_l(\vec{x}_i) \le t\}| + |\{l \in \bar{y}_i : r_l(\vec{x}_i) > t\}|).$$

Далее, по значениям $t(\overrightarrow{dp_i})$ находим коэффициенты $a_1, a_2, ..., a_q, a_{q+1}$ пороговой интерполирующей гиперплоскости $t\left(\overrightarrow{dp}\right) = a_1 \cdot r_1(\vec{x}) + ... + a_q \cdot r_q(\vec{x}) + a_{q+1}$ (для этого используется линейный метод наименьших квадратов для многомерного случая в пространстве размерности q).

Имея пороговую функцию (гиперплоскость) $t(\overrightarrow{dp})$, размер $s(\vec{x}_{test})$ набора уместных тем для тестового документа $\vec{x}_{test}$ определяется следующим образом. Сначала вычисляется значение функции ранжирования $\overrightarrow{dp}_{test} = \vec{r}(\vec{x}_{test}) = (r_1(\vec{x}_{test}), ..., r_q(\vec{x}_{test}))$; затем значения $r_1(\vec{x}_{test}), ..., r_q(\vec{x}_{test})$ подставляются в пороговую функцию: $t\left(\overrightarrow{dp_{test}}\right) = a_1 \cdot r_1(\vec{x}_{test}) + ... + a_q \cdot r_q(\vec{x}_{test}) + a_{q+1}$. Размер набора уместных тем равен количеству тем, для которых значение функции ранжирования больше порога: $s(\vec{x}_{test}) = \left|\left\{l | r_l(\vec{x}_{test}) > t\left(\overrightarrow{dp_{test}}\right), l \in \mathcal{Y}\right\}\right|$.

4. Псевдокод разработанного метода multi-label классификации.

Вход: $S = \{(\vec{x}_i, y_i) | 1 \le i \le m, \vec{x}_i \in \mathrm{R}^n, y_i \subset \mathcal{Y}\}$ - обучающая совокупность,
m – количество обучающих документов,
q – количество тем,
$\vec{x}_{test} \in \mathrm{R}^n$ – тестовый документ.
4.1. Найти функцию ранжирования тем по алгоритму MMP
Инициализация: $\vec{w}_1^1 := 0, ..., \vec{w}_q^1 := 0$
Цикл обучения: **for** $i = 1, 2, ..., m$ **do**
Получить обучающий документ $\vec{x}_i \in \mathrm{R}^n$
Вычислить $\vec{w}_1^i \cdot \vec{x}_i, \vec{w}_2^i \cdot \vec{x}_i, ..., \vec{w}_q^i \cdot \vec{x}_i$
Вычислить предсказанное ранжирование $R_i := (rank(\vec{x}_i, 1), ..., rank(\vec{x}_i, q))$
Получить набор уместных тем $y_i \subset \mathcal{Y}$
Определить $E_i := \left\{(r, s) \in y_i \times (\mathcal{Y}/y_i) : \vec{w}_r^i \cdot \vec{x}_i \le \vec{w}_s^i \cdot \vec{x}_i\right\}$
Вычислить потерю $l_i = loss(y_i, R_i) := \begin{cases} 1, & |E_i| \ne \emptyset \\ 0, & otherwise \end{cases}$
Если $l_i > 0$, то изменить прототипы (иначе $\forall p\ \vec{w}_p^{i+1} := \vec{w}_p^i$)
1. Сформировать набор параметров $\alpha_{r,s}^i$, удовлетворяющий ограничениям:

$$\begin{aligned} &(a)\ \alpha_{r,s}^i \ge 0 \\ &(b)\ \text{if } (r, s) \notin E_i,\ \alpha_{r,s}^i = 0 \\ &(c)\ \sum_{r \in y} \sum_{s \notin y} \alpha_{r,s}^i = 1 \end{aligned}$$

2. Вычислить

$$\textbf{For } p = 1, 2, ..., q \textbf{ do}:$$
$$\tau_p^i := \begin{cases} l_i \sum\limits_{s \notin y_i} \alpha_{p,s}^i, & p \in y_i \\ -l_i \sum\limits_{r \in y_i} \alpha_{r,p}^i, & p \notin y_i \end{cases}$$

3. Модифицировать прототипы

$$\textbf{For } p = 1, 2, ..., q \textbf{ do}:$$
$$\vec{w}_p^{i+1} := \vec{w}_p^i + \tau_p^i \vec{x}_i$$

Результат: $\vec{r}(\vec{x}) = (r_1(\vec{x}), ..., r_q(\vec{x})) = (\vec{w}_1^{m+1} \cdot \vec{x}, ..., \vec{w}_q^{m+1} \cdot \vec{x})$ - функция ранжирования тем

4.2. Найти пороговые значения $t\left(\overrightarrow{dp_i}\right)$ для обучающих документов

for i=1,2,...,m **do**
Вычислить $\overrightarrow{dp}_i := \vec{r}(\vec{x}_i) = (r_1(\vec{x}_i), ..., r_q(\vec{x}_i)) = (\vec{w}_1^{m+1} \cdot \vec{x}_i, ..., \vec{w}_q^{m+1} \cdot \vec{x}_i)$
Упорядочить значения $r_1(\vec{x}_i), ..., r_q(\vec{x}_i)$ по возрастанию: $r_{j_1}(\vec{x}_i), ..., r_{j_q}(\vec{x}_i)$
Вычислить

$$t\left(\overrightarrow{dp_i}\right) := \arg \min_{t \in \left\{\frac{r_{j_{k+1}}(\vec{x}_i) - r_{j_k}(\vec{x}_i)}{2},\ k = 1, ..., q-1\right\}} \left(|\{l \in y_i : r_l(\vec{x}_i) \le t\}| + |\{l \in \bar{y}_i : r_l(\vec{x}_i) > t\}|\right)$$

4.3. Найти коэффициенты $a_1, a_2, ..., a_q, a_{q+1}$ пороговой интерполирующей гиперплоскости по значениям $t(\overrightarrow{dp_i})$ линейным методом наименьших квадратов в пространстве размерности q.

4.4. Определить размер $s(\vec{x}_{test})$ набора уместных тем для тестового документа $\vec{x}_{test}$

Вычислить $\overrightarrow{dp}_{test} := \vec{r}(\vec{x}_{test}) = (r_1(\vec{x}_{test}), ..., r_q(\vec{x}_{test})) = (\vec{w}_1^{m+1} \cdot \vec{x}_{test}, ..., \vec{w}_q^{m+1} \cdot \vec{x}_{test})$

Упорядочить значения $r_1(\vec{x}_{test}), ..., r_q(\vec{x}_{test})$ по убыванию $r_{j_1}(\vec{x}_{test}), ..., r_{j_q}(\vec{x}_{test})$

Найти порог $t\left(\overrightarrow{dp_{test}}\right) := a_1 \cdot r_1(\vec{x}_{test}) + ... + a_q \cdot r_q(\vec{x}_{test}) + a_{q+1}$

Найти $s(\vec{x}_{test}) := \left|\left\{l | r_l(\vec{x}_{test}) > t\left(\overrightarrow{dp_{test}}\right), l \in \mathcal{Y}\right\}\right|$

Вывод: $y_{test} = \left\{j_1, ..., j_{s(\vec{x}_{test})}\right\}$ - **набор уместных тем для документа** $\vec{x}_{test}$

5. Критерии оценки качества ранжирования и точности multi-label классификации. Пусть $Test = \{(\vec{x}_i, y_i) | 1 \le i \le m,\ \vec{x}_i \in \mathrm{R}^n,\ y_i \subset \mathcal{Y}\}$ - совокупность тестовых документов. Пусть система обучения производит функцию ранжирования $r : \mathrm{R}^n \times \mathcal{Y} \to \mathrm{R}$, упорядочивающую темы из $\mathcal{Y}$ в соответствии с их релевантностью для документа $\vec{x}$ (чем больше $r(\vec{x}, l)$, тем более тема l уместна). Пусть $rank(\vec{x}, l)$ - ранжирование темы l относительно документа $\vec{x}$, произведённое функцией ранжирования r, т.е. $rank(\vec{x}, l)$ - это индекс темы l в списке тем, отсортированных в порядке убывания функции ранжирования.

Рассмотрим сначала следующие четыре общепринятые критерия оценки *качества ранжирования* [6] для multi-label постановки задачи.

One Error. Значение ошибки *OneError* для одного документа устанавливается в 1, если тема, ранжированная выше всех, не является одной из уместных тем, и в ноль в противном случае. Поэтому, ошибка по всей тестовой совокупности $OneError_{Test}$ отражает долю докумен-тов, для которых тема, ранжированная выше всех, не принадлежит набору уместных тем:

$$OneError_{Test} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} OneError(\vec{x}_i),\ \text{где}\ OneError(\vec{x}_i) = \begin{cases} 1, & \arg\min_{l \in \mathcal{Y}} rank(\vec{x}_i, l) \notin y_i \\ 0, & otherwise \end{cases}.$$

Чем меньше значения $OneError_{Test}$, тем лучше качество ранжирования. Заметим, что для проблемы single-label классификации $OneError_{Test}$ идентична обычной ошибки классификации.

Average Precision. Второй критерий оценки качества ранжирования – Average Precision (AvgP): $AvgP_{Test} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} AvgP(\vec{x}_i)$, Значение точности $AvgP(\vec{x}_i)$ для одного документа измеряет среднюю долю уместных тем в ранжированном списке тем (среднее берётся по всем позициям уместных тем в ранжированном списке): $AvgP(\vec{x}_i) = \frac{1}{|y_i|}\sum_{l \in y_i} \frac{|\{l' \in y_i : r(\vec{x}_i, l') \ge r(\vec{x}_i, l)\}|}{|\{l' \in \mathcal{Y} : r(\vec{x}_i, l') \ge r(\vec{x}_i, l)\}|}$. Чем выше значение $AvgP_{Test}$, тем лучше качество ранжирования и при совершенном ранжировании $AvgP_{Test} = 1$.

Coverage. Значение ошибки *Coverage* отражает, как далеко необходимо спуститься по отранжированному списку тем, чтобы найти все уместные темы:

$$Coverage_{Test} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Coverage(\vec{x}_i),\ \text{где}\ Coverage(\vec{x}_i) = \max_{l \in y_i} rank(\vec{x}_i, l).$$

Чем меньше *Coverage*, тем лучше качество ранжирования.

Ranking Loss. Значение ошибки Ranking Loss (RL) представляет среднюю долю пар тем, которые некорректно упорядочены:

$$RL_{Test} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{|y_i||\bar{y}_i|} RL(x_i),\ \text{где}\ RL(\vec{x}_i) = |\{(l, s) \in y_i \times \bar{y}_i : r(\vec{x}_i, l) \le r(\vec{x}_i, s)\}|,\quad \bar{y}_i = \mathcal{Y}/y_i.$$

Чем меньше значение RL_{Test}, тем лучше качество ранжирования.

Для оценки *точности multi-label классификации* обычно используется критерий **Hamming Loss** [2], который оценивает различие между предсказанным и истинным наборами тем:

$HL_{Test}(f) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{|\mathcal{Y}|}\left|(f(\vec{x}_i))\nabla(y_i)\right|,$

где $a\nabla b = (a\cup b)\backslash(a\cap b),\ a\subseteq\mathcal{Y}, b\subseteq\mathcal{Y}$;
$f(\vec{x})$ – функция multi-label классификации, которая может быть выражена через функцию ранжирования следующим образом: $f(\vec{x}) = \{l|r(\vec{x},l) > t(\vec{x}), l\in\mathcal{Y}\}$, где $t(\vec{x})$ - пороговая функция. Чем меньше значение $HL_{Test}(h)$, тем лучше точность multi-label классификатора.

6. Эксперименты. Тестирование разработанного метода multi-label классификации проводилось на наборе данных Reuters-2000. Число различных тем, к которым классифицированы документы этого набора, равно 101. Каждый документ в этом наборе помечается множеством уместных для него тем. Средняя мощность этого множества для набора Reuters-2000 равна 3.2 . Для тестирования нашего метода мы использовали подмножества (1 случай - 3000 обучающих, 3000 тестовых документов; 2 случай - 15000 обучающих, 15000 тестовых документов) набора Reuters-2000 в векторном представлении, доступного на сайте [7]. Подмножества обучающих и тестовых документов в каждом из случаев не пересекаются. Размерность пространства признаков для этого векторного представления равна 47236. Результаты тестирования приведены в таблицах 1 и 2 (расчёты проводились на Intel Pentium 4 (3.0 GHz), 500 MB RAM).

Экспериментальное подтверждение преимущества нахождения пороговой функции в пространстве векторов релевантностей тем. Как видно из таблицы 1, разработанный метод показывает сокращение во времени обучения функции классификации в случае нахождения пороговой функции в пространстве векторов релевантностей тем, по сравнению с нахождением пороговой функции в пространстве признаков. Это обусловлено тем, что в первом случае отыскание разделяющей гиперплоскости линейным методом наименьших квад-ратов осуществляется в пространстве примерно в 500 раз меньшей размерности, чем во втором случае. Заметим, что переход из пространства признаков в пространство векторов релевантнос-тей тем также позволяет получить преимущество по объёму памяти, необходимой для работы алгоритмов. При этом результаты multi-label классификации, оцененные с помощью критерия Hamming Loss, близки по точности. Из таблицы 1 также видно, что на этапе тестирования новых документов разработанный метод работает в режиме online.

Таблица 1. Сравнение времени обучения и точности multi-label классификации существующего и разработанного методов преобразования методов ранжирования в методы классификации многотемных документов

	Алгоритм MMP (с пороговой функцией в пространстве признаков)	Алгоритм MMP (с пороговой функцией в пространстве векторов релевантностей тем)
Время обучения на 3000 документов	7 минут	5.9 минут
Hamming Loss (3000/3000)	0.0157	0.0155
Время обучения на 15000 документов	55 минут	45 минут
Hamming Loss (15000/15000)	0.0123	0.0126
Время классификации	0.033 секунды на документ	0.031 секунды на документ

Зависимость качества ранжирования и точности multi-label классификации разработанного метода от размера обучающего набора. В таблице 2 приведены результаты сравнения качества ранжирования и точности multi-label классификации предложенного мето-да (с пороговой функцией в пространстве векторов релевантностей тем) в зависимости от размера обучающего набора. Как видно из таблицы, все критерии улучшаются с увеличением размера обучающего набора.

Таблица 2. Зависимость качества ранжирования и точности multi-label классификации от размера обучающего набора

$Reuters - 2000(101 - topic, 47236 - feature)$					
Набор данных (обучающие/ тестовые документы)	$OneError$	$Average$ $Precision$	$Coverage$	$RankingLoss$	$Hamming$ $Loss$
1000/1000	0.1880	0.7728	11.6220	0.0405	0.0181
2000/2000	0.1220	0.8260	8.2635	0.0252	0.0158
3000/3000	0.1247	0.8364	8.1053	0.0241	0.0155
7000/7000	0.0841	0.8684	6.9226	0.0183	0.0141
10000/10000	0.0774	0.8841	6.1572	0.0155	0.0131
15000/15000	0.0657	0.8959	5.6571	0.0137	0.0126

7. Заключение. В данной статье предлагается метод классификации многотемных текстовых документов, который позволяет работать в online-режиме и при этом даёт хорошее качество классификации и использует небольшой объём памяти. Разработанный метод классификации многотемных документов удовлетворяет специфике задачи фильтрации Web-трафика. Для эффективного решения подзадачи определения размера набора уместных тем нами предлагается находить пороговую функцию в пространстве векторов релевантностей тем (для задачи текстовой классификации размерность этого пространства в сотни раз меньше размерности пространства признаков).

Заметим, что выбранный метод ранжирования MMP применим только для задач, в которых мера сходства – скалярное произведение, но задача классификации текстовых и Web-докумен-тов – одна из них.

Основные достоинства разработанного метода следующие. Во-первых, универсальность, ввиду возможности выбора метода ранжирования, пригодного именно для рассматриваемого класса задач. Во-вторых , предложенное решение нахождения пороговой функции в пространстве векторов релевантностей тем сокращает время обучения (по сравнению с нахождением пороговой функции в пространстве признаков), особенно для задач очень большой размерности.

Настоящая работа поддерживается грантом президента РФ МК-2111.2005.9 и грантами РФФИ 06-01-00691, 05-01-00744.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schapire R. E., Singer. Y.* BoosTexter: A boosting-based system for text categorization //Machine Learning, 2000, №39(2/3), pp. 135-168.

2. *Zhang M.-L., Zhou Z.-H.* A k-nearest neighbor based algorithm for multi-label classification //Proceedings of the 1st IEEE International Conference on Granular Computing (GrC'05), Beijing, China, 2005, pp.718-721.

3. *McCallum A.* Multi-label text classification with a mixture model trained by EM //Working Notes of the AAAI'99 Workshop on Text Learning, Orlando, FL, 1999.

4. *Elisseeff A., Weston J.* Kernel methods for multi-labelled classification and categorical regression problems //Technical report, BIOwulf Technologies, 2001. www.kyb.tuebingen.mpg.de/bs/people/weston/mlab.ps

5. *Comite F. D., Gilleron R., Tommasi M.* Learning multi-label altenating decision tree from texts and data //Lecture Notes in Computer Science 2734, 2003, pp. 35–49.

6. *Crammer C., Singer Y.* A family of additive online algorithms for category ranking //Journal of Machine Learning Research, 2003, №3, pp. 1025–1058.

7. *A Library for Support Vector Machines (LIBSVM).* *www.csie.ntu.edu.tw/~ cjlin/libsvmtools/datasets/multilabel.html*

СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, с. 65–76

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© 2006 г. С. С. Жулин

unch@list.ru

Кафедра Оптимального управления

Введение. Данная статья посвящена применению метода продолжения по параметру к решению краевых задач для принципа максимума и возникающим при этом трудностям и особенностям. В разделах 3,4 описываются разработанные автором схемы применения метода продолжения по параметру для решения нелинейных по управлению и негладких задач оптимального управления (ЗОУ). Эти подходы были реализованы в Системе Optimus, описанной в [1], позволив существенно расширить класс решаемых задач. В заключении приводится иллюстрирующий пример.

1. Метод продолжения по параметру для решения системы алгебраических уравнений.

Метод продолжения решения по параметру (МПП) подробно описан и исследован в [3]. Изначально он предназначен для решения алгебраических уравнений и обобщается на функциональные уравнения, его можно рассматривать как сильное обобщение широко известного метода Ньютона (см. [6,7]). Все требования, которые далее будут предъявляться к функциям, будут носить характерный для численных методов смысл "почти всюду" (за исключением множества меры нуль). Исходная задача - нахождение корня нелинейной системы алгебраических уравнений:

$$\Phi(p) = 0, \text{ где } p \in \mathbb{R}^n, \ \Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Предположим, что существует единственный корень данной системы уравнений p_*. Введем функцию, зависящую от параметра μ.

$$H(p, \mu) = \Phi(p) - (1 - \mu)\Phi(p_0), \ 0 \leqslant \mu \leqslant 1,$$

где $p_0 \in \mathbb{R}^n$ - начальное приближение. Приравнивая ее нулю, получаем модифицированное уравнение с параметром

$$H(p, \mu) = 0.$$

При значении параметра $\mu = 0$ получаем уравнение с известным корнем:

$$H(p, 0) = 0 \Rightarrow \Phi(p) - \Phi(p_0) = 0, \text{ имеем корень } p = p_0.$$

При значении параметра $\mu = 1$ получаем исходное уравнение:

$$H(p, 1) = 0 \Rightarrow \Phi(p) = 0 \Rightarrow p = p_*.$$

Возможно использование и других видов функции $H(p, \mu)$, обладающих схожими свойствами.

Предположения:

1. Пусть $\forall \mu \in [0, 1]$ существует решение уравнения $H(p, \mu) = 0\colon\ p = p(\mu)$, причем векторная функция $p(\mu)$ является дифференцируемой на $[0, 1]$.

2. Пусть функция $\Phi(p)$ дифференцируема и $\det \frac{d\Phi}{dp} \neq 0$.

Продифференцируем по μ уравнение $H(p(\mu),\mu)=0$ или $\Phi(p(\mu))=(1-\mu)\Phi(p_0)$, получим:

$$\left.\frac{d\Phi}{dp}\right|_{p=p(\mu)}\frac{dp(\mu)}{d\mu}=-\Phi(p_0),$$

с учетом условия $p(0)=p_0$ получим задачу Коши:

$$\begin{cases}\dfrac{dp}{d\mu}=-\left[\dfrac{d\Phi}{dp}\right]^{-1}\Phi(p_0)\\ p(\mu)|_{\mu=0}=p_0, 0\leqslant\mu\leqslant 1\end{cases}.$$

Решая эту задачу, находим корень исходной системы уравнений $p_*=p(\mu)|_{\mu=1}$.

Замечания:

1. Правая часть полученной системы ОДУ не зависит от переменной μ.
2. Для вычисления правой части требуется не обращение матрицы, а лишь решение системы линейных уравнений с матрицей $\frac{d\Phi}{dp}$ и столбцом правых частей $-\Phi(p_0)$.
3. Метод можно применять итерационно, используя вычисленные значения, как новые начальные приближения p_0, до тех пор, пока требуемая точность не будет достигнута.
4. При использовании для решения полученной задачи Коши одного шага метода Эйлера, итерационный процесс превращается в классический метод Ньютона.

При применении методов интегрирования с контролем точности (например, различных схем Рунге-Кутта с переменным шагом) требования к качеству начального приближения сильно снижаются без существенной потери скорости решения. Для решения сложных задач, которые будут рассмотрены далее, применение контроля точности при интегрировании обязательно. Подробно используемые численные методы описаны в [10]. В Системе Optimus используется метод Рунге-Кутта Ингленда 5-го порядка с контролем точности, итерационная точность и конечная невязка устанавливаются отдельно. Нужно отметить, что попытки применения автором многошаговых методов (Адамса, Гира) не увенчались успехом, т.к. они не достигают нужной точности в областях разрывов правой части системы (в ЗОУ – переключений управлений). Методы Рунге-Кутта Бутчера, Фельдберга и метод Дорманда-Принца DOP853 (в реализации Э. Хайрера, Г. Ваннера [11]) также показали худшие результаты.

2. Применение метода продолжения по параметру в краевых задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Процесс решения краевых задач для ОДУ методом продолжения по параметру исследован в работе [2]. Исходная краевая задача для нелинейной системы ОДУ со смешанными условиями в двух точках:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(x,t)\\ R(x(a),x(b))=0\end{cases},\ x\in\mathbb{R}^n,\ R:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n.$$

Предположим, что существует единственное решение данной краевой задачи $x_*(t)$. Сведем нахождение решения к поиску корней некоторой специальной функции, который будем производить методом продолжения по параметру. Далее все функции, зависящие от t, рассматриваются на отрезке $[a,b]$.

Обозначим через $x(p,t)$ решение задачи Коши $\frac{dx}{dt}=f(x,t)$, $x(t_*)=p$,

где $t_*\in[a,b]$ – произвольный фиксированный момент времени. $x(p,t)$ – семейство кривых параметра $p\in\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих исходной системе ОДУ, содержащее искомое решение

$$x_*(t)=x(p_*,t).$$

Обозначим $X(p,t) = \frac{\partial x(p,t)}{\partial p} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ матрицу производных функции $x(p,t)$ по p, предположение существования такой матрицы накладывает ограничения на функцию $f(x,t)$, необходимо существование ограниченной (почти всюду) производной $f'_x(x,t)$.

Применим метод продолжения по параметру для решения системы алгебраических уравнений $\Phi(p) = 0$, где

$$\Phi(p) = R(x(p,a), x(p,b)), \quad \Phi(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Получим задачу Коши, называемую *внешней задачей*:

$$\begin{cases} \frac{dp}{d\mu} = -\left[\frac{d\Phi}{dp}\right]^{-1}\Phi(p_0) \\ p(\mu)|_{\mu=0} = p_0, 0 \leqslant \mu \leqslant 1 \end{cases},$$

для ее решения нужно находить производную (градиент) функции $\Phi(p)$:

$$\frac{d\Phi}{dp} = \frac{dR}{dx}\bigg|_{\substack{x = x(p,a)\\ y = x(p,b)}} X(p,a) + \frac{dR}{dy}\bigg|_{\substack{x = x(p,a)\\ y = x(p,b)}} X(p,b).$$

Для нахождения $x(p,a)$, $X(p,a)$, $x(p,b)$, $X(p,b)$ решаем задачу Коши, называемую *внутренней задачей*:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,t) \\ \frac{dX}{dt} = f'_x(x,t)X \end{cases}, \; x(t_*) = p, \; X(t_*) = I.$$

После решения внешней задачи получим $p_* = p(\mu)|_{\mu=1}$ и решение исходной краевой задачи

$$x_*(t) = x(p_*, t).$$

Все замечания в предыдущем пункте справедливы и здесь. Так как полученное алгебраическое уравнение является достаточно сложным, желательно применять и для внешней задачи, и для внутренней методы интегрирования с контролем точности, причем, в связи с потерей точности в процессе вычислений, точность решения внутренней задачи целесообразно устанавливать на порядок больше.

Схема продолжения по параметру чрезвычайно гибка и, в частности, позволяет ввести в ДУ параметр, по которому будет производиться продолжение. Этот подход может применяться , когда исходная система очень сложна и не поддаётся непосредственному решению (например, правая часть имеет очень большую константу Липшица). Для плавного перехода от более простой задачи к более сложной в правую часть вводится параметр ε так, что при $\varepsilon = 1$ имеем исходную систему (или хорошее её приближение), а при $\varepsilon = 0$ получается простая для решения задача (например, очень гладкая). В следующем пункте этот параметр будет использоваться для сглаживания. Опишем предложенную схему с параметром ε, имеем:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,t,\varepsilon) \\ R(x(a), x(b)) = 0 \end{cases}, \quad \varepsilon \in [0,1].$$

Обозначим через $x(p,t,\varepsilon)$ решение задачи Коши $\frac{dx}{dt} = f(x,t,\varepsilon)$, $x(t_*) = p$.

Будем решать уравнение $\Phi(p,\varepsilon) = 0$ с функцией

$$\Phi(p,\varepsilon) = R(x(p,a,\varepsilon), x(p,b,\varepsilon)),$$

используя продолжение по параметру ε, т.е. используя функцию

$$H(p,\varepsilon) = \Phi(p,\varepsilon) - (1-\varepsilon)\Phi(p_0, 0).$$

Тогда внешняя задача будет выглядеть так:

$$\begin{cases} \frac{dp}{d\varepsilon} = -\left[\frac{d\Phi(p,\varepsilon)}{dp}\right]^{-1}\left(\frac{d\Phi(p,\varepsilon)}{d\varepsilon} + \Phi(p_0,0)\right) \\ p(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = p_0, 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1 \end{cases}.$$

Обозначив $X(p,t,\varepsilon)=\frac{\partial x(p,t,\varepsilon)}{\partial p}$ и $e(p,t,\varepsilon)=\frac{\partial x(p,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}$, получим формулы для вычисления производных функции $\Phi(p,\varepsilon)$:

$$\frac{d\Phi(p,\varepsilon)}{dp}=\frac{dR}{dx}\Bigg|_{\substack{x=x(p,a,\varepsilon)\\ y=x(p,b,\varepsilon)}} X(p,a,\varepsilon)+\frac{dR}{dy}\Bigg|_{\substack{x=x(p,a,\varepsilon)\\ y=x(p,b,\varepsilon)}} X(p,b,\varepsilon),$$

$$\frac{d\Phi(p,\varepsilon)}{d\varepsilon}=\frac{dR}{dx}\Bigg|_{\substack{x=x(p,a,\varepsilon)\\ y=x(p,b,\varepsilon)}} e(p,a,\varepsilon)+\frac{dR}{dy}\Bigg|_{\substack{x=x(p,a,\varepsilon)\\ y=x(p,b,\varepsilon)}} e(p,b,\varepsilon).$$

Для нахождения векторов $x(p,a,\varepsilon)$, $x(p,b,\varepsilon)$, $e(p,a,\varepsilon)$, $e(p,b,\varepsilon)$ и матриц $X(p,a,\varepsilon)$, $X(p,b,\varepsilon)$ решается внутренняя задача:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt}=f(x,t,\varepsilon)\\ \frac{dX}{dt}=f'_x(x,t,\varepsilon)X\\ \frac{de}{dt}=f'_x(x,t,\varepsilon)e+f'_\varepsilon(x,t,\varepsilon)\end{array}\right., \quad x(t_*)=p,\ X(t_*)=I,\ e(t_*)=0.$$

Описанная схема значительно эффективнее простого поэтапного уменьшения значения параметра.

В Системе Optimus точность решения внутренней задачи, точность внешней задачи (итерационная точность) и конечная невязка устанавливаются отдельно.

3. Сведение задачи оптимального управления к краевой задаче для принципа максимума.

Для ознакомления с теорией оптимального управления и Принципом максимума рекомендую обратиться к труду [8]. Рассмотрим класс задач оптимального управления, решаемый Системой Optimus. Начнем с задачи быстродействия из множества на множество.

$\frac{dx}{dt}=f(x,u,t)$, где $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in U\subset\mathbb{R}^m$;

$$x(0)\in X_0,\quad x(T)\in X_1,$$

где X_0 и X_1 – полномерные строго выпуклые компакты, заданные соответствующими опорными функциями $c(X,\psi)$ (см. [7]) или точки.

Запишем функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H(x,\psi,u,t)=(f(x,u,t),\psi).$$

Пусть существует единственный максимизатор $u^*(x,\psi,t)=\arg\max\limits_{u\in U} H(x,\psi,u,t)$.

Система ДУ краевой задачи для принципа максимума:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt}=H_\psi(x,\psi,u^*(x,\psi,t),t)\\ \frac{d\psi}{dt}=-H_x(x,\psi,u^*(x,\psi,t),t)\end{array}\right. .$$

Краевые условия получаются из условий трансверсальности:

$$x(0)=c'(X_0,\psi(0)),\quad x(T)=c'(X_1,-\psi(T)),$$

в частном случае точек они выглядят так:

$$x(0)=x_0,\quad x(T)=x_1.$$

В случае параллелепипедов краевые условия (функция невязки) строится специальным образом.

Для задач с нефиксированным временем, таких как задачи быстродействия, необходимо сделать замену временной переменной $\tau = \frac{t}{T}$ и ввести время T в фазовое пространство постоянной функцией.

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = T \cdot H_{\psi}(x, \psi, u^*(x, \psi, \tau), \tau) \\ \frac{d\psi}{d\tau} = -T \cdot H_x(x, \psi, u^*(x, \psi, \tau), \tau) \\ \frac{dT}{d\tau} = 0 \end{cases}.$$

Теперь новая переменная $\tau \in [0, 1]$, но требуется еще одно краевое условие, в качестве которого возьмем условие нормировки сопряженной переменной на одном из концов отрезка. Таким образом, имеем $2n + 1$ ДУ и столько же краевых условий.

Для задач с терминальным функционалом $\Phi(x(T))$ изменяется только правое краевое условие:

$\psi(T) = -\Phi'(x(T))$ – для задач на минимум,

$\psi(T) = \Phi'(x(T))$ – для задач на максимум.

Для задач с интегральным функционалом $\int\limits_0^T f_0(x(t), u(t), t)dt$ изменяется функция Гамильтона-Понтрягина:

$$H(x, \psi, u, t) = \psi_0 f_0(x(t), u(t), t) + (f(x, u, t), \psi),$$

где для задачи на минимум $\psi_0 = -1$, а на максимум $\psi_0 = 1$. Добавляется фазовая переменная x^0, соответствующее ей уравнение

$$\frac{dx^0}{dt} = f_0(x, \psi, u^*(x, \psi, t), t)$$

и краевое условие $x^0(0) = 0$. В случае нефиксированного правого конца краевое условие на правом конце $x(T) = x_1$ заменяется на $\psi(T) = 0$.

Для применения метода продолжения по параметру, описанного в предыдущем пункте, к поставленным краевым задачам необходимо выполнение некоторых условий. Требуется существование ограниченных (почти всюду) производных $\frac{\partial_2}{\partial x^2} f(x, u, t)$ и $\frac{\partial_2}{\partial x^2} f_0(x, u, t)$,

$$\frac{\partial}{\partial u} f(x, u, t) \text{ и } \frac{\partial}{\partial u} f_0(x, u, t) \text{ ,а также } \frac{\partial}{\partial x} u^*(x, \psi, t) \text{ и } \frac{\partial}{\partial \psi} u^*(x, \psi, t).$$

Для аффинных по управлению задач можно найти аналитический вид максимизатора

$$u^*(x, \psi, t) = \left.\frac{dc(U, \bar{\psi})}{d\bar{\psi}}\right|_{\bar{\psi} = H'_u(x, \psi, t)},$$

однако же, если область управления не U является строго выпуклой (например, прямоугольник), то при применении метода продолжения по параметру производная

$$\frac{d\Phi}{dp} = \left.\frac{dR}{dx}\right|_{\substack{x = x(p,a) \\ y = x(p,b)}} X(p, a) + \left.\frac{dR}{dy}\right|_{\substack{x = x(p,a) \\ y = x(p,b)}} X(p, b)$$

может вырождаться (для прямоугольников очень часто), что влечет остановку расчета. Для избежания этого в Системе Optimus применяется автоматическое сглаживание области управления. Сглаживанию выпуклых компактов посвящена работа [4]. Для того чтобы это было наиболее эффективно, пользователю рекомендуется расширить вектор управлений до размерности фазового пространства, добавив фиктивные компоненты вектора управлений в уравнения, их не содержащие. Если это будет сделано, сглаженная область управления будет строго выпуклым множеством. Параметр сглаживания μ выражается через параметр схемы продолжения ε:

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{\mu_1}{\mu_0}\right)^{\varepsilon}, \text{ где}$$

μ_0 – начальное значение параметра сглаживания, μ_1 – конечное значение, по умолчанию, равное требуемой точности решения.

Производная, требуемая для внутренней задачи, $f'_\varepsilon(x,t,\mu) = f'_\mu(x,t,\mu)\cdot\mu'_\varepsilon = f'_\mu(x,t,\mu)\cdot\mu\cdot\ln\frac{\mu_1}{\mu_0}$.

В случае сглаживания области управления решение задачи происходит в три стадии:

1. Решение задачи с начальным значением параметра μ_0, низкой точностью и ограниченным количеством итераций.

2. Параметр сглаживания μ включается в общую схему метода продолжения по параметру, производится его постепенное уменьшение, приводящее систему от простого гладкого вида к исходному негладкому виду.

3. Решение задачи с малым конечным значением параметра μ_1 для достижения заданной точности.

Система Optimus не требует от пользователя ввода начального приближения, оно находится посредством метода стрельбы. Строится сетка специального вида по многомерной сфере пространства сопряженных переменных, количество точек разбиения может устанавливаться пользователем, это позволяет для сложных задач улучшать качество начального приближения. Если начальная точка принадлежит области, строится сетка по границе этой области для определения начального приближения для фазовой переменной. Далее для каждой точки сетки расширенного пространства решается задача Коши с невысокой точностью, и выбирается точка с минимальной невязкой по краевым условиям. Если время процесса не фиксировано, то для использования в методе стрельбы пользователю предоставляется возможность задать его приблизительно, по умолчанию берется равным 1. Система Optimus автоматически выбирает параметр t_* МПП равным 0 или T в зависимости от типов краевых условий по критерию минимума невязки.

4. Применение метода продолжения по параметру для нелинейных по управлению задач.

До этого момента сведение задачи ОУ к краевой задаче для принципа максимума и дальнейшее решение ее методом продолжения по параметру производилось в предположении, что максимизатор функции Гамильтона-Понтрягина задан аналитически. Для нелинейных по управлению задач вывод аналитического вида максимизатора перекладывается на пользователя, что само по себе является затруднением, однако же, во многих реальных задачах найти его не представляется возможным. Специально для таких случаев автором предлагается способ численного нахождения максимизатора и последующего аналитического нахождения его производной. Этот алгоритм реализован в Системе Optimus, его работоспособность подтверждена на нескольких примерах. Благодаря нему универсальность комплекса действительно сильно увеличилась. Опишем алгоритм.

Разобьём пространство управлений на наибольшее количество l подпространств таким образом, чтобы области управления, соответствующие этим подпространствам были независимы, т.е. исходная область управления представлялась в виде их прямого произведения.

$$u = (u'_1, u'_2, ..., u'_l), \quad l \leqslant m.$$

$$u'_i = (u_{i1}, u_{i2}, ..., u_{iN_i}), \quad u'_i \in U'_i \subset \mathbb{R}^{N_i}, \sum_{1\leqslant i\leqslant l} N_i = m.$$

$$U = U'_1 \times U'_2 \times ... \times U'_l.$$

Нахождение такого разбиения эквивалентно решению известной задачи разбиения графа на связанные подграфы. Граф обладает m вершинами, между вершинами i и j ребро отсутствует, если

$$\frac{\partial^2 c(U,\psi)}{\partial\psi_i\partial\psi_j} \equiv 0.$$

Среди всех наборов управлений u'_i выделим те, которые содержат только управления u_{ij}, входящие в систему линейно. Объединим все управления, входящие в такие наборы, в вектор $\bar{u} = (\bar{u}_1, ..., \bar{u}_{\bar{N}})$. Остальные наборы управлений обозначим (перенумеруем):

$$\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, ..., \tilde{u}_{\tilde{l}}), \quad \tilde{l} \leqslant l.$$

Объединим их в группы, между которыми максимизацию функции Гамильтона-Понтрягина можно производить раздельно. Для этого ещё раз решим задачу разбиения графа на связанные подграфы. Граф обладает $\tilde{l}$ вершинами, между вершинами i и j ребро отсутствует, если матрица

$$\frac{\partial^2 H(x, \psi, u, t)}{\partial \tilde{u}_i \partial \tilde{u}_j} \equiv 0.$$

Допустим мы получили k групп по $\tilde{N}_i$ управлений в каждой, обозначим их:

$$\tilde{u}^i = (\tilde{u}^i_1, \tilde{u}^i_2, ..., \tilde{u}^i_{\tilde{N}_i}), \quad 1 \leqslant i \leqslant k.$$

$$\bar{N} + \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \tilde{N}_i = m$$

В итоге функция Гамильтона-Понтрягина представляется в виде:

$$H(x, \psi, u, t) = (g(x, \psi, t), \bar{u}) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} h(x, \psi, \tilde{u}^i, t);$$

$$u = (\bar{u}, \tilde{u}^1, ..., \tilde{u}^k), \quad \bar{u} \in \mathbb{R}^{\bar{N}}, \tilde{u}^i \in \mathbb{R}^{\tilde{N}_i}.$$

Максимизатор линейной части находится отдельно:

$$\bar{u}^*(x, \psi, t) = \arg\max_{\bar{u} \in \bar{U}} H(x, \psi, \bar{u}, \tilde{u}, t) = \dot{c}(\bar{U}, g(x, \psi, t)) \overset{def}{=} \left. \frac{dc(\bar{U}, \bar{\psi})}{d\bar{\psi}} \right|_{\bar{\psi} = g(x, \psi, t)}$$

Максимизатор нелинейной части, в общем случае, не находится аналитически; будем находить его численно в каждой точке.

Система дифференциальных уравнений краевой задачи для принципа максимума:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = H_\psi(x, \psi, \bar{u}^*(x, \psi, t), \tilde{u}^*(x, \psi, t), t) \\ \frac{d\psi}{dt} = -H_x(x, \psi, \bar{u}^*(x, \psi, t), \tilde{u}^*(x, \psi, t), t) \end{cases}$$

Или вводя расширенную переменную $\tilde{x} = (x, \psi)$:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = F(\tilde{x}, \bar{u}^*(\tilde{x}, t), \tilde{u}^*(\tilde{x}, t), t)$$

Тип краевых условий определяется конкретным типом ЗОУ.

Для использования метода продолжения по параметру для данной краевой задачи необходим градиент правой части системы по $\tilde{x}$.

$$\frac{d}{d\tilde{x}}(F(\tilde{x}, \bar{u}^*(\tilde{x}, t), \tilde{u}^*(\tilde{x}, t), t)) = F_{\tilde{x}} + F_{\bar{u}} \cdot \bar{u}^*_{\tilde{x}} + F_{\tilde{u}} \cdot \tilde{u}^*_{\tilde{x}}$$

Опишем метод нахождения $\tilde{u}^*_{\tilde{x}} = \tilde{u}^*_{\tilde{x}}(\tilde{x}, u^*, t)$.

Считаем, что, находясь в фиксированной точке $(\tilde{x}, t)$, мы численно нашли значение максимизатора $\tilde{u}^* = \tilde{u}^*(\tilde{x}, t)$, а также $\bar{u}^*$ из соответствующей формулы.

Возможны два случая:

1. Максимизатор $\tilde{u}^*$ лежит внутри области $\tilde{U}$, тогда $H_{\tilde{u}}(\tilde{x}, u^*, t) = 0$.

2. Максимизатор $\tilde{u}^*$ лежит на границе области $\tilde{U}$, тогда $H_{\tilde{u}}(\tilde{x}, u^*, t) \perp \tilde{U}$.

1 случай: *максимизатор* $\tilde{u}^*$ *лежит внутри области* $\tilde{U}$.

Продифференцируем по $\tilde{x}$ уравнение $H_{\tilde{u}}(\tilde{x}, \bar{u}^*, \tilde{u}^*(\tilde{x}, t), t) = 0$ в окрестности точки $u^* = (\bar{u}^*, \tilde{u}^*)$:

$$\frac{d}{d\tilde{x}} \left(H_{\tilde{u}}(\tilde{x}, \bar{u}^*, \tilde{u}^*(\tilde{x}, t), t)\right) = H_{\tilde{u}\tilde{x}}(\tilde{x}, u^*, t) + H_{\tilde{u}\tilde{u}}(\tilde{x}, u^*, t) \cdot \tilde{u}^*_{\tilde{x}} = 0$$

Отсюда

$$\tilde{u}^*_{\tilde{x}} = \tilde{u}^*_{\tilde{x}}(\tilde{x}, u^*, t) = -\left[H_{\tilde{u}\tilde{u}}(\tilde{x}, u^*, t)\right]^{-1} H_{\tilde{u}\tilde{x}}(\tilde{x}, u^*, t)$$

2 случай: *максимизатор* $\tilde{u}^*$ *лежит на границе области* $\tilde{U}$.

Определение ортогональности $H_{\tilde{u}}(\tilde{x}, u^*, t) \perp \tilde{U}$ в точке $u^*(\tilde{x}, t) = u^*$ в терминах опорной функции:

$$(\tilde{u}^*(\tilde{x}, t), \psi) = c(\tilde{U}, \psi)\,\big|_{\psi = H_{\tilde{u}}(\tilde{x}, u^*(\tilde{x}, t), t)}$$

Отсюда, продифференцировав по ψ:

$$\tilde{u}^*(\tilde{x}, t) = c'(\tilde{U}, H_{\tilde{u}}(\tilde{x}, u^*(\tilde{x}, t), t))$$

Продифференцировав по $\tilde{x}$, получим:

$$\tilde{u}^*_{\tilde{x}}(\tilde{x}, t) = c''(\tilde{U}, H_{\tilde{u}}(\tilde{x}, u^*, t)) \left[H_{\tilde{u}\tilde{x}}(\tilde{x}, u^*, t) + H_{\tilde{u}\tilde{u}}(\tilde{x}, u^*, t) \cdot \tilde{u}^*_{\tilde{x}}(\tilde{x}, t)\right]$$

Выразим $\tilde{u}^*_{\tilde{x}}(\tilde{x}, t)$:

$$\tilde{u}^*_{\tilde{x}}(\tilde{x}, u^*, t) = \Big[E - c''(\tilde{U}, H_{\tilde{u}}(\tilde{x}, u^*, t)) \cdot H_{\tilde{u}\tilde{u}}(\tilde{x}, u^*, t)\Big]^{-1} \cdot c''(\tilde{U}, H_{\tilde{u}}(\tilde{x}, u^*, t)) \cdot H_{\tilde{u}\tilde{x}}(\tilde{x}, u^*, t)$$

Таким образом, мы можем применить метод продолжения по параметру для решения задач оптимального управления, нелинейных по управлению, в которых максимизатор аналитически не выражается. Заметим, что скорость решения таких задач по сравнению с задачами с аналитическим видом максимизатора снижается не сильно, т.к. к независимой линейной части применяется метод с явной подстановкой максимизатора (комбинированный метод).

Описанный способ позволяет еще универсализировать численный метод и охватить очень широкий класс задач, недоступных другим методам.

5. Пример решения нелинейной по управлению задачи.

В качестве подтверждения правильности теоретических выкладок и их практической реализации рассмотрим один красивый пример. Система описывает движение робота на плоскости с длиной базы b, с ведущим передним колесом, которое может мгновенно поворачиваться на угол от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Рассматривается задача быстродействия из точки $(x_1^1, x_2^1, \varphi^1)$ в точку $(x_1^2, x_2^2, \varphi^2)$. В исходной постановке задача нелинейна по управлению:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} \dot{x}_1 = \cos(x_3 + u) \\ \dot{x}_2 = \sin(x_3 + u) \\ \dot{x}_3 = \sin(u)/b \end{cases} \\ x(0) = (4, 0, -\pi/4)^T \\ x(T) = (5, 5, \pi/4)^T \\ |u| \leqslant \pi/2 \\ J(u) = T \to \min \end{array} ,$$

для ее решения Системой Optimus используется вышеописанная схема.

Листинг решения данной задачи в Системе Optimus:

```
vector(1, u)
```

vector(3, x, f(x, u))
b = 1
$\mathbf{f_1 = cos(x_3 + u_1)}$
$\mathbf{f_2 = sin(x_3 + u_1)}$
$\mathbf{f_3 = sin(u_2)/b}$
$\mathbf{cubic(U,\ -\pi/2,\ \pi/2)}$
$\mathbf{x0 = \{4,\ 0,\ -\pi/4\}}$
$\mathbf{x1 = \{5,\ 5,\ \pi/4\}}$
T = optcontrol(f, U, x0, x1)
 # Кол-во итераций 3, вызовов функции 5 201 154. Время решения 2.404 сек.
 # Оптимальное время перехода T = 5.71358 с точностью 6 знаков
 # Оптимальная траектория
plot(x_opt, 2(1), 0, 1)

plot(x_opt, {1,2,3}, 0, 1)

$\mathbf{plot(u\_opt_1,\ 0,\ 1)}$ *# График оптимального управления*

Если в исходной системе разложить косинус суммы и синус суммы по формулам и ввести новые управления

$$\begin{cases} v_1 = \sin(u) \\ v_2 = \cos(u) \end{cases},$$

то система преобразуется к виду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -v_1 \sin(x_3) + v_2 \cos(x_3) \\ \dot{x}_2 = v_1 \cos(x_3) + v_2 \sin(x_3) \\ \dot{x}_3 = v_1/b \end{cases}$$
$$x(0) = (4, 0, -\pi/4)^T$$
$$x(T) = (5, 5, \pi/4)^T$$
$$v_1^2 + v_2^2 \leqslant 1,\ v_2 \geqslant 0$$
$$J(u) = T \to \min$$

Полученная система линейна по управлению, следовательно, оптимальное управление будет принадлежать границе области, т.е. $v_1^2 + v_2^2 = 1$, что соответствует исходной задаче.

Приводим листинг решения преобразованной задачи:

```
vector(2, v)
vector(3, x, f(x,v))
b=1
f1 = -v1 * sin(x3) + v2 * cos(x3)
f2 = v1 * cos(x3) + v2 * sin(x3)
f3 = v1/b
# Опорная функция новой области управления
c_V(v) = He(v2) * hypot(v1, v2) + He(-v2) * abs(v1)
domain(V, c_V)
# Строим новую область управления
plot(V)
```

```
x0 = {4, 0, -π/4}
x1 = {5, 5, π/4}
T = optcontrol(f, V, x0, x1, x_opt, v_opt)
# Кол-во итераций 5, вызовов функции 3 492 720. Время решения 1.091 сек.
# Оптимальное время перехода T = 5.71358 с точностью 6 знаков
plot(x_opt, 2(1), 0, 1)
```

```
plot(x_opt, (1,2,3), 0, 1)
```

plot(v_opt, (1,2), 0, 1)

vector(2, u_opt(t))
 # Возвращаемся к исходным управлениям
u_opt₁ = **hypot(v_opt₁(t), v_opt₂(t))**
u_opt₂ = **asin(v_opt₁(t))**
plot(u_opt, (1,2), 0, 1)

Получили оптимальное управление, траекторию и значение функционала, идентичные таковым в исходной нелинейной задаче. Полученные результаты подтверждают верность как теории метода решения нелинейных по управлению задач, так и его практической реализации в Системе Optimus.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жулин С.С.* Численное решение задач оптимального управления с помощью сисемы Optimus // Сб. трудов кафедры Оптимального Управления факультета ВМиК, МГУ, 2005.
2. *S.N. Avvakumov, Yu.N. Kiselev.* Boundary value problem for ordinary differential equations with applications to optimal control. // Spectral and Evolution Problems, Vol 10, Proceeding of the Tenth Crimean Autumn mathematical School – Symposium, Simferopol, Ukraine, 2000.
3. *В.Л. Шалашилин, Е.Б. Кузнецов.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. УРСС, 1999.
4. *Аввакумов С.Н.* Гладкая аппроксимация выпуклых компактов // Труды Института математики и механики УрО РАН, т.4, с. 184-200 – Екатеринбург, 1996.
5. *Васильев. Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981.
6. *Васильев. Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988.
7. *Киселев. Ю.Н.* Оптимальное управление. МГУ, 1988.
8. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко. Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983.
9. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. – М.: Наука, 1978.
10. *О.Б. Арушанян, С.Ф. Залёткин.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. НИВЦ МГУ.
11. *Э. Хайрер, Г. Ваннер.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 1999. Екатеринбург, 1996.

СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, с. 77–83

УДК 517.956.2

ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ ФАКТОРОВ НА СТРУКТУРУ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАСЕЛЕНИЯ В МЕГАПОЛИСЕ

© 2006 г. О. И. Иновенков

inov@cs.msu.su

Кафедра Автоматизации научных исследований

Введение. Всякая экономическая деятельность соотносится с определённым временем и местом, а потому важным аспектом эволюционных систем является учёт пространственных зависимостей. С прогрессом в условиях транспортировки и связи взаимодействие между различными экономическими переменными становится в значительной мере зависимым от расположения в пространстве. Очень важно понять, а также описать характеристики таких пространственных взаимодействий. Проблемы городов весьма усложнились в результате технологического прогресса и изменения поведения людей. Городские системы нашего времени характеризуются возрастанием пространственного и временного разнообразия протекающих в них процессов. Образцами сложности городских форм являются метрополии, такие, как Нью-Йорк, Стокгольм, Париж и Токио. Централизация городов наблюдалась как в развитых, так и в развивающихся странах; но во многих развитых странах начали проявляться процессы децентрализации. В частности, процессу децентрализации в Западной Европе способствует объединение государств в Европейский Союз. В географии и науке об экономике городов и регионов построено множество моделей для объяснения настоящих и прогноза будущих процессов градоформирования. В настоящее время преобладают три следующих основных подхода. Первый, называемый неоклассической экономикой городов, развивался экономистами-урбанистами. С 60-х годов позапрошлого века было развито и построено множество подобных моделей (например, Изард, 1966). Но подход неоклассической экономики ограничен, как правило, анализом равновесных состояний и заведомо предполагает их устойчивость. Второй подход разрабатывался, в основном, исследователями в области науки о регионах и географии (например, Вильсон, 1981). Время и место в этом подходе играют существенную роль. Однако, поскольку пространство при этом разбивается на дискретные зоны, оказывается невозможным объяснить внутреннюю структуру городских ареалов. Третий подход, называемый пространственным динамическим приближением, для исследования проблем динамики городов использует непрерывное пространство(например, Бекман, Пуу и Занг, 1990). В противоположность современным традициям региональной экономики, где пространственная структура была отброшена и заменена простыми матрицами абстрактных расстояний, он постулирует: пространственно зависима сама экономическая деятельность, описываемая своей пространственной плотностью. В фокусе именно этого подхода находится проблема эволюции внутренней структуры городов. Таким образом, задача о развитии города чаще всего описывается системой уравнений в частных производных с соответствующими граничными и начальными условиями.

1. Постановка задачи о моделировании городской системы с учетом пространственной диффузии.

Опишем одну модель изменения плотности распределения городского населения по пространственному ареалу с учетом изменения качества жилого фонда. Рассмотрим неоднородную городскую систему, которая характеризуется двумя функциями:
$u(x,y,t)$ - плотность населения в точке $M(x,y)$ в момент времени t,
$q(x,y,t)$ - качество жилищного фонда (цена) в точке $M(x,y)$ в момент времени t,
где $r=\sqrt{x^2+y^2}$ - расстояние от центрального делового района (ЦДР) до места проживания.

Мы пренебрегаем демографическими процессами и процессами миграции между городом и "внешним миром". С учетом диффузии населения городская система описывается следующими динамическими уравнениями:

$$\begin{cases} u_t = \alpha(f(q) - u) + div(\theta gradu), \\ q_t = -\delta q + H(I(i, q)), \\ M(x, y) \in G, \end{cases} \tag{1}$$

где G обозначает рассматриваемую область городского пространства, α - параметр адаптации, θ - коэффициент диффузии населения, δ - скорость разрушения жилого фонда. Отметим что, коэффициент θ может зависеть от u и q, а также от x, y и t. Диффузионным изменением качества жилья в этой модели пренебрегаем, то есть уравнение для q представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение.

Для функции u на границе области G ставится краевое условие третьего рода:

$$\left\{ \theta \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u|_{\partial} G = 0, \right. \tag{2}$$

если $\beta = 0$, то граничное условие $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial G} = 0$ означает, что в рассматриваемый период численность населения не меняется. При $t = 0$ для функций u и q добавляются также начальные условия:

$$\begin{cases} u|_{t=0} = u_0(x, y), \\ q|_{t=0} = q_0(x, y). \end{cases} \tag{3}$$

Второе уравнение в системе (1) описывает, изменение качества жилья во времени. Член δq, входящий в это уравнение с минусом, описывает эффекты разрушения жилого фонда. Предполагается, что состояние жилищ поддерживается владельцами, которые определяют величину расходов на содержание жилого фонда, и стоимость жилья зависит от дохода владельца с единицы жилого фонда. Пусть общий доход обозначен как I. Доход в определенной точке зависит от плотности населения и качества жилого фонда, то есть $I = I(u, q)$, причем производная $\partial I/\partial u$ этого функционала знаконеопределена, а производная $\partial I/\partial q$ положительна. Знак $\partial I/\partial u$ в общем случае при фиксированном уровне q не определен, так как увеличение либо уменьшение дохода при увеличении плотности населения зависит от конкретной ситуации. Производная $\partial I/\partial q$ положительна, потому что улучшение качества жилья при фиксированном уровне плотности населения должно привести к возрастанию дохода владельца. Предполагается, что затраты на поддержание жилого фонда положительно связаны с доходом, то есть $dH/dI > 0$. Для простоты мы определим функцию затрат на поддержание жилого фонда как:

$$H(I) = \frac{\mu u q^2}{1 + \sigma u}, \tag{4}$$

где μ и σ положительные коэффициенты. Если интерпретировать $\frac{q^2}{1+\sigma u}$ как ренту единицы жилого фонда, то величина $\frac{uq^2}{1+\sigma u}$ представляет собой полный доход домовладельца в данной точке. Параметр μ можно интерпретировать как отношение затрат на поддержание жилого фонда к общему доходу.

В качестве первого шага исследования этой модели ограничимся одномерным случаем, когда функции u и q зависят от r и t, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ - расстояние от точки M до ЦДР, расположенного в начале координат. Произведем процедуру обезразмеривания в соответствии со следующими формулами:

$$\alpha t \to t, q = \frac{\mu Q}{\alpha \sigma}, u = \frac{U}{\sigma}, k = \frac{\theta}{\alpha}, \nu = \frac{\delta}{\alpha}, g(Q) = \sigma f(\frac{\mu Q}{\alpha \sigma}).$$

Тогда математическая задача для определения функций U и Q примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = g(Q) - U + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(kr\frac{\partial U}{\partial r}), k = k(U, Q, r, t) \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = -\nu Q + \frac{UQ^2}{1+U}, \\ k\frac{\partial U}{\partial r} + \beta U|_{r=1} = 0, \\ U|_{t=0} = U_0(r), \\ Q|_{t=0} = Q_0(r). \end{cases} \quad (5)$$

Вопрос о существовании и единственности решения данной системы является непростым, но для достаточно широкого класса нелинейных коэффициентов $k(U)$ справедливы теоремы существования и единственности классического решения задачи.

Представляет интерес изучение поведения решения системы (5) в зависимости от начальных условий, в частности, существование так называемых промежуточных асимптотик, когда система "забывает"детали начальных условий и развивается в соответствии со своей внутренней структурой.

2. Программная реализация решения задачи.

В рамках программной реализации решения задачи был создан специальный диалоговый интерфейс, содержащий поля ввода исходных данных (начальные и граничные условия, количество точек N, на которое разбивается отрезок $[0,1]$, шаг по времени τ, бифуркационный параметр ν, коэффициент β в граничном условии третьего рода). Графики показывают зависимость окончательного решения на последнем временном слое от расстояния до центрального делового района. Красная линия демонстрирует поведение плотности населения, а зеленая - поведение нормированной плотности населения, то есть функции . В таблице отражаются результаты счета на каждом временном шаге (плотность населения, качество жилищного фонда на данном расстоянии от ЦДР).

Выход на промежуточную асимптотику решения исследуется с помощью рассмотрения нормированной плотности населения $U/max(U)$ на каждом временном шаге.

3. Результаты вычислительного эксперимента.

3.1 Исследование поведения решений для функций $k(U) = U$ и $g(Q) = Q$. Рассмотрим в качестве начального условия однородное распределение функций U и Q по пространству, то есть $U(r,0) = 1$, $Q(r,0) = 1$.Бифуркационный параметр $\nu = 0,5$ (рис. 1).

Рис. 1. Начальный момент времени.

Численное моделирование показывает, что начиная примерно с $t = 1,5$ решение выходит на промежуточную асимптотику, то есть нормированный профиль плотности U не меняется со временем, при этом сама функция монотонно стремится к 0. (рис. 2)

Рис. 2. Выход на промежуточную асимптотику.

Если же бифуркационный параметр ν при тех же начальных и граничных условиях равен 0.1 , то решение становится неустойчивым. Этот факт иллюстрирует следующий график:

Рис. 3. Неустойчивое решение.

Мы наблюдаем так называемую "пилу свидетельствующую о том, что решение неустойчиво. Таким образом можно сделать вывод о том, что решение задачи на больших временах не существует.

3.2 Тригонометрическая форма плотности населения.

Выберем начальные условия в виде:

$$\begin{cases} U(r,0) = 1 + 0,9\sin(10\pi r) \\ Q(r,0) = 1 \\ \nu = 0.5 \end{cases} \tag{6}$$

С течением времени, причем достаточно быстро, система "забывает"начальные условия. На рис.5 заметно как синусоида превращается в кривую, схожую по форме с той, что мы получили для $U = 1$. В более поздний момент времени решение выходит на промежуточную асимптотику, о чем свидетельствует график нормированной плотности.

Рис. 4. Тригонометрическая форма.

Рис. 5. Решение выходит на промежуточную асимптотику.

Рис. 6. Выход на промежуточную асимптотику.

3.3 Другие виды начальных условий. Модель Кларка.

Изучим поведение решения задачи в случае, где в качестве начального условия выбирается функция $U = x^3(1-x)^2$.

$$\begin{cases} U(r,0) = r^3(1-r)^2 \\ Q(r,0) = 1 \\ g(Q) = Q \\ k(U) = U \\ \nu = 0.5 \end{cases} \tag{7}$$

Рис. 7. Начальный момент времени.

К моменту времени $t = 4$ решение выходит на промежуточную асимптотику.

Рис. 8. Финальный результат.

Как уже отмечалось выше, существует множество моделей, целью которых являлось изучение пространственной неравномерности распределения городского населения. Одна из наиболее известных среди них - модель Кларка, описывающая пространственную неравномерность в распределении плотности населения в городе. Модель Кларка исходит из предположения, что плотность населения в городе экспоненциально падает с удалением от центра города. Поэтому для рассмотрения последнего варианта начальных условий мы берем функцию плотности населения $U = e^{-10x}$. Имеем следующие начальные условия:

$$\begin{cases} U(r,0) = e^{-10r} \\ Q(r,0) = 1 \\ g(Q) = Q \\ k(U) = U \\ \nu = 0.5 \end{cases} \tag{8}$$

В момент времени $t = 4$ график полностью совпадает со случаем, когда $U = x^3(1-x)^2$.

Рис. 9. График нормированной плотности для модели Кларка.

3.4 Исследование поведения решений для функций $k(U) = e^U$ и $g(Q) = Q^4$.

Поскольку цель данной работы состоит в нахождении влияния начальных условий и функций $k(U)$ и $g(Q)$ на решение, то рассмотрим ситуацию, при которой $k(U) = e^U$. В качестве начальных условий берем те же три функции, что и в предыдущих двух разделах.

Итак,

$$\begin{cases} U(r,0) = r^3(1-r)^2 \\ Q(r,0) = 1 \\ g(Q) = Q^4 \\ k(U) = e^U \\ \nu = 0.5 \end{cases} \tag{9}$$

Рис. 10. График нормированной плотности напоминает аналогичный график из предыдущего случая.

Мы видим, что нормированный профиль плотности населения изменился по сравнению с разделом, предшествовавшим данному. Он стал более пологим, а решение задачи еще раньше выходит на промежуточную асимптотику. Аналогичная ситуация наблюдается при $U(r,0) = 1 + 0,9\sin(10\pi r)$.

Рис. 11. Нормированная плотность остается неизменной.

Единственное отличие состоит в том, что к моменту времени $t = 2$ решение лежит немного выше чем его аналоги для других начальных условий. Однако нормированная плотность осталась неизменной.

4. Заключение.

Итак, было проведено компьютерное моделирование динамики плотности городского населения с учетом изменения качества жилого фонда. Построена модель состоящая из уравнения в частных производных параболического типа и обыкновенного дифференциального уравнения. Для широкого класса коэффициентов, в том числе и для широко известной модели Кларка, показано, что решение задачи "быстро забывает"детали начальных условий и выходит на так называемую промежуточную асимптотику, характер которой зависит только от оператора задачи. Фактически это означает, что урбанистическая структура не зависит от привходящих факторов, а определяется внутренней структурой самой модели.

Вариантов выбора различных состояний (фиксированных наборов коэффициентов) оказывается настолько много, что направленное изучение всех возможных случаев и соответствующих им решений представляется на данный момент отдельной и достаточно трудоёмкой задачей. Возможно, следует провести классификацию состояний на основе реальных процессов градоформирования, взятых из международного опыта построения городов, накопленной статистики по подобным вопросам, а также с учетом мнения специалистов из области социологии и формирования городских структур. Решение такой задачи будет уже следующей важной ступенью на пути к пониманию таких проблем, как распределение населения внутри городского пространства, эволюции городской структуры, а в дальнейшем и более глобальных вопросов, касающихся формирования урбанистических структур.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tonu Puu Nonlinear Economic Dynamics Publisher: Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K (1997)*
2. *Martin J. Beckmann* On spatial population dynamics // Complex Economic Phenomena in Time and Space in honour of Prof. Tonu Puu v. 18 (3), p. 421-641.(2003)
3. *Tonu Puu* Attractors, Bifurcations, and Chaos: Nonlinear Phenomena in Economics Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K - July, (2003)
4. *Zhang, W.B.* Synergetic Economics Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. KG (1990)

СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, с. 84–91

УДК 519.95

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЗНАНИЙ РЕШАТЕЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ВИДЕ ОНТОЛОГИИ

© 2006 г. Ю. Н. Капустин

ykapustin@gmail.com

Кафедра Системного программирования

Введение. База знаний решателя геометрических задач (РГЗ) [1], на данный момент, имеет довольно сложную структуру и содержит разнородные знания. Данная работа посвящена созданию нового представления знаний РГЗ в виде онтологии [2, 3], рассматривается подробная спецификация структуры знаний решателя.

Формально база знаний решателя может быть представлена в виде относительно независимых друг от друга частей: база стереотипов, являющихся основным проблемно-ориентированным средством поиска решения; база задачи, содержащая знания о геометрических объектах задачи и отношениях между ними; база целей, хранящая знания об искомой цели и целях, добавленных в граф планирования решения (ГПР) в ходе планирования.

В настоящее время эти составные части базы знаний реализованы на языке Пролог и представлены в виде нескольких файлов, каждый из которых имеет свой синтаксис и семантику. Очевидно, что такое положение не позволяет воспринимать знания РГЗ как единое целое и скрывает некоторые важные связи и факты базы знаний. Представление на основе онтологий позволяет устранить этот недостаток и добавляет в РГЗ знания нового вида - метазнания, представляющих собой знания об организации и способах управления процессом планирования в решателе.

Базу знаний РГЗ можно разделить на две части: часть содержащая, фундаментальные для системы знания, к примеру, знания о планировании. Эта часть служит для описания решателя, и тех принципов, на которых строится его работа. Другая часть содержит информацию, обладающую количественной характеристикой. К ней можно отнести наборы стереотипов, ситуаций, отношений и т.д. Эта часть предполагает частое изменение, поэтому её поддержку логичнее всего выполнять автоматически. Для этого необходимо разработать средство поддержки базы знаний, которое позволяет использовать онтологию, описывающую первую часть решателя, в качестве каркаса для добавления в неё часто изменяемых элементов из второй части.

1. Онтологии знаний решателя геометрических задач. В качестве языка для представления знаний Решателя был выбран OWL [4]. Поскольку язык OWL является составной частью системы технологий Semantic Web, он, так же как и RDF, использует в качестве своего синтаксиса язык XML. Это, в настоящее время, является своего рода оптимальной формой представления информации, ориентированной одновременно и на программные системы, и на человека. Использование стандартного для WWW синтаксиса позволяет применять уже существующие xml-анализаторы для синтаксического разбора web-онтологии и сосредоточиться, тем самым, на анализе их семантики.

В языке web-онтологии используется в несколько упрощенном виде один из наиболее популярных (и интуитивно понятных) сегодня подходов - объектно-ориентированный метод описания окружающего мира. Базовые идеи языка OWL - свойства, классы, объекты и ограничения реализуют представление о мире, как о множестве сущностей (объектов), характеризуемых некоторым набором свойств. Эти сущности состоят между собой в определенных отношениях и объединяются по определенным признакам (свойствам и ограничениям) в группы (классы).

В настоящее время для создания и поддержки OWL онтологий существует целый ряд инструментов, которые помимо общих функций редактирования и просмотра выполняют поддержку документирования онтологий, экспорт OWL онтологий в другие форматы и языки, поддержку графического редактирования, управление библиотеками т.д. Примером редактора OWL онтологий может служить Protege [5] - локальная, свободно распространяемая Java-программа, разработанная группой медицинской информатики Стенфордского университета. Программа предназначена для построения (создания, редактирования и просмотра) онтологий прикладной области.

При построении онтологии РГЗ выбрана представленная на рисунке 1 схема интеграции понятий. Стрелки указывают зависимости между онтологиями. Онтологии нижнего уровня используют при описании своих понятий понятия, представленные в онтологиях верхнего уровня, что изображено стрелками.

Рис. 1. Схема отношений между понятиями РГЗ.

К онтологии верхнего уровня, прежде всего, следует отнести самые общие абстрактные понятия.

Онтология предметной области содержит знания о геометрических объектах и связях между ними.

Онтология задач включает в себя управляющие стереотипы, которые являются основным средством логического вывода и ситуации необходимые для их применения. Помимо этого, онтология задач содержит граф планирования решения, отражающий весь процесс решения задачи.

Онтология приложение состоит из функциональных стереотипов, описывающих действия, которые выполняются при применении стереотипа, и описание ситуации, в которой он применим. Действия стереотипов либо изменяют содержимое базы задачи, либо добавляют цели в базу целей. Описание стереотипа включает объекты и отношения конкретной решаемой задачи.

1.1 Онтология верхнего уровня. К онтологии верхнего уровня относятся понятия:

Объект

Именованная структура данных, содержащая конечное число элементов произвольной структуры. В рассматриваемой онтологии, является вершиной иерархии для всех понятий, определенных в низлежащих онтологиях.

К примеру, понятие геометрического объекта, определенного в онтологии предметной области, является потомком объекта онтологии верхнего уровня. При реализации на языке OWL, онтология верхнего уровня импортирована в низлежащих онтологиях, поэтому геометрический объект напрямую наследует объект:

<owl:Class rdf:ID="Геометрический_объект»
<rdfs:subClassOf>
<owl:Class rdf:ID="Объект"/>
</rdfs:subClassOf>
...

Отношение

Отношение в данном случае соответствует конструкции свойство языка OWL. Отношения могут определять связь между представителями классов и стандартными типами данных, либо связь между представителями двух классов. При определении отношения, возможно ввести ограничение на его действие, т.е. задать домен и диапазон. К примеру, для описания того факта, что треугольник имеет периметр и что он представлен числом с плавающей точкой, в онтологии для класса треугольник задается отношение "периметр"с соответствующим диапазоном. Для более точного определения отношений, используется встроенный в язык OWL механизм характеристик свойств. С его помощью, можно определить транзитивность, симметричность и функциональность отношения. К примеру, при описании отношения "центр окружности"указано, что это отношение функционально:

<owl:ObjectProperty rdf:about="#центр_окружности»
<rdf:type rdf:resource="http://www.w3.org/2002/07/owl#FunctionalProperty"/>
<rdfs:domain rdf:resource="#окружность"/>
</owl:ObjectProperty>

Всякая окружность имеет уникальный центр окружности. Таким образом, любой потомок класса окружность может быть связан только с единственным центром окружности, используя свойство центр_окружности.

Типы данных

Так как рассматриваемая онтология реализована на языке OWL, в качестве типов данных могут использоваться встроенные типы XML Schema.

1.2 Онтология предметной области. В базе знаний хранится информация о геометрических объектах и отношениях между ними. В онтологическом представлении была обновлена классификация геометрических объектов: они были разделены на простые и составные. К первой группе относятся: точка, отрезок и прямая. Ко второй: четырехугольник, треугольник, угол и окружность. Эти основные объекты являются вершиной иерархии, состоящей из наследуемых объектов, уточняющих данные.

Описание объектов включает в себя тип объекта, информацию о возможности брать значение объекта и список его составных частей. Некоторые составные части объектов сгруппированы по принципу близости ролей, которые они могут играть при решении геометрических задач. Внутренняя структура объектов, как уже говорилось, представлена в виде набора отношений связывающих составные объекты с простыми. К примеру, для треугольника указано, что этот объект содержит по три стороны, угла, точки, биссектрисы, медианы, высоты и средних линий. Это описание представлено в виде бинарных отношений с соответствующей кратностью, связывающих треугольник с другими объектами. Помимо этого, треугольник имеет площадь и периметр.

При описании отношений между геометрическими объектами, в начале, задается класс "отношение между геометрическими объектами". Для него определяется общая структура для отношений решателя: информация о том, какое это отношение, конфигурационное или проблемное, симметричность отношения и допустимые объекты в данном отношении. Конкретные отношения, описанные в базе знаний решателя, представляются потомками этого класса. Далее для каждого отношения добавляется информация о типах геометрических объектов, которые могут находящихся в данном отношении, порядке следования и их количестве. Для задания количества некоторого типа объектов в отношении используется механизм кардинальности свойств языка OWL.

1.3 Онтология планирования. Планирование в РГЗ осуществляется на основе стереотипов [6]. Основные принципы такого планирования, связаны с тем как человек обычно решает сложную задачу. Он использует свой и чужой накопленный опыт. Пробует применить подходящие стереотипные решения: обнаруживая известную ситуацию, предпринимает те действия, которые у него с данной ситуацией ассоциируются. Такие действия приводят к появлению уже новых ситуаций, в которых можно применить другие известные стереотипные приемы решения. Процесс применения стереотипов повторяется и приводит к нужному решению, либо к убеждению, что такого решения нет.

В общем случае стереотип представляет собой ситуацию, определяющую условия, в которых он применим, и действия, которые нужно совершить при применении стереотипа.

Управляющие стереотипы представляют собой формализованные приемы управления ходом планирования поиска решения, и не зависят от области приложения. Управляющие стереотипы вызываются при решении задачи, в зависимости от того, какие действия нужно выполнить. Существуют УС для поиска текущей цели на ГПР, для поиска стереотипов, подходящих для уточнения текущей цели; для применения найденных стереотипов и т.д.

Каждый управляющий стереотип содержит имя ситуации, когда он применим и действие, возникающее при его применении. Знания содержащиеся в базе управляющих стереотипов можно разделить на следующие:

- Знания о том, в каких условиях лучше применять ту или иную стратегию.

- Знания о способах выбора текущей цели.

- Знания о выборе функциональных стереотипов. Представляют собой способы отбора ФС для построения уточнения плана или вывода новых фактов.

- Знания о действиях функциональных стереотипов.

- Знания о переходе на следующий шаг планирования. Они предназначены для определения понятия "шага планирования".

- Знания о способе ввода условий задачи и вывода объяснения решения.

Рис. 2. Планирование на основе стереотипов.

Описание ситуации функционального стереотипа состоит из совокупности условий, накладываемых на геометрические объекты, их элементы, значения объектов и элементов, отношения между объектами и элементами. В случае с ситуациями управляющих стереотипов, условия накладываются на состояние дневника планирования. Похожие ситуации часто объединены в одну, а различия между ними описываются в соответствующих настройках. Настройка представляет собой дополнительную конкретизацию ситуации и она не может включать в себя описания объектов или их элементов: все объекты должны быть указаны в описании соответствующей ситуации.

В ходе планирования решения производится построение графа планирования решения.

В онтологии, этому понятию соответствует план. Взаимное расположение действий в плане характеризуется специальной системой меток. Связки определяют порядок расположения аргументов; and соответствует последовательному расположению, or - параллельному, block показывает, что аргументы располагаются последовательно в произвольном порядке.

Знания о текущем состоянии процесса планирования хранятся в дневнике планирования. На его основании производится распознавание ситуаций для управляющих стереотипов. Дневник планирования содержит информацию о текущей цели и применимых функциональных стереотипах. Помимо этого дневник включает в себя текущую стратегию планирования и состояние сеанса.

1.4 Онтология приложения. Онтология приложения содержит в себе базу функциональных стереотипов (ФС), т. е. знания о том, какие действия нужно выполнить для уточнения текущей цели при наличии конкретной ситуации. ФС представляет собой формализованный способ решения задачи.

Функциональные стереотипы вызываются, когда нужно уточнить текущую цель. Каждой возможной цели должно соответствовать не менее одного функционального стереотипа. Иначе эта цель никогда не будет достигнута, так как знаниями о возможных способах достижения целей обладают только функциональные стереотипы. Полное описание ситуации, в которой действует функциональный стереотип, содержится в совокупности описаний абстрактной ситуации и одной из ее настроек, и однозначно определяется уникальным именем, составленным из имен этой ситуации и настройки.

Действие стереотипа представляет собой безусловный набор специально оформленных операторов, которые объединены логическими связками "and "or "block". Эти операторы должны быть выполнены при применении данного стереотипа для уточнения цели. Описание действий стереотипов хранится отдельно от описания абстрактных ситуаций. Результатом работы функционального стереотипа является либо уточнение цели цепочкой подцелей, либо запись в Базу Задачи новых фактов, объектов.

Помимо этого, онтология приложения содержит формулы, описывающие смысл применения функциональных стереотипов. Каждой из формул соответствует свой стереотип, действия в котором могут различаться в зависимости от настройки ситуации. К примеру, в настройках может содержаться информация о том, какие из величин объектов, участвующих в вычислениях, известны в момент вызова стереотипа.

Описание задачи, представляет из себя перечисление геометрических объектов, отношений заданных над ними, величин известных элементов рассматриваемых объектов и цель задачи. Последняя может состоять в необходимости найти значение элемента определенного объекта, либо установить истинность некоторого утверждения. В онтологическом представлении, условие задачи представляется совокупностью экземпляров классов, описывающих конкретные отношения и геометрические объекты. Информация о величинах элементов объектов, может быть задана непосредственно внутри соответствующих объектов.

2. Программная поддержка базы знаний. Предлагаемое программное средство принимает на вход OWL документ, содержащий онтологии верхнего уровня, планирования и предметной области. Обрабатывая определенные файлы решателя, оно дополняет исходную онтологию наборами классов описывающих геометрические объекты, отношения между ними, ситуации и стереотипы. В случае успешного вывода выдается документ на языке OWL, описывающий актуальные, на данный момент, для решателя знания, а в случае возникновения ошибок - текстовое описание этих ошибок. Помимо этого, программное средство может использоваться для обратной задачи: по OWL документу, содержащему полную онтологию знаний решателя, выдавать описание знаний об объектах, отношениях и т.д. на языке Пролог, в формате соответствующем внутреннему представлению решателя.

Рис. 3. Схема работы программного средства и РГЗ.

Таким образом, использование нового представления знаний решателя и программного средства позволяет не только интегрировать в единую структуру все знания решателя, но и обеспечивает возможность использования широкого спектра современных программных средств для редактирования и поддержки базы знаний решателя.

В качестве языка реализации был выбран язык Java. Основной причиной такого выбора, является тот факт, что на данный момент существуют два основных открытых интерфейса работы с онтологиями: API Jena и OWL API [7]. Эти библиотеки имеют практически одинаковую функциональность и предполагают использование языка Java.

3. Заключение. В данной работе, рассмотрен новый метод представления знаний решателя геометрических задач на основе онтологий.

Построена онтология базы знаний, интегрирующая разнородные знания РГЗ в единое целое. При проектировании онтологии, была выделена часть, описывающая знания об организации и способах управления процессом планирования в РГЗ. В качестве языка описания знаний, был выбран язык OWL (Ontology Web Language), являющийся составной частью системы технологий Semantic Web.

Реализовано программное средство поддержки базы знаний, обеспечивающее автоматический перевод описания базы функциональных стереотипов и конструкций, необходимых для описания стереотипов, в онтологическое представление и обратно.

Использование нового представления знаний решателя и программного средства позволило не только интегрировать в единую структуру все знания решателя, но и обеспечило возможность использования широкого спектра современных программных средств для редактирования и поддержки базы знаний решателя.

Автор благодарит Корухову Л.С. и Малышко В.В. за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корухова Л.С., Любимский Э.З., Малышко В.В.* Реализация стратегий планирования на основе управляющих стереотипов. Препринт № 13. М.: Институт Прикладной Математики Российской Академии Наук, 2000.
2. *Gruber T.* A translation approach to portable ontology specifications. // J. Knowledge acquisition. 1993. 5(2). 199-220.
3. *Guarino N.* Formal ontology and information system. // Proceeding of FIOS'98. IOS Press. 1998.
4. *Dean M.* OWL Web Ontology Language Reference, W3C Recommendation [HTML] (http://www.w3.org/TR/2004/REC-owl-ref-20040210/).
5. *Musen M.* Domain Ontologies in Software Engineering: Use of Protege with the EON Architecture // Methods of Inform. in Medicine, pages 540-550,1998.
6. *Корухова Л.С., Любимский Э.З., Островский В.В.* Программирование на основе стереотипов. Препринт № 18. М.: Институт Прикладной Математики Российской Академии Наук, 1994.
7. *Bechhofer S.* An API for OWL [HTML] (http://owl.man.ac.uk/api.shtml).

СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, с. 92–98

УДК 517.518.85

ПОСТРОЕНИЕ БЕСКУПОННОЙ КРИВОЙ ДОХОДНОСТИ

© 2006 г. В. А. Лапшин

lapsh@rambler.ru

Кафедра Системного анализа

Введение. Срочная структура процентных ставок, лежащая в основе теории оценки активов с фиксированным доходом и являющаяся одним из наиболее дискуссионных вопросов проведения эффективной долговой и денежной политики, составляет предмет интенсивных зарубежных исследований уже более 30 лет. В России, например, широко используется кривая доходности к погашению, но общепризнанной в мире модели построения кривой бескупонной доходности (zero-coupon yield curve, кривой доходности спот) до сих пор не существует [2].

Для решения задачи оценивания срочной структуры процентных ставок традиционно используют 2 подхода: параметрическое оценивание и интерполяционные методы.

Среди интерполяционных методов можно выделить сплайновый подход, который был впервые предложен в работе [5]. Идея подхода заключается в разбиении всего интервала, охватывающего максимальный срок обращения облигаций, на отрезки, на каждом из которых аппроксимирующая функция строится независимо, обычно для этого используют простую параметрическую модель. При этом требуется, чтобы переходы от одной функции к другой на границах отрезков были достаточно гладкими.

Параметрический подход, впервые описанны в работе [4], в настоящее время является наиболее распространенным методом построения срочной системы спот-ставок. он заключается в использовании одной параметрической функции для описания всего множества спот-ставок в моменты времени, не превышающие срок погашения наиболее длинной облигации. Его отличие от интерполяционного подхода состоит в том, что для реализации требуется меньший набор параметров. Но в то же время нужно отметить его меньшую способность к аппроксимации срочных структур сложных форм. Кроме того, в этом подходе присутствует априорная взаимосвязь между динамикой отдельных секторов фондового рынка, что затрудняет проведение анализа процентных ставок в рамках теории рыночной сегментации [2].

Подход, предлагаемый в настоящей статье, относится к сплайновым методам и является непосредственным развитием описанного в работе [1] подхода. Его отличие от традиционных сплайновых методов состоит в том, что о виде функции дисконтирования не делается заранее никаких предположений. но накладывается условие её гладкости. Такой подход является экономически обоснованным: он позволяет учесть непрерывность ожиданий участников рынка, что практически всегда имеет место на практике. Поиск решения в виде сплайна при данном подходе – математически обоснованный результат.

Перейдём к детальному рассмотрению задачи.

1. Постановка задачи. Задача определения временнóй структуры процентных ставок непосредственно связана с нахождением функции дисконтирования. В настоящей работе анализируется модель рынка, в рамках которой все облигации имеют равную степень рискованности и ликвидности. Предполагается, что любую купонную облигацию можно заменить набором бескупонных облигаций с соответствующими сроками погашения. Пусть зависимость цены P облигации от сроков t_i, $i = 0, ..., n$ и объемов выплат F_i, $i = 0, ..., n$ имеет вид

$$P = \sum_{i=0}^{n} d(t_i) F_i, \tag{1}$$

где $d(t)$ - функция дисконтирования. И пусть на рынке торгуются N инструментов с ценами P_k, $k = 1, ..., N$ и объёмами выплат $F_{i,k}$, $i = 0, ..., n$, $k = 1, ..., N$ в моменты времени

$t_i,\ i=0,...,n$, причём моменты t_i являются общими для всех инструментов. При этом требуется, чтобы цены инструментов, предсказанные по найденной функции дисконтирования в соответствии с (1), были бы близки к текущим рыночным ценам. Таким образом, приходим к задаче: найти функцию дисконтирования $d(t),\ t\geq 0$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $d(t)$ не возрастает на всей области определения;
2. $d(t)>0, \quad d(0)=1$;
3. $\sum_{i=0}^{n} d(t_i)F_{i,k}=P_k$, для всех $k=1,...,N$.

Покажем, что в такой постановке эта задача является некорректно поставленной. В самом деле: из приведённых условий можно определить только значения функции дисконтирования в точках разбиения, т.е. определить $d(t_i)$, причём единственным образом это можно сделать лишь в случае, когда система в условии 3 является определённой, что возможно только в тривиальном случае, когда ни одна облигация не имеет купонных выплат и времена погашения облигаций не совпадают. Таким образом, в общем случае однозначному определелению не поддаются даже $d(t_i)$, не говоря уже о значениях $d(t)$ в промежуточных точках. В дальнейшем для регуляризации на функцию $d(t)$ будет наложено условие максимальной гладкости, формализованное некоторым способом.

2. Решение задачи. Для того чтобы учесть условия монотонности и неотрицательности, представим $d(t)$ в виде

$$d(t)=\exp\left\{-\int_{t_0}^{t} f^2(\tau)d\tau\right\}.$$

Здесь $f^2(\tau)$ имеет смысл мгновенных форвардных процентных ставок.

Для выполнения условия 3 потребуем, чтобы $d(t)$ доставляла минимум функционалу

$$J_2=\sum_{k=1}^{N} w_k\left(\sum_{i=0}^{n} d(t_i)F_{i,k}-P_k\right)^2,$$

где w_k - весовые коэффициенты, которые обычно выбираются в зависимости от ликвидности бумаг и других параметров, не вошедших в модель явно. Мерой гладкости удобно выбрать функционал J_1 :

$$J_1=\int_{t_0}^{t_n}(f'(\tau))^2d\tau. \tag{2}$$

Введём параметры

$$c_k=\int_{t_k-1}^{t_k}(f(\tau))^2d\tau, \quad k=1,...,n.$$

Тогда J_2 будет функцией только от $c_1,...,c_n$, и мы сможем разделить задачи: минимизацию J_1 по f при фиксированных c_k и общую минимизацию только по c_k . В работе [1] показано, что при таком подходе решением задачи минимизации функционала J_1 при фиксированных c_k будет сплайн $f(t)$, имеющий вид:

$$f(t)=\left\{\begin{array}{rl} C_1\exp\{\sqrt{\lambda_i}(t-t_k)\}+C_2\exp\{-\sqrt{\lambda_i}(t-t_k)\}, & \lambda_i>0\\ C_1\sin(\sqrt{-\lambda_i}(t-t_k))+C_2\cos(\sqrt{-\lambda_i}(t-t_k)), & \lambda_i<0\\ C_1(t-t_k)+C_2, & \lambda_i=0\end{array}\right. \tag{3}$$

а также описаны некоторые полезные свойства этого сплайна, а именно: если $f(t)$ доставляет минимум функционалу J_1 при фиксированных c_k , то

1. функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема на всём отрезке $[t_0,t_n]$, $f(t)\in C^2(t_{i-1},t_i), i=1,...,n$, $f'(t_0+0)=f'(t_n-0)=0$;

2. $f(t) \neq 0$ для любой точки $t \in [t_0, t_n]$;

3. синусоидальные компоненты сплайна не могут осциллировать: $\lambda_i > -\frac{\pi^2}{(t_{i+1}-t_i)^2}$.

К сожалению, практический метод нахождения коэффициентов C_1^i, C_2^i, λ_i, предложенный в статье [1], слишком для реализации. К тому же, предложенный алгоритм обладает высокой вычислительной сложностью, что сильно ограничивает круг возможных применений.

Цель настоящей статьи состоит в разработке эффективного алгоритма, пригодного для практического применения.

3. Построение эффективного алгоритма. Ниже мы введём другое параметрическое представление оптимального сплайна, что позволит использовать стандартные алгоритмы для нахождения неизвестных коэффициентов путём минимизации некоторого функционала. Задача минимизации будет приведена к виду, который сделает возможным применение нелинейного метода наименьших квадратов. Кроме того, будет показано, как использовать метод Ньютона-Рафсона для минимизации этого функционала.

Рассмотрим другой способ параметрического представления $f(t)$:

$$f(t) = p_{i-1}\phi_{\lambda_i}(t_i - t) + p_i\phi_{\lambda_i}(t - t_{i-1}), \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \tag{4}$$

где

$$\phi_{\lambda_i}(x) = \begin{cases} \frac{sh(\sqrt{\lambda_i}x)}{sh(\sqrt{\lambda_i}(t_i-t_{i-1}))}, & \lambda_i > 0 \\ \frac{sin(\sqrt{-\lambda_i}x)}{sin(\sqrt{-\lambda_i}(t_i-t_{i-1}))}, & -\frac{\pi^2}{(t_i-t_{i-1})^2} < \lambda_i < 0 \\ \frac{x}{t_i-t_{i-1}}, & \lambda_i = 0 \end{cases} \tag{5}$$

где $p_i,\ i = 0, ..., n$ и $\lambda_i,\ i = 1, ..., n$ - новые параметры. Легко видеть, что представление (4) и (5) эквивалентно (3) при условии непрерывности $f(t)$. Для обеспечения выполнения свойства 1, приведённого выше, необходимо выполнение следующих равенств:

$$f'(t_i - 0) = f'(t_i + 0); \quad f'(t_0 + 0) = 0,\ f'(t_n - 0) = 0,$$

что равносильно тому, что искомая $f(t)$ доставлет минимум функционалу

$$J_3 = \sum_{i=1}^{n-1}(f'(t_i + 0) - f'(t_i - 0))^2 + f'(t_0 + 0)^2 + f'(t_n - 0)^2.$$

Таким образом, необходимо, чтобы $f(t)$ доставляла минимум функционалам $J_1,\ J_2,\ J_3$. Для того, чтобы использовать стандартные алгоритмы минимизации, поставим задачу минимизации их суммы с некоторыми коэффициентами. Приходим к задаче минимизации функционала

$$J = \alpha J_1 + J_2 + \beta J_3,$$

где α, – параметр, отвечающий за желаемую гладкость решения (чем больше α, тем более гладким будет решение), а β характеризует штраф за разрыв второй производной. Выбранная параметризация позволяет явно вычислить градиенты $J_1',\ J_2',\ J_3'$. На этом этапе для минимизации J можно использовать градиентные или квазиньютоновские методы. Хорошо известно, однако, что наиболее эффективным является метод Ньютона-Рафсона. Применение его напрямую к J сопряжено с трудностями вычисления гессиана, т.к. J_2'' имеет плотную сложную структуру и требует либо времени $O(n^3)$ и памяти $O(n^3)$, либо времени $O(n^4)$ и памяти $O(n^2)$ для вычисления. А в реальных приложениях этой задачи $n \sim 10^3$.

Покажем, как задача может быть изменена так, чтобы J_2'' имела простую структуру, позволяющую умножать её на вектор без непосредственного формирования самой матрицы, и при необходимости считалась за время $O(n^2)$.

Для этого рассмотрим ещё n дополнительных параметров – уже известные c_k. Для обеспечения равенства

$$c_k = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f^2(\tau)\, d\tau,\ k = 1, ..., n,$$

введём ещё одно слагаемое в выражение для J:

$$J = \alpha J_1 + J_2 + \beta J_3 + \gamma J_4,$$

где

$$J_4 = \sum_{k=1}^{N} \left(c_k - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f^2(\tau)\, d\tau \right)^2.$$

Отметим, что производные J_1'', J_3'' и J_4'' при таком подходе будут иметь всего по несколько заполненных диагоналей. А выражение для J_2 упростится и примет вид

$$J_2(c_1, ..., c_n) = \sum_{k=1}^{N} w_k \left(\sum_{i=0}^{n} F_{i,k} \exp\left\{ -\sum_{s=1}^{i} c_s \right\} - P_k \right)^2.$$

Таким образом, вторая производная J_2'' будет иметь структурированный вид, что позволит, например, умножать её на вектор, не формируя явно матрицу, за время $O(n)$. Кроме того, для вычисления этой матрицы будет достаточно всего $O(n^2)$ операций (по числу клеток). Но за эти приятные свойства приходится расплачиваться "разбрасыванием" ошибки приближения на несколько компонент, не все из которых имеют физический смысл, в связи с чем сложно определить необходимую точность минимизации и, следовательно, момент окончания процедуры оптимизации.

В любом случае, имея информацию о второй производной, для решения задачи минимизации можно применить метод Ньютона-Рафсона (см, например, [3]).

Заметим также, что слагаемые J_2 и J_3 имеют вид суммы квадратов. Если привести J_2 к такому же виду, то для минимизации $J = \alpha J_1 + J_2 + \beta J_3$ можно будет воспользоваться нелинейным методом наименьших квадратов.

Чтобы сделать это, в предположении, что $(t_i - t_{i-1})$ малы, вместо интеграла в (2) напишем квадратурную формулу Симпсона для 3-х узлов:

$$J_1 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n} [f'(t_{i-1})^2 + 4f'(\frac{t_{i-1} + t_i}{2})^2 + f'(t_i)^2].$$

Таким образом, функционал J принимает вид $\sum_i J_i^2$, причём ограничение на размерность, фигурирующее в нелинейном методе наименьших квадратов, оказывается выполненным, так как у нас $2n+1$ переменных и $4n+1+N$ слагаемых. Ограничение же заключается в том, что независимых слагаемых должно быть больше, чем переменных.

Указанные два подхода достаточно хорошо дополняют друг друга: метод Ньютона-Рафсона с введением дополнительных параметров хорошо работает при большой требуемой точности приближения, а нелинейный метод наименьших квадратов с заменой интеграла квадратурной формулой – если требуется большая гладкость.

Таким образом, можно предложить использовать оба подхода, выбирая нужный исходя из условий задачи. А именно, исходя из величины α. При больших α можно использовать первый метод, а при малых - второй.

В качестве начального приближения можно взять $f(t) \equiv p$, что соответствует $r(t) \equiv p^2$. Т.е. $p_i = p, \lambda_k = 0,\ i = 0, ..., n, k = 1, ..., n$, что видно из (4)–(5), где p – решение вспомогательной задачи $J(p) \to \min$. Достаточно двух итераций одномерного метода Ньютона из разумного начального приближения ($p^2 = 0.05$), чтобы получить некоторое начальное приближение для исходной задачи. Более подробно вопрос выбора начального приближения будет рассмотрен ниже.

Напомним, что оба параметра α и β определяют желаемую гладкость решения. Достаточно оставить один из них, поставив другой от него в зависимость. Эмпирически было подобрано соотношение $\beta = \alpha$.

4. Выбор начального приближения Предложим также метод нахождения более точного начального приближения для итерационных алгоритмов минимизации. Введём новый набор параметров $d_i = d(t_i),\ d = (d_0, ..., d_n)^T$ и перенесём требование гладкости на функцию $d(t)$. Получим задачу

$$\begin{cases} Fd & = & P \\ \int_{t_0}^{t_n} (d''(t))^2 dt & \to & \min \\ d_0 & = & 1 \\ d_i & \geq & d_{i+1} > 0, \end{cases}$$

где F - матрица потоков платежей: $F_{i,k}$ - размер платежа по k -му инструменту в момент t_i , а $P = (P_1, ..., P_k)^T$ - вектор цен инструментов. Как и прежде, условие равенства $Fd = P$ заменим на условие минимума квадрата невязки $\|Fd - P\| \to \min$. Кроме этого, заменим интеграл на интегральную сумму по решётке с узлами в t_i , а производную заменим на её разностный аналог на той же сетке[‡].

Таким образом, получим задачу

$$\begin{cases} \|Fd - P\|^2 & \to & \min \\ \|D^2 d\|^2 & \to & \min \\ d_0 & = & 1 \\ d_i & \geq & d_{i+1} > 0, \end{cases}$$

которую можно переписать в виде задачи квадратичного программирования

$$\begin{cases} \|Hd - f\|^2 & \to & \min \\ Ad & \leq & b. \end{cases} \tag{6}$$

для решения которой существуют высокоэффективные алгоритмы [6].

Для использования решения полученной задачи в качестве начального приближения для минимизации J , необходимо привести его к тому виду, с которым оперируют описанные выше методы минимизации.

Для перехода от переменных d_i к переменным $p_i,\ \lambda_j$, можно использовать следующий алгоритм:

1. Определим c_k из выражения

$$d_i = \exp\{-\sum_{k=1}^{i} c_k\}; \quad c_k = \ln \frac{d_{k-1}}{d_k}.$$

2. Зафиксируем произвольные $p_i, \quad i = 0, ..., n$.

[‡]Понятно, что адекватного приближения можно добиться лишь при подходящем расположении узлов. Возникает соблазн просто доразбить слишком большие промежутки между узлами, вставив фиктивные узлы, либо ввести в рассмотрение новую, равномерную сетку. Однако, при этом придётся пересчитывать матрицу F . Преимущество равномерной сетки в том, что качество приближения вторых производных на ней на порядок выше, чем на неравномерной сетке. За это мы расплачиваемся "отрывом от реальности", т.к. встаёт вопрос о выборе узлов сетки. Если раньше он решался сам собой, то здесь приходится приводить дополнительные аргументы в пользу того или иного разбиения. Увеличение количества узлов сетки также отрицательно сказывается на быстродействии, так как размерность задачи совпадает с числом узлов сетки. Кроме того, в нашу задачу входит получение не точного решения задачи, а лишь разумного начального приближения. Для этих целей вполне достаточно естественной сетки.

3. Определим λ_i из равенств

$$c_k = \int_{t_{i-1}}^{ti} f(t)^2 dt = \int_{t_{i-1}}^{ti} (p_{i-1}\phi_{\lambda_i}(t_i - t) + p_i\phi_{\lambda_i}(t - t_{i-1}))^2 dt$$

4. Рассмотрим функционал

$$I(p_0, ..., p_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (f'(t_i + 0) - f'(t_i - 0))^2 + f'(t_0 + 0)^2 + f'(t_n - 0)^2,$$

где f(t) определена выражением (4) с найденными $\lambda_1, ..., \lambda_n$, и решим задачу

$$I(p_o, ..., p_n) \to \min_{p_0, \dots, p_n}.$$

Найденные значения $p_0, ..., p_n$ и соответствующие им $\lambda_1, ..., \lambda_n$ и будут определять найденную приближённым методом функцию.

Полученные величины можно использовать как начальные значения в итерационных процедурах минимизации.

Алгоритм. Подытоживая вышесказанное, опишем алгоритм для решения задачи определения функции дисконтирования:

1. выбрать значение α ;
2. выбрать вид начального приближения: грубое или точное;
3. найти начальное приближение:
   - в случае, если выбрано грубое начальное приближение:
     (a) решить задачу $J(p) \to \min$, где $J(p) = J$ при условии, что $p_i = p, i = 0, ..., n,\ \lambda_i = 0, i = 1, ..., n$ с начальным приближением $p = 0.2$;
     (b) положить $p_i^0 = p, i = 0, ..., n,\ \lambda_i^0 = 0, i = 1, ..., n$;

$$c_k = \int_{t_{i-1}}^{ti} f(t)^2 dt = \int_{t_{i-1}}^{ti} (p_{i-1}\phi_{\lambda_i}(t_i - t) + p_i\phi_{\lambda_i}(t - t_{i-1}))^2 dt$$

   - в случае, если выбрано точное начальное приближение:
     (a) решить задачу квадратичного программирования (6);
     (b) найти $p_i^0,\ i = 0, ..., n,\quad c_i^0, \lambda_i^0,\ i = 1, ..., n$ при помощи алгоритма, описанного выше, в части 4;
4. выбрать алгоритм минимизации, возможно, исходя из значения α ;
5. решить задачу минимизации $J(p_i, \lambda_i)$ или $J(p_i, \lambda_i, c_k)$, используя один из двух алгоритмов, описанных в части 3;
6. оценить качество полученного приближения; если необходимо, выбрать другое значение α и повторить сначала;

5. Обсуждение результатов. Предложенный метод обладает высокой эффективностью и хорошо зарекомендовал себя на практике. Кроме того, он является первым методом, реализованным для определения коэффициентов модели (3), применять которую до этого было невозможно из-за отсутствия приемлемого способа численного определения коэффициентов. На основе предложенного алгоритма Европейской Комиссией по Облигациям (http://www.effas-ebc.org) в настоящее время разрабатывается стандарт для определения кредитных спредов стран, входящих в зону Евро.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *S.Smirnov, Z.Zakharov* A Liquidity-Based Robust Spline Fitting of Spot Yield Curve Providing Positive Forward Rates. // www.effas-ebc.org/EBC Presentations/2006 Feb Luxembourg/zero yield curve fitting - version 270106.pdf
2. *А. Балабушкин, Г. Гамбаров, И. Шевчук* Оценка срочной структуры процентных ставок. // Рынок ценных бумаг, 2004, № 13, с. 44-52.
3. *T.F. Coleman, Y. Li* An Interior, Trust Region Approach for Nonlinear Minimization Subject to Bounds. // SIAM Journal on Optimization, Vol.6, pp.418-445, 1996.
4. *I.A. Cooper* Asset values, interest rate changes, and duration. // Journal of Financial and Quantitative Analisys, №12, 1977, pp. 701-724.
5. *J.H. McCulloch* Measuring the term structure of interest rates. // Journal of Business, vol.44, issue 1, 1971, pp. 19-31.
6. *Кузнецов А.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.В.* Математическое программирование. М.: Высш. шк. 1980.
7. *J.C. Nash* Compact numerical methods for computers: linear algebra and function minimization. New York: Adam Hilger, 1990

СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, с. 99–102

УДК 517.956.2

СЛОЖНОСТЬ РЕАЛИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ В КЛАССЕ МОНОТОННЫХ КОНТАКТНЫХ СХЕМ

© 2006 г. Т. Г. Лапшина

lintrop@inbox.ru

Кафедра Математической кибернетики

1. Постановка задачи.

В данной работе исследуется сложность реализации монотонной симметрической функции с порогом 2 в классе монотонных контактных схем, построенных из контактов, которые могут иметь различные веса. Доказывается оптимальность π-схемы из работы Ложкина С.А. (3), реализующей s_n^2 – монотонную симметрическую функцию с порогом 2, в классе монотонных контактных схем с заданными весами контактов для различных переменных. А именно, доказано, что, если положительные действительные числа $p_1, ..., p_n$ задают "вес"контакта для БП $x_1, ..., x_n$ соответственно, причем $p_1 + ... + p_n = n$ и $P = (p_1/n, ..., p_n/n)$, то сложность оптимальной схемы, реализующей s_n^2 в классе монотонных контактных схем с такими "веса-ми"контактов, равна $n \cdot l(P)$, где $l(P)$ - стоимость произвольного оптимального префиксного кода для распределения вероятностей P.

Среди работ, посвященных задаче реализации функции s_n^2 в классе монотонных контактных схем, отметим работу (5). В ней найдена оптимальная реализация s_n^2 в классе монотонных контактных схем. Сложность s_n^2 в классе монотонных контактных схем равна $n[\log n] + 2(n - 2^{[\log n]})$. Кричевский в работах (1), (2) построил минимальную схему, реализующую s_n^2 в классе π-схем с такой же сложностью. Ложкиным в работе (3)была найдена минимальная схема в классе π-схем с заданными весами для различных переменных, сложность которой равна равна $n \cdot l(P)$, где $l(P)$ - стоимость произвольного оптимального префиксного кода для распределения вероятностей P. Таким образом, в данной работе показано, что и в случае заданных весов контактов для различных переменных, минимальные схемы в классе π-схем из замыкающих контактов, являются ими и в классе монотонных контактных схем.

2. Основные понятия и обозначения.

Напомним некоторые общепринятые обозначения, используемые в данной работе. Понятия, не определенные в данном параграфе, есть в книгах (6) и (4).

$B = \{0,1\}$, B^n - n - мерный двоичный куб. Функцию алгебры логики(ФАЛ) $f(x_1, ..., x_n)$ будем понимать, как отображение $f : B^n \to B$.

Контактную схему называем монотонной, если она содержит лишь замыкающие контакты.

Пусть положительные действительные числа $p_1, ..., p_n$ задают "вес" контакта для БП $x_1, ..., x_n$ соответственно, причем $p_1 + ... + p_n = n$, и пусть $P = (p_1/n, ..., p_n/n)$. Будем считать сложностью $L^+_{KC}(\Sigma; P)$ монотонной контактной схемы Σ от БП $x_1, ..., x_n$ сумму "ве-сов"всех ее контактов. Обозначим через $L^+_{KC}(f; P)$ сложность реализации ФАЛ f в классе монотонных контактных схем с весами, заданными вектором P, и определим ее как минимальную сложность схем, реализующих f в данном классе. Минимальной схемой для f в классе монотонных контактных схем с весами, заданными вектором P, будем называть такую схему Σ, для которой верно:

$$L^+_{KC}(\Sigma; P) = L^+_{KC}(f; P)$$

Обозначим через s_n^q монотонную симметрическую функцию с порогом q, то есть

$$s_n^q(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x_1 + \dots + x_n \geqslant q; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

3. Сложность реализации симметрической монотонной функции с порогом 2 в классе монотонных контактных схем с заданными весами контактов для различных переменных.

Доказывается, что, если положительные действительные числа $p_1, ..., p_n$ задают "вес" контакта для БП $x_1, ..., x_n$ соответственно, причем $p_1 + ... + p_n = n$ и $P = (p_1/n, ..., p_n/n)$, то $L^+_{KC}(s^2_n; P) = n \cdot l(P)$, где $l(P)$ - стоимость произвольного оптимального префиксного кода для распределения вероятностей P (4), (7).

Сокращенная ДНФ для ФАЛ s^2_n, где $n \geqslant 2$ выглядит следующим образом:

$$s^2_n(x_1, ..., x_n) = \bigvee_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j.$$

Вначале приведем доказательство нескольких вспомогательных лемм. **Лемма о преобразовании схемы к каноническому виду.** *П*роизвольную монотонную контактную схему, реализующую функцию s^2_n, можно преобразовывать без увеличения сложности в эквивалентную монотонную контактную схему, удовлетворяющую следующим условиям:

1) если внутренняя вершина соединена с одним из полюсов контактом x_i, то она не инцидентна другим контактам переменной x_i;

2)каждая внутренняя вершина соединена контактами с каждым из двух полюсов.

Доказательство. Если внутренняя вершина c соединена контактами вида x_i с полюсом a и с другой вершиной d (Очевидно, вершина d отлична от второго полюса b), то "перебросим"конец с контакта (c, d) в полюс a. Нетрудно проверить, что такое преобразование не меняет проводимости схемы. Применив достаточное число раз это преобразование, получим схему, удовлетворяющую условию 1).

Если теперь некоторая вершина c не соединена контактом с полюсом a, то отождествим ее с полюсом b. Проводимость схемы при этом не возрастает, т.к. в силу условия 1) каждая цепь между a и c содержит не менее двух различных контактов. На этом этапе исчезнут внутренние вершины, не соседние с полюсом a. Меняя ролями a и b и повторяя преобразования, получим схему, удовлетворяющую условию 2). Если схема снова не удовлетворяет условию 1), применяем вышеописанную операцию для преобразования схемы в эквивалентную схему, удовлетворяющую условию 1). Таким образом, произвольную монотонную контактную схему, реализующую функцию s^2_n, можно преобразовывать без увеличения сложности в эквивалентную монотонную контактную схему, удовлетворяющую следующим условиям леммы, что и требовалось доказать.

Монотонные контактные схемы, удовлетворяющие условиям 1) и 2) леммы о преобразовании схемы к каноническому виду , называются *каноническими.* В дальнейшем при оценке снизу сложности $L^+(s^2_n)$ можно ограничиться рассмотрением канонических схем, причем ради краткости слово "каноническая как правило, будем опускать. Контакты канонической схемы делятся на 2 группы: те, которые инцидентны одному из полюсов, и "внутренние"контакты, соединяющие внутренние вершины.

Пусть a и b - полюсы, а $c_1, ..., c_r$ - внутренние вершины некоторой канонической схемы. Назовем j*-м пучком* множество контактов, соединяющих полюсы a и b с внутренней вершиной c_j. Пучок естественным образом распадается на 2 противоположных полупучка. Контакты полупучка A_j соединяют полюс a с внутренней вершиной c_j. Аналогично определяется полупучок B_j. Очевидно следующее:

Утверждение. *В минимальной канонической схеме каждый пучок содержит не более одного контакта* x_i *для каждого* $i = \overline{1, n}$. Строение тупиковых сечений (см. (5)) дает следующая

Лемма о тупиковом сечении канонической схемы. *К*аждое тупиковое сечение канонической схемы

1) содержит один полупучок каждого пучка;

2) содержит все внутренние контакты, соединяющие те пары вершин, которые соответствуют противоположным полупучкам из сечения;

3) никаких других контактов не содержит.

Доказательство. Очевидно, что любое сечение содержит целиком хотя бы один полупучок из каждого пучка (иначе пучок содержал бы цепь, не имеющую общих контактов с сечением). Покажем, что тупиковое сечение не может содержать контакты обоих полупучков одного пучка. Предположим противное: существует тупиковое сечение T, содержащее контакты (a,c_i) и (c_i,b) при некотором i. В силу тупиковости сечения T в схеме есть цепь $(a,c_i),(c_i,c_j),...,(c_k,b)$, в которой лишь контакт (a,c_i) принадлежит T. Аналогично в схеме есть цепь $(a,c_g),...,(c_h,c_i),(c_i,b)$, в которой лишь контакт (c_i,b) принадлежит T. Но тогда последовательность контактов

$$(a,c_g),...,(c_h,c_i),(c_i,b)$$

не имеет общих контактов с тупиковым сечением T и содержит в качестве подпоследовательности цепь схемы, что невозможно. Итак, любое тупиковое сечение T содержит в точности один полупучок из каждого пучка. Далее, если $A_j \subseteq T$ и $B_k \subseteq T$, то тупиковое сечение T содержит и все контакты вида (c_j,c_k) (иначе цепь $(a,c_k),(c_k,c_j),(c_j,b)$ не имела бы с ним общих контактов).

Ясно, что описанное выше множество контактов образует сечение. Поэтому тупиковое сечение T никаких других контактов не содержит.

Поскольку любое множество контактов, удовлетворяющее всем условиям леммы о тупиковом сечении канонической схемы, является тупиковым сечением, имеет место

Следствие. *Каноническая схема с r пучками содержит 2^r тупиковых сечений.*

Лемма о числе тупиковых сечений, не содержащих контакта одной переменной. *В минимальной для набора весов $P=(p_1/n,...,p_n/n)$ канонической схеме Σ, реализующей функцию s_n^2, существует $2^{r_i-a_i}$ тупиковых сечений, не содержащих контактов переменной x_i, где a_i – число внутренних контактов x_i, а r_i - число пучков, не содержащих контактов x_i, в схеме Σ для всех $i=\overline{1,n}$.*

Доказательство. Разобьем r_i пучков, не содержащих контактов x_i, на классы эквивалентности. К одному классу отнесем пучки, внутренние вершины которых соединены цепочкой контактов x_i. Число классов эквивалентности равно r_i-a_i. Действительно, при $a_i=0$ это очевидно. Поскольку внутренние контакты x_i не образуют циклов (в силу минимальности схемы), добавление каждого контакта x_i уменьшает число классов на 1 (за счет объединения двух классов). В силу свойства 1) (см. лемму о преобразовании схемы к каноническому виду) канонических схем внутренние контакты x_i могут соединять только пучки, не содержащие контактов x_i.

Для построения тупикового сечения, не содержащего контактов переменной x_i, достаточно включить в него все полупучки вида A_j или все полупучки вида B_k из пучков каждого класса эквивалентности. Остальные контакты такого тупикового сечения определяются однозначно.

Следствие. *В условиях леммы о числе тупиковых сечений, не содержащих контакта одной переменной, схема Σ содержит не менее $\sum_{i=1}^n 2^{r_i-a_i}$ различных тупиковых сечений.*

Доказательство. Действительно, сечение, не содержащее контактов переменной x_i, не может совпадать с сечением, не содержащим контактов переменной x_j, поскольку в схеме есть цепь из контактов x_i,x_j.

Лемма. *Для любой минимальной схемы S^+ для s_n^2 в классе монотонных контактных схем с весами, заданными вектором $P=(p_1/n,...,p_n/n)$, выполнено неравенство:*

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-m_i} \leqslant 1, \tag{1}$$

где для всех $i=\overline{1,n}$ m_i – число контактов x_i в схеме S^+.

Доказательство. Из выше доказанного утверждения $r-r_i$ пучков содержат контакты x_i для всех $i=\overline{1,n}$,кроме того схема S^+ содержит a_i внутренних контакта переменной x_i.

$$m_i = r - r_i + a_i. \tag{2}$$

Сопоставление следствий леммы о тупиковом сечении канонической схемы и леммы о числе тупиковых сечений, не содержащих контакта одной переменной. дает

$$2^r \geqslant \sum_{i=1}^{n} 2^{r_i - a_i},$$

откуда с учетом (2) и вытекает утверждение леммы.

Теорема. *Для любого* $n, n \geqslant 2$ *, справедливо равенство*

$$L^+_{KC}(s^2_n; P) = n \cdot l(P),$$

где $l(P)$ *- стоимость произвольного оптимального для распределения вероятностей* P *префиксного двоичного кода.*

Доказательство. Возьмем схему S^+, реализующую s^2_n со сложностью $L(S^+; P) = L^+_{KC}(s^2_n; P)$. Пусть m_i – число вхождений контакта i – ой переменной для всех i от 1 до n. В силу минимальности схемы S^+

$$L^+_{KC}(s^2_n; P) = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Неравенство (1) равносильно неравенству Макмиллана (7) для двоичного однозначно декодируемого кода с n кодовыми словами, в котором j-е кодовое слово, $1 \leqslant j \leqslant n$, имеет длину l_j. Из этого получаем, что $\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot m_i \geqslant n \cdot l(P)$, где C любой оптимальный для распределения вероятностей P префиксный двоичный код, а $l(P)$ - его стоимость. Учитывая монотонность оптимальной схемы в классе π-схем, построенной в статье (3) и то, что ее сложность равна нижней оценке сложности реализации s^2_n в классе монотонных контактных схем с заданными весами контактов различных переменных, получаем,что для любого $n, n \geqslant 2$, справедливо равенство

$$L^+_{KC}(s^2_n; P) = n \cdot l(P),$$

где C любой оптимальный для распределения вероятностей P префиксный двоичный код, а $l(P)$ - его стоимость, что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кричевский Р. Е.* Сложность контактных схем , реализующих одну функцию алгебры логики // ДАН СССР, т.151, №4, с. 803-806,1963.
2. *Кричевский Р. Е.* О сложности параллельно-последовательных контактных схем, реализующих одну последовательность булевых функций. // ДАН СССР, т.151, №4, с. 803-806, 1963.
3. *Ложкин С. А.* О минимальных π-схемах для монотонных симметрических функций с порогом 2 // Дискретная математика, т. 17 вып. 4, 2005.
4. *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: МГУ, 1984.
5. *Нигматуллин Р. Г.* Сложность булевых функций. М.:Наука, 1991.
6. *Яблонский С. В., Лупанов О. Б.* Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1974, т.1.
7. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М.:Наука, 1986.

СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, с. 103–110

УДК 519.61

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ СХЕМ С ВЕСАМИ ДЛЯ ЗАДАЧИ САМАРСКОГО–ИОНКИНА

© 2006 г. А. Ю. Мокин

mknandrew@mail.ru

Кафедра Вычислительных методов

Введение. В работе исследуется устойчивость в среднеквадратической сеточной норме разностных схем с весами для задачи теплопроводности с нелокальными граничными условиями (задача Самарского–Ионкина)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, && 0 < x < 1, \quad 0 < t \leqslant T,\\
&u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t), && 0 < t \leqslant T,\\
&u(x,0) = u_0(x), && 0 \leqslant x \leqslant 1.
\end{aligned} \tag{1}$$

Дифференциальная задача (1) подробно рассмотрена в работе [1]. В частности доказана теорема существования и единственности решения, а также доказана устойчивость по начальным данным и по правой части. Методом разделения переменных построено классическое решение задачи в предположениях, что начальное значение температуры $u_0(x) \in C^1[0,1]$, $u_0(0) = 0$, $u_0'(0) = u_0'(1)$. Там же изложены физические соображения, приводящие к данной постановке.

Рассмотрим семейство разностных схем для задачи (1). Предварительно в прямоугольнике $\Pi = \{0 < x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant T\}$ введём сетку $\omega_{h,\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$, где $\omega_h = \{x_i = ih, \quad i = 1,2,\ldots,N, \quad hN = 1\}$, $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0,1,\ldots,M, \quad \tau M = T\}$. Далее будем использовать обозначения

$$y_i^n = y(x_i, t_n), \quad y_{x,i}^n = \frac{y_{i+1}^n - y_i^n}{h}, \quad y_{\bar{x},i}^n = \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h}, \quad y_{\bar{x}x,i}^n = \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2}.$$

Для задачи (1) рассматриваются двухслойные схемы с весами

$$\begin{aligned}
&\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \sigma y_{\bar{x}x,i}^{n+1} + (1-\sigma) y_{\bar{x}x,i}^n, \qquad i = 1,2,\ldots,N-1, \qquad n = 0,1,\ldots,M-1,\\
&\frac{y_N^{n+1} - y_N^n}{\tau} = 2h^{-1}\Big(\sigma(y_{x,0}^{n+1} - y_{\bar{x},N}^{n+1}) + (1-\sigma)(y_{x,0}^n - y_{\bar{x},N}^n)\Big), \quad n = 0,1,\ldots,M-1,\\
&y_i^0 = u_0(x_i),\ i = 1,2,\ldots,N, \qquad 0 \leqslant \sigma \leqslant 1, \qquad y_0^n = 0, \qquad n = 0,1,\ldots,M.
\end{aligned} \tag{2}$$

Заметим, что разностные схемы (2) на классе достаточно гладких решений аппроксимируют дифференциальную задачу (1) со вторым порядком по h и первым по τ при $\sigma \neq 1/2$, а при $\sigma = 1/2$ — со вторым порядком по h и по τ.

Введём линейное пространство сеточных функций

$$H = \{y = y(x), \quad x \in \omega_h\}.$$

Будем считать, что пространство H снабжено нормой, порождённой скалярным произведением

$$(u,v) = \sum_{i=1}^{N-1} h u_i v_i + \frac{1}{2} h u_N v_N, \quad \|u\| \equiv \|u\|_{L_2^h} = \sqrt{(u,u)}. \tag{3}$$

Под нормой линейного оператора L, действующего в пространсве H, будем понимать операторную норму, подчинённую норме линейного пространства H, т.е.

$$\|L\| = \sup_{\|x\|=1} \|Lx\|.$$

Запишем разностные схемы (2) в операторном виде

$$\begin{array}{l} \dfrac{y^{n+1}-y^n}{\tau} + \sigma A y^{n+1} + (1-\sigma) A y^n = 0, \quad n = 0,1,2\ldots, M-1, \\ y^k = y^k(x) \in H, \quad k = 0,1,\ldots,M, \quad y^0 = u_0(x_i), \quad i = 1,2,\ldots,N. \end{array} \tag{4}$$

Здесь $y^n(x_i) = y_i^n,\ i = 1,2,\ldots N,\ n = 0,1,\ldots M$, оператор $A: \ H \to H$ определяется следующим образом

$$\begin{array}{l} (Ay)_i = -y_{\overline{x}x,i}, \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \\ (Ay)_N = -2h^{-1}(y_{x,0} - y_{\overline{x},N}), \quad y_0 = 0. \end{array}$$

В дальнейшем нам потребуется спектр оператора A. Здесь и далее будем для определённости считать, что N нечётно. Задача на собственные значения оператора A решена аналитически (см. [1]). Решение для нечётного N выглядит следующим образом

$$\begin{array}{l} v^0(x_i) = x_i, \quad v^{2k}(x_i) = \sin 2\pi k x_i, \\ i = 1,2,\ldots,N, \quad k = 1,2,\ldots,m, \quad m = (N-1)/2, \\ \lambda_k = \dfrac{4}{h^2}\sin^2 \pi k h, \quad k = 0,1,\ldots,m. \end{array} \tag{5}$$

Отметим, что $\lambda = 0$ является собственным значением, то есть оператор A вырожден. Все собственные значения оператора вещественны, неотрицательны и при $k = 1,2,\ldots,m$ имеют двойную кратность. Однако каждому собственному значению отвечает единственный собственный вектор. Поэтому система собственных векторов не образует базиса в пространстве сеточных функций H. Следовательно, оператор A не является самосопряжённым как в смысле скалярного произведения L_2^h, так и в любом другом скалярном произведении пространства H. В частности, сопряжённым к нему в смысле скалярного произведения (3) является оператор A^*, определённый равенствами

$$(A^*y)_i = -y_{\overline{x}x,i}, \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \quad y_0 = y_N, \quad (A^*y)_N = \frac{2}{h} y_{\overline{x},N}.$$

Двухслойную схему с постоянными коэффициентами (4) удобно записать в виде, разрешённом относительно функции y^{n+1}, то есть в виде

$$y^{n+1} = S y^n, \quad n = 0,1,\ldots\ , \tag{6}$$

где $S = (E + \sigma\tau A)^{-1}(E - (1-\sigma)\tau A)$ - оператор перехода разностной схемы. Так как все собственные значения оператора A неотрицательны, оператор перехода существует при любом $\tau > 0$ и $\sigma \geqslant 0$.

Разностные схемы (4) исследуются на устойчивость в пространстве H с нормой (3). Здесь и далее под термином устойчивость понимается равномерная устойчивость по начальным данным (см. [4]). Для рассматриваемых схем определение равномерной устойчивости в норме $\|\cdot\|$ сводится к следующему: требуется, чтобы для любого $y^n \in H$ выполнялось неравенство $\|y^{n+1}\| \leqslant \|y^n\|$.

Пользуясь представлением (6) разностной схемы, нетрудно видеть, что условие равномерной устойчивости равносильно выполнению неравенства $\|S\| \leqslant 1$, которое в пространстве H с нормой (3) эквивалентно операторному неравенству $S^*S \leqslant E$.

Разностные схемы (4) изучались ранее в работах [2],[3]. Построен самосопряжённый положительно определённый оператор $D: \ H \to H$, определяющий энергетическую норму

$\|y\|_D = \sqrt{(Dy, y)_{L_2^h}}$, в которой данные схемы устойчивы при тех или иных ограничениях на параметры сетки $h > 0$, $\tau > 0$ в зависимости от значения весового множителя $\sigma \in [0, 1]$. Однако структура оператора D весьма сложна для изучения. Возникает нетривиальная задача отыскания констант эквивалентности построенной нормы с L_2^h нормировкой. В то же время разностные схемы вида (2) для задачи теплопроводности с краевыми условиями первого рода, как известно, абсолютно устойчивы при $1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1$, а при $0 \leqslant \sigma < 1/2$ являются условно устойчивыми в L_2^h норме (см. например [4]).

Дифференциальная задача (1) отличается от первой краевой задачи лишь наличием одного неклассического граничного условия. Отсюда возникает предположение, что разностные схемы (4) устойчивы не только в энергетической норме, порождённой оператором D, но и в среднеквадратической сеточной норме при некоторых ограничениях на σ, h, τ. Основной результат настоящей работы заключается в доказательстве абсолютной неустойчивости в L_2^h норме разностных схем с весами для задачи Самарского–Ионкина при любом выборе весового параметра $\sigma \in [0, 1]$.

2. Симметрическая часть оператора A. Прежде чем перейти к исследованию устойчивости разностных схем (4), рассмотрим оператор $B = 1/2(A + A^*)$ — симметрическую часть оператора A. Основной результат данного раздела заключается в доказательстве существования и единственности отрицательного собственного значения оператора B.

Введём вспомогательные обозначения: $\mathbf{A} = h^2 A, \quad \mathbf{A}^* = h^2 A^*$. Очевидно, достаточно показать наличие единственного отрицательного собственного значения оператора $\mathbf{B} = 0.5(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)$. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$\mathbf{B}y = \lambda y, \quad y = (y_1\ y_2\ \ldots\ y_N)^T. \tag{7}$$

В силу самосопряжённости оператора $\mathbf{B}$ у него существует ровно N вещественных собственных значений с учётом кратности, а из собственных векторов, отвечающих этим собственным значениям, можно составить ортонормированный базис. В разностной форме задача (7) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{lcll} 2y_1 - y_2 - 0.5y_N & = & \lambda y_1, & \\ -y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1} & = & \lambda y_i, & i = 2, 3, \ldots, N-1, \\ -y_1 - 2y_{N-1} + 2y_N & = & \lambda y_N. & \end{array} \right.$$

Решение этой задачи можно найти в работе [2], а здесь лишь приведём окончательный результат, который распадается на два случая. Во первых, имеются собственные значения вида $\lambda = 2(1 - \cos\phi)$, где ϕ - вещественный корень уравнения

$$\sin(N-1)\phi + 8\sin\phi \sin^2\frac{N\phi}{2} = 0, \quad 0 \leqslant \phi < 2\pi.$$

Тогда соответствующий собственный вектор определяется равенством

$$y_j = 2\sin j\phi + \sin(N-j)\phi, \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Эти собственные значения заведомо неотрицательны, и, более того, положительны, так как равенство их нулю достигается только при $\phi = 0$. Однако собственный вектор при $\phi = 0$ тождественно равен нулю.

Во-вторых, имеются собственные значения вида

$$\lambda = 2(1 - \operatorname{ch}\phi), \tag{8}$$

где ϕ - вещественный корень уравнения

$$\operatorname{sh}(N-1)\phi - 8\operatorname{sh}\phi \operatorname{sh}^2\frac{N\phi}{2} = 0, \quad -\infty < \phi < +\infty. \tag{9}$$

Укажем собственный вектор, отвечающий такому собственному значению

$$y_j = 2\operatorname{sh} j\phi + \operatorname{sh}(N-j)\phi, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{10}$$

Собственные значения, определяемые равенством (8), отрицательны, равенство собственного значения нулю исключается по аналогии с предыдущим случаем.

Поиск отрицательных собственных значений оператора **B** сводится к решению уравнения (9). Следует обратить внимание на тот факт, что вектор (10) не является нулевым при любом $\phi \neq 0$, поэтому всякое нетривиальное решение этого уравнения даёт собственное значение, которое заведомо меньше нуля, и соответствующий собственный вектор. Авторы работы [2] на основе проведённых вычислений установили наличие положительного корня уравнения (9) при различных натуральных N. В настоящей работе факт существования и единственности решения доказывается аналитически для любых $N > 2$.

Запишем уравнение (9) в виде $f(x) = 0$, где

$$f(x) = \operatorname{sh}(N-1)x - 8\operatorname{sh} x \operatorname{sh}^2 \frac{Nx}{2}.$$

Заметим, что функция f нечётна. То есть если $f(x) = 0$, то и $f(-x) = 0$. Но таким двум нулям функции f соответствует одно и то же собственное значение λ, собственные вектора различаются лишь знаком (см. равенства (8) и (10)). Корень $x = 0$, как было установлено выше, не даёт собственного значения. Следовательно, функцию $f(x)$ целесообразно изучать только для положительных значений аргумента.

Покажем существование отрицательного собственного значения. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Уравнение $f(x) = 0$ имеет по крайней мере один положительный корень.*

Доказательство. Вычислим производную функции $f(x)$:

$$f'(x) = (N-1)\operatorname{ch}(N-1)x - 8\left(\operatorname{ch} x \operatorname{sh}^2 \frac{Nx}{2} + N \operatorname{sh} x \operatorname{sh} \frac{Nx}{2} \operatorname{ch} \frac{Nx}{2}\right), \quad x \geqslant 0.$$

Поскольку производная в нуле положительна, $f'(0) = N - 1 > 0, \quad N \geqslant 2,$ и $f(0) = 0$, в малой правой окрестности нуля обязательно найдётся такое значение $x_+ > 0$, для которого функция f положительна.

Вычислим предел функции $f(x)$ при $x \to +\infty$. Для этого предварительно оценим её сверху

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sh}(N-1)x - 4\operatorname{sh} x(\operatorname{ch} Nx - 1) \leqslant \operatorname{sh} Nx - 4\operatorname{sh} x(\operatorname{ch} Nx - 1) = \\ &= (\operatorname{sh} Nx - \operatorname{ch} Nx \operatorname{sh} x) + (4 - 3\operatorname{ch} Nx)\operatorname{sh} x. \end{aligned}$$

Первое слагаемое стремится к $-\infty$ при $x \to +\infty$, поскольку $\operatorname{sh} Nx < \operatorname{ch} Nx,\ x \geqslant 0$, $\operatorname{sh} x \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Второе слагаемое, очевидно, также стремится к $-\infty$ при $x \to +\infty$. Отсюда видно, что

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Поэтому для каждого $N \geqslant 2$ найдётся такое значение x_-, что $x_- > x_+ > 0$ и $f(x_-) < 0$. Тогда по теореме Вейерштрасса в силу непрерывности функции f найдётся такое число $x_0 \in (x_+, x_-)$, на котором функция f обратится в нуль, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Оператор $\boldsymbol{B} = 0.5(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^*)$ имеет по крайней мере одно отрицательное собственное значение.*

Рассмотрим вопрос о единственности положительного корня функции $f(x)$, то есть о единственности отрицательного собственного значения оператора **B**.

Уравнение (9) аналитически решить не удаётся, поэтому следует перейти к некоторому эквивалентному уравнению. Сделаем замену переменных

$$u = \operatorname{sh} x, \quad \operatorname{ch} x = \sqrt{1+u^2},$$
$$v = \operatorname{sh} Nx, \quad \operatorname{ch} Nx = \sqrt{1+v^2}.$$

Выпишем функцию f в переменных (u, v):

$$f(x) = (\operatorname{sh} Nx \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} Nx \operatorname{sh} x) - 4 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} Nx + 4 \operatorname{sh} x = v\sqrt{1+u^2} - 5u\sqrt{1+v^2} + 4u \equiv F(u, v).$$

Задача $f(x) = 0, \quad x > 0$ эквивалентна поиску нулей функции $F(u, v)$ на множестве

$$\Gamma(N) = \{Q = (u, v) \mid Q = Q(x) \equiv (\operatorname{sh} x, \operatorname{sh} Nx), \quad x > 0\},$$

которое представляет собой график функции

$$u = u(v) = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{N}\operatorname{arcsh} v\right), \quad v > 0. \tag{11}$$

Из формулы (11) непосредственно вытекает, что кривая $\Gamma(N)$ лежит выше оси абсцисс (ov). Кроме того, данная кривая находится ниже любой своей касательной, в частности, она лежит ниже своей касательной при $v_0 = 0$, которая описывается уравнением $u = v/N, \quad v \geqslant 0$.

Таким образом, $\Gamma(N)$ целиком лежит в секторе $S(N)$, образованным прямыми $u = v/N, \quad v \geqslant 0$ и $u = 0$. Следовательно, все точки пересечения данной кривой со множеством нулей функции $F(u, v)$ заведомо принадлежат сектору $S(N)$.

Рассмотрим вспомогательную задачу: вычислим нули функции $F(u, v)$ на множестве $\{(u, v) \mid u > 0,\ v > 0\}$. Требуется решить уравнение

$$v\sqrt{1+u^2} - 5u\sqrt{1+v^2} + 4u = 0, \quad u > 0,\ v > 0.$$

Дважды возводя в квадрат, получим единственное решение данной задачи, которое в переменных $\alpha = u^2, \quad \beta = v^2$ имеет вид

$$\alpha(\beta) = \frac{\beta(24\beta + 41) + 40\beta\sqrt{\beta+1}}{(24\beta)^2 + 16 \cdot 23\beta + 81}, \quad \beta > 0. \tag{12}$$

Согласно формулам (11),(12) задача поиска точек пересечения нулей функции $F(u, v)$ с множеством $\Gamma(N)$ сводится к вычислению корней уравнения

$$\alpha(\beta) = \operatorname{sh}^2\left(\frac{1}{N}\operatorname{arcsh}\sqrt{\beta}\right), \quad \beta > 0. \tag{13}$$

Заметим, что данное уравнение имеет по крайней мере одно решение, в силу существования отрицательного собственного значения оператора $\mathbf{B}$ (см. следствие 1 из теоремы 1). Докажем единственность решения.

Сначала выясним, какие из нулей функции $F(u, v)$ могут лежать во множестве $S(N)$. Так как функция $\alpha(\beta) > 0,\ \beta > 0$, то достаточно рассмотреть неравенство $\alpha(\beta) < \beta/N^2$. В результате приходим к условию $\beta > \beta^*(N) > 1, \quad N > 2$. Следовательно, любое решение уравнения (13) заведомо больше единицы. Функция $\alpha(\beta)$, а значит и её аналог в переменных (u, v), не является монотонной при $\beta > 0$. Однако можно показать, пользуясь стандартными средствами математического анализа, что данная функция для всякого $N > 2$ монотонно убывает при $\beta > 1$, в то время как правая часть уравнения (13) монотонно возрастает. Отсюда вытекает

Теорема 2. *Задача (9) имеет единственное положительное решение.*

Следствие 1. *Оператор $\boldsymbol{B} = 0.5(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*)$ имеет единственное отрицательное собственное значение, которое связано с корнем функции $f(x)$ равенством (8), соответствующий собственный вектор определяется равенством (10).*

3. Абсолютная неустойчивость схем с весами. Рассмотрим семейство разностных схем (4). Требуется показать, что при каждом $\sigma \in [0,1]$ и для любых $h > 0,\ \tau > 0$ соответствующий оператор перехода схемы удовлетворяет неравенству $\|S\| > 1$. Предварительно сформулируем и докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\sigma \in [0,1],\ h > 0$, таковы, что число $\widetilde{\lambda} = ((1-\sigma)\gamma)^{-1},\ \gamma = \tau/h^2$ не является собственным значением оператора $\boldsymbol{A}$ при любом $0 < t_1 < \tau < t_2$. Тогда существует такое $r > 0$, что оператор перехода $S = S(\tau)$ разностных схем (4) при всех $\tau \in (t_1, t_2)$ удовлетворяет неравенству $\|S\| > 1 + r$.*

Замечание к формулировке леммы 1. В случае, когда $\sigma = 1$, будем считать, что $\widetilde{\lambda} = +\infty$ и не совпадает ни с одним собственным значением оператора $\mathbf{A}$ при любых $h > 0,\ \tau > 0$.

Доказательство . Достаточно найти такое $r > 0$, при котором справедливо неравенство

$$\|S(\tau)\| > \sqrt{1+r}, \qquad \text{для всех} \quad \tau \in (t_1, t_2). \tag{14}$$

Согласно определению операторной нормы, данное неравенство может быть записано в виде

$$(S^*Sy, y)_{L_2^h} > (1+r)(y,y)_{L_2^h}. \tag{15}$$

Докажем, что при некотором $r > 0$ для каждого $\tau \in (t_1, t_2)$ найдётся вектор $y \in H$, который удовлетворяет неравенству (15). Т.е. требуется показать, что при каждом $\tau \in (t_1, t_2)$ нарушается операторное неравенство $S^*S \leqslant (1+r)E$.

Пользуясь явным видом оператора перехода, запишем данное операторное неравенство подробнее

$$(E-(1-\sigma)\tau A^*)(E+\sigma\tau A^*)^{-1}(E+\sigma\tau A)^{-1}(E-(1-\sigma)\tau A)) \leqslant (1+r)E. \tag{16}$$

По условию леммы при $\tau \in (t_1, t_2)$ число $\widetilde{\lambda} = ((1-\sigma)\gamma)^{-1}$ не является собственным значением оператора $\mathbf{A}$, следовательно, оператор $L = E-(1-\sigma)\tau A$ для всех τ из указанного интервала невырожден. Тогда, домножая неравенство (16) справа на L^{-1}, слева на $(L^*)^{-1}$, получим эквивалентное неравенство

$$[(E+\sigma\tau A)(E+\sigma\tau A^*)]^{-1} \leqslant (1+r)\,[(E-(1-\sigma)\tau A)(E-(1-\sigma)\tau A^*)]^{-1}.$$

Перейдём в этом неравенстве к обратным операторам и раскроем скобки

$$rE + \tau((1+r)\sigma + (1-\sigma))(A+A^*) + \tau^2(\sigma^2(1+r) - (1-\sigma)^2)AA^* \geqslant 0.$$

Согласно ранее введённым обозначениям получим

$$(1+r\sigma)\mathbf{B} - 0.5\gamma(1-2\sigma-r\sigma^2)\mathbf{A}\mathbf{A}^* + \frac{r}{2\gamma}E \geqslant 0,$$

или, что то же самое,

$$(1+r\sigma)\,(\mathbf{B}y,y)_{L_2^h} - 0.5\gamma(1-2\sigma-r\sigma^2)\,(\mathbf{A}^*y, \mathbf{A}^*y)_{L_2^h} + \frac{r}{2\gamma}(y,y)_{L_2^h} \geqslant 0, \tag{17}$$

для всех $y \in H$.

Для доказательства неравенства (14) достаточно найти такой вектор $y \in H,\ y \neq 0$, на котором нарушается неравенство (17).

Оператор $\mathbf{B}$, согласно следствию из теоремы 2 предыдущей главы, имеет единственное отрицательное собственное значение λ_- и соответствующую ему собственную функцию y_-. Ранее было сказано, что ядро оператора A нетривиально и одномерно. Следовательно, ядро сопряжённого оператора также не тривиально и одномерно. Базис в нем образует сеточная функция $y_0 \equiv y_0(x_i) = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, N$.

Проверим неравенство (17) на однопараметрическом семействе сеточных функций $y(\alpha) = y_0 + \alpha y_-, \quad -\infty < \alpha < +\infty.$. В силу линейной независимости векторов y_0 и y_- вектор $y(\alpha) \neq 0$ при любом вещественном α.

Далее будем считать, что функция y_- имеет единичную норму. Подставим функцию $y(\alpha)$ в неравентсво (17). В результате подстановки получим

$$\begin{aligned} &P(\alpha) \equiv P_0\alpha^2 + 2\alpha C_1\left[\lambda_-(1+r\sigma) + \frac{r}{2\gamma}\right] + \frac{r}{2\gamma} \geqslant 0, \quad \text{где} \\ &P_0 = \left[\lambda_-(1+r\sigma) + \frac{r}{2\gamma} - 0.5\gamma(1-2\sigma-r\sigma^2)C_2\right], \quad -\infty < \alpha < +\infty, \end{aligned} \tag{18}$$

где $C_1 = \big(y_-, y_0\big),\ C_2 = \big(\mathbf{A}^*y_-, \mathbf{A}^*y_-\big) \geqslant 0$. Заметим, что $C_1 > 0$, так как в силу (10) справедливо неравенство $(y_-)_i(y_0)_i = (y_-)_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, N$. Константа C_2 также строго положительна, поскольку функция y_- не лежит в ядре оператора $\mathbf{A}^*$.

Согласно условию леммы 1, параметр τ принадлежит интервалу $(t_1, t_2),\ t_1 > 0$. Потребуем, чтобы $0 < r < r_2 = 2(-\lambda_-)t_1/h^2$, в результате чего коэффициент при первой степени α многочлена $P(\alpha)$ будет меньше нуля при всех $\tau \in (t_1, t_2)$. Следовательно, неравенство (18) при $P_0 = 0$ нарушается при любом достаточно большом $\alpha > 0$.

Рассмотрим случай, когда коэффициент P_0 левой части неравенства (18) отличен от нуля. В этом случае $P(\alpha)$ является полиномом второй степени. Вычислим его дискриминант

$$D/4 = C_1^2\lambda_-^2(1+r\sigma)^2 - r\left[\frac{\lambda_-}{2\gamma}(1+r\sigma)(1-2C_1^2) - (1-2\sigma-r\sigma^2)C_2/4\right] - \frac{r^2}{4\gamma^2}(1-C_1^2).$$

Первое слагаемое дискриминанта положительно при любом $r \geqslant 0$ и не зависит от τ. Величина, находящаяся в квадратных скобках, равно как и множитель при r^2, при фиксированных $\sigma \in [0,1],\ h > 0$ являются функциями переменных $\tau,\ r$, ограниченными на множестве $[t_0, t_2] \times [0, r_2]$. Поэтому $r > 0$ можно выбрать таким образом, чтобы дискриминант оставался положительным при любом $\tau \in (t_1, t_2)$, благодаря чему квадратный трёхчлен $P(\alpha)$ имеет два различных вещественных корня α_1, α_2 и может быть представлен в виде

$$P(\alpha) = P_0(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2), \quad P_0 \neq 0.$$

Тогда вне зависимости от значения коэффициента при α^2, найдётся такое число α_0, что $P(\alpha_0) < 0$. Т.о. неравенство (17) нарушается на векторе $y(\alpha_0) = y_0 + \alpha_0 y_-$.

Лемма 1 доказана.

Непосредственно из леммы 1 вытекает

Теорема 3 . *Пусть* $\sigma \in [0,1],\ h = h_0 > 0,\ \tau = \tau_0 > 0$ *таковы, что число* $\widetilde{\lambda} = \big((1-\sigma)\gamma\big)^{-1}$ *не является собственным значением оператора* $\boldsymbol{A}$*, тогда разностная схема (4) при данных* σ, h, τ *не является равномерно устойчивой в* L_2^h *норме.*

Неустойчивость разностных схем с весами доказана при любых $h > 0,\ \tau > 0$, таких, что оператор $L = E - \gamma(1-\sigma)\mathbf{A}$ невырожден. Рассмотрим теперь $\sigma \in [0,1], h_0 > 0,\ \tau_0 > 0$, при которых число $\widetilde{\lambda} = (\gamma_0(1-\sigma))^{-1}$ совпадает с некоторым собственным значением оператора $\mathbf{A}$, т.е. при некотором k выполняется равенство $(\tau_0(1-\sigma))^{-1} = \lambda_k,$ где $\lambda_k,$

$k = 1, 2, \dots m$ определены согласно (5). В этом случае оператор L не обратим. Зафиксируем $h = h_0$ и возьмём последовательность $\tau_n \to \tau_0,\ n \to +\infty$ Можно считать, что $\tau_n > \tau_0,\ n = 1, 2, \dots$.

Пусть S_n — оператор перехода схемы (4) для $h = h_0, \tau = \tau_n,\ n = 0, 1, 2, \dots$. Спектр оператора $\mathbf{A}$ конечен. Поэтому найдётся число $t_2 > \tau_0$, такое, что $\widetilde{\lambda} = \big((1-\sigma)\gamma\big)^{-1},\ \gamma = \tau/h_0^2$ не совпадает с собственным значением оператора $\mathbf{A}$ при любом $0 < \tau_0 < \tau < t_2$. Пусть $\tau_n < t_2,\ n \geqslant N$. Тогда, согласно теореме 3, существует $r > 0$, для которого справедливо неравенство

$$\|S_n\| > 1 + r, \quad n \geqslant N. \tag{19}$$

Докажем теперь, что $\|S_n - S_0\| \to 0,\ n \to +\infty.$ Представим оператор S_n в виде

$$S_n = M_n^{-1} L_n, \quad \text{где} \quad M_n = E + \sigma\tau_n A,\ L_n = E - (1-\sigma)\tau_n A, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Очевидно, $\|M_n - M_0\| \to 0,\ \|L_n - L_0\| \to 0,\ n \to +\infty.$ Поэтому достаточно вычислить аналогичный предел для оператора M_n^{-1} . Для этого воспользуемся следующим фактом (см.[5]).

Утверждение 1 . *Пусть $M_n,\ n = 0, 1, 2, \dots$ — линейные ограниченные операторы, действующие в банаховых пространствах, причём $\|M_n - M_0\| \to 0,\ n \to +\infty$. Тогда если оператор M_0 обратим, то существует такое натуральное число N , что операторы M_n также обратимы при $n \geqslant N$ и $\|M_n^{-1} - M_0^{-1}\| \to 0,\ n \to +\infty$.*

Так как $\Big|\|S_n\| - \|S_0\|\Big| \leqslant \|S_n - S_0\|,$ а правая часть неравенства по только что доказанному стремится к нулю, то $\|S_n\| \to \|S_0\|,$ при $n \to +\infty$. Переходя теперь к пределу в неравенстве (19), получим $\|S_0\| \geqslant 1 + r > 1.$ Следовательно, разностная схема (4) неустойчива в пространстве H с нормой (3) и в том случае, когда число $\widetilde{\lambda} = (\gamma(1-\sigma))^{-1}$ совпадает с собственным значением оператора $\mathbf{A}$. Отсюда и из теоремы 3 вытекает, что рассматриваемые разностные схемы неустойчивы при любых $\sigma \in [0, 1],\ h > 0,\ \tau > 0$.

В заключение работы следует обратить внимание на тот факт, что абсолютная неустойчивость разностных схем с весами была доказана только в норме (3), что вовсе не означает неустойчивость в любой другой норме. Как было уже сказано во введении, существуют нормы (см.,например, [3]), в которых данные схемы являются условно устойчивыми с обычными ограничениями на параметры сетки $h,\ \tau$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ионкин Н.И.* Задача для уравнения теплопроводности с неклассическим краевым условием. Будапешт, Numerikus Modzerek, №.14, 1979.
2. *Ионкин Н.И., Морозова В.А.* Об устойчивости разностных схем для уравнения теплопроводности с нелокальными граничыми условиями. Препринт. М., Диалог-МГУ, 2000.
3. *Гулин А.В., Ионкин Н.И., Морозова В.А.* Разностные схемы для нелокальных задач. //Известия высших учебных заведений. 2005. 512. №1. С. 40-50.
4. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. 3-е изд. М., 1989.
5. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. 3-е изд. М., 2002.

СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, с. 111–120

УДК 519.68

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАСТРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ МОДЕЛЕЙ ГРАНИЧНО-СКЕЛЕТНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

© 2006 г. Л. Г. Петрова

ludmila.petrova@gmail.com

Кафедра Математических методов прогнозирования

Введение.

Задачи преобразования растровых изображений возникают в компьютерной графике, задачах анализа и распознавания изображений. Растровые изображения используются повсеместно и хранят в себе информацию о цвете в каждой ячейке растра. Большая часть алгоритмов машинной графики, алгоритмов ввода, сканирования фото и видеоинформации рассчитана именно на такой способ представления изображений. Однако в растровом представлении изображения отсутствует информация о форме объектов, что затрудняет их преобразования, такие как изменение формы и масштабирование. Над матрицами растра можно выполнять только локальные преобразования цвета ячеек растра. Представление изображения в векторном (непрерывном) виде — это описание его с помощью непрерывных функций. Для двумерных изображений эти функции задаются на плоскости прямоугольнике изображения. Для полутоновых изображений - это непрерывные функции интенсивности, а для цветных — это векторные функции, например, в 3-х компонентном формате RGB $\overrightarrow{f} = (f_r, f_g, f_b)$. Если изображение задано в аналитическом виде, с ним можно производить больше различных сложных преобразований по сравнению с изображениями, заданными в дискретном представлении.

Предметом настоящей работы являются задачи, в которых преобразование растрового изображения основывается на анализе формы объектов, присутствующих на нем. В таких задачах действовать непосредственно с растром чрезвычайно трудно. Таким образом, использование непрерывных моделей для решения задач преобразования растровых изображений — логичное решение данной проблемы. Непрерывные модели, заданные в виде функций, позволяют построить строгие методы для решения таких задач.

Целью работы является разработка непрерывных моделей и алгоритмов на основе этих моделей для осуществления широкого класса сложных преобразований растровых изображений, таких как:

- преобразование функции яркости в задаче восстановления полутонового изображения по изолиниям уровня,
- преобразования формы объектов, заданных растровым представлением, включающие в себя преобразования отдельных фрагментов фигур: сжатие, растяжение, повороты и изгибы в задаче морфинга растровых изображений.

1. Описание общего метода преобразования растровых изображений с использованием непрерывной модели гранично-скелетного представления.

Подход к решению задачи преобразования растровых изображений основан на следующих принципах:

- использование непрерывных моделей в качестве промежуточного шага решения задач преобразования растровых изображений,
- использование непрерывных моделей гранично-скелетного представления как инструмента для осуществления сложных преобразований.

Диаграмма на рисунке 1 показывает схему применения непрерывных моделей для решения задач преобразования растровых изображений.

Рис. 1. Схема преобразования растрового изображения с использованием непрерывной модели.

Метод решения состоит в следующем. Исходное растровое изображение векторизуется, то есть для него строится непрерывная модель (1), затем в рамках непрерывной модели проводится требуемое преобразование (2) и, наконец, проводится растеризация непрерывной модели (3). В результате получается преобразованное растровое изображение. Для решения задачи векторизации растровых изображений и обратной к ней задачи растеризации в данной работе выбраны известные методы, описанные в работах [1] и [8]. Для векторизации растрового изображения выбрана модель гранично-скелетного представления [1], [2]. Векторизация проводится в 2 этапа:

1. многоугольная аппроксимация растровых изображений;
2. непрерывная скелетизация многоугольных фигур.

Для растеризации непрерывных моделей (пункт 3 диаграммы рисунка 1) используется парадигма плоского заметания [5] и интерполяция с помощью барицентрических координат. Основная часть работы посвящена пункту 2 диаграммы, то есть преобразованиям в рамках непрерывных моделей. Для преобразований в рамках непрерывных моделей гранично-скелетного представления в работе предлагаются следующие методы:

1. Интерполяция функции двух переменных внутри области по значениям на границах на основе непрерывной скелетизации области (в задаче восстановления полутоновых изображений).
2. Расчет гомеоморфизма многоугольных односвязных областей с изоморфными базовыми скелетами (в задаче морфинга изображений).

2. Общая формальная постановка задачи преобразования растровых изображений с использованием непрерывной модели.

Формальная постановка задач преобразования растровых изображений с использованием промежуточной непрерывной фазы в общем виде выглядит следующим образом.

Обозначим

$A_{m\times n}$ – прямоугольная матрица $m \times n,\ m \in N,\ n \in N$

$B_{l\times k}$ – прямоугольная матрица $l \times k,\ l \in N,\ k \in N$

I_i – исходное растровое изображение, $I_i \in A_{m\times n}$

I_f – преобразованное растровое изображение, $I_f \in B_{l\times k}$

$\{a_{ij}\} \in U,\ i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n$

$\{b_{ij}\} \in W,\ i = 1,\dots,l,\ j = 1,\dots,k$

U – некоторое множество элементов из R^p

V – некоторое множество элементов из R^p

$R^p - p$ -мерное векторное пространство над полем R

Дано: растровое изображение $I_i \in A_{m \times n}$.
Требуется: построить изображение $I_f \in B_{l \times k}$ и алгоритм $\Omega : I_i \to I_f$ в виде композиции $\Omega = R \circ T \circ V$, где
$V : I_i \to I_{v_1}$ - оператор векторизации растрового представления;
$T : I_{v_1} \to I_{v_2}$ - оператор преобразования непрерывного (векторного) представления;
$R : I_{v_2} \to I_f$ - оператор растеризации непрерывного представления.
I_{v_1}, I_{v_2} — непрерывные представления изображения.
На операторы V, T и R накладываются различные требования в зависимости от преобразования, необходимого в конкретной задаче. Несколько примеров таких ограничений:

1. Оператор T может быть гомеоморфным (например в задаче морфинга).
2. T может быть непрерывным (например в задаче восстановления полутоновых изображений).
3. В связи с тем, что операторы V и R работают с растром (большим числом точек), они могут быть эффективными, то есть выполнение этих операторов может иметь низкую вычислительную сложность (часто желательно линейную по числу точек растра).
4. Оператор V может "выделять"форму объектов на растре (например, в задачах, где преобразование должно учитывать формы присутствующих на изображении объектов).

Определение 1. *Многоугольной многосвязной фигурой* (ММФ) для бинарного растрового изображения называется область, ограниченная конечным числом непересекающихся простых многоугольников, внутри каждого из которых лежат только черные точки растра.

Определение 2. *Скелетом многоугольной фигуры* [1] называется множество центров максимальных вписанных в нее окружностей. Скелет представляет собой планарный граф, вершинами которого являются центры окружностей, касающихся границы в трёх и более точках, а ребрами — серединные оси, линии, состоящие из центров окружностей, касающихся границы в двух и более точках.

Определение 3. *Вписанным пустым кругом* [8] (или просто пустым кругом) называется круг на плоскости, у которого все внутренние точки являются внутренними для ММФ, а его граница содержит не менее двух граничных точек ММФ.

Под *гранично-скелетным представлением* растрового изображения будем понимать скелет аппроксимирующей ММФ минимального периметра вместе с множеством всех вписанных пустых кругов.

3. Преобразование растровых изображений в задаче восстановления полутоновых изображений.

Задачи восстановления полутоновых изображений по изолиниям яркости возникают во многих приложениях в медицине, геоинформационных системах, в сжатии изображений. Полутоновое изображение в таких задачах имеет небольшое число оттенков серого, каждый из которых соответствует уровню яркости.

3.1 Постановка задачи восстановления полутоновых изображений.

Обозначим множество уровней яркости
$\Lambda = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M\}$
$\alpha_i \in N, i = 1, \ldots, M$
$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_M$
Задача преобразования функции яркости заключается в построении нового растрового изображения, в котором цвета плавно переходят друг в друга в диапазоне от α_1 до α_M
Сформулируем задачу восстановления полутонового изображения в терминах подхода, предлагаемого в данной работе (рис.2).

Дано: растровое изображение $I_i \in A_{m\times n}$, где $a_{ij} \in \Lambda$.

Требуется: построить алгоритм Ω и растровое изображение $I_f \in B_{m\times n}$ такие, что $\Omega : I_i \to I_f$, где $b_{ij} \in [\alpha_1 \dots \alpha_N]$, то есть в новом растровом изображении I_f точки растра могут иметь любую яркость из диапазона от минимального порога яркости до максимального.

Рис. 2. Схема восстановления полутонового изображения.

3.2 Метод решения задачи восстановления полутоновых изображений с использованием непрерывной модели гранично-скелетного представления.

В рамках предложенного в первом разделе подхода будем строить алгоритм $\Omega : I_i \to I_f$ в виде композиции $\Omega = R \circ T \circ V$.

Пара соседних порогов яркости задает изолинию, поэтому в работе предлагается использовать для векторизации множества точек растра между каждой парой соседних порогов аппроксимацию многоугольной многосвязной фигурой (ММФ). Для ММФ можно построить непрерывное гранично-скелетное представление. Пусть $V : I_i \to I_{v_1}$ — оператор векторизации растрового представления строит I_{v_1} — аппроксимацию растрового изображения многоугольной многосвязной фигурой (ММФ) и гранично-скелетным представлением с яркостью, заданной на ММФ.

Таким образом, необходимо при известной яркости на границах ММФ непрерывно интерполировать функцию яркости внутри ММФ. Визуально непрерывная интерполяция интерпретируется плавным переходом цвета от внешней границы области к внутренним границам (от одной изолинии яркости к другой). Трудность плавной закраски области состоит в построении наилучшей поверхности между ее внешней и внутренней границами в случаях, когда граничные многоугольники имеют сложную форму и взаиморасположение.

I_{v_2} — непрерывное представление ММФ и яркостью вычисленной во всех внутренних точках ММФ. $T : I_{v_1} \to I_{v_2}$ — оператор построения оператора плавной интерполяции функции яркости между соседними границами ММФ с помощью гранично-скелетного представления.

3.3 Построение оператора T в задаче восстановления полутоновых изображений.

Формально задача построения *"оператора плавной закраски"* ставится следующим образом.

Дано: Гранично-скелетное представление многоугольной фигуры с функцией яркости, заданной многоугольной фигуре. На каждом многоугольнике функция яркости равна константе (рис. 3).

Задача: Восстановить функцию яркости внутри многосвязной области (рис. 3)

В работе предлагается следующий подход к решению поставленной задачи, состоящий из нескольких этапов:

1) интерполяция в вершинах скелета ММФ (рис. 3),

2) построение скелетного разбиения многоугольной фигуры, а именно скелетной триангуляции (рис. 3),

3) интерполяция функции по скелетной триангуляции (рис. 3).

Подробное описание этапов решения задачи можно найти в работе [11] Домахина М.А., Местецкого Л.М., Мехедова И.С., Петровой Л.Г. "Восстановление полутоновых изображений по изолиниям яркости".

Рис. 3. Метод интерполяции в задаче восстановления полутоновых изображений с помощью построения скелетной триангуляции.

4. Морфинг растровых изображений.

Задача морфинга растровых изображений возникает в приложениях компьютерной графики. Например, при анимации нужно закрасить изменяющийся силуэт человека по заданному эталону. Морфинг — это преобразование формы объекта. В данной работе рассматривается задача раскраски (то есть вычисления цветов точек растра) преобразованной формы при известной раскраске (цветов точек растра) исходной формы (Рис. 4).

Рис. 4. Морфинг растровых изображений.

Схема преобразования растровых изображений в задаче морфинга показана на диаграмме рисунка 5. Она включает в себя следующие этапы:

1. построение непрерывной модели гранично-скелетного представления исходного растрового изображения;

2. построение гомеоморфного отображения областей, заданных гранично-скелетным представлением;

3. растеризация преобразованной формы на основе построенного гомеоморфизма.

В результате получается преобразованное растровое изображение.

4.1 Формальная постановка задачи морфинга растровых изображений.

Поставим задачу морфинга растровых изображений в рамках общей концепции, описанной в первом разделе данной работы.

Пусть исходное и преобразованное изображения заданы на матрицах разных размеров, но над одним и тем же пространством U, например $U \in R^3$.

$I_i \in A_{m \times n}$, $I_f \in B_{k \times l}$,

$\{a_{ij}\} \in U,\ i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n$,

$\{b_{ij}\} \in U,\ i = 1, ..., k,\ j = 1, ..., l$.

Пусть I_{v_1} и I_{v_2} являются непрерывными гранично-скелетными представлениями.

Необходимо построить следующие операторы:

1. $V : I_i \rightarrow I_{v_1}$ — оператор векторизации в гранично-скелетное представление;

2. $T : I_{v_1} \rightarrow I_{v_2}$ — оператор преобразования формы. T должен быть гомеоморфным, то есть непрерывным и взаимнооднозначным;

3. $R : I_{v_2} \rightarrow I_f$ — оператор растеризации, который вычисляет точки растра, попавшие в непрерывное представление I_{v_2}. R должен быть линейным по числу точек растра изображения I_f, то есть линейным по kl.

Для построения операторов V и R можно использовать известные эффективные методы, описанные в работах [1], [2], [5] и [8], основанные на многоугольной аппроксимации растрового изображения

Для построения гомеоморфного отображения сложных многоугольных областей требуется детальная разработка метода.

Рис. 5. Метод морфинга растровых изображений.

4.2 Построение оператора T в задаче морфинга.

В работах [3] и [9] предлагаются методы для решения задачи построения отображения деформированных объектов, основанные на циркулярном разложении связных областей. Однако они работают корректно лишь для объектов с простыми скелетами, имеющими вид криволинейного сегмента. В случае более сложных скелетных графов результат получается некорректным в местах пересечения жирных кривых, где теряется непрерывность отображения.

Известно, что два многоугольника на плоскости топологически эквивалентны и их гомеоморфных отображений можно построить бесконечно много. Но для задач компьютерной графики и распознавания изображений представляют интерес отображения, которые сохраняют в некотором смысле *"содержательный смысл"* изображения. Поэтому имеет смысл добавить дополнительные ограничения на отображение $T: I_{v_1} \to I_{v_2}$, которое мы собираемся строить. Для того, чтобы описать эти ограничения, необходимо формализовать понятие *"сохранение содержательного смысла"* в отображении. Подробно о формализации этих понятий можно найти в работе [12] Петровой Л.Г., Местецкого Л.М., "Расчет гомеоморфизма односвязных многоугольных областей с изоморфными базовыми скелетами".

Определение 5. Будем говорить, что два объекта имеют *содержательно близкую форму*, если их базовые скелеты изоморфны.

Понятие *"сохранение содержательного смысла"* в отображении введем лишь для областей с изоморфными базовыми скелетами.

Определение 6. Будем говорить, что *отображение сохраняет содержательный смысл прообраза*, если оно переводит базовый скелет прообраза в базовый скелет образа. При этом ребра и вершины базового скелета прообраза, соответствующие по изоморфизму ребрам и вершинам базового скелета образа, переводятся друг в друга.

Пусть D_1 и D_2 — 2 многоугольника на плоскости, имеющие содержательно близкую форму. Q — гомеоморфизм.

$Q: D_1 \to D_2$

$Q^{-1}: D_2 \to D_1$

Задача расчета гомеоморфизма с сохранением содержательного смысла прообраза в отображении может быть поставлена следующим образом.

Дано: два многоугольника D_1 и D_2 , имеющие содержательно близкую форму.

Требуется: построить в явном виде отображение $Q: D_1 \to D_2$, переводящее D_1 в D_2, при следующих условиях, наложенных на Q:

1. Отображение Q должно быть непрерывным и взаимно однозначным, то есть являться гомеоморфизмом.

2. Отображение Q должно сохранять содержательный смысл прообраза D_1 .

4.3 Построение гомеоморфизма содержательно близких областей в задаче морфинга.

Предлагается следующий метод для построения гомеоморфизма содержательно близких областей:

1. Построение скелетов многоугольников и (на рис. 6 это преобразования 1: а$\to$б для первого многоугольника и 7: д$\to$е для второго многоугольника).

2. Построение базовых скелетов многоугольников и (на рис.6 это преобразования 2: б$\to$в для первого многоугольника и 6: е$\to$ж для второго многоугольника).

3. Построение базовых округлений многоугольников (преобразования 3: в$\to$г и 5: ж$\to$з многоугольников в *"округлённые"* фигуры).

4. Разбиение базовых округлений на собственные области ребер базового скелета и концевые округления (на рисунке 6 3а: г$\to$и и 3с: з$\to$к) .

5. Построение гомеоморфных отображений этих областей разбиения (рис.6 3б: и$\to$к).

6. Построение гомеоморфных отображений базовых округлений многоугольников на сами многоугольники (рис.6 преобразования 3: г$\to$в и 5: з$\to$ж *"округлённых"* фигур в многоугольники).

Рис. 6. Метод построения гомеоморфизма содержательно близких областей.

Утверждение. *Отображение, построенное с помощью метода 1-6, является гомеоморфным и для содержательно близких объектов сохраняет содержательный смысл прообраза.*

Первый и второй этапы метода расписаны подробно в работах [2] и [8]. Остальные этапы — в работе [12] Петровой Л.Г., Местецкого Л.М., "Расчет гомеоморфизма односвязных многоугольных областей с изоморфными базовыми скелетами". Доказательство утверждения можно так же найти в работе [12].

Основная идея этого метода заключается в отображении базового скелета области D_1 в базовый скелет области D_2 и последующем гомеоморфном отображении $D_1 \to D_2$ с помощью разбиения на собственные области ребер базового скелета. Из областей с изоморфными базовыми скелетами можно получить изоморфные разбиения на более простые области, которые можно отображать друг на друга с помощью известных методов.

В работе [12] предлагается метод разбиения на так называемые собственные области базовых ребер — области, привязанные к каждому базовому ребру. (рис.6и, рис.6к) Они имеют специальный вид в силу свойств базового скелета, для них предлагаются методы отображения каждой пары таких областей через отображение на прямоугольник и обратно на собственную область.

4.4 О вычислении цветов точек растра в задаче морфинга.

Пусть

F_A — область, граница гранично-скелетного представления I_{v_1}.

F_B — область, граница гранично-скелетного представления I_{v_2}.

Рассмотрим оператор $\Omega = R \circ T \circ V$. Он представляет собой отображение $\Omega : I_i \to I_f$. Заметим, что Ω в данном случае всего лишь вычисляет образы точек из F_A. То есть для любой точки $a_{ij} \in F_A$

$$\Omega(a_{ij}) = (x_1, y_1) \in F_B$$

А оператор $\Omega^{-1} = V \circ T^{-1} \circ R$ позволяет вычислить прообразы всех точек преобразованной формы F_B. То есть для любой точки $b_{ij} \in F_B$

$$\Omega^{-1}(b_{ij}) = (x_2, y_2) \in F_A$$

Для задачи вычисления цветов всех точек растра новой формы I_f предлагается следующий подход, основанный на интерполяции по ближайшим точкам прообраза.

Обозначим
$C_A(x,y)$ — цвет точки $(x,y) \in F_A$;
$C_B(x,y)$ — цвет точки $(x,y) \in F_B$.

Для каждой точки растра $b_{ij} \in F_B$ необходимо:

1. вычислить прообраз точки b_{ij};

$$(x,y) = \Omega^{-1}(b_ij)$$

   Прообраз $(x,y) \in F_A$.

2. интерполировать цвет $C_A(x,y)$ в точке (x,y) по ближайшим к (x,y) четырем точкам растра;

$$a_{i_1j_1} \in A_{m\times n},\ a_{i_2j_2} \in A_{m\times n},\ a_{i_3j_3} \in A_{m\times n},\ a_{i_4j_4} \in A_{m\times n}$$

$$C_A(x,y) = F(a_{i_1j_1},\ a_{i_2j_2},\ a_{i_3j_3},\ a_{i_4j_4})$$

   Где F, например, можно положить равным взвешенной сумме $a_{i_1j_1},\ a_{i_2j_2},\ a_{i_3j_3},\ a_{i_4j_4}$.

$$F(a_{i_1j_1},\ a_{i_2j_2},\ a_{i_3j_3},\ a_{i_4j_4}) = \sum_{k=1}^{4} \lambda_k a_{i_kj_k}$$

$$\sum_{k=1}^{4} \lambda_k = 1,\ \lambda_k \geqslant 0$$

3. положить цвет точки растра $b_{ij} \in B_{l\times k}$ равным интерполированному цвету $C_A(x,y)$, то есть

$$b_{ij} = C_B(\Omega(x,y)) = C_A(x,y)$$

Заключение.

В работе представлен общий подход к решению задач преобразования растровых изображений, основанный на построении промежуточной непрерывной модели формы, аппроксимирующей фигуры, представленные на растровом изображении. Описано применение данного подхода к решению различных задач преобразования растровых изображений. В одной из них, задаче восстановления полутонового изображения, в рамках предложенного подхода вычисляется функция яркости. В другой, задаче морфинга растровых изображений, вычисляется векторная функция цвета в преобразованной форме.

В работе описана общая формальная постановка двух задач и их сведение к задачам преобразования в рамках непрерывных моделей, которые используют скелетное представление формы в виде множества серединных осей и связанных с ними границ аппроксимирующих фигур. Методы преобразования непрерывных представлений обоснованы теоретически в работах [11] и [12].

На основе методов, описанных в данной работе, могут быть построены являющиеся практически значимыми алгоритмы, с помощью которых можно создать:

• Новые инструменты обработки изображений в программных комплексах двумерной графики, такие как закраска новых силуэтов по имеющемуся цветному изображению.

• Новые инструменты анимации в компьютерной графике, такие как создание промежуточных фаз движения силуэта по начальной и конечной фазе.

• Инструменты для восстановления рельефа местности по изолиниям уровней.

• Инструменты для восстановления полутоновых изображений, закодированных с помощью изолиний постоянной яркости.

Настоящая работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 05-01-00542).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Местецкий Л.М.* Скелет многосвязной многоугольной фигуры. // Труды 15 международной конф. ГРАФИКОН-2005, Новосибирск, ИВМиМГ СО РАН, 2005, с. 242-249.
2. *Местецкий Л.М., Рейер И.А.* Непрерывное скелетное представление изображения с контролируемой точностью. // Труды 13 международной конференции. ГРАФИКОН-2003, Москва, с. 246-249.
3. *Местецкий Л.М., Семенов А. Б.* Сравнение формы изображений на основе циркулярного представления. // Труды 14 международной конференции ГРАФИКОН-2004, Москва.
4. *Sergios Theodoridis, Konstantinos Koutroumbas* Pattern Recogninition. // 2003, Elsevier USA
5. *Препарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия: введение. // Москва, Мир, 1989.
6. *J-M Oliva, M. Perrin, S. Coquillart* 3D Reconstruction of Complex Polyhedral Shapes from Contours Using Simplified Generalized Voronoi Diagram. // Eurographics 96.
7. *Eric J. Stolnitz, Tony DeRose, David H.* Salesin Wavelets for Computer Graphics Theory and Applications. // San Francisco, California.
8. *Местецкий Л.М.* Непрерывный скелет бинарного растрового изображения. // Графикон-98. Труды конференции, с.71-78.
9. *Местецкий Л.М., Семенов А. Б.* Преобразование цветных изображений на основе жирных Б-сплайновых кривых. // Труды 14 международной конференции ГРАФИКОН-2004, Москва.
10. *Котик С.В., Майсурадзе А.И., Местецкий Л.М.* Сжатие полутоновых изображений рукописного текста на основе кодирования по изолиниям яркости. // Труды 12 Всероссийской конференции Математические Методы Распознавания Образов (ММРО-12), Москва,, 2005, с. 346-349.
11. *Домахин М.А., Местецкий Л.М., Мехедов И.С., Петрова Л.Г.* Восстановление полутоновых изображений по изолиниям яркости. // Труды 12 Всероссийской конференции Математические Методы Распознавания Образов (ММРО-12), Москва, 2005, с. 305-308.
12. *Петрова Л.Г., Местецкий Л.М.* Расчет гомеоморфизма односвязных многоугольных областей с изоморфными базовыми скелетами. // Сборник "Искусственный интеллект Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, г. Симферополь, Украина, 2006.

СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, с. 121–137

УДК 517.956.2

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ НИТИ ПЛАЗМЫ В НЕЙТРАЛЬНОЙ СРЕДЕ

© 2006 г. С. А. Сергеев

SergeevSe1@yandex.ru

Кафедра Общей математики

Введение. Многие оптимизационные задачи, возникающие на практике, сводятся в чисто математических терминах к задаче минимизации функционалов, определенных на решениях уравнений в частных производных. Типичными примерами являются функционалы, выражающие энергию решения, его скорость и т.д. В данной дипломной работе рассмотрены некоторые оптимизационные задачи подобного типа для уравнения, описывающего колебания нити плазмы в нейтральной среде.

Задача граничного управления для уравнения колебаний нити плазмы в нейтральной среде поставлена в работе В.А.Ильина [6], где была получена явная формула для граничного управления. Также было показано, что при достаточно больших промежутках времени граничное управление не определяется однозначно. В данной работе предложен метод решения задачи оптимизации граничного управления для этого уравнения в пространствах W_p^1 и L_p. Рассмотрены два существенно различных случая: когда интервал времени кратен $2G(l)$ (см. ниже) и просто для любого достаточно большого интервала времени.

Помимо этого, рассматривается задача о минимизации весовых функционалов от граничного управления. Указан класс весовых функций, для которого выполняется следующее свойство: минимизирующая функция единственна и не зависит от выбора весовой функции внутри данного класса.

1. Граничное управление упругой силой с закрепленным концом.

1.1. Постановка задачи. Ставится задача отыскания неизвестной функции граничного управления $\mu(t)$, при заданных $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$\begin{cases} g(x)[g(x)u_x(x,t)]_x - u_{tt}(x,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) \\ u_x(0,t) = \mu(t),\ u(l,t) = 0 \end{cases}, \tag{1.1}$$

и известными финальными условиями

$$u(x,T) = \varphi_1(x),\ u_t(x,T) = \psi_1(x)\ . \tag{1.2}$$

Также необходимо минимизировать интеграл от управления, имеющий вид

$$\int\limits_0^T |\mu(t)|^p dt,\ p \in \mathbb{N}\ . \tag{1.3}$$

При этом считается, что $T = 4(n+1)G(l)$, где

$$G(x) \stackrel{def}{=} \int\limits_0^x \frac{d\xi}{g(\xi)} \tag{1.4}$$

Обобщенное решение задачи (1.1) $u(x,t)$ ищется в классе функций $\hat{W}_p^1(Q_T)$, где

$$Q_T = \{0 < x < l\} \times \{0 < t < T\}\ .$$

Само пространство $\hat{W}_p^1(Q_T)$ определяется следующим образом: это пространство функций $u(x,\, t) \in W_p^1(Q_T)$, имеющих для любого $t_0 \in [0,\, T]$ и любого $x_0 \in [0,\, l]$ следы $u(x,\, t_0)$ и $u(x_0,\, t)$, принадлежащие пространству W_p^1 на соответсвующих множествах $[0,\, l]$ и $[0,\, T]$. Начальное и финальное смещения $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ берутся из класса $W_p^1(0,\, l)$, а скорости $\psi(x)$, $\psi_1(x)$ — из класса $L_p[0,\, l]$. Потенциал $g(x)$ принадлежит классу $W_p^1[0,\, l]$ и удовлетворяет условию:

$$0 < \varepsilon \le g(x) \le M \quad \text{почти всюду на } [0,\, l] \ . \tag{1.5}$$

При этом условии функция $G(x)$ непрерывна и принадлежит $W_p^1[0,\, l]$.

Определим функции:

$$\tilde{\varphi}(x) \overset{def}{=} \varphi(G^{-1}(x)),\ \tilde{\psi}(x) \overset{def}{=} \psi(G^{-1}(x)) \quad \text{при } x \in [0,\, G(l)]$$

где $G^{-1}(x)$ — функция, обратная к $G(x)$.

Продолжим функцию $g(x)$ четно, а φ_1 и ψ_1 нечетно (относительно точки l) на отрезок $[l,\, 2l]$, функции $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ нечетно (относительно точки $G(l)$) на отрезок $[G(l),\, 2G(l)]$. Тогда функции φ и ψ продолжатся нечетно (относительно точки l) на отрезок $[l,\, 2l]$. Отметим также, что функция $G(x)$, задаваемая при $x \in [0,\, 2l]$ формулой (1.4) с продолженной функцией $g(x)$, удовлетворяет соотношению: $G(2l) = 2G(l)$.

1.2. Построение вспомогательных функций. Введем области Δ_i^G, $i = 1, 2, 3$, на плоскости (x, t), ограниченные следующими линиями (см. рис.1):

$$\begin{cases} \Delta_1^G \text{ ограничена линиями } \{t = 0,\, t = G(x),\, x = l\} \\ \Delta_2^G \text{ ограничена линиями } \{x = 0,\, t = G(x),\, t + G(x) - 2G(l) = 0\} \\ \Delta_3^G \text{ ограничена линиями } \{x = 0,\, t = T,\, t + G(x) - 2G(l) = 0,\, x = l\} \end{cases}$$

Рис. 1. Области Δ_i^G.

Построим функцию

$$\tilde{u}(x,\, t) \overset{def}{=} \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(G(x)+t) + \tilde{\varphi}(G(x)-t) + \int\limits_{G(x)-t}^{G(x)+t} \tilde{\psi}(\xi)d\xi\right], \text{ в } \Delta_1^G \\ \frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(G(x)+t) + \tilde{\varphi}(0) + \int\limits_{0}^{G(x)+t} \tilde{\psi}(\xi)d\xi\right], \text{ в } \Delta_2^G \\ \frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(0) + \tilde{\varphi}(G(2l)) + \int\limits_{0}^{G(2l)} \tilde{\psi}(\xi)d\xi\right] \equiv 0, \text{ в } \Delta_3^G \end{cases} \tag{1.6}$$

Эта функция принадлежит классу $\hat{W}_p^1(Q_T)$ и является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} g(x)[g(x)\tilde{u}_x(x,\,t)]_x - \tilde{u}_{tt}(x,\,t) = 0 \\ \tilde{u}(x,\,0) = \varphi(x),\ \tilde{u}_t(x,\,t) = \psi(x) \\ \tilde{u}_x(0,\,t) = \tilde{\mu}(t),\ \tilde{u}(l,\,t) = 0 \end{cases}$$

где

$$\tilde{\mu}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{1}{g(0)}[\tilde{\varphi}'(t) + \tilde{\psi}(t)],\ 0 \le t \le 2G(l) \\ 0,\ 2G(l) \le t \le T \end{cases} \tag{1.7}$$

и в финальный момент времени удовлетворяет соотношениям:

$$\tilde{u}(x,\,T) = 0,\ \tilde{u}_t(x,\,T) = 0 \tag{1.8}$$

Обозначим через $\hat{u}$ функцию $\hat{u}(x,\,t) \stackrel{def}{=} u(x,\,t) - \tilde{u}(x,\,t)$. Она является решением задачи

$$\begin{cases} g(x)[g(x)\hat{u}_x(x,\,t)]_x - \hat{u}_{tt}(x,\,t) = 0 \\ \hat{u}(x,\,0) = 0,\ \hat{u}_t(x,\,t) = 0 \\ \hat{u}_x(0,\,t) = \hat{\mu}(t) = \mu(t) - \tilde{\mu}(t),\ u(l,\,t) = 0 \end{cases}$$

и в финальный момент времени удовлетворяет условиям (1.2).

С другой стороны, решение этой задачи можно записать в виде

$$\hat{u}(x,\,t) = \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k \int\limits_0^{t-G(x)-2kG(l)} \underline{\hat{\mu}}(\tau)d\tau - \sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^k \int\limits_0^{t+G(x)-2kG(l)} \underline{\hat{\mu}}(\tau)d\tau$$

где функция

$$\underline{\hat{\mu}}(t) = \begin{cases} \mu(t),\ t \in (0,T] \\ 0,\ t \le 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

Из этой формулы вытекает условие согласования, при котором следует минимизировать интеграл (1.3), выполняющееся почти всюду на $[0,\,2l]$:

$$-\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k \hat{\mu}(G(x) + 2kG(l)) = \frac{\varphi_1'(x)g(x) + \psi_1(x)}{2}$$

Учитывая, что $\hat{\mu}(G(x) + 2kG(l)) = \mu(G(x) + 2kG(l)) - \tilde{\mu}(G(x) + 2kG(l))$, и соотношение (1.7), получим, что:

$$\hat{\mu}(G(x) + 2kG(l)) = \begin{cases} \mu(G(x)) - \frac{1}{2g(0)}[\tilde{\varphi}'(G(x)) + \tilde{\psi}(G(x))],\ k = 0 \\ \mu(G(x) + 2kG(l)),\ k \ge 1 \end{cases}$$

Проводя тривиальные преобразования и вычисляя производную функции $\tilde{\varphi}$, а также, вводя обозначения

$$\mu_k(G(x)) \stackrel{def}{=} \mu(G(x) + 2kG(l)) \tag{1.10}$$

$$B(x) \stackrel{def}{=} \left[g(x)\left(\varphi_1'(x) - \frac{\varphi'(x)}{g(0)}\right) + \left(\psi_1(x) - \frac{\psi(x)}{g(0)}\right)\right] , \tag{1.11}$$

перепишем условия согласования:

$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k \mu_k(G(x)) = -\frac{1}{2}B(x) \tag{1.12}$$

Итак, мы получили следующую оптимизационную задачу:

$$\text{найти минимум} \quad \int_0^T |\mu(\tau)|^p d\tau \quad \text{при условии (1.12)} \ . \tag{1.13}$$

1.3. Минимизация. Используя формулу (1.10), перепишем интеграл (1.3) в следующем виде:

$$\int_0^{2l} \frac{1}{g(x)} \sum_{k=0}^{2n+1} |\mu_k(G(x))|^p dx \ .$$

Введем класс $\Omega_p^{2(n+1)}$, состоящий из наборов $\{\mu_k(G(x))\}_{k=0}^{k=2n+1}$ функций из пространства $L_p[0,\, 2l]$, удовлетворяющих условию согласования (1.12).

Для нахождения минимума указанного интеграла в классе $\Omega_p^{2(n+1)}$ сформулируем лемму об инфимуме интеграла. Для этого введем величину:

$$I \equiv \inf_{\{\mu_k\} \subset \Omega_p^{2(n+1)}} \int_0^{2l} \frac{1}{g(x)} \sum_{k=0}^{2n+1} |\mu_k(G(x))|^p dx$$

и обозначим через $\hat{I}(x)$ поточечный инфимум суммы

$$\sum_{k=0}^{2n+1} |\mu_k(G(x))|^p$$

на множестве $\Omega_p^{2(n+1)}$. Отметим, что $\hat{I}(x)$ существует для почти всех $x \in [0,\, 2l]$.

Лемма (О поточечном инфимуме 1) *Если поточечный инфимум $\hat{I}(x)$ для почти всех $x \in [0,\, 2l]$ достигается на одном и том же элементе $\{\mu_k(G(x))\}_{k=0}^{k=2n+1} \in \Omega_p^{2(n+1)}$, то справедливо равенство:*

$$I = \int_0^{2l} \frac{1}{g(x)} \hat{I}(x) dx \tag{1.14}$$

Таким образом, задача минимизации исходного интеграла сводится к минимизации суммы

$$\sum_{k=0}^{2n+1} |\mu_k(G(x))|^p \tag{1.15}$$

в классе $\Omega_p^{2(n+1)}$.

Введем функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(\mu_0, \ldots \mu_{2n+1}) = \sum_{k=0}^{2n+1} |\mu_k(G(x))|^p + \lambda \left[\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \mu_k(G(x)) + \frac{1}{2} B(x) \right]$$

Рассмотрим сначала случай $p > 1$. Равенство нулю производных функции Лагранжа означает, что

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_k} = p|\mu_k(G(x))|^{p-1} \mathrm{sgn}(\mu_k(G(x))) + (-1)^k \lambda = 0$$

для $k = 0, 1, \ldots, 2n+1$.

Пользуясь тем, что константа λ одна и та же для любого $k = 0 \ldots 2n+1$, то, используя условия согласования (12), получим выражение для $\mu_k(G(x))$, при $p > 1$ минимизирующего необходимую сумму в классе $\Omega_p^{2(n+1)}$:

$$\mu_k(G(x)) = \frac{(-1)^{k+1}}{4(n+1)} B(x),\ k = \overline{0,\, 2n+1}\ . \tag{1.16}$$

Случай $p = 1$ рассматривается тривиально: задача о минимизации исходного интеграла сводится к минимизации суммы вида

$$\sum_{k=0}^{2n+1} |\mu_k(G(x))|$$

с условием связи

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \mu_k(G(x)) = -\frac{1}{2} B(x)\ .$$

Из этого условия вытекает, в частности, что для любых наборов $\{\mu_k\}_{k=0}^{k=2n+1}$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{1}{2} B(x)\right| \le \sum_{k=0}^{2n+1} |\mu_k(G(x))|\ .$$

Поскольку на наборе функций вида (1.16) это неравенство превращается в равенство, указанный набор является минимизирующим и при $p = 1$.

Из формулы (1.16) видно, что функция $\mu(t)$ на отрезке $[0, T] = [0\ ,\ \ 4\ (n\ +\ 1)\ G(l)]$ является периодической с периодом, равным $4G(l)$. А для нормы функции μ в пространстве $L_p[0,\, T]$ выполняется соотношение:

$$\|\mu\|^p_{L_p[0,\, T]} = \int\limits_0^T |\mu(t)|^p dt = O\left(\frac{1}{T}\right)\ .$$

1.4. Единственность минимизирующей функции. Докажем единственность функции, минимизирующей интеграл (1.3), при $p > 1$.

Предположим, что инфимум интеграла достигается на двух функциях $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ из класса $L_p[0,\, T]$, удовлетворяющих условию связи (1.12). Тогда

$$\left(\int\limits_0^T |\mu_1(t)|^p dt\right)^{1/p} = I^{1/p},\ \left(\int\limits_0^T |\mu_2(t)|^p dt\right)^{1/p} = I^{1/p}\ . \tag{1.17}$$

Функция $\mu(t) = \frac{1}{2}\mu_1(t) + \frac{1}{2}\mu_2(t)$ также принадлежит классу $L_p[0,\, T]$ и удовлетворяет условию связи (1.12), поэтому для нее должно выполняться неравнство

$$\left(\int\limits_0^T |\mu(t)|^p dt\right)^{1/p} \ge I^{1/p}\ . \tag{1.18}$$

С другой стороны, применяя неравенство Минковского и используя соотношения (1.17), получим что

$$\left(\int\limits_0^T |\mu(t)|^p dt\right)^{1/p} = \left(\int\limits_0^T \left|\frac{1}{2}\mu_1(t) + \frac{1}{2}\mu_2(t)\right|^p dt\right)^{1/p} \le$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\int_0^T |\mu_1(t)|^p dt\right)^{1/p} + \frac{1}{2}\left(\int_0^T |\mu_2(t)|^p dt\right)^{1/p} = I^{1/p} . \tag{1.19}$$

Соотношения (1.18) и (1.19) совместны только тогда, когда неравенства в них обращаются в равенства. Последнее возможно лишь при условии, что почти всюду на $[0, T]$ выполнено соотношение

$$\mu_1(t) = c\mu_2(t) ,$$

где c – некоторая положительная постоянная. Из (1.17) следует, что эта постоянная должна быть равна единице, т.е. $\mu_1(t) = \mu_2(t)$ в $L_p[0, T]$.

При $p = 1$ единственность нарушается, поскольку, наряду с минимизирующей функцией, отвечающей набору (1.16), в качестве другой минимизирующей функции можно взять

$$\mu(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}B(G^{-1}(t)),\ 0 \leq t \leq 2G(l) \\ 0,\ 2G(l) < t \leq T \end{cases}$$

2. Управление смещением на левом конце при закрепленном правом.

2.1. Постановка задачи. Рассматривается задача отыскания граничного управления $\mu(t)$

$$\begin{cases} g(x)[g(x)u_x(x, t)]_x - u_{tt}(x, t) = 0 \\ u(0, t) = \mu(t),\ u(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x),\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \tag{2.1}$$

с заданными финальными данными (1.2):

$$u(x, T) = \varphi_1(x),\ u_t(x, T) = \psi_1(x) .$$

Момент времени T выбирается равным $2(n + 1)\,G(l)$, где n – произвольное натуральное число.

Решение $u(x, t)$ этой задачи рассматривается в том же классе $\hat{W}_p^1(Q_T)$, что и в предыдущей задаче, начальное и финальное смещения берутся из класса $W_p^1(0, l)$, а соответствующие скорости — из класса $L_p[0, l]$. Потенциал $g(x)$ выбирается также из $W_p^1[0, l]$ с условиями (1.5). Граничное управление принадлежит теперь классу $W_p^1[0, T]$. Мы предполагаем также, что выполняются следующие условия связи:

$$\mu(0) = \varphi(0),\ \mu(T) = \varphi_1(0) . \tag{2.2}$$

Интеграл граничной энергии, который надо минимизировать на множестве граничных управлений $\mu \in W_p^1[0, T]$, выглядит теперь следующим образом:

$$\int_0^T |\mu'(t)|^p dt \tag{2.3}$$

2.2. Построение вспомогательных функций. Также, как в разделе 1 определим функции $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$ и продолжим их нечетно на отрезок $[G(l), 2G(l)]$, одновременно продолжим потенциал $g(x)$ четно на $[l, 2l]$. Функция $\tilde{u}(x, t)$ по-прежнему определяется равенством (1.6) и является решением задачи

$$\begin{cases} g(x)[g(x)\tilde{u}_x(x, t)]_x - \tilde{u}_{tt}(x, t) = 0 \\ \tilde{u}(0, t) = \tilde{\mu}(t), \tilde{u}(l, t) = 0 \\ \tilde{u}(x, 0) = \varphi(x), \tilde{u}_t(x, 0) = \psi(x) , \end{cases} \tag{2.4}$$

где

$$\tilde{\mu}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(t) + \tilde{\varphi}(0) + \int\limits_0^t \tilde{\psi}(\xi)d\xi\right], \ 0 \le t \le 2G(l) \\ 0, \ 2G(l) \le t \le T \end{cases} \tag{2.5}$$

В финальный момент времени T $\tilde{u}$ удовлетворяет, как и ранее, условиям (1.8). Рассмотрим функцию $\hat{u}(x, t) = u(x, t) - \tilde{u}(x, t)$, которая является решением задачи

$$\begin{cases} g(x)[g(x)\hat{u}_x(x, t)]_x - \hat{u}_{tt}(x, t) = 0 \\ \hat{u}(0, t) = \hat{\mu}(t) = \mu(t) - \tilde{\mu}(t), \ \hat{u}(l, t) = 0 \\ \hat{u}(x, 0) = 0, \ \hat{u}_x(x, 0) = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

с финальными данными (1.2). С другой стороны, решение этой задачи можно записать в виде:

$$\hat{u}(x, t) = \sum_{k=0}^{n} \underline{\hat{\mu}}(t - G(x) - 2kG(l)) - \sum_{k=1}^{n+1} \underline{\hat{\mu}}(t + G(x) - 2kG(l)) \tag{2.7}$$

Используя последнюю формулу, представление для $\hat{\mu}$ и формулу (2.5), можно получить дополнительные условия согласования для минимизации интеграла граничной энергии (равенство понимается как равенство элементов в $L_p[0, 2l]$):

$$\sum_{k=0}^{n} \mu_k'(G(x)) = -\frac{1}{2}[g(x)\delta'(x) + \Delta(x)] \overset{def}{=} -\frac{1}{2}B(x) \ , \tag{2.8}$$

где

$$\delta(x) = \varphi_1(x) - \varphi(x), \ \Delta(x) = \psi_1(x) - \psi(x) \ ,$$

а функция $\mu_k(G(x))$ определяется как и в разделе 1.

2.3. Минимизация. В терминах функций $\mu_k(G(x))$ интеграл (2.3) можно записать в следующем виде:

$$\int\limits_0^{2l} \frac{1}{g(x)} \sum_{k=0}^{n} |\mu_k'(G(x))|^p dx \tag{2.9}$$

Введем теперь, по аналогии с разделом 1, класс $\Omega_p'^{n+1}$, состоящий из наборов $\{\mu_k'(G(x))\}_{k=0}^{k=n}$ функций из $L_p[0, 2l]$. Справедлива лемма, аналогичная Лемме об инфимуме 1.

Лемма (О поточечном инфимуме 2). *Пусть*

$$I = \inf_{\{\mu_k'\} \subset \Omega_p'^{n+1}} \int\limits_0^{2l} \frac{1}{g(x)} \sum_{k=0}^{n} |\mu_k'(G(x))|^p$$

и $\hat{I}(x)$ *— поточечный инфимум суммы*

$$\sum_{k=0}^{n} |\mu_k'(G(x))|^p \ ,$$

существующий для почти всех $x \in [0, 2l]$ *на множестве* $\Omega_p'^{n+1}$. *Тогда, если поточечный инфимум достигается на одной и той же совокупности функций* $\mu_k'(G(x))$, *то верно равенство*

$$I = \int\limits_0^{2l} \frac{1}{g(x)} \hat{I}(x) dx$$

Указанная лемма сводит задачу минимизации исходного интеграла к минимизации суммы

$$\sum_{k=0}^{n} |\mu'_k(G(x))|^p$$

на множестве наборов функций из $\Omega_p'^{n+1}$, удовлетворяющих условиям связи (2.8). Снова вводим функцию Лагранжа, которая теперь имеет вид:

$$\mathcal{L}(\mu'_0 \dots \mu'_n) = \sum_{k=0}^{n} |\mu'_k(G(x))|^p + \lambda \left[\sum_{k=0}^{n} |\mu'_k(G(x))| + \frac{1}{2} B(x) \right]$$

Как и в разделе 1, рассмотрим сначала случай, когда $p > 1$. Равенство нулю производных функции Лагранжа означает, что:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_k} = p|\mu'_k(G(x))|^{p-1} \mathrm{sgn}(\mu'_k(G(x))) + \lambda = 0 \ .$$

Далее, аналогичными рассуждениями, что и в разделе 1, показывается, что минимизирующий набор функций должен иметь вид:

$$\mu'_k(G(x)) = -\frac{B(x)}{2(n+1)} \ . \tag{2.10}$$

В случае $p = 1$ необходимо минимизировать сумму вида:

$$\sum_{k=0}^{k=n} |\mu'_k(G(x))| \ .$$

Поскольку для любых наборов из $\Omega_p'^{n+1}$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2}|B(x)| \le \sum_{k=0}^{n} |\mu'_k(G(x))| \ ,$$

которое на наборе функций (2.10) превращается в равенство, то этот набор и является минимизирующим.

2.4. Построение функции μ**.** Итак, мы нашли минимизирующий набор функций $\{\mu'_k(G(x))\}$, по которому еще нужно восстановить набор функций $\{\mu_k(G(x))\}$ (этого не требовалось в первой задаче, где управление производилось с помощью упругой силы). Как мы покажем далее, функция μ, как элемент пространства $W_p^1[0,\, T]$, однозначно определяется минимизирующим набором $\{\mu'_k(G(x))\}$.

Из формулы (2.10) следует соотношение:

$$\int_0^x \frac{\mu'(G(\xi) + 2kG(l))}{g(\xi)} d\xi = -\frac{1}{2(n+1)} \left[\delta(x) - \delta(0) + \int_0^x \frac{\Delta(\xi)}{g(\xi)} d\xi \right] \ ,$$

где $x \in [0,\, 2l]$. Из него получим следующее равенство (как элементов из $L_p[0,\, 2l]$):

$$\mu(G(x) + 2kG(l)) - \mu(2kG(l)) = \frac{1}{2(n+1)} \left[\delta(0) - \delta(x) - \int_0^x \frac{\Delta(\xi)}{g(\xi)} d\xi \right] \tag{2.11}$$

Но, в силу нечетности,

$$\delta(2l) = -\delta(0), \int\limits_0^{2l} \frac{\Delta(\xi)}{g(\xi)} d\xi = 0$$

поэтому, полагая $x = 2l$ в (2.11), получим цепочку равенств:

$$\mu(2(k+1)G(l)) = \mu(2kG(l)) + \frac{\delta(0)}{n+1} , \tag{2.12}$$

зацепленных друг с другом, из которых каждое последующее значение функции $\mu(2(k+1)\,G(l))$ определяется через предыдущее $\mu(2kG(l))$. Тем самым, все эти значения находятся по индукции из уравнения с $k = 0$, которое, с учетом условий связи (2.2), имеет вид

$$\mu(2G(l)) = \varphi(0) + \frac{\delta(0)}{n+1} . \tag{2.13}$$

Из формул (2.12) и (2.13) следует, что

$$\mu(2kG(l)) = \varphi(0) + k\frac{\delta(0)}{n+1} . \tag{2.14}$$

Проводя некоторые преобразования, получим окончательный вид функций $\mu_k(G(x))$:

$$\mu(G(x) + 2kG(l)) = \varphi_1(0)\frac{G(x) + 2kG(l)}{2(n+1)G(l)} + \varphi(0)\left\{1 - \frac{G(x) + 2kG(l)}{2(n+1)G(l)}\right\} +$$

$$+\frac{1}{2(n+1)}\left[\delta(0)\left(1 - \frac{G(x)}{G(l)}\right) - \delta(x) - \int\limits_0^x \frac{\Delta(\xi)}{g(\xi)} d\xi\right] , \tag{2.15}$$

справедливое для всех k и почти всех $x \in [0,\, 2l]$. Таким образом, управление $\mu(t)$ на отрезке $[0,\, T]$ можно представить в виде суммы

$$\mu(t) = L(t) + \alpha(t) \tag{2.16}$$

двух членов, первый из которых

$$L(t) = \varphi_1(0)\frac{t}{T} + \varphi(0)\left(1 - \frac{t}{T}\right) \tag{2.17}$$

является линейной функцией, а второй задается периодической на отрезке $[0,\, T]$ функцией $\alpha(t)$ с периодом $2l$, определяемой для любого k и почти всех $x \in [0,\, 2l]$ формулой

$$\alpha(G(x) + 2kG(l)) = \frac{1}{2(n+1)}\left[\delta(0)\left(1 - \frac{G(x)}{G(l)}\right) - \delta(x) - \int\limits_0^x \frac{\Delta(\xi)}{g(\xi)} d\xi\right] . \tag{2.18}$$

Из этого представления в частности следует, что $\alpha(t)$ имеет порядок $O\left(\frac{1}{T}\right)$ (равномерно по $t \in [0,\, T]$) и зависит только от разностей начальных и конечных смещений и скоростей.

2.5. Единственность. Вопрос о единственности решается также, как в разделе 2, только для иллюстрации неединственности решения при $p = 1$ надо брать функцию

$$\mu'(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}B(G^{-1}(t)),\ 0 \le t \le 2G(l) \\ 0,\ 2G(l) \le t \le T \end{cases}$$

или

$$\mu(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\int\limits_0^t B(G^{-1}(\tau))d\tau, \ 0 \le t \le 2G(l) \\ 0, \ 2G(l) \le t \le T \end{cases} \tag{2.19}$$

3. Управление смещением на одном конце с закрепленным другим за произвольное время.

3.1. Постановка задачи. Рассматривается задача (2.1) с финальными данными (1.2) и условиями связи (2.2). Минимизируется интеграл вида (2.3), однако время T выбирается теперь равным
$2nG(l) + \Delta$, где n – произвольное натуральное число, а $\Delta \in [0,\, 2G(l)]$. Потенциал $g(x)$, как и в разделе 2, принадлежит пространству $W_p^1[0,\, l]$ и удволетворояет условию (1.5). Продолжая функцию $g(x)$ четно относительно точки l на отрезок $[l,\, 2l]$, получим, что функция $G(x)$, задаваемая формулой (1.4), непрерывна на $[0,\, 2l]$ и потому для некоторого $\delta \in [0,\, 2l]$ будет выполнено равенство $\Delta = G(\delta)$. Начальные и финальные смещения и скорости и граничное управление берутся из тех же классов, что и в разделе 2.

3.2. Построение вспомогательных функций. Также, как в разделе 2, строится функция $\tilde{u}(x,\, t)$, являющаяся решением задачи (2.4) с граничным управлением (2.5) и нулевыми финальными условиями. Тогда функция $\hat{u}(x,\, t) = u(x,\, t) - \tilde{u}(x,\, t)$ будет решением задачи (2.6) с финальными условиями (1.2). Решение этой задачи можно также записать в виде:

$$\hat{u}(x,\, t) = \sum_{k=0}^{n} \underline{\hat{\mu}}(t - G(x) - 2kG(l)) - \sum_{k=1}^{n+1} \underline{\hat{\mu}}(t + G(x) - 2kG(l)) \ . \tag{3.1}$$

Из этого представления, также как в разделе 2, выводятся условия связи, при которых минимизируется интеграл (2.3):

$$-\sum_{k=-1}^{n-1} \underline{\hat{\mu}}'(2kG(l) + G(\delta) + G(x)) = \frac{\varphi_1'(x)g(x) + \psi_1(x)}{2} \tag{3.2}$$

Рассмотрим член $\underline{\hat{\mu}}'(G(x) + G(\delta) - 2G(l))$, отвечающий $k = -1$. Посмотрим, при каких $x \in [0,\, 2l]$ выражение $G(x) + G(\delta) - 2G(l)$, совпадающее с аргументом рассматриваемой функции, является неотрицательным, т.е. выполняется неравенство

$$G(x) + G(\delta) \ge 2G(l) \ .$$

Проводя нехитрые вычисления и учитывая четность функции $g(x)$, получим, что

$$G(x) + G(\delta) \ge 2G(l) \Longleftrightarrow x \in [2l - \delta,\, 2l] \tag{3.3}$$

Теперь обратимся к члену с $k = 0$. В этом случае аргумент рассматриваемой функции совпадает с $G(x) + G(\delta)$. Это выражение не превосходит $2G(l)$ при $x \in [0,\, 2l - \delta]$.

Рассмотрим отдельно случаи $x \in [0,\, 2l - \delta]$ и $x \in [2l - \delta,\, 2l]$.

В первом случае, когда $x \in [0,\, 2l - \delta]$, аргумент функции, отвечающей $k = -1$ не положителен, поэтому она выпадает из формулы (3.2), а сама формула принимает вид:

$$-\sum_{k=0}^{n-1} \hat{\mu}'(2kG(l) + G(\delta) + G(x)) = \frac{\varphi_1'(x)g(x) + \psi_1(x)}{2} \ . \tag{3.4}$$

(Нижняя черта у функции $\hat{\mu}$ опускается, так как в рассматриваемом случае ее аргумент неотрицателен). Из выражения для функции $\hat{\mu}$ и формулы (2.5) получаем, как и в разделе 3:

$$-\sum_{k=0}^{n-1} \mu'(2kG(l) + G(\delta) + G(x)) = \frac{1}{2}[r_1(x) + R_1(x)] \stackrel{def}{=} \frac{1}{2}B_1(x) \tag{3.5}$$

где

$$\begin{cases} r_1(x) \overset{def}{=} \varphi_1'(x)g(x) - \varphi'\left(G^{-1}(G(x)+G(\delta))\right) g\left(G^{-1}(G(x)+G(\delta))\right) \\ R_1(x) \overset{def}{=} \psi_1(x) - \psi\left(G^{-1}(G(x)+G(\delta))\right) \end{cases} \tag{3.6}$$

Теперь обратимся к случаю, когда $x \in [2l-\delta,\, 2l]$. Из формулы (2.5) вытекает, что в этом случае аргумент функции, отвечающей $k=-1$, нетрицателен, поэтому условия связи при этом приобретают вид

$$-\sum_{k=-1}^{n-1} \mu'(2kG(l)+G(\delta)+G(x)) = \frac{1}{2}[r_2(x)+R_2(x)] \overset{def}{=} \frac{1}{2}B_2(x) \tag{3.7}$$

где

$$\begin{cases} r_2(x) \overset{def}{=} \varphi_1'(x)g(x) - \varphi'\left(G^{-1}(G(x)+G(\delta)-2G(l))\right) \times \\ \qquad \times g\left(G^{-1}(G(x)+G(\delta)-2G(l))\right) \\ R_2(x) \overset{def}{=} \psi_1(x) - \psi\left(G^{-1}(G(x)+G(\delta)-2G(l))\right) \end{cases} \tag{3.8}$$

Вводя обозначение $\mu_k(G(x)) \overset{def}{=} \mu(2kG(l)+G(\delta)+G(x))$, перепишем условия связи (3.5) и (3.7) в виде:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mu_k(G(x)) = -\frac{1}{2}B_1(x),\ x \in [0,\, 2l-\delta] \\ \sum\limits_{k=-1}^{n-1} \mu_k(G(x)) = -\frac{1}{2}B_2(x),\ x \in [2l-\delta,\, 2l] \end{cases} \tag{3.9}$$

Итак, исходная оптимизационная задача свелась к следующей:

$$\int_0^T |\mu'(t)|^p dt \to \min, \qquad \text{при наличии условий (3.9)} \tag{3.10}$$

3.3. Минимизация. Запишем минимизируемый интеграл (2.3) в терминах введенных функций $\mu_k(G(x))$:

$$\int_0^T |\mu'(t)|^p dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{2l-\delta} \frac{1}{g(x)} |\mu_k'(G(x))|^p dx + \sum_{k=-1}^{n-1} \int_{2l-\delta}^{2l} \frac{1}{g(x)} |\mu_k'(G(x))|^p dx \tag{3.11}$$

Введем класс $\tilde{\Omega}_p^n$, состоящий из пар (a,b) наборов $a=\{a_k(x)\}_{k=0}^{n-1}$ функций из пространства $L_p[0,\, 2l-\delta]$ и $b=\{b_k(x)\}_{k=-1}^{n-1}$ функций из пространства $L_p[2l-\delta,\, 2l]$. Обозначим через I следующую величину:

$$I \overset{def}{=} \inf_{\tilde{\Omega}_p^n} \left\{ \int_0^{2l-\delta} \frac{1}{g(x)} \sum_{k=0}^{n-1} |\mu_k'(G(x))|^p dx + \int_{2l-\delta}^{2l} \frac{1}{g(x)} \sum_{k=-1}^{n-1} |\mu_k'(G(x))|^p dx \right\},$$

а через $\hat{I}(x)$ — поточечный инфимум на множестве $\tilde{\Omega}_p^n$

$$\hat{I}(x) \overset{def}{=} \begin{cases} \inf\limits_{x\in[0,\,2l-\delta],\,\{\mu_k\}\subset L_p[0,\,2l-\delta]} \sum\limits_{k=0}^{n-1} |\mu_k(G(x))|^p \\ \inf\limits_{x\in[2l-\delta,\,2l],\,\{\mu_k\}\subset L_p[2l-\delta,\,2l]} \sum\limits_{k=-1}^{n-1} |\mu_k(G(x))|^p \end{cases}$$

Справедлива следующая

Лемма (О поточечном инфимуме 3). *Если инфимум $\hat{I}(x)$ достигается для почти всех x из отрезка $[0, 2l]$ на одном и том же элементе из класса $\tilde{\Omega}_p^n$, то выполняется равенство*

$$I = \int\limits_0^{2l-\delta} \frac{1}{g(x)}\hat{I}(x)dx + \int\limits_{2l-\delta}^{2l} \frac{1}{g(x)}\hat{I}(x)dx = \int\limits_0^{2l} \frac{1}{g(x)}\hat{I}(x)dx \tag{3.12}$$

Доказательство. Предположим, что инфимум $\hat{I}(x)$ на множестве $\tilde{\Omega}_p^n$ достигается на паре $(\tilde{\mu}^1, \tilde{\mu}^2)$, где $\tilde{\mu}^1 = \{\tilde{\mu}_k^1\}$, $\tilde{\mu}^2 = \{\tilde{\mu}_k^2\}$. Очевидно, что

$$I \le \int\limits_0^{2l} \frac{1}{g(x)}\hat{I}(x)dx$$

С другой стороны, по определению инфимума, для любого $\varepsilon > 0$ в множестве $\tilde{\Omega}_p^n$ найдется пара (μ^1, μ^2) с $\mu^1 = \{\mu_k^1\}$, $\mu^2 = \{\mu_k^2\}$ такая, что

$$\int\limits_0^{2l-\delta} \frac{1}{g(x)} \sum_{k=0}^{n-1} |\mu_k^{1\prime}(G(x))|^p dx + \int\limits_{2l-\delta}^{2l} \sum_{k=-1}^{n-1} \frac{1}{g(x)} |\mu_k^{2\prime}(G(x))|^p dx < I + \varepsilon\ .$$

При этом выполняются неравенства:

$$\int\limits_0^{2l-\delta} \frac{1}{g(x)} \sum_{k=0}^{n-1} |\tilde{\mu}_k^{1\prime}(G(x))|^p dx \le \int\limits_0^{2l-\delta} \frac{1}{g(x)} \sum_{k=0}^{n-1} |\mu_k^{1\prime}(G(x))|^p dx$$

$$\int\limits_{2l-\delta}^{2l} \frac{1}{g(x)} \sum_{k=-1}^{n-1} |\tilde{\mu}_k^{2\prime}(G(x))|^p dx \le \int\limits_{2l-\delta}^{2l} \frac{1}{g(x)} \sum_{k=-1}^{n-1} |\mu_k^{2\prime}(G(x))|^p dx$$

Складывая их, получаем требуемое неравенство

$$\int\limits_0^{2l} \frac{1}{g(x)}\hat{I}(x)dx \le \int\limits_0^{2l-\delta} \frac{1}{g(x)} \sum_{k=0}^{n-1} |\mu_k^{1\prime}(G(x))|^p dx + \int\limits_{2l-\delta}^{2l} \frac{1}{g(x)} |\mu_k^{2\prime}(G(x))|^p dx$$

Лемма доказана.

Доказанная лемма сводит задачу минимизации (3.10) к двум задачам условной минимизации сумм:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\mu_k'(G(x))|^p \to \min, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k'(G(x)) = -\frac{1}{2}B_1(x), \quad x \in [0,\, 2l-\delta] \tag{3.13}$$

и

$$\sum_{k=-1}^{n-1} |\mu_k'(G(x))|^p \to \min, \quad \sum_{k=-1}^{n-1} \mu_k'(G(x)) = -\frac{1}{2}B_2(x), \quad x \in [2l-\delta,\, 2l] \tag{3.14}$$

Как и в предыдущих задачах, рассмотрим отдельно случаи $p > 1$ и $p = 1$. Начнем с первого из них, когда $p > 1$.

Предположим сначала, что $x \in [0,\, 2l-\delta]$ и построим функцию Лагранжа для задачи (3.13):

$$\mathcal{L}(\mu'_0,\dots,\mu'_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1}|\mu'_k(G(x))|^p + \lambda\left[\sum_{k=0}^{n-1}\mu'_k(G(x)) + \frac{1}{2}B_1(x)\right] .$$

Аналогичными рассуждениями получим, что

$$\mu'(2kG(l)+G(\delta)+G(x)) = -\frac{1}{2n}B_1(x),\ x\in[0,\,2l-\delta],\, k=\overline{0,\,n-1} \tag{3.15}$$

Если же $x \in [2l-\delta,\, 2l]$, то аналогичным образом составим функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(\mu'_{-1},\dots,\mu'_{n-1}) = \sum_{k=-1}^{n-1}|\mu'_k(G(x))|^p + \lambda\left[\sum_{k=-1}^{n-1}\mu'_k(G(x)) + \frac{1}{2}B_2(x)\right]$$

откуда

$$\mu'(2kG(l)+G(\delta)+G(x)) = -\frac{1}{2(n+1)}B_2(x),\ x\in[2l-\delta,\,2l],\, k=\overline{-1,\,n-1} \tag{3.16}$$

Теперь обратимся к случаю $p=1$.

Если $x\in[0,\,2l-\delta]$, то минимизируемая сумма (3.13) имеет вид

$$\sum_{k=0}^{n-1}|\mu'_k(G(x))| \to \min\ .$$

Из условий связи следует неравенство

$$\frac{1}{2}|B_1(x)| \le \sum_{k=0}^{n-1}|\mu'_k(G(x))|\ ,$$

которое на функциях (3.15) превращается в равенство. Тем самым, функции (3.15) реализуют минимум суммы (3.13).

Если же $x\in[2l-\delta,\,2l]$, то минимизируемая сумма (3.14) принимает вид

$$\sum_{k=-1}^{n-1}|\mu'_k(G(x))| \to \min\ ,$$

а из условий связи вытекает неравенство:

$$\frac{1}{2}|B_2(x)| \le \sum_{k=-1}^{n-1}|\mu'_k(G(x))|\ .$$

Равенство в нем достигается на функциях (3.16), реализующих минимум суммы (3.14).

3.4. Построение функции μ. Восстановление функции μ также приходится производить по-разному на интервалах $[0,\,2l-\delta]$ и $[2l-\delta,\,2l]$.

Рассмотрим сначала случай, когда $x\in[0,\,2l-\delta]$. С учетом формулы (3.15), имеем (как и в разделе 3):

$$\mu(2kG(l)+G(\delta)+G(x)) - \mu(2kG(l)+G(\delta)) = -\frac{1}{2n}\int\limits_0^x \frac{B_1(\xi)}{g(\xi)}d\xi \tag{3.17}$$

Положим в последнем равенстве $x = 2l - \delta$ и воспользуемся тем, что

$$\mu(2(k+1)G(l)) - \mu(2kG(l) + G(\delta)) = -\frac{1}{2n}\int\limits_0^{2l-\delta} \frac{B_1(\xi)}{g(\xi)}d\xi \stackrel{def}{=} C_1 \tag{3.18}$$

В случае, когда $x \in [2l-\delta,\, 2l]$, имеем, с учетом формулы (3.16), аналогичное равенство:

$$\mu(2kG(l) + G(\delta) + G(x)) - \mu(2(k+1)G(l)) = -\frac{1}{2(n+1)}\int\limits_{2l-\delta}^{x} \frac{B_2(\xi)}{g(\xi)}d\xi\ . \tag{3.19}$$

Полагая в последнем равенстве $x = 2l$, получим соотношение:

$$\mu(2(k+1)G(l) + G(\delta)) - \mu(2(k+1)G(l)) = -\frac{1}{2(n+1)}\int\limits_{2l-\delta}^{2l} \frac{B_2(\xi)}{g(\xi)} \stackrel{def}{=} C_2 \tag{3.20}$$

Таким образом, мы получили систему уравнений (3.18), (3.20) относительно неизвестных $\mu(2(k+1)G(l))$, $\mu(2(k+1)G(l) + G(\delta))$, которая решается последовательно индукцией по k. Решением этой системы будут функции:

$$\mu(2(k+1)G(l)) = (k+1)C_1 + (k+1)C_2 + \varphi(0) \tag{3.21}$$

$$\mu(2(k+1)G(l) + G(\delta)) = (k+1)C_1 + (k+2)C_2 + \varphi(0) \tag{3.22}$$

Подставляя (3.21) и (3.22) соответственно в (3.17) и в (3.19), будем иметь:

$$\mu(2kG(l) + G(\delta) + G(x)) = -\frac{1}{2n}\int\limits_0^{x} \frac{B_1(\xi)}{g(\xi)}d\xi - \frac{k}{2n}\int\limits_0^{2l-\delta} \frac{B_1(\xi)}{g(\xi)}d\xi - \frac{k+1}{2(n+1)}\int\limits_{2l-\delta}^{2l} \frac{B_2(\xi)}{g(\xi)}d\xi + \varphi(0)\ , \tag{3.23}$$

$$\mu(2kG(l)+G(\delta)+G(x)) = -\frac{1}{2(n+1)}\int\limits_{2l-\delta}^{x} \frac{B_2(\xi)}{g(\xi)}d\xi - \frac{k+1}{2n}\int\limits_0^{2l-\delta} \frac{B_1(\xi)}{g(\xi)}d\xi - \frac{(k+1)}{2(n+1)}\int\limits_{2l-\delta}^{2l} \frac{B_2(\xi)}{g(\xi)}d\xi + \varphi(0) \tag{3.24}$$

Если же положить в них δ равным нулю и $2l$, то после нсложных упрощений получается формула, совпадающая с (2.15) при $T = 2nG(l)$ и $T = 2(n+1)G(l)$ соответственно.

3.5. Единственность. При $p > 1$ рассматриваемый функционал является сильно выпуклым, поэтому единственность минимизирующей функции в этом случае доказывается, с помощью неравенства Минковского, также как в разделе 1. При $p = 1$ функционал имеет, помимо построенной минимизирующей функции и другие. Например, в качестве таковой можно взять функцию

$$\mu'(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2n}\frac{B_1(G^{-1}(t))}{g(t)},\ 0 \le t \le G(2l-\delta) \\ -\frac{1}{2(n+1)}\frac{B_2(G^{-1}(t))}{g(t)},\ G(2l-\delta) \le t \le 2G(l) \\ 0,\ 2G(l) \le t \le T \end{cases}$$

или, если проинтегрировать:

$$\mu(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2n}\int\limits_0^t \frac{B_1(G^{-1}(\tau))}{g(\tau)}d\tau,\ 0 \le t \le G(2l-\delta) \\ -\frac{1}{2(n+1)}\int\limits_{G(2l-\delta)}^{t} \frac{B_2(G^{-1}(\tau))}{g(\tau)}d\tau,\ G(2l-\delta) \le t \le 2G(l) \\ 0,\ 2G(l) \le t \le T \end{cases} \tag{3.25}$$

4. Свойства решения.

Отметим некоторые следствия из Леммы о поточечном инфимуме.

Следствие 1. *Пусть* $T = 2(n+1)G(l)$ *и* $p > 1$. *Предположим, что* $\rho(t)$ *есть периодическая функция с периодом* $2G(l)$, *определенная на интервале* $[0, T]$ *и удовлествворяющая почти всюду на этом интервале условию*

$$0 < a \le \rho(t) \le A \ . \tag{4.1}$$

Тогда минимум интегралов

$$\int\limits_0^T |\mu'(t)|^p dt \tag{4.2}$$

и

$$\int\limits_0^T \rho(t)|\mu'(t)|^p dt \tag{4.3}$$

достигается на одной и той же функции $\mu_0(t)$ *при наличии условий связи*

$$\sum_{k=0}^{n} \mu_k(G(x)) = -\frac{1}{2}B(x) \tag{4.4}$$

Доказательство. Введем обозначение $\rho(2kG(l) + G(x)) = \rho_k(G(x))$, $x \in [0, 2l]$. В силу периодичности $\rho_k(G(x)) \equiv \tilde{\rho}(G(x))$. Пользуясь этим, перепишем интеграл (4.3) в виде

$$\int\limits_0^{2l} \frac{1}{g(x)} \sum_{k=0}^{n} \rho_k(G(x))|\mu_k'(G(x))|^p dx = \int\limits_0^{2l} \frac{\tilde{\rho}(G(x))}{g(x)} \sum_{k=0}^{n} |\mu_k'(G(x))|^p dx \ .$$

Применяя к полученному интегралу лемму о поточечном инфимуме, получим, что его минимизация сводится к минимизации той же самой суммы, что и для интеграла (4.2), причем с теми же самыми условиями связи. **Следствие 1 доказано.**

Возникает вопрос: что будет, если отказаться от условия периодичности функции $\rho(t)$? В случае, если функция $\rho(t)$ не является периодической, но все остальные условия следствия выполнены, лемма о поточечном инфимуме сводит задачу минимизации интеграла (4.3) к минимизации суммы

$$\sum_{k=0}^{n} \rho_k(G(x))|\mu_k'(G(x))|^p$$

с условиями связи (4.4) (мы предполагаем, что $p > 1$). И решением этой задачи будет функция:

$$\mu(2kG(l) + G(x)) = \varphi(0) - \frac{1}{2}\int\limits_0^x \frac{B(\xi)}{g(\xi)} \frac{1}{[\rho(2kG(l) + G(\xi))]^{1/(p-1)}} \frac{1}{S(\xi)} d\xi -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2l} \frac{B(\xi)}{g(\xi)} \frac{1}{S(\xi)} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{[\rho(2iG(l) + G(\xi))]^{1/(p-1)}} d\xi \tag{4.5}$$

где

$$S(x) \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{[\rho_k(G(x))]^{1/(p-1)}} \ .$$

Из этой формулы видно, что в рассматриваемой ситуации оптимальное управление уже зависит от индекса $p > 1$. Однако, учитывая условие (4.1), наложенное на функцию $\rho(t)$, имеют место следующие оценки:

1. Оценка сверху:

$$|\mu(2kG(l)+G(x))| \le |\varphi(0)| + \frac{1}{2(n+1)}\int\limits_0^x \frac{|B(\xi)|}{g(\xi)}d\xi + \frac{k+1}{2(n+1)}\int\limits_0^{2l}\frac{|B(\xi)|}{g(\xi)}d\xi \tag{4.6}$$

2. Оценка снизу, полученная с использованием неравенства $|a-b| \ge ||a|-|b||$:

$$|\mu(2kG(l)+G(x))| \ge |\varphi(0)| - \frac{1}{2(n+1)}\int\limits_0^x \frac{|B(\xi)|}{g(\xi)}d\xi - \frac{k+1}{2(n+1)}\int\limits_0^{2l}\frac{|B(\xi)|}{g(\xi)}d\xi \tag{4.7}$$

Отметим, что эти оценки выполняются для любого $p>1$ и любой функции $\rho(t)$, удовлетворяющей условию (4.1).

Таким образом можно сфурмулировать еще одно

Следствие 2. *Пусть $T=2(n+1)G(l)$, и почти всюду на интервале $[0,T]$ выполнена оценка (4.1). Тогда функция, минимизирующая интеграл (4.3) при $p>1$, задается формулой (4.5). Кроме того, для любого $p>1$ и любой функции $\rho(t)$, удовлетворяющей почти всюду условию (4.1), справедливы оценки (4.6) и (4.7).*

Рассмотрим теперь случай, когда время T не является кратным $2G(l)$, считая при этом, что весовая функция $\rho(t)$ удовлетворяет условиям, наложенным на нее в следствии 1 (в частности, $\rho(t)$ ограничена и периодична).

Интеграл (4.3) имеет в рассматриваемом случае вид

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_0^{2l-\delta}\frac{\rho_k(G(x))|\mu_k'(G(x))|^p}{g(x)}dx + \sum_{k=-1}^{n-1}\int\limits_{2l-\delta}^{2l}\frac{\rho_k(G(x))|\mu_k'(G(x))|^p}{g(x)}dx \tag{4.8}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $x\in[0,\,2l-\delta]$. В силу периодичности функции $\rho(t)$ с периодом $2G(l)$ при любом $k=\overline{0,\,n-1}$ выполняется соотношение:

$$\rho_k(G(x)) \equiv \rho(2kG(l)+G(\delta)+G(x)) = \tilde\rho_1((G(\delta)+G(x))\ .$$

Выражение $G(\delta)+G(x)$, совпадающее с аргументом рассматриваемой функции, принимает значения в интервале $[G(\delta),\,2G(l)]$.

Если $x\in[2l-\delta,\,2l]$, то при $k=-1$ выражение $G(\delta)+G(x)-2G(l)$ принимает значения в интервале $[0,\,G(\delta)]$. Поэтому

$$\rho_k(G(x)) \equiv \rho(2kG(l)+G(\delta)+G(x)) = \tilde\rho_2(G(\delta)+G(x))$$

для любого $k=\overline{-1,\,n-1}$.

С учетом этих замечаний формулу (4.8) можно переписать в виде:

$$\int\limits_0^{2l-\delta}\frac{\tilde\rho_1(G(x)+G(\delta))}{g(x)}\sum_{k=0}^{n-1}|\mu_k'(G(x))|^p dx+$$
$$+\int\limits_{2l-\delta}^{2l}\frac{\tilde\rho_2(G(x)+G(\delta))}{g(x)}\sum_{k=-1}^{n-1}|\mu_k'(G(x))|^p dx\ . \tag{4.9}$$

Применяя к этим интегралам Лемму о поточечном инфимуме 2, получим, что для интегралов (4.2) и (4.3) задача сводится к минимизации одинаковых сумм с одинаковыми дополнительными условиями связи. Таким образом, справедливо следующее обобщение Следствия 1:

Следствие 3. *Пусть $T=2(n+1)G(l)+\Delta$. Предположим, что $\rho(t)$ есть периодическая функция с периодом $2G(l)$, определенная на интервале $[0,T]$ и удовлетворяющая почти всюду на этом интервале условию (4.1). Тогда минимум интегралов (4.2) и (4.3) при $p>1$ и наличии условий связи (4.4) достигается на одной и той же функции $\mu_0(t)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. //Москва, Факториал Пресс, 2002
2. *Ильин В. А.* Волновое уравнение с граничным управлением на одном конце при закрепленном втором конце. //Дифференциальные уравнения, 1999, т. 35, N 12, с. 1640-1659
3. *Ильин В. А.* Граничное управление процессом колебаний на одном конце при закрепленном втором конце в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией. //Дифференциальные уравнения, 2000, т. 36 N 12, с. 1670-1686
4. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Оптимизация граничных управлений колебаниями струны. //УМН 2005, т. 60, N 6, с. 89-114
5. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Минимизация интеграла от модуля производной граничного управления, возведенного в произвольную степень $p \geq 1$
6. *Ильин В. А.* О граничном управлении процессом, описываемым уравнением $k(x)[k(x)u_x(x,t)]_x - u_{tt}(x,t) = 0$. //ДАН, 2002, т. 386, N 2, с. 156-159

СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, с. 138–146

УДК 517.956.2

ИССЛЕДОВАНИЕ АНАЛОГА ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ СЛУЧАЯ КОГДА ЛИНИЯ ПЕРЕМЕНЫ ТИПА НЕ СОВПАДАЕТ С ОСЯМИ КООРДИНАТ

© 2006 г. Н. О. Таранов

nicktaranov@mail.ru

Кафедра Общей математики

Введение. Теория уравнений смешанного типа имеет сравнительно недолгую историю. Первыми глубокими исследованиями в этой области явились работы Ф. Трикоми, опубликованные в двадцатых годах нашего столетия. Для уравнения

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

которое сейчас называют уравнением Трикоми, он изучил следующую основную краевую задачу (задачу Трикоми). Пусть область D ограничена кривой Жордана σ, лежащей в верхней полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$ и $B(1,0)$ оси x, расположенной в верхней полуплоскости, и отрезками характеристик AC и BC уравнения, выходящими из этих точек и пересекающимися в точке C нижней полуплоскости. Требуется найти решение уравнения (1), регулярное в D и удовлетворяющее условиям: $u(x,y) = \varphi(x,y)$ на σ и $u(x,y) = \psi(x)$ на AC. Задача важна для аэродинамики больших скоростей. Она описывает плоскопараллельное течение сжимаемой среды при трасзвуковых скоростях. Перемене типа уравнения соответствует переход через скорость звука.

Трикоми доказал существование и единственность решения этой задачи при определенных дополнительных требованиях относительно поведения частных производных u_x и u_y, гладкости функции ψ и характера дуги σ. Исследования Трикоми были продолжены в тридцатых годах Чибрарио и Геллерстедтом.

М. А. Лаврентьев для упрощения исследования краевых задач для уравнения смешанного типа предложил исследовать модельное уравнение

$$\operatorname{sgn} y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{2}$$

Подробное исследование задачи Трикоми и ее различных обобщений для уравнения (2) провел А. В. Бицадзе при самых общих предположениях о характере дуги σ, ограничивающей область D в верхней полуплоскости. А. В. Бицадзе решил также для уравнения (2) задачу Трикоми в многосвязной области, а также задачу, в которой на кривой σ задана $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$. В данной работе используются обозначения, введенные А. В. Бицадзе в работе . М. М. Смирнов исследовал некоторые обобщения задачи Трикоми, а также некоторые родственные задачи (4).

Для задачи Трикоми имеет место принцип экстремума: решение задачи Трикоми, обращающееся в нуль на характеристике AC, не может достигать на открытом отрезке AB линии вырождения типа ни положительного максимума, ни отрицательного минимума. Этот принцип впервые был сформулирован А. В. Бицадзе в случае уравнения (2). Несколько позднее он был установлен для уравнения Трикоми (1) в работе Жермена и Баде. В данной работе получено обобщение принципа экстремума для задачи (2).

Решение задачи Трикоми для уравнения (2) в виде ряда, а также интегральные представления решений в некоторых специальных областях было получено Е.И. Моисеевым в работе [1]. При этом использовались результаты работы [2], касающиеся системы синусов специального вида, входящих в ряд, представляющий решение в области эллиптичности. Далее будет приведено решение в виде ряда аналога задачи (2) в случае наклона линии вырождения к оси координат для сектора окружности в области эллиптичности, по аналогии с [1].

Итак, в данной работе исследуется задача, обобщающая задачу (2), для случая несовпадения линии перемены типа с осью координат.

Постановка задач.

Задача 1**.**

Рассмотрим смешанную краевую задачу внутри следующей области D.
Область является объединением эллиптической части D^+, внутри которой задано уравнение $\Delta u = 0$ и гиперболической части D^-, где задано уравнение $u_{yy} = u_{xx}$, а также линии перемены типа. Линия перемены типа - это отрезок единичной длины проходящий через точку A начала координат под углом $\alpha \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ к оси Ox. Эллиптическая часть ограничена линией перемены типа и кривой σ, пересекающимися в точке B. Гиперболическая часть ограничена двумя характеристиками $AC = \{(x, y) : y = -x\}$ и $BC = \{(x, y) : y = x - \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\}$ и линией перемены типа. Будем требовать двукратную непрерывную
дифференцируемость решения внутри областей, однократную дифференцируемость на линии перемены типа и непрерывность на границе ∂D области D. Решение $u(x, y)$ должно
удовлетворять уравнениям в соответствующих областях. Граничные условия: 0 характеристике A, функция φ из класса Гёльдера с показателем $0 < p < 1$ на дуге σ.

Будем называть задачу сопряжённой к задаче 1, если 0 задан не на характеристике AC, а на характеристике BC.

Рис.1 Область D для задачи 1.

Задача 1^***.**

Отличается от предыдущей эллиптической частью области и граничными условиями. В этой задаче область эллиптичности ограничена осью Oy с одной стороны и линией перемены типа с другой. Получившийся угол замкнут частью σ_1 единичной окружности с центром в начале координат, пересекающей Oy в точке $D(0, 1)$, а линию перемены типа в точке B. На дуге σ_1 задана функция f из класса Гёльдера с показателем $0 < p < 1$. На отрезке AB задан 0.

Рис.1 Область D для задачи 1^*.

Данная задача является частным случаем задачи 1. То же касается и сопряжённых задач.

Принцип экстремума для задачи 1.

Теорема. *Положительный максимум и отрицательный минимум нетривиального решения задачи 1 достигается на кривой σ.*

Доказательство.

Рассмотрим поведение решения в D^-.

Если экстремальное значение $u(x, y)$ достигается в D^-, то оно достигается и в некой внутренней точке отрезка $AB = \{(x, y) : y = x \operatorname{tg} \alpha, x \in (0, \cos \alpha)\}$.

В D^- общее решение даётся формулой Даламбера:

$$u(x, y) = \varphi(x + y) + \psi(x - y)$$

Из граничных условий:

$$u(x, -x) = \varphi(0) + \psi(2x) = 0$$

$$\Longrightarrow$$

$$u(x, y) = f(x + y)$$

То есть значения решения на линиях $x + y = \mathrm{const}$ совпадают. Очевидно, что все возможные значения $(x + y)$ для различных точек $(x, y) \in D^-$ присутствуют на AB.

Рассмотрим решение в эллиптической части.

В силу принципа экстремума для уравнения Лапласа, положительный максимум (отрицательный минимум) $u(x, y)$ достигается на границе области эллиптичности. Он может достигаться либо на σ либо на линии перемены типа AB.

Рассмотрим случай положительного максимума. Пусть он достигается в точке M^+_{max} внутри AB.
Тогда, из условий сшивания, на линии перемены типа будет выполняться:

$$u(x,y)=\varphi(x+y).$$

А значит

$$u_x=u_y=K.$$

В точке M^+_{max} производная по направлению линии перемены типа $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}=0$, $\vec{l}=\{1,\operatorname{tg}\alpha\}$

Приведем принцип *Зарембы-Жиро*:

Пусть $u(x,y)$ - регулярное нетривиальное в области D^* решение уравнения

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_1\frac{\partial u}{\partial y}+c_1u=0$$

с положительно определённой внутри D^* формой $ady^2+2bdxdy+cdx^2$.
Если в точке P границы Γ^* области D^* функция $u(x,y)$ принимает своё экстремальное значение, а контур Γ^* такой, что через точку P можно провести кружок K, лежащий в области D^*, то в указанной точке производная по направленному к центру кружка радиусу $\vec{r}$ отлична от нуля; причём в случае максимума $\frac{\partial u}{\partial \vec{r}}<0$, а в случае минимума $\frac{\partial u}{\partial \vec{r}}>0$.

В нашем случае производной по направлению к центру кружка будет

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{r}}=\left\{-1,\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right\}\cdot\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right\}=\left\{-1,\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right\}\cdot\{K,K\}=K\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}-1\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}=K(1+\operatorname{tg}\alpha)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{r}}=\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}\cdot\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}-1\right)$$

Для нашей задачи это значит, что $\frac{\partial u}{\partial \vec{r}}=0$, что невозможно в силу принципа Зарембы-Жиро. В случае $\alpha=0$ получаем тот же результат т.к. в этом случае производная по направлению к центру кружка совпадает с частной производной по y. Для отрицательного минимума рассуждения проводятся аналогично.

Принцип экстремума для задачи, сопряженной к 1.

Теорема *Положительный максимум и отрицательный минимум нетривиального решения задачи, сопряжённой к 1, достигается на кривой σ.*

Доказательство. Рассмотрим поведение решения в D^-. Если экстремальное значение $u(x,y)$ достигается в D^-, то оно достигается и в некой внутренней точке отрезка $AB=\{(x,y):y=x\operatorname{tg}\alpha, x\in(0,\cos\alpha)\}$.

Перенесем начало координат в точку пересечения характеристики BC с осью Oy. Это соответствует замене переменной $\hat{y}=y-\sqrt{2}\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})$.

В D^- общее решение даётся формулой Даламбера:

$$u(x,\hat{y})=\varphi(x+\hat{y})+\psi(x-\hat{y})$$

Из граничных условий:

$$u(x,x)=\varphi(2x)+\psi(0)=0$$

$$\Longrightarrow$$

$$u(x,y)=f_1(x-\hat{y})=f(x-y)$$

То есть значения решения на линиях $x-y=\text{const}$ совпадают. Очевидно, что все возможные значения $(x-y)$ для различных точек $(x,y)\in D^-$ присутствуют на AB.

Рассмотрим решение в эллиптической части.
В силу принципа экстремума для уравнения Лапласа, положительный максимум (отрицательный минимум) $u(x,y)$ достигается на границе области эллиптичности. Он может достигаться либо на σ либо на линии перемены типа AB.
Рассмотрим случай положительного максимума. Пусть он достигается в точке M^+_{max} внутри AB.
Тогда, из условий сшивания, на линии перемены типа будет выполняться:

$$u(x,y)=\psi(x-y).$$

А значит

$$u_x=K, u_y=-K.$$

В точке M^+_{max} производная по направлению линии перемены типа $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}=0$, $\vec{l}=\{1,\operatorname{tg}\alpha\}$

Аналогично предыдущей теореме, ищем производную по направлению к центру кружка, чтобы воспользоваться принципом *Зарембы-Жиро.*

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{r}}=\{-1,\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\}\cdot\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right\}=\left\{-1,\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right\}\cdot\{K,-K\}=-K\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+1\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}=K(1-\operatorname{tg}\alpha)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{r}}=-\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\cdot\frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}\cdot\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+1\right)$$

Это значит, что $\frac{\partial u}{\partial \vec{r}}=0$, что невозможно в силу принципа Зарембы-Жиро. В случае $\alpha=0$ получаем тот же результат т.к. в этом случае производная по направлению к центру кружка совпадает с частной производной по y. Для отрицательного минимума рассуждения проводятся аналогично.

Решение задач для случая сектора круга.

Разделение переменных в эллиптической части.
Будем искать частные решения в виде $u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$. После подстановки этого выражения в исходное уравнение получим для $R(r)$:

$$\begin{aligned}&r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda R(r);\\&R(0)=0;\\&R(1)=1.\end{aligned}$$

Для $\Theta(\theta)$ получим:

$$\begin{aligned}&\Theta''(\theta)+\lambda\Theta(\theta)=0;\\&\Theta(\frac{\pi}{2})=0;\\&\Theta(-\frac{\pi}{2})=0.\end{aligned}$$

Выясним знак собственных значений λ :

1) Пусть $\lambda < 0$, тогда получим $R = D_1 \cos(\sqrt{\lambda} \cdot \ln r) + D_2 \sin(\sqrt{\lambda} \cdot \ln r)$. Даже если доопределить эту функцию в нуле, она не будет непрерывна.

2) Пусть теперь $\lambda = 0$, тогда $R = \mathrm{const}$. Получаем противоречие с граничными условиями.

3) При $\lambda > 0$ получаем $R = r^{\sqrt{\lambda}}$ и . Нетрудно убедиться, что $\Theta(\theta)$ можно представить в виде $\Theta(\theta) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin(\sqrt{\lambda}\theta + \chi)$, где χ - некоторый угол, зависящий от A и B.

Нахождение частных решений.

В области эллиптичности ищем частные решения в виде $u_n(r, \theta) = r^{\alpha^n} \sin(\alpha_n \theta + \beta_n)$.

Очевидно, что если в гиперболической части искать решение в виде $C_n(x + y)^{\alpha_n}$, то граничное условие на характеристике будет выполнено.

На линии перемены типа должно выполняться условие $u_x = u_y$. В полярной системе координат это условие примет вид $u_r \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{r} u_\theta \cos(\alpha - \frac{\pi}{4})$. Подставив в это решение выражение для частного решения, получим:

$$\cos(\alpha_n \alpha + \beta_n - \alpha + \frac{\pi}{4}) = 0.$$

Из условия $u|_{AB} = 0$ получим: $\sin \alpha_n \frac{\pi}{2} + \beta_n = 0$.

$$\Longrightarrow$$

$$\alpha_n = \frac{\pi n - \pi/4 - \alpha}{\pi/2 - \alpha},$$
$$\beta_n = -\frac{\pi}{2} \cdot \alpha_n.$$

В области гиперболичности будем искать частные решения в виде $C_n(x+y)^{\alpha_n}$. Из условия равенства решений на линии перемены типа получим:

$$C_n = \frac{\sin(\alpha_n(\alpha - \pi/2))}{(\sqrt{2}\cos(\pi/4 - \alpha))^{\alpha_n}}$$

$$\Longrightarrow$$

$$u_n(x, y) = \left[\frac{x + y}{\sqrt{2}\cos(\pi/4 - \alpha)}\right]^{\alpha_n} \cdot \sin(\alpha_n(\alpha - \pi/2)).$$

Очевидно, что выражения для решения в области эллиптичности и в области гиперболичности удовлетворяют уравнениям в своих областях.

Также нетрудно проверить выполнение условия

$$\lim_{G \to M_0} \frac{\partial u_{n,g}}{\partial \vec{n}}(G) = \lim_{E \to M_0} \frac{\partial u_{n,g}}{\partial \vec{n}}(E),$$

где $u_{n,g}$ - частное решение в области гиперболичности, G - точка в этой области, $u_{n,e}$ - частное решение в области эллиптичности, E - точка в этой области, M_0 - точка на линии перемены типа, а $\vec{n}$ - единичная нормаль к этой линии.

Представление решения в виде ряда.

Выпишем формальное решение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot r^{\alpha_n} \cdot \sin\left[\alpha_n(\theta - \frac{\pi}{2})\right], (x,y) \in D^+;$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \left[\frac{x+y}{\sqrt{2}\cos(\pi/4-\alpha)}\right]^{\alpha_n} \cdot \sin\left[\alpha_n(\alpha - \frac{\pi}{2})\right], (x,y) \in D^-.$$

где f_n - коэффициенты биортогонального разложения функции f по системе $\sin\alpha_n(\theta-\frac{\pi}{2})$.

Исследуем на сходимость ряд в области эллиптичности с использованием статьи [2]. В статье рассматриваются функции вида $\sin[(n+\beta/2)\theta+\gamma/2], \theta \in [0,\pi]$. На отрезке $[0,\pi]$ верны выражения для коэффициентов биортогонального разложения

$$f_n = \int_0^{\pi} f(\theta)h_n(\theta)d\theta, h_n(\theta) = \frac{2}{\pi}\frac{(2\cos\theta/2)^{\beta}}{(\operatorname{tg}\theta/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^{n}(\sin k\theta)B_{n-k},$$
$$B_l = \sum_{m=0}^{l} C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{\gamma/\pi-l}^{m}(-1)^{l-m}, C_l^n = \frac{l(l-1)\dots(l-n+1)}{n!}.$$

Преобразуем синусы из частного решения в области эллиптичности к эквивалентной системе функций так, чтобы θ менялся от 0 до π. Получим: $(-1)^n \cdot \sin[(n-1/4-\alpha/\pi)\theta+\pi/4+\alpha]$. В обозначениях работы [2]:

$$\beta = -1/4-(2\alpha/\pi), \gamma = \pi/2+\alpha. \gamma \in (0,\pi) \subset (0,2\pi), \beta+\gamma/\pi = 0.$$

Коэффициенты f_n ограничены (Сл-е теоремы 1 из статьи [2]). Следовательно, по теореме 2 (из [2]) и из признака равномерной сходимости Дирихле - Абеля, ряд сходится равномерно при $(r,\theta) \in [0,1] \times [\alpha, \pi/2]$.

Гармоничность в D^+ функции, представленной рядом можно проверить почленным дифференцированием.

Исследуем ряд в области гиперболичности на сходимость:

Очевидно, что при $\forall x,y : r=1, \theta=\alpha$, значение $(x+y)$ будет больше, чем при любых $x,y : (x,y) \in D^-$. Можно задать точку $(x,y) : r=1, \theta=\alpha$ как ту из точек пересечения единичной окружности с центром в A и прямой $y = x-\sqrt{2}\sin(\pi/4-\alpha)$, которая имеет наибольшую координату x.

Из этого представления вытекает, что для точки $(x,y) : r=1, \theta=\alpha$ выполняется $(x+y) = \sqrt{2}\cos(\alpha-\pi/4)$. Значит, ввиду ограниченности коэффициентов f_n, ряд для области гиперболичности сходится равномерно для $0 < r \leq 1-\epsilon, \epsilon > 0$. Сходимость вплоть до $r=1$ следует из 1-ого признака Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.

Продифференцированные ряды также будут сходиться равномерно. Таким образом, в том, что представленная рядом функция удовлетворяет уравнению в своей области можно убедиться почленным дифференцированием.

Существование решения в общем случае.

Вспомогательная задача.

Конформно отобразим область эллиптичности на полукруг следующим образом.

Рис.3 Конформное отображение

Получим задачу для уравнения Лапласа с функцией φ_1, заданной на полуокружности и наклонной производной, заданной на линии $A'B'$.

$$\begin{aligned}
&\Delta u_1 = 0,\\
&u_1|_\gamma = \varphi_1,\\
&(\frac{\partial u_1}{\partial y} - k\frac{\partial u_1}{\partial x})|_{y=0} = 0, k \in (-\infty, +\infty).
\end{aligned}$$

Такие значения k соответствуют всем направлениям наклонной производной в верхней полуплоскости $y \geq 0$ кроме направлений вдоль оси абсцисс. γ — это дуга окружности, ограничивающая область в верхней полуплоскости. Эта задача решена в [1].

Решение:

$$u_1(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \varphi_n \sin(n\theta + \delta),$$

где φ_n - коэффициенты биортогонального разложения. $\delta = \operatorname{arcctg}(k)$. Ряд сходится равномерно при $k \in (-\infty, +\infty)$.

Приведем полученную в [1] интегральную форму решения этой задачи, являющуюся результатом суммирования ряда для решения.

$$u_1(z) = Re\frac{1}{\pi i}\int_\gamma \varphi_1(\arg t)\left[\frac{1}{t-z} - \frac{1}{1-tz}\right] \times \left[\frac{(1-z)(1+t)}{(1+z)(1-t)}\right]^{2\operatorname{arcctg}(k)/\pi}\left(\frac{1+z}{1+t}\right)dt,$$

Так как для функции, заданная на кривой, перешедшей в полукруг при отображении, выполнено условие Гёльдера, из работы [1]следует, что решение задачи на линии $A'B'$, где задана наклонная производная, будет дважды дифференцируемым.

Задача 1 и сопряжённая к ней.

В случае задачи 1, после отображения области эллиптичности на полукруг, для вспомогательной задачи будет выполняться $k \in (0, +\infty)$ в случае задачи 1 и $k \in (-\infty, 0)$ в случае сопряжённой задачи.

Теперь выполним обратное конформное отображение, т.е. отобразим полукруг и решение вспомогательной задачи, заданное на полукруге в исходную область.

Чтобы доказать существование решения задачи 1 и сопряжённой осталось доказать существование подходящёй функции в области гиперболичности D^-, удовлетворяющей уравнению в своей области и условиям сшивания с решением в области эллиптичности.

Пусть $u_e(r,\theta)$ - результат отображения решения вспомогательной задачи, $\Phi(r) = u_e(r,\alpha)$.

Теперь, аналогично тому, как это делает А. В. Бицадзе (см. [5]) подберем выражения для решения в гиперболической части. Нетрудно убедиться, что выражениями для решения в области гиперболичности будут:

$$\Phi\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}\cos(\pi/4-\alpha)}\right)$$

для задачи 1 и

$$\Phi\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}\sin(\pi/4-\alpha)}\right)$$

для сопряжённой задачи.

Итак, можно утверждать следующее.

Теорема. *Решение задачи* 1 *существует.*

Теорема. *Решение задачи, сопряжённой к* 1, *существует.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Е. И. Моисеев.* Решение задачи Трикоми в специальных областях. Дифференциальные уравнения. 1990. N1. С. 93-103.
2. *Е. И. Моисеев.* О базисности одной системы синусов. Дифференциальные уравнения. 1987. N1. С. 177-179.
3. *А. В. Бицадзе.* Некоторые классы уравнений в частных производных. Монография: Наука, 1981.
4. *М. М. Смирнов.* Уравнения смешанного типа. Наука, 1970.
5. *М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат.* Методы теории функций комплексного переменного. Наука, 1973.

СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, с. 147–154

УДК 517.956.2

ОЦЕНКИ ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ ДЛЯ СЛОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ КОДОВЫХ ФУНКЦИЙ В ОДНОМ КЛАССЕ СХЕМ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

© 2006 г. **А. Е. Шиганов**

df-dx@mail.ru

Кафедра Математической кибернетики

Введение. В настоящей работе изучается поведение функции Шеннона для сложности одного класса схем из функциональных элементов на уровне оценок высокой степени точности.

Асимптотические оценки на функции Шеннона для разных классов булевых схем были впервые установлены в работах О.Б. Лупанова. В частности, для функции Шеннона $L(n)$, связанной с классом схем из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ О.Б. Лупановым в работе [1] была установлена асимптотика $2^n/n$, которая имела относительную погрешность $O(\log n/n)$. Асимптотический подход к исследованию булевых схем также применялся в работах многих других авторов. Исследование оценок высокой степени точности, то есть нахождение не менее двух членов асимптотического разложения функции Шеннона, началось с работ С.А. Ложкина (см., например, [2], [3] и [4]). В настоящее время с использованием результатов работы [3] можно получить асимптотическое значение для функции Шеннона $L(n)$ с точностью $O(\log\log n/n)$.

В данной работе исследуется синтез класса кодовых функций – частного случая функций, связанных с автоматными языками (см., например, [4]).

1. Основные понятия и формулировка полученных результатов. Пусть $E = \{0,1\}$, E^n – n-мерный единичный куб и $(x_1,\ldots,x_n)$ – связанный с ним набор булевых переменных. На наборах E^n будем рассматривать лексикографический порядок, который задается нумерацией $\nu : E^n \to [0, 2^n)$ такой, что

$$\nu(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \alpha_1 2^{n-1} + \alpha_2 2^{n-2} + \cdots + \alpha_n 2^0.$$

Обозначим через P_2 множество всех функций алгебры логики от булевых переменных $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, а через $P_2(n)$ – множество функций из P_2 от переменных $x_1,\ldots,x_n$.

Пусть $B = \{E_1,\ldots,E_b\}$ – произвольный полный базис, где элемент E_i имеет k_i, $k_i \geqslant 1$, входов, вес p_i, $p_i > 0$, и реализует функцию, существенно зависящую от всех своих переменных. Приведенным весом элемента E_i называется величина $\rho_i = p_i/(k_i-1)$, определенная при $k_i > 1$. Пусть $\rho_B = \min\limits_{k_i \geqslant 2} \rho_i$ – приведенный вес базиса B. Обозначим $B' = \{E_i : \rho_i = \rho_B\}$, $B'' = B \backslash B'$.

Базис B называется *симметричным*, если множество B' состоит из элементов, которые реализуют либо только линейные функции, либо только конъюнкции переменных, либо только дизъюнкции переменных [2]. Пусть $\kappa_B = 1$ в случае симметричного базиса B и $\kappa_B = 0$ иначе.

Пусть $\mathcal{U}_B(n)$ – множество схем из функциональных элементов (СФЭ) в базисе B от переменных $x_1,\ldots,x_n$, реализующих одну булеву функцию. Введем класс СФЭ $\mathcal{U}_B(n,t)$, как множество схем из $\mathcal{U}_B(n)$, в которых могут ветвится не более t вершин. В дальнейшем будем рассматривать случай, когда $t = t(n) \geqslant n$.

Две СФЭ Σ_1 и Σ_2 называются *эквивалентными*, если они реализуют равные системы булевых функций. Сложностью $L(\Sigma)$ СФЭ Σ называется сумма весов ее функциональных элементов, а сложность $L(f)$ функции f, $f \in P_2(n)$, определяется, как $L(f) = \min L(\Sigma)$, где минимум берется по всем Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}_B(n,t)$, Σ реализует f. Для $n = 1, 2, \ldots$ введем функцию

$$L_B(n,t) = \max_{f \in P_2(n)} L(f),$$

которая называется функцией Шеннона для сложности реализации булевых функций в рассматриваемом классе СФЭ.

Для конечного алфавита A, через A^* обозначается множество всех конечных слов в A. Пусть C – конечное подмножество множества E^* и $|C|>1$. Положим λ_C – максимальная длина слов из C. Обозначим через $\widehat{C}$ множество слов вида $a'aa''$, где $a',a''\in E^*$, $|a'|<\lambda_C$, $|a''|<\lambda_C$, $a\in C^*$. Пусть $q_C(l)$ – число различных слов из $\widehat{C}$ длины l. Из дальнейшего рассмотрения исключается вырожденный случай $q_C(l)=O(1)$, и тогда в силу [6], имеет место равенство $q_C(l)=\sigma_C\,l+O(1)$, где σ_C – константа, зависящая от C, $0<\sigma_C\leqslant 1$.

Пусть $a\in E^*$. Слово $\overline{a}$, полученное из a заменой 0 на 1 и обратно, будем называть *отрицанием* a.

Функция алгебры логики f, $f\in P_2(n)$, называется *кодовой функцией* для кода C, $C\subset E^*$, если вектор-столбец ее значений на всех 2^n наборах единичного куба E^n представляет собой некоторое слово из множества $\widehat{C}$ длины 2^n.

Обозначим через Q_C класс всех кодовых функций для кода C и пусть $Q_C(n)=P_2(n)\cap Q_C$. Очевидно, что $|Q_C(n)|=q_C(2^n)$. Функцию Шеннона для сложности реализации кодовых функций обозначим через $L_B(Q_C(n),t)$:

$$L_B(Q_C(n),t)=\max_{f\in Q_C(n)} L(f).$$

Основной результат работы для функции Шеннона $L_B(Q_C(n),t)$ состоит в том, что если для $t=t(n)$ разность $(t(n)-n)$ по порядку не меньше, чем n, и $t(n)$ по порядку не превосходит $2^n/n^3$, то

$$L_B(Q_C(n),t)=\rho_B\frac{\log|Q_C(n)|}{\log t}\left(1+\frac{\kappa_B\log\log t\pm O(1)}{\log t}\right). \tag{1}$$

При этом в случае $C=\{0,1\}$ множество $Q_C(n)$ совпадает с $P_2(n)$, а оценка (1) принимает вид:

$$L_B(n,t)=\rho_B\frac{2^n}{\log t}\left(1+\frac{\kappa_B\log\log t\pm O(1)}{\log t}\right).$$

2. Нижняя оценка функции Шеннона. В дальнейшем с помощью буквы c и $c(B)$ с различными индексами будем обозначать абсолютные константы и константы, зависящие от базиса B, соответственно.

Известно [7], что существует не более, чем 4^q упорядоченных корневых деревьев с q ребрами.

Лемма 1. *Количество попарно неэквивалентных схем в классе $\mathcal{U}_B(n,t)$ сложности, не превосходящей L, не больше, чем $(c_7(B)t(\log t)^{-\kappa_B})^{(1/\rho_B)L+n}$.*

Доказательство. Для схемы Σ обозначим через $V(\Sigma)$ множество вершин Σ. Пусть $M(\Sigma)$ обозначает подмножество вершин $V(\Sigma)$, которые допускают ветвление. По условию $|M(\Sigma)|\leqslant t$. Пусть $V'(\Sigma)$ (соответственно $V''(\Sigma)$) – подмножество вершин из $V(\Sigma)$, связанных с элементами из B' (соответственно из B'').

Для того, чтобы задать с точностью до эквивалентности СФЭ Σ из рассматриваемого класса, достаточно

1. выбрать ориентированное корневое дерево $\mathcal{D}$ на вершинах $V'(\Sigma)\cup V''(\Sigma)$, так, что ребра $\mathcal{D}$ ориентированы к его корню, который совпадает с выходом Σ;
2. пометить вершины дерева $\mathcal{D}$ символами ФЭ из базиса B;
3. добавить к $\mathcal{D}$ изолированные вершины, помеченные $x_1,\ldots,x_n$, и выделить множество ветвящихся вершин;
4. провести оставшиеся ребра схемы Σ.

Число способов выбора дерева $\mathcal{D}$ и нанесения пометок на его вершины не превосходит $(c_1(B))^L$. Существует не более $(c_2(B))^{L+n}$ различных способов выбрать из множества $V(\Sigma)$ подмножество ветвящихся вершин.

Число r тех ребер Σ, которые не принадлежат $\mathcal{D}$, удовлетворяет неравенству

$$r \leqslant (1/\rho_B)L - c_3(B)L'' + 1,$$

где L'' – суммарная сложность функциональных элементов (ФЭ), связанных с узлами из $V''(\Sigma)$,

$$c_3(B) = \min_{E_i \in B''} \left\{ \frac{1}{\rho_B} - \frac{1}{\rho_i} \right\} > 0.$$

Обозначим через R множество тех упорядоченных пар (u, w) вершин дерева $\mathcal{D}$, на которых эти r ребер могут быть размещены (считаем, что дуга исходит из вершины u в вершину w). Для любой пары вершин (u, w) из R можно утверждать, что $u \in M(\Sigma)$, а число дуг, входящих в w, меньше, чем число входов связанного с w ФЭ.

Пусть $\kappa_B = 1$, тогда не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что множество B' содержит все различные функции из своего замыкания, зависящие не менее, чем от двух переменных. При этом возможны следующие случаи:

1. $w \in V''(\Sigma)$;
2. $w \in V'(\Sigma)$ и w либо имеет в $\mathcal{D}$ исходящее ребро, ведущее в $V''(\Sigma)$, либо является корнем $\mathcal{D}$.

Для $\kappa_B = 0$, $w \in V'(\Sigma) \cup V''(\Sigma)$. Таким образом, справедливо неравенство

$$|R| \leqslant 2t(c_4(B)L'' + 1)^{\kappa_B} L^{1-\kappa_B},$$

где $c_4(B)$ – максимальное количество входов у ФЭ из множества B''.

Число различных способов проведения тех ребер Σ, которые не принадлежат $\mathcal{D}$, не больше, чем $C^r_{|R|}$. Отсюда следует, что искомая величина оценивается сверху выражением

$$(c_5(B))^{L+n} \max_{0 \leqslant L'' \leqslant L} \left(\frac{t(L'')^{\kappa_B} L^{1-\kappa_B}}{(1/\rho_B)L - c_3(B)L'' + 1} \right)^{(1/\rho_B)L - c_3(B)L'' + 1}.$$

При $\kappa_B = 0$ значение максимума достигается при $L'' = 0$. В случае $\kappa_B = 1$ воспользуемся тем фактом, что для действительных параметров a, q при условии $a > 1$, $q > 0$, выполнено неравенство:

$$\max_{x \in [0,q]} \left(\frac{a \cdot x}{q - x} \right)^{q-x} \leqslant (c_6 a / \log a)^q.$$

Подставив в него $q = (1/\rho_B)L + 1$, $x = c_3(B)L''$, завершаем доказательство леммы.

Теорема 1. *Для* $n = 1, 2, \ldots$,

$$L_B(Q_C(n), t) \geqslant \rho_B \frac{\log |Q_C(n)|}{\log t} \left(1 + \frac{\kappa_B \log \log t - O(1)}{\log t} \right).$$

Доказательство. Из леммы 1 и обычного мощностного неравенства следует, что

$$\left(\frac{c_7(B)t}{(\log t)^{\kappa_B}} \right)^{(1/\rho_B)L_B(n,t)+n} \geqslant |Q_C(n)|,$$

откуда вытекает требуемая нижняя оценка.

3. Универсальные множества функций и их свойства. Пусть $\varphi(y_1,\ldots,y_p)$ – булева функция, существенно зависящая от всех своих переменных, а Q – некоторый класс булевых функций. Пусть $Q(n)=Q\cap P_2(n)$.

Множество функций G, $G\subseteq P_2(m)$ называется *φ-универсальным порядка m для класса Q* [5], если любая функция f, $f\in Q(m)$ может быть представлена в виде

$$f=\varphi(g_1,\ldots,g_p),$$

где $g_i\in G$ для всех $i=1,\ldots,p$.

Пусть D – разбиение множества булевских переменных $Y=\{y_1,\ldots,y_p\}$ на компоненты $Y_1,\ldots,Y_d$. Разбиение D называется *селекторным* разбиением для $\varphi(y_1,\ldots,y_p)$ [2], если для любого i, $i=1,\ldots,d$, и для любой переменной y, $y\in Y_i$ существует константа $\delta\in E$ и набор $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)\in E^p$ со следующими свойствами:

1. для всех (k,l), $1\leqslant k,l\leqslant p$, если y_k и y_l лежат в одной компоненте разбиения D, то $\alpha_k=\alpha_l$;
2. $\varphi(y_1,\ldots,y_p)=y\oplus\delta$ на множестве всех наборов β, $\beta\in E^p$, которые совпадают с α в позициях переменных $Y\backslash Y_i$.

Энтропией $H(D)$ разбиения $D=\{Y_1,\ldots,Y_d\}$ [2] называется величина

$$H(D)=-\frac{1}{|Y|}\sum_{i=1}^{d}|Y_i|\log\frac{|Y_i|}{|Y|}.$$

Величина $H(\varphi)=\min H(D)$, где минимум берется по всем селекторным для φ разбиениям D, называется *селекторной энтропией* функции φ [2].

Рассмотрим ФЭ E_j базиса B, на котором достигается приведенный вес ρ_B. Пусть натуральные числа m и s таковы, что $\lceil 2^m/s\rceil\geqslant k_j$. Положим h, p – натуральные числа, которые выбираются из условий:

$$p=h(k_j-1)+1,\quad \left\lceil\frac{2^m}{s}\right\rceil\leqslant p<\frac{2^m}{s}+(k_j-1). \tag{2}$$

Построим цепочку из h ФЭ E_j, соединенных между собой через первый вход. Полученную формулу обозначим через $\Phi_p^{(1)}(y_1,\ldots,y_p)$, а функцию, которую она реализует – через $\varphi_p^{(1)}(y_1,\ldots,y_p)$. Очевидно, что $\varphi_p^{(1)}$ существенно зависит от всех своих переменных. Заметим, что

$$L(\Phi_p^{(1)})\leqslant\rho_B p.$$

Лемма 2. *Пусть натуральные числа m, s и p таковы, что $\lceil 2^m/s\rceil\geqslant k_j$, а p удовлетворяет (2) для некоторого целого h. Тогда существует $\varphi_p^{(1)}$-универсальное множество G_1 порядка m для класса Q_C такое, что $|G_1|\leqslant pq_C(s)$.*

Доказательство. Так как функция $\varphi_p^{(1)}(y_1,\ldots,y_p)$ существенно зависит от своих переменных, то для каждого i, $i=1,\ldots,p$ найдется набор двоичных констант $\alpha_{i,1},\ldots,\alpha_{i,p}$ такой, что

$$\varphi_p^{(1)}(\alpha_{i,1},\ldots,\alpha_{i,i-1},y_i,\alpha_{i,i+1},\ldots,\alpha_{i,p})=y_i\oplus\alpha_{i,i}.$$

Единичный куб E^m можно разбить на p последовательных отрезков, соответствующих переменным $y_1,\ldots,y_p$ так, что i-ый отрезок содержит $s_i\leqslant s$ наборов, $i=1,\ldots,p$. Обозначим через $G_1^{(i)}$, $i=1,\ldots,p$ множество всех функций g из $P_2(m)$ со следующими свойствами:

1. для $\alpha_{i,i}=0$ (соответственно, для $\alpha_{i,i}=1$) столбец значений g на наборах i-ого отрезка совпадает с некоторым словом (соответственно, с отрицанием некоторого слова) длины s_i из множества $\widehat{C}$;

2. для любого j, $1 \leqslant j \leqslant p$, $j \neq i$ значения g на наборах j-ого отрезка равны $\alpha_{i,j}$.

Легко видеть, что множество $G_1 = G_1^{(1)} \cup \ldots \cup G_1^{(p)}$ является $\varphi_p^{(1)}$-универсальным порядка m для класса Q_C. При этом $|G_1| \leqslant pq_C(s)$.

Пусть базис B не является симметричным, тогда согласно [2], для любого натурального p существует формула $\Phi_p^{(0)}(y_1, \ldots, y_p)$ над B', которая реализует функцию $\varphi_p^{(0)}(y_1, \ldots, y_p)$, существенно зависящую от всех своих переменных. При этом $L(\Phi_p^{(0)}) = \rho_B p + O(1)$, $H(\varphi_p^{(0)}) \leqslant c_8(B)$.

Заметим, что так как $q_C(l) = \sigma_C\, l + O(1)$, то существует константа ξ_C, зависящая от кода C, такая, что $q_C(l) \leqslant \sigma_C\, l + \xi_C$.

Горизонтальной (вертикальной) полосой таблицы T будем называть несколько последовательных строк (соответственно, столбцов) T. Для горизонтальной полосы I и вертикальной полосы J обозначим через $T\langle I, J\rangle$ таблицу, которая определяется пересечением полос I и J.

Лемма 3. *Пусть натуральные числа s, m и p удовлетворяют условиям $s < 2^m$,*

$$p = \left\lceil \frac{2^m}{s - c_8(B)} \right\rceil. \tag{3}$$

Тогда существует $\varphi_p^{(0)}$-универсальное множество G_0 порядка m для класса Q_C такое, что $|G_0| \leqslant 2^{\sigma_C s + \xi_C + 1}$.

Доказательство. Пусть $D = \{Y_1, \ldots, Y_d\}$ – селекторное разбиение переменных $Y = \{y_1, \ldots, y_p\}$ функции $\varphi_p^{(0)}$, на котором достигается $H(\varphi_p^{(0)})$.

Опишем таблицу истинности T_0 множества функций G_0. Для этого Рассмотрим булевскую таблицу T, состоящую из p непересекающихся горизонтальных полос $I_1, \ldots, I_p$, таких, что если $y_k \in Y_i$, тогда полоса I_k содержит $s_i = \lceil s + \log(|Y_i|/p) \rceil$ строк, $k = 1, \ldots, p$. Будем считать, что полосы $I_1, \ldots, I_p$ соответствуют переменным $y_1, \ldots, y_p$.

Далее, T состоит из d непересекающихся вертикальных полос $J_1, \ldots, J_d$ соответствующих $Y_1, \ldots, Y_d$ таких, что полоса J_i содержит $q_C(s_i)$ столбцов, $i = 1, \ldots, d$.

Пусть Q и P – число столбцов и строк таблицы T, тогда

$$Q = \sum_{i=1}^{d} q_C(s_i) = \sum_{i=1}^{d} 2^{\sigma_C s_i + \xi_C} \leqslant 2^{\sigma_C s + \xi_C + 1},$$

$$P = \sum_{i=1}^{d} |Y_i| s_i \geqslant p(s - H(D)) \geqslant 2^m,$$

Пусть $1 \leqslant k \leqslant p$, $y_k \in Y_i$, а константы $\delta^{(k)}$, $\alpha_1^{(k)}, \ldots, \alpha_p^{(k)}$ удовлетворяют определению селекторности разбиения D для случая переменной y_k. Тогда каждый элемент таблицы $T\langle I_k, J_l\rangle$ равен $\alpha_l^{(k)}$ для $l = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, d$, а столбцы блока $T\langle I_k, J_i\rangle$ при $\delta^{(k)} = 0$ (соответственно, при $\delta^{(k)} = 1$) представляют собой упорядоченные $q_C(s_i)$ слов (соответственно, отрицаний слов) множества $\widehat{C}$ длины s_i.

По построению, таблица T содержит по меньшей мере 2^m строк. Первые 2^m строк таблицы T образуют таблицу T_0.

Для доказательства $\varphi_p^{(0)}$-универсальности системы G_0 для класса Q_C заметим, что множество наборов куба E^m можно разделить на подмножества $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, соотвествующие горизонтальным полосам $I_1, \ldots, I_p$ (если некоторая полоса не попадает в T_0, тогда связанное с ней подмножество является пустым). Пусть f – произвольная кодовая функция от m переменных. Для $1 \leqslant k \leqslant p$ на место переменной y_k, $y_k \in Y_i$ для некоторого i, в функцию φ_0 будем подставлять такую функцию g_k из G_0, что столбец g_k принадлежит полосе J_i и при $\delta^{(k)} = 0$ (при $\delta^{(k)} = 1$) g_k совпадает с f (соответственно, с отрицанием f) на наборах множества λ_k. Легко видеть, что для набора $g_1, \dots, g_p$ выполнено равенство

$$f = \varphi_p^{(0)}(g_1, \dots, g_p).$$

Лемма доказана.

4. Верхняя оценка функции Шеннона. Напомним, что мультиплексорной функцией порядка n называется функция

$$\mu_n(x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_{2^n-1}) = \bigvee_{\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_n)\in E^n} x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n} y_{\nu(\sigma)},$$

где переменные $x_1, \dots, x_n$ ($y_0, \dots, y_{2^n-1}$) называются адресными (соответственно, информационными) переменными.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ – произвольная функция из $Q_C(n)$. Обозначим $x' = (x_{n-m+1}, \dots, x_n)$, $x'' = (x_1, \dots, x_{n-m})$ ($m < n$). Воспользуемся разложением функции f по переменным группы x'':

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma''=(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-m})} x_1^{\sigma_1} \cdots x_{n-m}^{\sigma_{n-m}} f(\sigma'', x'). \tag{4}$$

Легко видеть, что $f(\sigma'', x') \in Q_C(m)$.

Пусть для некоторой функции φ система функций G является φ-универсальной порядка m для класса Q_C, тогда для каждой функции $f(\sigma'', x')$ справедливо представление

$$f(\sigma'', x') = \varphi(g_1, \dots, g_p), \tag{5}$$

где $g_1, \dots, g_p \in G$.

На основании разложения (4) функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и представления (5) для каждой функции $f(\sigma'', x')$, можно построить СФЭ Σ_f, которая реализует f и имеет следующую структуру:

1. в качестве подсхемы в Σ_f входит схема Σ_G, реализующая систему всех различных функций из G;

2. каждая функция $f(\sigma'', x')$ получается с использованием отдельной формулы Φ, реализующей функцию φ, на входы которой подаются выходы Σ_G в соответствии с (5);

3. схема Σ_f содержит подсхему Σ'', реализующую мультиплексорную функцию порядка $(n - m)$ от адресных переменных x'', на информационные входы которой подаются выходы формул Φ в соответствии с (4);

4. для реализации функций $x_1 \& x_2$, $x_1 \vee x_2$ и $\overline{x}_1$ используются, соответственно, формулы $\mathcal{F}_\&$, $\mathcal{F}_\vee$ и $\mathcal{F}_\neg$, такие, что каждая их существенная переменная встречается в них ровно один раз, а все фиктивные переменные присоединяются к одному из входов схемы.

Формулы $\mathcal{F}_\&$, $\mathcal{F}_\vee$ и $\mathcal{F}_\neg$ существуют в силу полноты базиса B. Сложность схемы Σ_f можно оценить, как

$$L(\Sigma_f) \leqslant L(\Phi) 2^{n-m} + L(\Sigma'') + L(\Sigma_G). \tag{6}$$

Теорема 2. *Если* $t = t(n)$, *причем* $(t(n) - n)$ *по порядку не меньше, чем* n *и* $t(n)$ *по порядку не превосходит* $2^n/n^3$, *то*

$$L_B(Q_C(n), t) \leqslant \rho_B \frac{\log |Q_C(n)|}{\log t} \left(1 + \frac{\kappa_B \log\log t + O(1)}{\log t}\right).$$

Доказательство. Для произвольной функции $f \in Q_C(n)$ воспользуемся схемой Σ_f, структура которой описана выше. Входы схемы Σ_f ветвятся. Подсхема Σ'' реализуется по формуле

$$\mu_n(x_1, \ldots, x_{n-m}, y_0, \ldots, y_{2^{n-m}-1}) = \bigvee_{\sigma_1 \in E} x_1^{\sigma_1} \left(\bigvee_{\sigma_2 \in E} x_2^{\sigma_2} \cdots \left(\bigvee_{\sigma_{n-m} \in E} x_{n-m}^{\sigma_{n-m}} \cdot y_{\nu(\sigma'')} \right) \right),$$

где $\sigma'' = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-m})$. При этом сложность Σ'' удовлетворяет

$$L(\Sigma'') = O(2^{n-m}). \tag{7}$$

В качестве функции φ воспользуемся функцией $\varphi_p^{(\kappa_B)}$, введенной выше, а для реализации $\varphi_p^{(\kappa_B)}$ будем использовать формулу $\Phi_p^{(\kappa_B)}$. Заметим, что при этом $L(\Phi_p^{(\kappa_B)}) \leqslant \rho_B p + O(1)$. Схема Σ_G реализует φ_{κ_B}-универсальное множество функций G_{κ_B}, построенное в случае $\kappa_B = 1$ ($\kappa_B = 0$) по лемме 2 (соответственно, по лемме 3). Рассмотрим два случая.

1. Пусть $nc' \leqslant t(n) \leqslant nc''$, где $c' > 1$, $c'' > 1$, тогда схема Σ_G реализует функции системы G_{κ_B} по их совершенным ДНФ. В этом случае

$$L(\Sigma_G) = O\left(|G_{\kappa_B}| m 2^m\right). \tag{8}$$

Выходы схемы Σ_G ветвятся и в схеме Σ_f больше нет ветвящихся вершин. В силу (7) и (8), неравенство (6) переходит в неравенство

$$L(\Sigma_f) \leqslant \rho_B p\, 2^{n-m} + O\left(2^{n-m} + m 2^m |G_{\kappa_B}|\right).$$

Будем выбирать параметры так, что:

$$s = \left\lfloor \frac{1}{\sigma_C} \left(\log t - \kappa_B \log\log t - \xi_C - (1-\kappa_B) \left(1 - \log\left(\frac{t-n}{t} \right) \right) \right) \right\rfloor,$$

$$m = \left\lfloor 2\log s - 1 + \log \sigma_C + \kappa_B \log\left(\frac{t-n}{t} \right) \right\rfloor,$$

а параметр p при $\kappa_B = 1$ ($\kappa_B = 0$) выбирается исходя из (2) (соответственно, из (3)). Заметим, что при этом общее количество ветвящихся вершин схемы Σ_f не превосходит t, так как

$$|G_{\kappa_B}| + n \leqslant t.$$

2. В случае $n = o(t(n))$ схема Σ_G строится с использованием подсхем Σ_1, Σ_2 и Σ_3 со следующей структурой:

   - выходы схем Σ_1 и Σ_2 ветвятся;
   - схема Σ_1 реализует систему всех 2^m элементарных конъюнкций ранга m от переменных группы x';
   - схема Σ_2 реализует характеристические функции отрезков куба E^m, соответствующих переменным $y_1, \ldots, y_p$, по их совершенным ДНФ, используя выходы Σ_1;
   - для $i = 1, \ldots, p$ схема Σ_3 реализует по совершенной ДНФ все функции, обращающиеся в 0 вне i-ого отрезка, и совпадающие на нем либо с некоторым словом из множества $\widehat{C}$ соответствующей длины, либо с его отрицанием.

Легко показать, что

$$L(\Sigma_1) = O(m2^m), \quad L(\Sigma_2) = O(2^m), \quad L(\Sigma_3) \leqslant s|G_{\kappa_B}|. \tag{9}$$

При реализации каждой функции g из G_{κ_B}, используется цепочка из не более, чем $(p-1)$ элемента дизъюнкции, на входы которой подаются соответствующие выходы схем Σ_2 и Σ_3. Из неравенств (9) следует, что сложность схемы Σ_G оценивается, как

$$L(\Sigma_G) = O\left((s+p)|G_{\kappa_B}| + m2^m\right). \tag{10}$$

Аналогично случаю 1, выходы схемы Σ_G ветвятся и в схеме Σ_f больше нет ветвящихся вершин. С учетом (7), (10), неравенство (6) переходит в

$$L(\Sigma_f) \leqslant \rho_B p\, 2^{n-m} + O\left(2^{n-m} + m2^m + (s+p)|G_{\kappa_B}|\right).$$

Параметр p выбирается так же, как в случае 1,

$$s = \left\lfloor \frac{1}{\sigma_C}\left(\log t - \kappa_B \log\log t - \xi_C - \widehat{c}(1-\kappa_B)\right)\right\rfloor,$$

$$m = \lfloor 2\log s - 1 - \widehat{c} + \log \sigma_C \rfloor,$$

где $\widehat{c}$ – константа, $\widehat{c} \geqslant 1$ и обеспечивает выполнение неравенства

$$|G_{\kappa_B}| + n + 2^m + p \leqslant t.$$

В частности, для достаточно больших n константа $\widehat{c}$ равна 2.

Следствие. В условиях теоремы 2 для $n = 1, 2, \ldots$

$$L_B(Q_C(n), t) = \rho_B \frac{\log|Q_C(n)|}{\log t}\left(1 + \frac{\kappa_B \log\log t \pm O(1)}{\log t}\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лупанов О. Б.* Об одном методе синтеза схем // Известия вузов, Радиофизика. – 1958. Т. 1, № 1. – с.120-140.
2. *Ложкин С.А.* Асимптотические оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики, Выпуск 6. – М.: Наука, 1996. – с.189-214.
3. *Ложкин С.А.* Асимптотические оценки высокой степени точности для сложности реализации булевских функций схемами из функциональных элементов // Труды II Международной конференции "Дискретные модели в теории управляющих систем" (Красновидово, 23-28 июня 1997 г.). – М.: Диалог-МГУ, 1997. – с.37-39.
4. *Ложкин С.А.* Асимптотические оценки высокой степени точности для сложности функций, связанных с автоматными языками // Тезисы докладов XII Международной конференции "Проблемы теоретической кибернетики" (Нижний Новгород, 17-22 мая 1999 г.), Часть II. – М.: Изд-во мех.-мат. факультета МГУ, 1999. – с.138.
5. *Ложкин С.А.* Основы кибернетики. М.: Изд-во МГУ, 2004. 256 с.
6. *Хомский Н., Миллер Д.* Языки с конечным числом состояний // Кибернетический сборник, Вып. 4. – М.: изд-во ин. литературы, 1962. – с.233-255.
7. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986. 384 с.

РЕФЕРАТЫ

Е. Ю. Абраменко. О РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОЦЕНОК НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КОМПЬЮТЕРАХ // *СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, С. 3–7.*

Данная работа посвящена разработке параллельного метода обучения распознающих алгоритмов в рамках модели алгоритмов вычисления оценок (АВО). Был предложен метод оптимизации функционала ошибки, позволяющий обучать алгоритмы вычисления оценок при минимальных ограничениях на параметры модели. Предложенный метод основывается на параллельном решении оптимизационных задач в пространстве параметров $\vec{W}$. и $\vec{w}$ для различных наборов параметров ($\vec{\varepsilon}, k, \varepsilon, x_{11}, x_{00}$).

Библиография 3 назв.

С. В. Афонин. О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА // *СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, С. 8–31.*

В настоящей работе устанавливается оценка скорости равносходимости спектральных разложений по корневым функциям произвольного дифференциального оператора первого порядка с разложением в обычный тригонометрический ряд Фурье.

Библиография 14 назв.

М. П. Ващенко. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ БЕЛЛМАНА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ // *СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, С. 32–43.*

В работе рассматривается модель инвестиционной деятельности, учитывающая неопределенность сохранения спроса на инвестиции. Сформулированы достаточные условия оптимальности стратегии инвестирования, ориентированной на неразорение. Даны оценки на максимальный темп роста капитала в динамической системе, порождаемой описанной выше стратегией.

Библиография 6 назв.

А. Г. Волков. О ВОЗМОЖНОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СВЕРХКОРОТКИХ ЛАЗЕРНЫХ ИМПУЛЬСОВ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ ФЕМТОСЕКУНДНОГО ИМПУЛЬСА В ОПТИЧЕСКОМ ВОЛОКНЕ // *СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, С. 44–49.*

Показана возможность формирования аттосекундных импульсов при воздействии ударной волны на фемтосекундный импульс. Это имеет место, если временная дисперсия нелинейного отклика значительно влияет при распространении лазерного импульса в оптическом волокне. Также рассматривается влияние частотной модуляции. Данный анализ базируется на оригинальном преобразовании нелинейного комбинированного уравнения Шрёдингера с производной по времени от нелинейного отклика.

Библиография 6 назв.

Ю. Г. Гераськина. О ВРЕМЕНИ САМООЧИЩЕНИЯ ЛЕГОЧНЫХ СТРУКТУР В ДОПУСТИМЫХ СРЕДАХ // *СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, С. 50–54.*

В работе строится математическая модель легких человека, находится сложность (время) их самоочищения при произвольном начальном запылении легких и описываются все внешние среды, в которых легкие нормально функционируют.

Библиография 3 назв.

В. В. Глазкова, М. И. Петровский. МЕТОД БЫСТРОЙ КЛАССИФИКАЦИИ МНОГОТЕМНЫХ ТЕКСТОВЫХ ДОКУМЕНТОВ // *СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, С. 55–64.*

В статье предлагается метод быстрой классификации многотемных текстовых документов (режим online), который даёт хорошее качество классификации и использует небольшой объём памяти. Разработанный метод классификации многотемных документов удовлетворяет специ-фике задачи фильтрации Web-трафика. Для эффективного решения подзадачи определения размера набора уместных тем нами предлагается находить пороговую функцию в пространстве векторов релевантностей тем (для задачи текстовой классификации размерность этого про-странства в сотни раз меньше размерности пространства признаков).

Библиография 7 назв.

С. С. Жулин . ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ // *СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, С. 65–76.*

Данная статья посвящена применению метода продолжения по параметру к решению краевых задач для принципа максимума и возникающим при этом трудностям и особенностям. В разделах 3,4 описываются разработанные автором схемы применения метода продолжения по параметру для решения нелинейных по управлению и негладких задач оптимального управления. Эти подходы были реализованы в Системе Optimus, описанной в [1], позволив существенно расширить класс решаемых задач. В заключении приводится иллюстрирующий пример.

Библиография 11 назв.

О. И. Иновенков. ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ ФАКТОРОВ НА СТРУКТУРУ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАСЕЛЕНИЯ В МЕГАПОЛИСЕ // *СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, С. 77–83.*

В настоящее время прослеживается тенденция использовать методы математической физики для описания некоторых аспектов пространственной экономики. В данной работе показано, что для широкого класса коэффициентов решение задачи о распределении городского населения по ареалу с учетом качества жилого фонда "быстро забывает"детали начальных условий и выходит на так называемую промежуточную асимптотику, характер которой зависит только от оператора задачи. Фактически это означает, что урбанистическая структура не зависит от привходящих факторов, а определяется внутренней структурой самой модели.

Библиография 4 назв.

Ю. Н. Капустин. О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЗНАНИЙ РЕШАТЕЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ВИДЕ ОНТОЛОГИИ // *СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, С. 84–91.*

Работа посвящена созданию нового метода представления знаний решателя геометрических задач на основе онтологий. Новое представление позволяет интегрировать разнородные знания решателя в единое целое. Для сохранения согласованности между двумя преставлениями знаний решателя геометрических задач реализовано программное средство поддержки онтологии знаний, позволяющее переводить некоторые, наиболее актуальные, части базы знаний в онтологию и обратно.

Библиография 7 назв.

В. А. Лапшин. ПОСТРОЕНИЕ БЕСКУПОННОЙ КРИВОЙ ДОХОДНОСТИ // *СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, С. 92–98.*

Предложен новый численный метод нахождения временно́й структуры процентных ставок. Указанный метод является эффективным с точки зрения практического применения.

Библиография 7 назв.

Т. Г. Лапшина. СЛОЖНОСТЬ РЕАЛИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ В КЛАССЕ МОНОТОННЫХ КОНТАКТНЫХ СХЕМ // *СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, С. 99–102.*

В данной работе исследуется сложность реализации монотонной симметрической функции с порогом 2 в классе монотонных контактных схем, построенных из контактов, которые могут иметь различные веса. Найдена минимальная сложность реализации данной функции в рассматриваемом классе.

Библиография 7 назв.

А. Ю. Мокин. О НЕУСТОЙЧИВОСТИ СХЕМ С ВЕСАМИ ДЛЯ ЗАДАЧИ САМАРСКОГО–ИОНКИНА // *СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, С. 103–110.*

В работе рассматриваются разностные схемы с весами для уравнения теплопроводности с нелокальными граничными условиями (задача Самарского–Ионкина). Доказана абсолютная неустойчивость данных схем в сеточной среднеквадратической норме при любом значении весового множителя $\sigma \in [0,1]$.

Библиография 5 назв.

Л. Г. Петрова. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАСТРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ МОДЕЛЕЙ ГРАНИЧНО-СКЕЛЕТНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ // *СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, С. 111–120.*

В настоящей статье предложены методы преобразования растровых изображений на основе непрерывных моделей гранично-скелетного представления. Предложеннные методы подробно описаны для двух задач преобразования растровых изображений: восстановление полутоновых изображений, заданных с помощью порогов яркости, и морфинг растровых изображений.

Библиография 12 назв.

С. А. Сергеев. ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ НИТИ ПЛАЗМЫ В НЕЙТРАЛЬНОЙ СРЕДЕ // *СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, С. 121–137.*

Для уравнения колебаний нити плазмы в нейтральной среде рассматриваются различные задачи на граничное управление, причем предложенный метод нахождения оптимального управления предоставляет возможность нахождения такового в пространствах W_p^1 или L_p для любого натурального p. Была решена задача управления для любого достаточно большого промежутка времени T, не обязательно кратного $2G(l)$, и продемонстрирована общая зависимость решения от длины интервала по времени. Кроме этого был поставлен вопрос оптимизации весовых интегралов, на который был дан довольно исчерпывающий ответ, а именно: получен явный вид формулы, выражабющий оптимальное управление для таких функционалов, получены оценки изменения модуля решения, равномерно по всем натуральным $p > 1$ и весовым функциям. Также в процессе исследования мимизации весовых интегралов был получен класс весовых функций, оптимизация с которыми таких функционалов приводит к одной и той же функции при любом натуральном $p > 1$, и выписана явная формула для этого решения.

Библиография 6 назв.

Н. О. Таранов. ИССЛЕДОВАНИЕ АНАЛОГА ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ СЛУЧАЯ КОГДА ЛИНИЯ ПЕРЕМЕНЫ ТИПА НЕ СОВПАДАЕТ С ОСЯМИ КООРДИНАТ // *СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, С. 138–146.*

Доказано существование решение аналога задачи Трикоми для случая линии перемены типа, не совпадающей с осями координат, как в случае данных на отрезке характеристики, проходящей через ноль, так и в случае данных на отрезке другой характеристики.
Доказан принцип экстремума решения соответствующей задачи.

Библиография 5 назв.

А. Е. Шиганов. ОЦЕНКИ ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ ДЛЯ СЛОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ КОДОВЫХ ФУНКЦИЙ В ОДНОМ КЛАССЕ СХЕМ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ // *СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ, 2006, выпуск № 3, С. 147–154.*

В работе изучается поведение функции Шеннона для сложности реализации функций алгебры логики из классов, связанных с двоичными кодами, в классе схем из функциональных элементов в произвольном полном базисе с определенными количественными ограничениями на число “ветвящихся” вершин. Результатом работы являются асимптотические оценки высокой степени точности для рассматриваемой функции Шеннона, полученные в широком диапазоне изменения параметра, ограничивающего число “ветвящихся” вершин.

Библиография 7 назв.
