УДК 517.925

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ КВАДРАТИЧНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ И УРАВНЕНИЕ ШИ СОНГЛИНА

© 2010 г. Д. А. Филимонов

В настоящей работе предложен метод исследования, позволяющий локализовать предельные циклы для векторных полей на плоскости, содержащих сверхмедленный фокус. Этим методом исследована большая область на фазовой плоскости для уравнения Ши Сонглина. Предельные циклы в окрестности особой точки $(0,0)$ локализованы в узких кольцах, где доказана их единственность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вторая часть 16-й проблемы Гильберта посвящена вопросу расположения и количества предельных циклов для полиномиальных векторных полей на плоскости. До сих пор нет никакой оценки для их числа даже для квадратичных векторных полей. Долгое время считалось, что это число не превосходит трех. В 1979 г. Ван Мин-Шу и Чен Лан-Сун в работе [1] показали существование квадратичного векторного поля на плоскости, у которого имеется не менее четырех предельных циклов. В 1980 г. Ши Сонглин [2] опубликовал конкретный пример векторного поля с не менее, чем четырьмя предельными циклами, задаваемого уравнением

$$\dot{x} = \lambda x - y - 10x^2 + (5+\delta)xy + y^2, \quad \dot{y} = x + x^2 + (-25 + 8\varepsilon - 9\delta)xy. \tag{1}$$

Требуемое возмущение в работе [2] указано явно:

$$\delta = -10^{-13}, \quad \varepsilon = -10^{-52}, \quad \lambda = -10^{-200}. \tag{2}$$

Будем называть возмущенным уравнением (1) уравнение, где параметры δ, ε и λ принимают указанные значения, а невозмущенным – уравнение с $\delta = \varepsilon = \lambda = 0$.

В работе [2] показано, что при указанном возмущении в уравнении (1) имеется не менее четырех предельных циклов: один вокруг точки $(0,1)$ (этот цикл имеется и в невозмущенной системе) и три вокруг точки $(0,0)$.

Естественно возникает в связи с этим вопрос: “а сколько на самом деле предельных циклов в уравнении (1)”?

В настоящей работе предложен метод исследования, позволяющий локализовать предельные циклы для систем, содержащих сверхмедленный фокус. Первая часть данной работы посвящена демонстрации применения этого метода для уравнения Ши Сонглина (1). В частности, будет доказана

Теорема 1. *У системы (1) имеются ровно четыре предельных цикла, не пересекающие отрезок* $[0.004, 0.04]$ *оси* Oy.

Более того, мы локализуем предельные циклы в окрестности точки $(0,0)$ в трех достаточно узких кольцах, в каждом из которых предельный цикл окажется единственным.

Для оставшегося отрезка $[0.004, 0.04]$ был проведен численный эксперимент, показывающий отсутствие предельных циклов, пересекающих указанный отрезок.

2. УРАВНЕНИЕ ШИ СОНГЛИНА

2.1. Фазовый портрет и общие сведения. Фазовый портрет уравнения (1) представлен на рис. 1 (более подробный анализ приведен в [3]). У него имеются две особые точки $(0,1)$ и $(0,0)$, причем в невозмущенном уравнении первая из них – это фокус по линейным членам, а вторая – сверхмедленный фокус (т.е. отображение Пуанкаре для него не тождественно,

но касается в нуле тождественного отображения с максимально возможной для квадратичного векторного поля степенью касания). В возмущенном же уравнении обе точки становятся фокусами по линейным частям. Кроме того, имеется прямая без контакта, на которой поле горизонтально. Эта прямая задается уравнением

$$l := \{1 + x - 25y = 0\},$$

она пересекает ось Oy в точке 0.04.

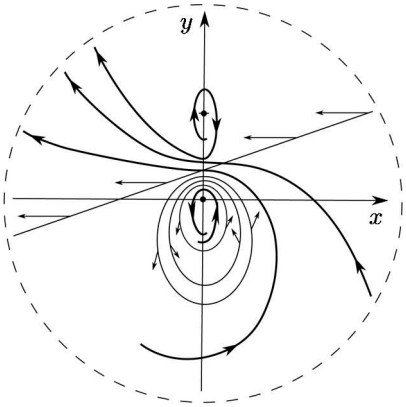

Рис. 1. Фазовый портрет.

Рассматривая уравнение (1) на проективной плоскости, можно увидеть, что бесконечно удаленная прямая является инвариантной (на ней лежит ровно одна особая точка типа седло). С другой стороны, верхняя полуплоскость относительно прямой l является поглощающим множеством. Поэтому предельные циклы не могут пересекать прямую l. Наконец, напомним, что любой предельный цикл квадратичного векторного поля охватывает ровно одну особую точку. Следовательно, в уравнении Ши Сонглина предельные циклы охватывают либо точку $(0,1)$, либо точку $(0,0)$ и пересекают отрезок $[0, 0.04]$ по оси Oy. В работе [2] показано, что вокруг точки $(0,1)$ имеется хотя бы один цикл (за счет наличия раскручивающегося фокуса в поглощающей области легко указывается мешок Бендиксона), а вокруг точки $(0,0)$ существует не менее трех циклов. В работе [4] доказана следующая

Теорема 2. *Если у квадратичного векторного поля два фокуса по линейным частям, то вокруг одного из них имеется не более одного предельного цикла.*

Из этой теоремы следует, что по крайней мере для возмущенного уравнения Ши Сонглина в верхней полуплоскости относительно прямой l существует ровно один предельный цикл.

Тем самым для подсчета количества предельных циклов в примере Ши Сонглина необходимо исследовать только циклы, окружающие точку $(0,0)$. Любой такой цикл пересекает положительную полуось Oy ниже прямой l в точке $(0, y_0)$ с $y_0 < 0.04$. При дальнейшем исследовании мы укажем вокруг начала координат три кольцевые области, содержащие по одному предельному циклу.

2.2. Фактор-система и исследование окрестности сверхмедленного фокуса. Для доказательства теоремы 1 построим полиномиальную функцию $T(x, y)$ со следующими свойствами:

1) замена $(r, \varphi) \mapsto (U(r, \varphi), \varphi)$, где $U(r, \varphi) = T(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, определена корректно в проколотой окрестности начала координат радиуса 0.004. Функция $U(r, \varphi)$ будет алгебраическим многочленом по r и тригонометрическим многочленом по φ, будем по-прежнему называть его многочленом;

2) линии уровня функции $U(r, \varphi) = \mathrm{const}$ являются линиями без контакта в той же окрестности, за исключением трех узких колец.

3) у отображения Пуанкаре в новых координатах $(U(r, \varphi), \varphi)$ производная отделена от единицы в упомянутых выше кольцевых областях.

Эта функция является частной суммой формального ряда h, удовлетворяющего следующему уравнению, называемому иногда фактор-системой:

$$L_v h = g \circ h. \tag{3}$$

Здесь $h = x^2 + y^2 + \dots$ и $g = 2\beta_0 u + 2\beta_1 u^2 + \dots$ – искомые формальные ряды, L_v – дифференцирование вдоль векторного поля v с линейной частью $(-y, x)$. Для таких полей фактор-система всегда имеет формальное решение, но оно, как правило, расходится. Фактор-система тесно связана с понятием формальной нормальной формы: коэффициенты β_j являются коэффициентами формальной нормальной формы поля v, причем для полей с линейной частью $(-y, x)$ коэффициент β_0 равен нулю. Подробно вопрос их связи освещен в работе [5]. Там же обсуждаются вопросы, связанные с рекурсивным решением фактор-системы.

Если бы ряды решения фактор-системы сходились, то линии уровня $h = a_j$, соответствующие нулям функции g, были бы предельными циклами, а остальные замкнутые линии уровня функции h – кривыми без контакта.

Рассмотрим приближенное решение фактор-системы: $T(x, y)$ является многочленом 18-й степени от x и y с 2-струей в нуле, равной $x^2 + y^2$, а G – многочленом 8-й степени от одной переменной u с 1-струей в нуле, равной u:

$$L_v T = G(T) + o(x^{18} + y^{18}).$$

Пусть a_j – нули многочлена G, близкие к нулю. Естественно ожидать (и это обосновано ниже в п. 3), что при b, не слишком близких к a_j, линии уровня $T(x, y) = b$ – кривые без контакта с полем v, а узкие кольца в окрестности линий $T(x, y) = a_j$ содержат предельные циклы поля v.

Выражение для T получается путем последовательного вычисления на компьютере *в рациональных числах* первых членов ряда h (алгоритм их вычисления приведен в п. А). Здесь особенно важно подчеркнуть, что это вычисление не является приближенным, а соответствует точному решению задачи в символьном виде. К сожалению, выражение для $U(r, \varphi)$ слишком громоздко, однако для обоснования свойств 1)–3) достаточно использовать мажорирующие $U(r, \varphi)$ многочлены, точные формулы для которых приведены в соответствующих пунктах.

Свойства 1) и 2) доказываются несложными оценками в леммах, приведенных в пп. 3.1 и 3.2, и получаются благодаря тому, что выбранная функция U оказывается "золотой серединой". С одной стороны, она достаточно близка к r^2 (и ее линии уровня близки к концентрическим окружностям вокруг начала координат), чтобы выполнялось свойство 1), а с другой стороны, функция U является приближенным решением фактор-системы, т.е. удовлетворяет ей с точностью до малой погрешности, благодаря чему выполняется свойство 2). Наконец, свойство 3) также вытекает из того, что функция U является приближенным решением фактор-системы, и проверяется с помощью исследования соответствующего уравнения в вариациях (см. лемму в п. 3.2).

Из свойств 1)–3) следует существование ровно трех неподвижных точек для отображения Пуанкаре системы в новых координатах, откуда вытекают аналогичные утверждения для отображения Пуанкаре в полярных координатах (r, φ) и, следовательно, утверждение теоремы 1.

3. ПОДРОБНЫЕ ВЫКЛАДКИ

3.1. Исследование окрестности нуля. Отображение Пуанкаре удобно исследовать в полярных координатах, в которых уравнение (1) имеет вид

$$\dot{r} = r\Lambda_1(\varphi) + r^2 R(\varphi), \quad \dot{\varphi} = 1 - \Lambda_2(\varphi) + r\Phi(\varphi), \tag{4}$$

где

$$R(\varphi) = (14\cos(\varphi)^2 + 6\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \cos(\varphi)\sin(\varphi)\delta - 24 + 8\epsilon - 9\delta -$$
$$- 8\cos(\varphi)^2\epsilon + 9\cos(\varphi)^2\delta)\cos(\varphi),$$
$$\Phi(\varphi) = -14(\cos(\varphi))^2\sin(\varphi) + 8(\cos(\varphi))^2\sin(\varphi)\epsilon - 9(\cos(\varphi))^2\sin(\varphi)\delta -$$
$$- \sin(\varphi) + (\cos(\varphi))^3\delta - 5\cos(\varphi) - \delta\cos(\varphi) + 6(\cos(\varphi))^3,$$
$$\Lambda_1(\varphi) = \lambda\cos^2(\varphi), \quad \Lambda_2(\varphi) = \lambda\cos(\varphi)\sin(\varphi).$$

Запишем (4) в виде одного уравнения

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r\Lambda_1(\varphi) + r^2 R(\varphi)}{1 - \Lambda_2(\varphi) + r\Phi(\varphi)}. \tag{5}$$

Найдем многочлен $U(r,\varphi)$ с указанными ранее свойствами. Для упрощения вычислений нахождение этой функции проводится в два этапа. Сначала рассмотрим полином 18-й степени $K(x,y)$, состоящий из первых членов ряда решения фактор-системы для уравнения (1) при $\lambda = 0$ (на самом деле для локализации предельных циклов достаточно восьмой степени; бóльшая степень необходима для того, чтобы отодвинуть верхнюю границу области, в которой нет предельных циклов). В этом случае линейная часть уравнения (1) – типа центр и фактор-система (3) разрешима на уровне формальных рядов. Подробно фактор-система и особенности вычисления ее решения описаны в [5]. Запишем многочлен $K(x,y)$ в полярных координатах:

$$M(r,\varphi) = K(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r^2 + \sum_{j=3}^{18} \tilde{m}_j(\varphi) r^j, \tag{6}$$

где $\tilde{m}_j(\varphi) = m_j(e^{i\varphi}, e^{-i\varphi})$ – соответствующие тригонометрические многочлены. Функция $M(r,\varphi)$ – алгебраический многочлен по r и тригонометрический многочлен по φ будем по-прежнему называть его многочленом.

Производная Ли для полученной функции $M(r,\varphi)$ имеет вид

$$L_{v_{\varepsilon,\delta}} M(r,\varphi) = G(M(r,\varphi)) + Q(x,y) = \sum_{j=1}^{8} 2\beta_j (M(r,\varphi))^{j+1} + Q(x,y), \tag{7}$$

где $v_{\varepsilon,\delta}$ – векторное поле для уравнения (1) при $\lambda = 0$, $G(m)$ – многочлен 9-й степени, состоящий из первых членов ряда g из правой части фактор-системы (3), причем β_j – коэффициенты формальной нормальной формы поля (подробно вопрос связи фактор-системы и формальной нормальной формы освещен в [5]), а $Q(r,\varphi)$ – остаток, содержащий члены порядка 19 и выше, который появляется из-за того, что $M(r,\varphi)$ – конечный отрезок формального ряда. Запишем правую часть равенства (7), используя разложение (6):

$$L_{v_{\varepsilon,\delta}} M(r,\varphi) = \tilde{g}(r^2) + V(r,\varphi),$$

где $\tilde{g}(m) = 2\beta_1 m^2 + 2\beta_2 m^3 + 2\beta_3 m^4$ – первые три монома многочлена $G(m)$. В остаток $V(r,\varphi)$ собраны все остальные члены. Коэффициенты формальной нормальной формы β_j посчитаны в символьном виде для общего произвольного квадратичного векторного поля с особой точкой в начале координат типа центр. Алгоритм и результаты этого подсчета см. в п. В.

Искомая функция $U(r,\varphi)$ получается из $K(r,\varphi)$ добавлением монома $-\lambda r^2 \sin\varphi\cos\varphi$. В этом случае квадратичный по r член становится собственным вектором линейной части оператора дифференцирования вдоль поля, соответствующего возмущенному уравнению (1) с параметрами возмущения (2). При этом производную вдоль поля от функции $U(r,\varphi)$ можно записать в виде

$$L_v U(r,\varphi) = -\lambda r^2 + \tilde{g}(r) + \tilde{V}(r,\varphi),$$

где в остаток $\tilde{V}(r,\varphi)$ включены все оставшиеся слагаемые. В окрестности начала координат многочлен $-\lambda r^2 + \tilde{g}(u)$ будет (кроме малых окрестностей своих нулей) определять знак $L_v U(r,\varphi)$.

Взяв по модулю все коэффициенты U, оценив сверху $\sin k\varphi$ и $\cos k\varphi$ единицами и воспользовавшись малостью параметра λ, получим мажоранту для разности $|U(r,\varphi) - r^2|$:

$$|U(r,\varphi) - r^2| \le U_{\mathrm{maj}}(r), \tag{8}$$

где

$$U_{\mathrm{maj}}(r) = 35r^3 + 140r^4 + 1.22\times 10^4 r^5 + 2.5\times 10^5 r^6 + 4.52\times 10^6 r^7 + 2.6\times 10^8 r^8 +$$
$$+ 3.1\times 10^{10} r^9 + 4.7\times 10^{11} r^{10} + 3.1\times 10^{13} r^{11} + 1.4\times 10^{15} r^{12} + 10^{17} r^{13} + 2.71\times 10^{18} r^{14} +$$
$$+ 4.4\times 10^{20} r^{15} + 3.32\times 10^{22} r^{16} + 1.84\times 10^{24} r^{17} + 2.53\times 10^{26} r^{18}.$$

Более того, U_{maj} также (из тех же соображений) применимо для оценки производной

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}(U(r,\varphi)-r^2)\right| \le U'_{\mathrm{maj}}(r). \tag{9}$$

Докажем первое свойство функции $U(r,\varphi)$.

Лемма 1. *Отображение*

$$(r,\varphi)\mapsto(U(r,\varphi),\varphi) \tag{10}$$

является диффеоморфизмом в области $\{(r,\varphi)|\ 0<r<\hat{r}=1.4\times10^{-2}\}$, *в которой выполняется оценка*

$$r^2(1-40r)\le U(r,\varphi)\le r^2(1+40r). \tag{11}$$

Доказательство. Функция $U(r,\varphi)$ гладкая. Якобиан отображения (10) равен $U'_r(r,\varphi)$. Легко заметить, что в проколотой окрестности начала координат $\{(r,\varphi)|\ 0<r<\hat{r}=1.4\times10^{-2}\}$ из оценки (9), выражения для мажоранты (8) и строгой монотонности мажоранты следует соотношение

$$U'_r(r,\varphi)\ge 2r-U'_{\mathrm{maj}}(r)\ge 2r-140r^2>0.$$

Отсюда сразу вытекает первое утверждение леммы. Оценка (11) получается аналогично предыдущей из неравенства для r:

$$|U(r,\varphi)-r^2|\le U_{\mathrm{maj}}(r)\le 40r^3.$$

Лемма доказана.

Из леммы 1 следует, что в системе (5) можно провести замену переменных $(r,\varphi)\mapsto(U,\varphi)$ в проколотой окрестности начала координат. Запишем исходное ε,- δ,- λ-возмущенное уравнение (1) в новых координатах

$$\dot{U}=-\lambda r^2(U)+\tilde{g}(r(U))+\tilde{V}(r(U),\varphi),\quad \dot{\varphi}=1-\Lambda_2(\varphi)+r(U)\Phi(\varphi). \tag{12}$$

Для $\tilde{V}(r,\varphi)$, продифференцировав по времени точное выражение для U и аналогично оценив соответствующие коэффициенты (так же, как была проведена оценка для мажоранты U_{maj}), получим следующую мажоранту:

$$|\tilde{V}(r,\varphi)|\le V_{\mathrm{maj}}(r),$$

где

$$V_{\mathrm{maj}}(r)=5\times10^{-199}r^3+10^{-197}r^4+1.4\times10^{-50}r^5+3\times10^{-49}r^6+4\times10^{-9}r^7+1.2\times10^{-7}r^8+$$
$$+1.2\times10^{6}r^9+7.1\times10^{7}r^{10}+3.3\times10^{9}r^{11}+1.2\times10^{11}r^{12}+4.1\times10^{12}r^{13}+1.4\times10^{14}r^{14}+$$
$$+4.5\times10^{15}r^{15}+1.2\times10^{17}r^{16}+3.7\times10^{18}r^{17}+1.6\times10^{20}r^{18}+3.1\times10^{28}r^{19}.$$

Аналогично получается оценка для производной

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}\tilde{V}(r,\varphi)\right|\le V'_{\mathrm{maj}}(r).$$

3.2. Задача в новых переменных. Изучим правую часть первого уравнения (12)

$$\dot{U}=\underbrace{g_1r^2+g_2r^4+g_3r^6+g_4r^8}_{\hat{g}(r)}+\tilde{V}(r,\varphi),$$

где $g_1=-\lambda$, $g_2=2\beta_1$, $g_3=2\beta_2$, $g_4=2\beta_3$. Поведение $\dot{U}$ везде на исследуемом промежутке $0<r<10^{-2}$, за исключением малых окрестностей нулей многочлена $\hat{g}(r)$, описывается

многочленом $\hat{g}(r)$. Этот факт и является основой для доказательства второго свойства функции U.

Лемма 2. *На интервалах* $(U^j_{\min}; U^j_{\max})$, $j = 1, \ldots, 4$, *для любого* $U_0 \in (U^j_{\min}; U^j_{\max})$ *линия уровня* $U(r, \varphi) = U_0$ *является линией без контакта для системы (12), при этом значения* $U^j_{\min}$ *и* $U^j_{\max}$ *указываются явно:*

$$U^1_{\min} = 4.49 \times 10^{-15}, \quad U^2_{\min} = 5.29 \times 10^{-42}, \quad U^3_{\min} = 5.041 \times 10^{-149}, \quad U^4_{\min} = 0,$$

$$U^1_{\max} = 1.37 \times 10^{-5}, \quad U^2_{\max} = 4.36 \times 10^{-15}, \quad U^3_{\max} = 4.84 \times 10^{-42}, \quad U^4_{\max} = 4.9 \times 10^{-149}.$$

Доказательство. Заметим, что на исследуемом промежутке $(0, \hat{r})$ существуют четыре интервала (a_j, b_j), $j = 1, \ldots, 4$, таких, что для любых $r \in (a_j, b_j)$ и φ функция $\dot{U}(r, \varphi)$ знакопостоянна в каждом из этих интервалов, при этом значения a_j и b_j указываются явно

$$a_1 = 6.7 \times 10^{-8}, \quad a_2 = 2.3 \times 10^{-21}, \quad a_3 = 7 \times 10^{-75}, \quad a_4 = 0,$$

$$b_1 = 4 \times 10^{-3}, \quad b_2 = 6.6 \times 10^{-8}, \quad b_3 = 2.2 \times 10^{-21}, \quad b_4 = 7.1 \times 10^{-75}.$$

Для оценки знака $\dot{U}(r, \varphi)$ достаточно воспользоваться мажорантой $V_{\mathrm{maj}}(r)$

$$|\dot{U}(r, \varphi) - \hat{g}(r)| \le V_{\mathrm{maj}}(r),$$

откуда прямым вычислением получаем, что $\dot{U}(r, \varphi) \le \hat{g}(r) + V(r) < 0$ на (a_2, b_2) и (a_4, b_4) и $\dot{U}(r, \varphi) \ge \hat{g}(r) - V(r) > 0$ на (a_1, b_1) и (a_3, b_3). Тогда в областях $D_j = \{(u, \varphi) |\ u = U(r, \varphi),\ r \in (a_j, b_j)\}$ производная $\dot{U}(r, \varphi)$ знакопостоянна. Кроме того, легко показать, что на исследуемом промежутке $r \in (0, \hat{r})$ выполняется неравенство $\dot{\varphi} = 1 - \Lambda_2(\varphi) + r\Phi(\varphi) > 0$. Следовательно, лежащие в областях D_j линии $U(\varphi) = \mathrm{const}$ являются линиями без контакта. Поэтому кольцевые области $D'_j = \{(u, \varphi) |\ u \in (U^j_{\min}, U^j_{\mathrm{maj}})\}$, где

$$U^j_{\max} = b_j^2 - U_{\mathrm{maj}}(b_j) \le \min_{\varphi} U(b_j, \varphi), \quad U^j_{\min} = a_j^2 + U_{\mathrm{maj}}(b_j) \ge \max_{\varphi} U(a_j, \varphi),$$

полностью заполнены замкнутыми линиями без контакта вида $U(\varphi) = \mathrm{const}$. Подставляя a_j и b_j, получаем указанные в формулировке этой леммы значения $U^j_{\min}$ и $U^j_{\max}$. Лемма доказана.

Следствие 1. *В областях* $\tilde{D}'_j = \{(r, \varphi) |\ U(r, \varphi) \in D'_j\}$, *являющихся прообразами* D'_j, *у уравнения (1) нет предельных циклов. Эти области являются соответственно отталкивающими или поглощающими областями (в зависимости от знака* $\dot{U}(r, \varphi)$*), причем линии уровня* $U(r, \varphi) = \mathrm{const}$ *являются линиями без контакта.*

Исключая описанные в лемме 2 области, мы видим, что предельные циклы могут лежать только в оставшихся узких кольцах. Для их исследования запишем систему (12) в виде одного уравнения

$$\frac{dU}{d\varphi} = \frac{g_1 r^2 + g_2 r^4 + g_3 r^6 + g_4 r^8 + \tilde{V}(r, \varphi)}{1 - \Lambda_2(\varphi) + r\Phi(\varphi)} = \frac{F(r, \varphi)}{G(r, \varphi)}. \tag{13}$$

Обозначим через $W(U_0, \varphi)$ решение уравнения (13) с начальным условием $W(U_0, \varphi_0) = U_0$ и рассмотрим отображение Пуанкаре, соответствующее системе (12):

$$\tilde{P}(U_0) = W(U_0, \varphi)|_{\varphi = \varphi_0 + 2\pi}.$$

Для удобства дальнейшего перехода к исходным полярным координатам положим $\varphi_0 = \pi/2$ (это будет соответствовать выбору положительного направления оси ординат в исходных координатах в качестве полутрансверсали).

Из леммы 2 для уравнения (13) можно заключить, что в указанных областях (по U) нет неподвижных точек отображения $\tilde{P}(U_0)$. Для исследования $\tilde{P}(U_0)$ в оставшихся областях оценим производную $\tilde{P}'(U_0)$.

Уравнение в вариациях для уравнения (13) имеет вид

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial U_0}\right) = \\ = \frac{\tilde{F}'_U(U,\varphi)\tilde{G}(U,\varphi)-\tilde{G}'_U(U,\varphi)\tilde{F}(U,\varphi)}{\tilde{G}^2(U,\varphi)}\,\frac{\partial W}{\partial U_0}, \quad (14)$$

где $\tilde{F}(U,\varphi) = F(r(U),\varphi)$ и $\tilde{G}(U,\varphi)=G(r(U),\varphi)$. Проинтегрируем уравнение (14) по φ и подставим $\varphi = 2\pi$:

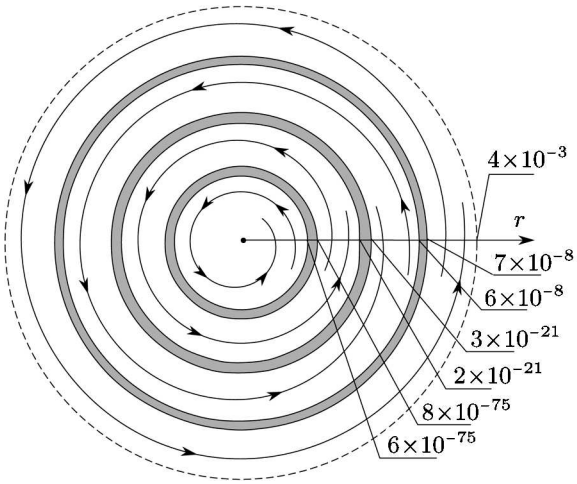

Рис. 2. Окрестность начала координат.

$$\tilde{P}'(U_0) = \left.\frac{\partial W}{\partial U_0}\right|_{\varphi=\varphi_0+2\pi} = \exp\left(\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} \frac{\tilde{F}'_U\tilde{G}-\tilde{G}'_U\tilde{F}}{\tilde{G}^2}\,d\varphi\right). \quad (15)$$

Покажем, что подынтегральное выражение знакопостоянно в каждом отдельном из оставшихся промежутков. Из этого будет следовать отделенность от единицы для $\tilde{P}'(U_0)$ на соответствующих отрезках, а следовательно, на каждом из отрезков у $\tilde{P}(U_0)$ существует не более одной неподвижной точки. С учетом знаков производной $dU/d\varphi$ в дополнение к исследуемым отрезкам получим, что на промежутке $0 < r < b_1$ у $\tilde{P}(U_0)$ имеются ровно три неподвижные точки.

Лемма 3. *Существуют такие* ${}^jU_{\min}$ *и* ${}^jU_{\max}$, $j = 1,\dots,4$, *что* ${}^jU_{\min} < U^{j+1}_{\max} < U^j_{\min} < {}^jU_{\max}$ *и для любого* $U_0 \in ({}^jU_{\min}, {}^jU_{\max})$ *подынтегральное выражение в (15) знакопостоянно для каждого из интервалов при фиксированном* j.

Доказательство. Для доказательства знакопостоянства преобразуем подынтегральное выражение:

$$\frac{\tilde{F}'_U(U,\varphi)\tilde{G}(U,\varphi)-\tilde{G}'_U(U,\varphi)\tilde{F}(U,\varphi)}{\tilde{G}^2(U,\varphi)} = \frac{F'_r(r,\varphi)G(r,\varphi)-G'_r(r,\varphi)F(r,\varphi)}{U'_r(r,\varphi)G^2(r,\varphi)}.$$

Правая часть записывается явно в переменных (r,φ). Подставляя $F(r,\varphi) = \hat{g}(r)+V(r,\varphi)$ и $G(r,\varphi) = 1-\Lambda_2(\varphi)+r\Phi(\varphi)$, получаем равенство

$$\frac{F'_rG-G'_rF}{U'_rG^2} = \frac{(\hat{g}'(r)+\tilde{V}'_r(r,\varphi))(1-\Lambda_2(\varphi)+r\Phi(\varphi))-\Phi(\varphi)(\hat{g}(r)+\tilde{V}(r,\varphi))}{U'_r(r,\varphi)(1-\Lambda_2(\varphi)+r\Phi(\varphi))^2}. \quad (16)$$

На $(0,b_1)$ существуют три интервала (c_j,d_j), $j = 1,\dots,3$, со следующими свойствами: $c_j < b_{j+1} < a_j < d_j$ для любого $r \in (c_j,d_j)$ и для любого φ знак выражения (16) постоянен в каждом из указанных интервалов; c_j и d_j указываются явно:

$$c_1 = 6\times10^{-8}, \quad c_2 = 2\times10^{-21}, \quad c_3 = 6\times10^{-75},$$

$$d_1 = 7\times10^{-8}, \quad d_2 = 3\times10^{-21}, \quad d_3 = 8\times10^{-75}.$$

Из леммы 1 следует, что $U'_r(r,\varphi) > 0$ при $r \in (0,b_1)$. Поэтому знак выражения (16) определяется только знаком числителя. В каждом из интервалов (c_j,d_j), поскольку действие происходит в окрестности нуля $\hat{g}(r)$, ведущим членом является соответствующий моном из $\hat{g}'(r)$.

Для оценки знака достаточно воспользоваться мажорантой $V_{\mathrm{maj}}(r)$ и тривиальными оценками для G, Φ и Λ_2. В интервалах (c_1, d_1) и (c_3, d_3) прямым вычислением получаем, что

$$F_r'G - G_r'F = \hat{g}' + V_r'G - \Phi(\hat{g} + V) + \hat{g}'(\Lambda_2 + r\Phi) \geq$$
$$\geq \hat{g}' - (V_{\mathrm{maj}}'(1 + \lambda + 26r) + 26(\hat{g} + V_{\mathrm{maj}}) + \hat{g}'(\lambda + 26r)) > 0,$$

а на (c_2, d_2) –

$$F_r'G - G_r'F = \hat{g}' + V_r'G - \Phi(\hat{g} + V) + \hat{g}'(\Lambda_2 + r\Phi) \leq$$
$$\leq \hat{g}' + (V_{\mathrm{maj}}'(1 + \lambda + 26r) + 26(\hat{g} + V_{\mathrm{maj}}) + \hat{g}'(\lambda + 26r)) < 0.$$

Тогда в областях $B_j = \{(u, \varphi) | u = U(r, \varphi),\ r \in (c_j, d_j)\}$ выражение (16) знакопостоянно. Значит, в $B_j' = \{(u, \varphi) | u \in ({}^jU_{\min}, {}^jU_{\mathrm{maj}})\}$, где

$${}^jU_{\max} = d_j^2 - U_{\mathrm{maj}}(d_j) \leq \min_{\varphi} U(d_j, \varphi), \quad {}^jU_{\min} = c_j^2 + U_{\mathrm{maj}}(c_j) \geq \max_{\varphi} U(c_j, \varphi),$$

подынтегральное выражение в (15) сохраняет знак. Подставляя значения c_j и d_j, получаем

$${}^1U_{\min} = 3.6 \times 10^{-15}, \quad {}^2U_{\min} = 4 \times 10^{-42}, \quad {}^3U_{\min} = 6.4 \times 10^{-149},$$
$${}^1U_{\max} = 4.9 \times 10^{-15}, \quad {}^2U_{\max} = 9 \times 10^{-42}, \quad {}^3U_{\max} = 3.6 \times 10^{-149}.$$

Легко видеть, что условие ${}^jU_{\min} < U_{\max}^{j+1} < U_{\min}^j < {}^jU_{\max}$ выполняется. Лемма доказана.

Следствие 2. *Отображение* $\tilde{P}(U_0) = W(2\pi, U_0)$ *имеет ровно одну неподвижную точку на каждом из отрезков* $[{}^jU_{\min}, {}^jU_{\max}]$, $j = 1, \ldots, 3$.

Доказательство. Из леммы 3 следует, что в областях B_j' интеграл в правой части равенства (15) отличен от нуля, а значит, производная отображения Пуанкаре в новых координатах $\tilde{P}'(U_0)$ отделена от единицы, если решение все время остается в области B_j'. Если же решение $U(\varphi, U_0)$ уравнения (13), где $U_0 \in [{}^jU_{\min}, {}^jU_{\max}]$, уходит за пределы отрезка $[{}^jU_{\min}, {}^jU_{\max}]$, то оно попадает в область, где по лемме 1 нет предельных циклов, а следовательно, само не является предельным циклом. Тогда такие U_0 не могут являться неподвижными точками отображения $\tilde{P}(U_0)$. В случае же если за весь оборот на 2π решение остается в том же отрезке, то по следствию 1 для него производная $\tilde{P}'(U_0)$ отделена от единицы. Отсюда следует, что на отрезке $[{}^jU_{\min}, {}^jU_{\max}]$ может находиться не более одной неподвижной точки отображения $\tilde{P}(U_0)$. Из доказательства леммы 1 легко видеть, что в каждом из промежутков $[{}^jU_{\min}, {}^jU_{\max}]$, $j = 1, \ldots, 3$, такая точка существует. Следствие доказано.

3.3. Возвращение к исходным переменным.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим отображение Пуанкаре для исходного уравнения Ши Сонглина, записанного в полярных координатах (5) с учетом выбора положительного направления оси ординат в качестве полутрансверсали: $P(r_0) = r(r_0, \varphi)|_{\varphi = \varphi_0 + 2\pi}$, где $\varphi_0 = \pi/2$. Введем следующие обозначения:

$$\tilde{U}(r) = U(r, \varphi_0) = U(r, \varphi_0 + 2\pi), \quad \tilde{r}(U) = r(U, \varphi_0) = r(U, \varphi_0 + 2\pi),$$

где последние равенства в каждой строке выполняются в силу 2π-периодичности функции U по φ и, как следствие, 2π-периодичности функции r. Тогда отображения Пуанкаре для уравнений (5) и (13) будут связаны следующим образом:

$$P(r_0) = \tilde{r}(\tilde{P}(\tilde{U}(r_0))).$$

Из следствий 1 и 2 вытекает, что для $0 < U_0 < U_{\max}^1$ у отображения $\tilde{P}(U_0)$ имеются ровно три неподвижные точки. Отсюда следует, что у отображения $P(r_0)$ на соответствующем интервале $0 < r < b_1 = 4 \times 10^{-4}$ также имеются ровно три неподвижные точки. А значит, у уравнения (1) в указанной в теореме 1 области имеются ровно три предельных цикла. Теорема доказана.

А.1. Алгоритм решения фактор-системы. Рассмотрим фактор-систему

$$L_v h(z,w) = g(h(z,w)),$$

в которой $L_v h = h'_z \dot{z} + h'_w \dot{w}$ – производная Ли (производная вдоль поля),

$$g(u) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k u^{k+1} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k u^{k+1} \tag{17}$$

и

$$h(z,w) = zw + \sum_{k=2}^{\infty} h_k(z,w), \tag{18}$$

где

$$h_k = \sum_{j=0}^{k} h_{kj} z^j w^{k-j}. \tag{19}$$

Рассмотрим алгоритм решения фактор-системы как уравнения относительно неизвестных рядов (18) и (17) для произвольного квадратичного векторного поля вида

$$\dot{z} = iz + F(z,w), \quad \dot{w} = -iw + G(z,w),$$

где $F(z,w)$ и $G(z,w)$ – однородные многочлены второй степени. Запишем фактор-систему для этого уравнения в явном виде

$$\left((iz + F(z,w))\frac{\partial}{\partial z} + (-iw + G(z,w))\frac{\partial}{\partial w}\right)h(z,w) = g(h(z,w)).$$

Используя представления (18) и (17), запишем левую и правую части этого уравнения в виде рядов по z и w и приравняем коэффициенты при соответствующих степенях. Для каждой конечной степени получим систему линейных уравнений.

Более подробно для фиксированной степени $k \geq 3$ получаются следующие равенства для однородных многочленов:

$$\left(iz\frac{\partial}{\partial z} - iw\frac{\partial}{\partial w}\right)h_k + \left(F\frac{\partial}{\partial z} + G\frac{\partial}{\partial w}\right)h_{k-1} = \sum_{m=1}^{(k-1)/2} g_m \deg_k\left(\sum_{l=1}^{[l/m]} h_l\right)^m$$

при k нечетном,

$$\left(iz\frac{\partial}{\partial z} - iw\frac{\partial}{\partial w}\right)h_k + \left(F\frac{\partial}{\partial z} + G\frac{\partial}{\partial w}\right)h_{k-1} = \sum_{m=1}^{k/2} g_m \deg_k\left(\sum_{l=1}^{[l/m]} h_l\right)^m$$

при k четном, где $\deg_k H$ – однородная часть многочлена H степени k. Используя представление (19), получаем для каждого фиксированного k систему линейных уравнений относительно h_{kj} для нечетных k и относительно h_{kj} и $g_{k/2}$ для четных k. Эти системы решаются рекуррентно: коэффициенты системы для степени k выражаются (причем в силу линейности оператора дифференцирования рационально) через решения систем для меньших степеней. Для $k = 2$ нетрудно проверить, что $g_1 = 0$ (это единственный неизвестный коэффициент).

В.1. Результат вычислений. Для общего уравнения

$$\dot z = iz + az^2 + bz\bar z + c\bar z^2, \quad \dot{\bar z} = -i\bar z + \bar a\bar z^2 + \bar b z\bar z + \bar c z^2 \tag{20}$$

после полиномиальной замены получается следующее приближение формальной нормальной формы до членов порядка 7:

$$\dot z = iz + \left(-\frac{2}{3}\,ic\bar c + iba - ib\bar b\right)z^2\bar z + \left(-2\,i\bar b ba\bar a - \frac{175}{36}\,ib\bar b\bar c c + \frac{17}{6}\,i\bar c acb - 2i\bar b^2 ac + i\bar b^2 b\bar a - ib^2\bar c\bar a + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3}\,i\bar b a^2 c - \frac{8}{27}\,i\bar c^2 c^2 - i\bar b^2 b^2 + 2\,i\bar c b^3 - \frac{1}{3}\,i\bar c ac\bar a + \frac{4}{3}\,i\bar b^3 c + \frac{23}{18}\,i\bar b\bar c c\bar a + 2\,i\bar b ab^2\right)z^3\bar z^2 +$$

$$+\left(icba^4 + \frac{1352}{135}\,i\bar c\bar b^3 c^2 + \frac{115}{24}\,i\bar b^4 bc + \frac{9}{2}\,ia^3b^3 + \frac{209}{180}\,i\bar b^2\bar c c\bar a^2 + \frac{5}{3}\,i\bar c\bar a ab^3 + \frac{2519}{540}\,i\bar c^2 abc^2 + \frac{61}{24}\,i\bar b^2 a^2 bc + \right.$$

$$+\frac{3}{2}\,i\bar a a^3 b^2 + \frac{103}{12}\,i\bar b^2 a^2 c\bar a + \frac{5}{6}\,i\bar b\bar c b^2\bar a^2 + \frac{25}{6}\,i\bar b^3 ac\bar a + \frac{49}{270}\,i\bar c^2 ac^2\bar a + \frac{1}{2}\,i\bar b^3 b\bar a^2 + \frac{19}{4}\,i\bar b^3 b^2\bar a + \frac{19}{18}\,i\bar b\bar c ac\bar a^2 +$$

$$+\frac{9}{4}\,i\bar b a^2 b^3 + \frac{38}{45}\,i\bar c c^2 a^3 + \frac{15}{2}\,i\bar b^2 ab^3 + \frac{38}{45}\,i\bar c^2 c\bar a^3 + \frac{37}{6}\,i\bar b\bar c b^4 + \frac{4477}{360}\,i\bar c^2 cb^3 + \frac{1}{3}\,i\bar b\bar c b\bar a^3 + \frac{17}{3}\,i\bar c ab^2\bar a^2 +$$

$$+\frac{361}{18}\,i\bar b^2\bar c bc\bar a + \frac{131}{60}\,ic^2\bar b\bar a\bar c^2 + \frac{4537}{144}\,i\bar b\bar c ab^2 c + \frac{41}{12}\,i\bar c\bar a a^2 bc - \frac{20}{3}\,i\bar c ab^4 - \frac{13}{4}\,i\bar b^4 c\bar a - \frac{49}{4}\,i\bar b^3 acb -$$

$$-\frac{25}{4}\,i\bar b\bar a a^2 b^2 - \frac{26}{3}\,i\bar b\bar c\bar a b^3 - \frac{143}{135}\,i\bar b\bar c a^2 c^2 - \frac{9}{4}\,i\bar b^3 b^3 - \frac{92}{243} i\bar c^3 c^3 - \frac{4}{3} i\bar c ba\bar a^3 - \frac{11}{2} i\bar b^2 ab\bar a^2 - \frac{13}{6} i\bar b\bar c\bar a a^3 -$$

$$-\frac{527}{45}\,i\bar b^2\bar c ac^2 - \frac{91}{8}\,i\bar b\bar c acb\bar a - \frac{5777}{360}\,i\bar c^2\bar b bc^2 - 5\,i\bar b a^2 b\bar a^2 - \frac{257}{90}\,i\bar c^2 bc\bar a^2 - 2i\bar b^2 ab^2\bar a - \frac{179}{120}\,i\bar c a^2 cb^2 -$$

$$\left. -\frac{233}{30}\,i\bar c^2\bar a b^2 c - \frac{53}{12} i\bar b ca^3 b - \frac{1}{5} i\bar c ca^3 b - \frac{1}{5}\,i\bar c a^2 c\bar a^2 - \frac{6203}{240}\,i\bar b^2\bar c b^2 c\right)z^4\bar z^3.$$

Подставляя значения коэффициентов из невозмущенного уравнения (1), получаем выражение

$$iz + \frac{65}{6} iz^2\bar z - \frac{311165}{432} iz^3\bar z^2 + \left(\frac{35625}{8} - \frac{14469090835}{31104} i\right)z^4\bar z^3.$$

В.2. Алгоритм нахождения формальной нормальной формы. Для нахождения формальной нормальной формы уравнения (20) использован пакет символьных вычислений Maple. Алгоритм, используемый в программе, соответствует стандартному доказательству теоремы Пуанкаре–Дюлака о приведении к формальной нормальной форме. Алгоритм состоит из повторяющегося шага (6 раз).

Опишем шаг. Имеется уравнение

$$\dot z = iz + F(z, w), \quad \dot{\bar z} = -i\bar z + G(z, \bar z),$$

где $F(z, \bar z)$ и $G(z, \bar z)$ – многочлены степени не выше n (в задаче $n = 8$), а наименьший моном – степени $k + 1$. Выполним подстановку $\hat z = z + f(z, \bar z)$, $\hat{\bar z} = \bar z + g(z, \bar z)$. Обозначив через x вектор переменных z и $\bar z$, через $\vec A(x)$ вектор, состоящий из F и G, а через $J(x)$ матрицу Якоби для f и g, запишем уравнение

$$\dot{\hat x}(E + J(\hat x)) = (\hat x + \vec A(\hat x)).$$

Умножим обе части на $(E + J(\hat x))^{-1}$ b и разложим в ряд Тейлора до требуемой степени:

$$\dot{\hat x} = (E - J(\hat x) + J(\hat x)^2 - \ldots + (-1)^l J(\hat x)^l)(\hat x + \vec A(\hat x)),$$

после чего отбросим члены более высокого порядка, чем n. Выполняемая подстановка соответствует подстановке в теореме Пуанкаре–Дюлака, а именно f и g – такие многочлены, что после выполнения k-го шага в нелинейной части остаются члены степени выше $k+1$ (кроме резонансных, т.е. вида $az^{m+1}\bar{z}^m$). Таким образом, за n шагов мы получаем символьное представление коэффициентов формальной нормальной формы уравнения (20) с заранее заданной точностью.

Автор благодарен Ю.С. Ильяшенко за постановку задачи и важные замечания, а также А.Д. Мышкису и В.А. Клепцыну за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 7-01-00017-а и 09-01-00608).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen Lan-Sun, Wang Ming-Shu.* The relative position, and the number of limit cycles of a quadratic differential system // Acta Math. Sinica, 1979. V. ??. P. ??–??.
2. *Shi Songling.* A concrete example of the existense of four limit sycles for plane quadratic systems // Scietific Sinica. 1980. V. 23. № 2. P. 153–158.
3. *Ильяшенко Ю.С.* Мемуар Дюлака “О предельных циклах” и смежные вопросы теории дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40. Вып. 1. С. 41–78.
4. *Zhang Pingguang.* On the distribution and number of limit cycles for quadratic systems with two foci // Qualitative Theory of Dynamical Systems. 2002. V. 3. P. 437–463.
5. *Ilyashenko Yu., Yakovenko S.* Lectures on Analytic Theory of Ordinary Differential Equations // Graduate Studies in Mathematics: 86. Amer. Math. Soc. 2008. V. 86. P. ??–??.

Московский государственный университет
путей сообщения

Поступила в редакцию
08.06.2008 г.