ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2012, том 48, № 8, с. 1193–1195

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.925.42

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ СИСТЕМ С ЧАСТНЫМ ИНТЕГРАЛОМ

© 2012 г. М. В. Долов, С. А. Чистякова

Для определенного класса двумерных автономных систем дифференциальных уравнений с инвариантной кривой, имеющей овалы, указаны необходимые и достаточные условия, когда только эти овалы будут предельными циклами фазовых траекторий.

Двумерные автономные системы дифференциальных уравнений с заданными программными движениями изучались многими авторами. Постановка задачи восходит к трудам Г. Дарбу и Н.П. Еругина.

В работе [1] рассматривались системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x,y)H_y(x,y) + a(x,y)H(x,y) \equiv P(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= -F(x,y)H_x(x,y) + b(x,y)H(x,y) \equiv Q(x,y), \end{aligned} \tag{1}$$

где функции $a,$ $b,$ F и H однозначны и аналитичны в области $G,$ указаны условия консервативности системы (1) вблизи овалов (неособых компактных компонент связности) кривой $H = 0$ и приведены условия существования или отсутствия предельных циклов, отличных от овалов $H = 0.$ В частности, доказана

Теорема 1. *Пусть на овале* $L \subset \{(x,y):\ H = 0\}$ *и внутри области* $B \subset G,$ $\partial B = L$ *функция* $F(x,y)$ *отлична от нуля и при этом в* B

$$(a/F)_x + (b/F)_y \equiv 0. \tag{2}$$

Тогда система (1) имеет интегрирующий множитель $\mu = (FH)^{-1}$ *и все траектории системы (1) в некоторой окрестности* $S(L,\varepsilon)$ *овала* L *замкнуты.*

В настоящей работе указаны классы систем, удовлетворяющих условию (2), при этом не исключается возможность, когда $F(x,y) = 0$ в области $B.$

1. Покажем, что для консервативности системы (1) вблизи L условие $F(x,y) \neq 0$ внутри $B,$ $\partial B = L,$ существенно.

В самом деле, при

$$a(x,y) \equiv x, \quad b(x,y) \equiv y, \quad F \equiv x^2 + y^2, \quad H \equiv x^2 + y^2 - 1 \tag{3}$$

система (1) имеет единственное состояние покоя $(0,0),$ предельный цикл описывается уравнением $x^2 + y^2 = 1,$ интегрирующий множитель $\mu = (x^2+y^2)^{-1}(x^2+y^2-1)^{-1},$ первый интеграл Дарбу $(x^2+y^2-1)(x+iy)^{-i/2}(x-iy)^{i/2} = C.$ При этом для системы (1) с правыми частями, определяемыми согласно (3), выполнено условие (2) всюду, кроме точки $(0,0),$ где $F = 0.$

Множеству систем (1), удовлетворяющих соотношению (2), принадлежат вещественные системы вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \beta_1\Phi_{1y}\Phi_2\cdots\Phi_k + \Phi_1\sum_{j=2}^{k}\beta_j\Phi_2\cdots\Phi_{j-1}\Phi_{jy}\Phi_{j+1}\cdots\Phi_k \equiv P, \\ \frac{dy}{dt} &= -\beta_1\Phi_{1x}\Phi_2\cdots\Phi_k - \Phi_1\sum_{j=2}^{k}\beta_j\Phi_2\cdots\Phi_{j-1}\Phi_{jx}\Phi_{j+1}\cdots\Phi_k \equiv Q, \end{aligned} \tag{4}$$

где Φ_j – попарно взаимно простые полиномы вещественных переменных x, y, неприводимы над полем комплексных чисел, величины $\beta_j \neq 0$, $j = \overline{1,k}$, и коэффициенты у $\Phi_j(x,y)$ в общем случае комплексные и такие, что полиномы P и Q взаимно просты.

Свойства систем (4) для различных значений числа k, степеней полиномов Φ_j, а также при изменении величин β_j и коэффициентов у Φ_j изучались в работах [2–10].

Следует отметить, что для $k = 1$ и $k = 2$ вещественная система (4) не имеет предельных циклов [2]. При $k \geq 3$ система (4) может иметь только алгебраические предельные циклы, при этом циклы гиперболичны, полиномы, определяющие предельные циклы, входят в аналитическое выражение первого интеграла Дарбу $\Gamma(x,y) = \Phi_1^{\beta_1} \cdots \Phi_k^{\beta_k} = C$, интегрирующего множителя $\mu = (\Phi_1 \cdots \Phi_k)^{-1}$ и функция $\Gamma(x,y)$ многозначна в окрестности любого предельного цикла [2]. Для алгебраически неинтегрируемых систем (4) (имеющих конечное число алгебраических инвариантных кривых), согласно [11], $k \leq n(n+1)/2 + 1$, где $n = \max(\deg P, \deg Q)$.

Заметим, что приведенный выше пример получается из системы (4) при $k = 3$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = -i/2$, $\beta_3 = i/2$, $H \equiv \Phi_1 \equiv x^2 + y^2 - 1$, $F \equiv \Phi_2\Phi_3$, где $\Phi_2 = x + iy$, $\Phi_3 = x - iy$.

2. Вопрос о предельных циклах системы (1) в случае, когда $F(x,y)$ – линейная функция, $a(x,y) \equiv a$, $b(x,y) \equiv b$, $a, b \in \mathbb{R}$, изучался в работах [12–14]. Для наличия предельного цикла, определяемого овалом ℓ кривой $H = 0$, достаточно, чтобы прямая $F = 0$ не пересекала овал ℓ и при этом $aF_x + bF_y \neq 0$. При выполнении этих условий у системы (1) нет предельных циклов, отличных от овалов $H = 0$, при этом предельные циклы, определяемые уравнением $H = 0$, гиперболичны [1, 12, 13].

Непосредственной проверкой с использованием теоремы 1 можно показать, что справедлива

Лемма. *Пусть в системе (1): 1)* $F(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma$, $a(x,y) \equiv a$, $b(x,y) \equiv b$, *где* $a, b, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $|a| + |b| > 0$, $|\alpha| + |\beta| > 0$; *2) выполнено тождество (2). Тогда существует число* $\nu \neq 0$ *такое, что* $a = -\nu\beta$, $b = \nu\alpha$ *и система (1) имеет первый интеграл* $HF^{-\nu} = C$, *интегрирующий множитель* $\mu = (HF)^{-1}$ *и не имеет предельных циклов.*

Теорема 2. *Пусть выполнено условие 1) леммы и* $H(x,y)$ *– полином степени* n *такой, что* $\max(\deg P, \deg Q) < n$. *Тогда система (1) алгебраически интегрируема, имеет первый интеграл Дарбу* $HF^{-n} = C$, *интегрирующий множитель* $\mu = (HF)^{-1}$ *и не имеет предельных циклов.*

Доказательство. Так как $\max(\deg P, \deg Q) < n$, то однородный полином $H_n(x,y)$ степени n, содержащийся в H, такой, что

$$(\alpha x + \beta y)H_{ny} + aH_n \equiv 0, \quad (\alpha x + \beta y)H_{nx} - bH_n \equiv 0. \tag{5}$$

Согласно (5), имеем $(\alpha x + \beta y)(bH_{ny} + aH_{nx}) \equiv 0$. Отсюда при $|\alpha| + |\beta| > 0$ следует, что $H_n(x,y) = C(ay - bx)^n$, где $C \equiv \mathrm{const} \neq 0$. Подставляя это выражение $H_n(x,y)$ в (5), при $|a| + |b| > 0$ получаем тождество

$$(n\alpha - b)x + (n\beta + a)y \equiv 0,$$

из которого находим $b = n\alpha$, $a = -n\beta$. Следовательно, выполнено соотношение (2) и применима лемма, в которой $\nu = n$. Теорема доказана.

Заметим, что при выполнении условий теоремы 2 система (1) получается из (4) при $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = -n$, $k = 2$, $\Phi_1 \equiv H$, $\Phi_2 \equiv F$. Если полином H неприводим, то применима

Теорема 3 [8]. *Пусть* $k = 2$, $\max(\deg P, \deg Q) = n$, $\deg \Phi_1 = m_1$, $\deg \Phi_2 = m_2$ *и при этом* $m_1 + m_2 > n + 1$. *Тогда* $\beta_1 m_1 + \beta_2 m_2 = 0$ *и все траектории системы (4) алгебраические.*

Из леммы и теоремы 1 работы [12] (теорем 1 и 2 из [1]) следует

Теорема 4. *При выполнении условия 1) леммы предельными циклами фазовых траекторий системы (1) будут только овалы кривой* $H = 0$, *лежащие в области* G, *тогда и только тогда, когда прямая* $F = 0$ *не пересекает овалы* $H = 0$ *и* $aF_x + bF_y = \alpha a + \beta b \neq 0$, *при этом циклы гиперболичны.*

Из теоремы 4 вытекают утверждения теорем 3.3 и 3.5 [15], касающиеся предельного цикла $x^2 + y^2 = 1$ квадратичной системы и его гиперболичности.

Работа поддержана грантом НК-13П-13.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Долов М.В., Кузьмин Р.В.* О предельных циклах систем с заданным частным интегралом // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 7. С. 1125–1132.
2. *Долов М.В.* О дифференциальных уравнениях, порожденных интегралом типа Дарбу // Дифференц. и интегр. уравнения: Межвуз. сб. ННГУ. Н. Новгород, 1990. С. 31–37.
3. *Долов М.В., Косарев В.В.* О бифуркациях предельных циклов уравнений, допускающих интегралы Дарбу // Дифференц. и интегр. уравнения: Межвуз. сб. ГГУ. Горький, 1981. С. 3–8.
4. *Долов М.В., Косарев В.В.* Интегралы Дарбу и рождение предельных циклов из кратного фокуса // Дифференц. и интегр. уравнения: Межвуз. сб. ГГУ. Горький, 1982. С. 10–14.
5. *Долов М.В., Лисин Б.В., Косарев В.В.* Интегралы Дарбу и бифуркации особых циклов // Дифференц. и интегр. уравнения: Межвуз. сб. ГГУ. Горький, 1982. С. 15–20.
6. *Балтаг В.А., Сибирский К.С.* Интегралы типа Малкина и новые случаи центра дробно-кубического дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 4. С. 555–562.
7. *Балтаг В.А.* Интеграл типа Дарбу и новые случаи центра кубической дифференциальной системы: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Горький, 1985.
8. *Долов М.В., Упырина Е.С.* К вопросу об алгебраической интегрируемости // Дифференц. и интегр. уравнения: Межвуз. сб. ГГУ. Горький, 1985. С. 106–107.
9. *Долов М.В.* О бифуркациях предельных циклов алгебраических дифференциальных уравнений с интегралами типа Дарбу // Дифференц. и интегр. уравнения: Межвуз. сб. ГГУ. Горький, 1988. С. 4–11.
10. *Лухманова Т.В.* Динамически предельные множества кубических систем дифференциальных уравнений, порожденных интегралом типа Дарбу: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Н. Новгород, 1999.
11. *Долов М.В.* О числе алгебраических инвариантных кривых полиномиальных векторных полей // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 6. С. 838–839.
12. *Долов М.В., Кузьмин Р.В.* О предельных циклах одного класса систем // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 9. С. 1441–1445.
13. *Christopher C.* Polinomial vector fields with prescribed algebraic limit cycles // Geometrial Dedicata. 2001. 88. P. 255–258.
14. *Баутин Н.Н.* Оценка числа алгебраических предельных циклов системы $x' = P(x, y)$, $y' = Q(x, y)$ с алгебраическими правыми частями // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 2. С. 362.
15. *Дружкова Т.А.* Алгебраические дифференциальные уравнения с алгебраическими интегралами // Учебно-метод. пособие. ННГУ. Ч. 2. Н. Новгород, 2009.

Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского,
Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде

Поступила в редакцию
06.12.2010 г.