О. М. Солычева

Национальный исследовательский университет - Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде, Solycheva@list.ru

О СТРУКТУРЕ ЛИПШИЦЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ СУПЕРПОЗИЦИИ НА ПРОСТРАНСТВЕ ΛBV

В работе получено представление генератора липшицева оператора суперпозиции, действующего из пространства функций двух переменных конечной Λ–вариации Уотермана в себя.

Пусть $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ — базовый прямоугольник в $\mathbb{R}^2$, где $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ такие, что $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$. Обозначим через $\mathbb{R}^I$ множество всех функций, действующих из I в $\mathbb{R}$. Пусть $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$ — неубывающая последовательность чисел, такая что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} 1/\lambda_i^2$ расходится.

Определим функцию $f(\cdot, a_2) : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$ правилом: $f(\cdot, a_2)(x_1) = f(x_1, a_2)$, $a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1$. Для нее Λ–вариация в смысле Уотермана [1] на отрезке $[a_1, b_1]$ есть величина

$$V_\Lambda(f(\cdot, a_2)) = \sup \sum_{i=1}^{m} \frac{|f(y_{1i}, a_2) - f(x_{1i}, a_2)|}{\lambda_i},$$

где супремум берется по всем $m \in \mathbb{N}$ и всем неупорядоченным наборам неналегающих отрезков $[x_{1i}, y_{1i}] \subset [a_1, b_1]$, $i = 1, \ldots, m$. Аналогично определяется Λ–вариация $V_\Lambda(f(a_1, \cdot))$ функции $f(a_1, \cdot)(x_2) = f(a_1, x_2)$, $a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2$.

Для функции $f \in \mathbb{R}^I$ *двумерной* Λ*–вариацией в смысле Уотермана–Дьяченко* [2] на I называется выражение

$$V_{2,\Lambda}(f, I) = \sup \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{|f(x_{1i}, x_{2j}) + f(y_{1i}, y_{2j}) - f(x_{1i}, y_{2j}) - f(y_{1i}, x_{2j})|}{\lambda_i \lambda_j},$$

где супремум берется по всем парам $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ и всем неупорядоченным наборам неналегающих отрезков $[x_{1i}, y_{1i}] \subset \subset [a_1, b_1]$, $i = 1, \dots, m$, и $[x_{2j}, y_{2j}] \subset [a_2, b_2]$, $j = 1, \dots, n$.

Полную Λ*–вариацию* функции $f \in \mathbb{R}^I$ определим так: $TV_\Lambda(f, I) = V_\Lambda(f(a_1, \cdot)) + V_\Lambda(f(\cdot, a_2)) + V_{2,\Lambda}(f, I)$ и через $\Lambda\mathrm{BV}$ обозначим пространство функций $f \in \mathbb{R}^I$ с $TV_\Lambda(f, I) < \infty$.

Оператором суперпозиции с *генератором* $h : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, назовем оператор $(\mathcal{H}f)(x) = h(x, f(x))$, где $x \in I$ и $f \in \mathbb{R}^I$.

Для $f \in \Lambda\mathrm{BV}$ ее *левая регуляризация* есть $f^* : I \to \mathbb{R}$ [3]:

$$f^*(x_1, x_2) = \begin{cases} \lim\limits_{(y_1,y_2)\to(x_1-0,x_2-0)} f(y_1, y_2), & a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2, \\ \lim\limits_{(y_1,y_2)\to(x_1-0,a_2+0)} f(y_1, y_2), & a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1,\ x_2 = a_2, \\ \lim\limits_{(y_1,y_2)\to(a_1+0,x_2-0)} f(y_1, y_2), & x_1 = a_1,\ a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2, \\ \lim\limits_{(y_1,y_2)\to(a_1+0,a_2+0)} f(y_1, y_2), & x_1 = a_1,\ x_2 = a_2. \end{cases}$$

Теорема. *Если* $\mathcal{H}$ *действует из* $\Lambda\mathrm{BV}$ *в себя и липшицев, то найдутся две непрерывные слева функции* $h_0, h_1 \in \Lambda\mathrm{BV}$ *такие, что* $h^*(x, u) = h_0(x) + h_1(x)u$ *для всех* $x \in I$, $u \in \mathbb{R}$ *([4]), где* $h^*(x, u)$ *— левая регуляризация* $h(x, u)$*, определенная для каждого фиксированного* $u \in \mathbb{R}$.

Эта теорема обобщает результаты работ [3], [4] и [5].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Waterman D. *On* Λ*-bounded variation* // Studia Math. – 1976. – V. 57. – № 1. – P. 33–45.

2. Dyachenko M. I., Waterman D. *Convergence of double Fourier series and* W*-classes* // Trans. Amer. Math. Soc. – 2004. – V. 357. – № 1. – P. 397–407.

3. Chistyakov V. V. *Superposition operators in the algebra of functions of two variables with finite total variation* // Monatsh. Math. – 2002. – V. 137. – № 2. – P. 99–114.

4. Matkowski J., Miś J. *On a characterization of Lipschitzian operators of substitution in the space* $BV\langle a,b\rangle$ // Math. Nachr. – 1984. – V. 117. – P. 155–159.

5. Chistyakov V. V., Solycheva O. M. it Lipschitzian Operators of Substitution in the Algebra ΛBV // J. of Diff. Equations and Appl. – 2003. – V. 9. – № 3/4. – P. 407–416.