Российская академия наук

Автоматика и Телемеханика

Журнал основан в 1936 году
Выходит 12 раз в год

8
август
2010

·Наука·Москва

СОДЕРЖАНИЕ

Моделирование поведения и интеллекта

© 2010 г. **В.В. ПОДИНОВСКИЙ, д-р техн. наук**
(Государственный университет – Высшая школа экономики, Москва)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ ОБ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ЗАМЕЩЕНИЯХ КРИТЕРИЕВ В АНАЛИЗЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ[1]

Предложена и обоснована математическая модель многокритериальных предпочтений, в которой отношение предпочтения формируется с использованием интервальных оценок относительных замещений значений одних критериев значениями других критериев. Развита теория и методы анализа многокритериальных задач на основе такой модели.

1. Введение

Теория интервальных оценок замещений значений одних критериев значениями других критериев и связанная с ними теория параметрической важности критериев были заложены в [1, 2], развиты в [3] и других работах и к настоящему времени являются уже в определенной степени сформировавшимися. Обстоятельный обзор посвященных этим теориям работ и сравнительный анализ полученных в них результатов приведен в [4]. Отметим здесь еще и вышедшую недавно статью [5].

В указанных выше теориях рассматривались интервальные оценки абсолютных замещений критериев. Однако в экономической теории и ее многочисленных практических приложениях применяются не только абсолютные, но и относительные замещения, лежащие в основе известного понятия эластичности (см., например, [6]). Сравнение по предпочтительности именно относительных, а не абсолютных изменений (приращений) критериев представляется во многих случаях, в том числе при анализе экономических задач, более естественным и удобным, чем сопоставление абсолютных их изменений.

Поэтому актуальной научной задачей, имеющей важное прикладное значение, является развитие теории интервальных оценок относительных замещений критериев. Ей и посвящена настоящая статья.

2. Математическая модель проблемной ситуации

Последующее изложение опирается на следующую математическую модель ситуации принятия (индивидуального) решения при многих критериях (в условиях определенности):

(1) $\langle \tau, X, Z, f, P \rangle$,

[1] Работа выполнена в рамках Индивидуального исследовательского проекта № 09-01-0005 «Развитие теории и разработка методов использования интервальной информации об относительных замещениях критериев для анализа многокритериальных задач при помощи компьютерных систем поддержки принятии решений» при поддержке Программы «Научный фонд ГУ-ВШЭ».

где τ – тип постановки задачи, X – множество вариантов (стратегий, планов, альтернатив); Z – множество векторных оценок, f – векторный критерий (векторная целевая функция); P – отношение предпочтения. Разберем подробнее смысл элементов модели (1).

Тип постановки задачи τ определяется ее содержательной формулировкой, например: τ_1 – выбрать один наилучший (оптимальный) вариант, τ_l – отобрать l (> 1) лучших вариантов, $\tau_\downarrow$ – ранжировать (упорядочить по предпочтительности) все варианты и т.д. Каждый вариант $x \in X$ характеризуется значениями не менее двух критериев f_i; они называются *частными* и составляют *векторный критерий* $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Под *критерием* f_i понимается функция, определенная на X и принимающая значения из множества Z_i, называемого обычно *шкалой* критерия[2]. Далее будем полагать, что значения всех критериев являются числовыми, т.е. шкала Z_i каждого критерия f_i является подмножеством множества действительных чисел $\Re$. Таким образом, каждый вариант x характеризуется значениями $f_i(x)$ всех критериев, образующими *векторную оценку* этого варианта $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. Множество всех векторных оценок есть $Z = Z_1 \times \ldots \times Z_m \subseteq \Re^m$; само m-мерное пространство $\Re^m$ называется *критериальным*. Предполагается, что вариант полностью характеризуется его векторной оценкой, так что сравнение вариантов по предпочтительности сводится к сопоставлению их векторных оценок.

Предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР), моделируются при помощи *отношения предпочтения* P на Z, так что yPz означает, что векторная оценка y предпочтительнее, чем z. Предполагается, что это отношение является *строгим частичным порядком*, т.е. оно иррефлексивно (yPy неверно для любого $y \in Z$) и транзитивно (для любых $y, z, w \in Z$ из yPz и zPw следует yPw).

Далее будем полагать, что большие значения каждого критерия предпочтительнее его меньших значений (как говорят, критерии положительно ориентированы, или их желательно максимизировать). Поэтому считается, что с отношением предпочтения P согласовано *отношение Парето*, или *Эджворта-Парето* P^0 (т.е. $P^0 \subseteq P$), которое определяется на Z так:

$$(2) \qquad yP^0 z \Leftrightarrow y \geq z.$$

Здесь и далее для числовых векторов размерности не менее 2 используются обозначения:

$$y \geqq z \Leftrightarrow y_i \geqslant z_i, \quad i = 1, \ldots, m;$$
$$y \geq z \Leftrightarrow (y \geqq z, y \neq z); \quad y > z \Leftrightarrow y_i > z_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

В числовых нестрогих неравенствах используется конвенциональный знак $\geqslant$.

Отношение P (за исключением «его части» P^0) неизвестно и восстанавливается (с той или иной степенью полноты) в процессе разработки модели (1) на основе информации о предпочтениях Θ, получаемой от ЛПР и/или экспертов. Отношение P^Θ на Z, являясь «восстановленной частью» отношения P (т.е. $P^\Theta \subseteq P$), порождает соответствующее отношение P_X^Θ на множестве вариантов X: $x' P_X^\Theta x'' \Leftrightarrow f(x') P^\Theta f(x'')$, которое и используется для формирования решения задачи в соответствии с ее постановкой τ. Например, если требуется выбрать наилучший вариант (постановка типа τ_1), то строится множество недоминируемых (максимальных по P_X^Θ) вариантов; если нужно выделить l лучших вариантов (постановка типа τ_l), то конструируется множество l-недоминируемых вариантов [7], и т.д.

Таким образом, построение отношения предпочтения P^Θ является одной из базовых проблем при разработке модели (1) для решения практических многокритериальных задач. Именно эта проблема применительно к интервальной информации об относительных замещениях критериев и рассматривается далее.

[2] Более строгие наименования – множество шкальных оценок, область значений критерия.

3. Интервальные оценки относительных замещений критериев

Пусть y – произвольная векторная оценка. Если для величин $\Delta_i > 0$ и $\Delta_j > 0$ векторная оценка $(y \parallel y_i - \Delta_i,\ y_j + \Delta_j)$, полученная из y заменой ее компонент y_i и y_j соответственно на $y_i - \Delta_i$ и $y_j + \Delta_j$, безразлична по отношению к y, т.е. эти две векторные оценки одинаковы по предпочтительности (разумеется, с точки зрения ЛПР), то говорят, что уменьшение на Δ_i значения y_i критерия[3] *i компенсируется* увеличением на Δ_j значения y_j критерия j или что имеет место *замещение критерия i критерием j* или *на критерий j* (для соответствующих величин их приращений). Именно такие, абсолютные, замещения рассматривались в теории параметрической важности и теории интервальных оценок замещений, что и было подчеркнуто во введении.

Далее принимается, пока специально не будет оговорено иное, что шкалой каждого критерия i служит множество положительных чисел $\Re_+ = (0, +\infty)$, т.е. $Z_i = \Re_+$. Следовательно, множеством всех векторных оценок является внутренность положительного ортанта пространства $\Re^m$, т.е. $Z = \Re^m_+$.

Будем рассматривать относительные изменения $\delta_i = \Delta y_i / y_i$ критериев i. Практически, величины $\Delta y_i = \delta_i y_i$ будут составлять несколько процентов или долей процента от y_i, и тогда величины δ_i будут малыми – не более нескольких сотых.

Пусть y – произвольная векторная оценка. Если векторная оценка $(y \parallel (1-\delta_i)y_i,\ (1+\delta_j)y_j)$ безразлична по отношению к y, то будем говорить, что имеет место *относительное замещение критерия i критерием j* (для соответствующих величин их относительных приращений). Отметим, что при малых числах δ_i и δ_j величину $E_i^j = \delta_j/\delta_i$, по аналогии с терминологией математической экономики, можно назвать *коэффициентом эластичности* критерия j по критерию i.

Известно, что человеку при выражении своих предпочтений сложно давать точечные оценки, что приводит к появлению ошибок, снижает надежность и достоверность полученных результатов [8]. В частности, для фиксированного изменения Δ_i ему сложно указать точное значение Δ_j такое, при котором векторные оценки y и $(y \parallel y_i - \Delta_i,\ y_j + \Delta_j)$ будут безразличны. С другой стороны, величина Δ_j будет зависеть, вообще говоря, от выбранной «опорной» векторной оценки y (даже при фиксированной величине Δ_i). Поэтому, как и в случае абсолютных замещений критериев, полезно обратиться к интервальным оценкам. Мы введем понятие интервальной оценки относительных замещений путем краткого рассмотрения процедуры ее практического получения; эта процедура аналогична процедуре для абсолютных замещений из [9]. Общий порядок ее проведения подобен общему порядку проведения процедур оценивания параметров многокритериальных функций ценности и полезности [10].

Пусть выбрана пара критериев i, j и y^0 - некоторая фиксированная векторная оценка. Предположим, что значение y_i^0 критерия i уменьшено на $\delta_i \cdot 100\%$, т.е. до величины $(1-\delta_i)y_i^0$. (Отметим, что в математической экономике при исчислении и интерпретации эластичности общепринято изменение базовой величины на 1%, так что $\delta_i = 0{,}01$.) Будем спрашивать ЛПР, как будут изменяться его предпочтения, если одновременно с указанным уменьшением значения критерия i увеличивать значение y_j^0 критерия j на $\delta_j \cdot 100\%$, т.е. до величины $(1+\delta_j)y_j^0$.

Вначале назначим величину увеличения $\delta_j = \delta_1^+$ такой большой, чтобы «совместный эффект» указанных изменений значений двух критериев заведомо привел к росту предпочтения, т.е. ЛПР ответило бы, что одновременное изменение обоих критериев на указанные величины желательно. После этого повторим вопрос, используя меньшее число δ_2^+ (см. рис. 1, на котором стрелки направлены от более предпочтительных сочетаний значений критериев к менее предпочтительным; и

---

[3] Здесь и далее для краткости записи критерии будут обозначаться своими номерами.

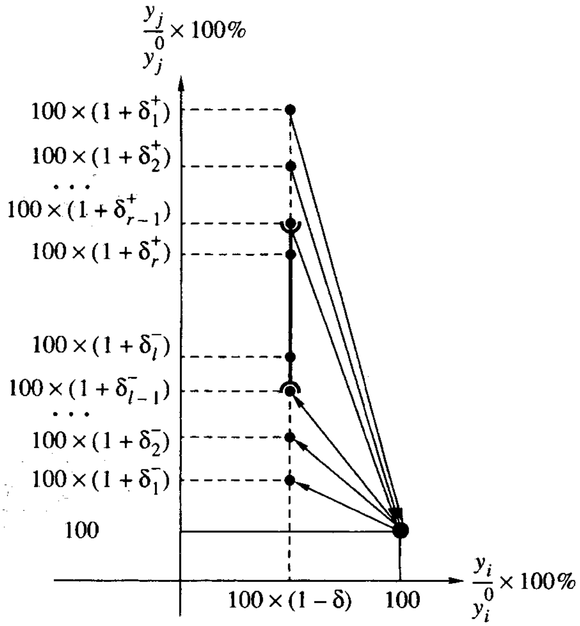

Рис. 1. Построение интервальной оценки относительного замещения критерия i критерием j.

$\delta = \delta_i$). Если и такое увеличение критерия j желательно, то возьмем число $\delta_3^+ < \delta_2^+$ и вновь зададим соответствующий вопрос, и т.д. Пусть δ_r^+ – такое положительное число, при котором ЛПР впервые ответит, что оно затрудняется сказать, как изменится предпочтение – возрастет или же уменьшится.

Теперь проведем опрос ЛПР, начав с такого малого числа $\delta_j = \delta_1^- > 0$, чтобы «совместный эффект» указанных изменений значений двух критериев заведомо привел бы к убыванию предпочтения, т.е. ЛПР ответило бы, что одновременное изменение обоих критериев на указанные величины нежелательно. После этого повторим вопрос, используя большее число $\delta_2^- > \delta_1^-$ (см. рис. 1). Если и такое увеличение критерия j недостаточно, то возьмем число $\delta_3^- > \delta_2^-$ и вновь повторим вопрос, и т.д. Пусть δ_l^- – такое положительное число, при котором ЛПР впервые ответит, что оно затрудняется сказать, как изменится предпочтение (возрастет или уменьшится).

Из описанной процедуры ясно, что интервал $(\delta_{l-1}^-, \delta_{r-1}^+)$ можно рассматривать как интервальную оценку неопределенности относительных замещений критерия i критерием j (при фиксированных значениях остальных критериев). Далее необходимо несколько раз повторить описанную процедуру для нескольких других уровней y_i^0 и y_j^0, на которых будут зафиксированы исходные значения выбранных двух критериев, а затем то же сделать при нескольких других фиксированных значениях всех остальных критериев, кроме критериев i и j. После этого нужно построить объединение всех полученных интервалов и получить интервал (δ^-, δ^+), т.е. принять за δ^- наименьшее из чисел – левых концов всех полученных интервалов, а за δ^+ – наибольшее из чисел – правых концов этих интервалов. Наконец, остается задать ЛПР заключительный вопрос: «Верно ли, что если зафиксировать значения всех критериев на произвольных уровнях, то увеличение критерия j на $\delta^+ \cdot 100\%$ при одновременном уменьшении критерия i на $\delta_i \cdot 100\%$ приводит к увеличению предпочтений, а увеличение критерия j лишь на $\delta^- \cdot 100\%$ – к уменьшению предпочтений?». При положительном ответе на этот вопрос на практике можно принять, что полу-

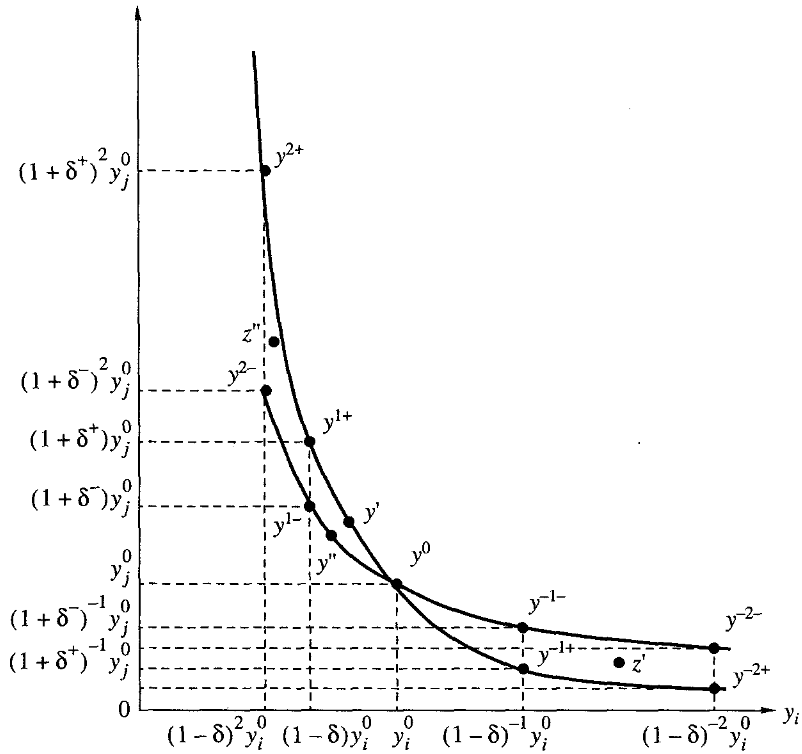

Рис. 2. Построение векторных оценок, более и менее предпочтительных, чем y^0.

чена интервальная оценка относительных замещений (δ^-, δ^+). При отрицательном ответе придется этот интервал расширить. Понятно, однако, что желательно получить возможно более узкий интервал (δ^-, δ^+). Разумеется, проведение описанной процедуры «по полной программе» практически весьма обременительно, и поэтому при анализе прикладных задач следует постараться ее разумно сократить, по возможности уменьшив число соответствующих вопросов к ЛПР.

Итак, интервальная оценка (δ^-, δ^+) показывает, что если критерий i уменьшить на $\delta_i \cdot 100\%$, то одновременное увеличение критерия j на $\delta^+ \cdot 100\%$ приведет к увеличению предпочтений, а увеличение критерия j на $\delta^- \cdot 100\%$ приведет к уменьшению предпочтений.

Поскольку интервальная оценка (δ^-, δ^+) является глобальной в том смысле, что по предположению годится для любой опорной векторной оценки, то можно последовательно, опираясь на полученные при ее помощи очередные векторные оценки, получать следующие более предпочтительные векторные оценки $y^{k+} = \left(y^{(k-1)+} \parallel (1-\delta_i)y_i^{(k-1)+}, (1+\delta^+)y_j^{(k-1)+}\right)$ и менее предпочтительные векторные оценки $y^{k-} = \left(y^{(k-1)-} \parallel (1-\delta_i)y_i^{(k-1)-}, (1+\delta^-)y_j^{(k-1)-}\right)$, $k = 2, 3, \ldots$. Так как по предположению предпочтения ЛПР транзитивны, то следует принять, что каждая из точек y^{k+} предпочтительнее, чем исходная точка y^0, а каждая из точек y^{k-} менее предпочтительна, чем y^0 (см. рис. 2, где $\delta = \delta_i$). Далее, приняв за исходную точку $y^{-1+} = \left(y^0 \parallel (1-\delta_i)^{-1}y_i^0, (1+\delta^+)^{-1}y_j^0\right)$ и вспомнив свойство оценки δ^+, убеждаемся, что точка y^0 более предпочтительна, чем y^{-1+}. Аналогично, приняв за исходную точку $y^{-1-} = \left(y^0 \parallel (1-\delta_i)^{-1}y_i^0, (1+\delta^-)^{-1}y_j^0\right)$, видим, что точка y^0 менее предпочтительнее, чем y^{-1-}. Указанным образом последовательно получим более предпочтительные, чем y^0, точки $y^{k-} = \left(y^{(k+1)-} \parallel (1-\delta_i)^{-1} y_i^{(k+1)-}, (1+\delta^-)^{-1} y_j^{(k+1)-}\right)$ и менее предпочтительные точки $y^{k+} = \left(y^{(k+1)+} \parallel (1-\delta_i)^{-1} y_i^{(k+1)+}, (1+\delta^+)^{-1} y_j^{(k+1)+}\right)$, $k = -1, -2, \ldots$ (см. рис. 2).

Все точки (векторные оценки) y^0, y^{k+}, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ лежат на кривой в координатной плоскости $(y_i 0 y_j)$, задаваемой уравнением:

$$\frac{y_j}{y_j^0} = \left(\frac{y_i}{y_i^0}\right)^{-\mu_{ij}^+}, \tag{3}$$

где

$$\mu_{ij}^+ = -\frac{\ln(1+\delta^+)}{\ln(1-\delta_i)}. \tag{4}$$

Действительно, согласно определению точек y^{k+} можно записать:

$$y_i^{k+} = (1-\delta_i)^k y_i^0, \quad y_j^{k+} = (1+\delta^+)^k y_j^0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Поэтому

$$\ln \frac{y_i^{k+}}{y_i^0} = k \ln(1-\delta_i), \quad \ln \frac{y_j^{k+}}{y_j^0} = k \ln(1+\delta^+), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Следовательно,

$$\ln \frac{y_j^{k+}}{y_j^0} = \frac{\ln(1+\delta^+)}{\ln(1-\delta_i)} \ln \frac{y_i^{k+}}{y_i^0} = -\mu_{ij}^+ \ln \frac{y_i^{k+}}{y_i^0},$$

откуда видно, что точки (y_i^{k+}, y_j^{k+}) лежат на кривой (3).

Аналогично, все точки (векторные оценки) y^0, y^{k-}, $k = \pm 1, \pm 2$, лежат на кривой в координатной плоскости $(y_i 0 y_j)$, задаваемой уравнением

$$\frac{y_j}{y_j^0} = \left(\frac{y_i}{y_i^0}\right)^{-\mu_{ij}^-}, \tag{5}$$

где

$$\mu_{ij}^- = -\frac{\ln(1+\delta^-)}{\ln(1-\delta_i)}. \tag{6}$$

Как уже выше отмечалось, величины δ_i, δ^- и δ^+ на практике малы (обычно не превышают нескольких сотых единицы), и тогда $\mu_{ij}^- \approx \delta^-/\delta_i$ и $\mu_{ij}^+ \approx \delta^+/\delta_i$ (поскольку если δ – близкая к нулю величина, то приращение функции $\ln t$ при изменении t от 1 до $1+\delta$ примерно равно $(\ln t)'_{t=1} \cdot \delta = \delta$).

Наконец, если допустить «нелинейную интерполяцию», т.е. принять, что промежуточные точки, лежащие между перечисленными выше «опорными» точками на соответствующих ветвях кривых (3) и (5), обладают теми же свойствами относительно предпочтений, что и «опорные» точки, то окажется, что всякая точка, лежащая на любой из двух ветвей, выходящих из y^0 и проходящих через y^{1+} или y^{-1-}, предпочтительнее, чем y^0, и всякая точка, лежащая на любой из двух ветвей, выходящих из y^0 и проходящих через y^{1-} или y^{-1+}, менее предпочтительна, чем y^0.

Таким образом, интервальная оценка (μ_{ij}^-, μ_{ij}^+) позволяет для произвольной фиксированной точки (векторной оценки) y^0 указать границы областей на плоскости $(y_i 0 y_j)$ таких, что всякая точка y' из верхней области (в том числе с ее границы) более предпочтительна, чем y^0, и всякая точка y'' из нижней области менее предпочтительна, чем y^0 (см. рис. 2). А вот точки z' и z'', лежащие вне этих областей, не сравнимы по предпочтительности с y^0. Эти две последние области, лежащие между указанными парами ветвей кривых, можно назвать зонами неопределенности. В частности, если существует кривая безразличия, проходящая через y^0, то она будет лежать как раз внутри этих двух зон. Однако для дальнейшего изложения вводить предположение о существовании кривых безразличия вовсе не требуется.

В свете изложенного выше становится ясно, что для интервальной оценки $(\mu_{ij}^-,\ \mu_{ij}^+)$ имеет смысл ввести наименование *интервала неопределенности относительных замещений* (сокращенно ИНОЗ). Для подчеркивания отличия этого интервала от использовавшегося ранее в [4, 9] интервала неопределенности замещений (ИНЗ) стоит (при совместном их рассмотрении) заменять последнее название на *интервал неопределенности абсолютных замещений* (ИНАЗ).

Уравнения кривых (3) и (5) удобно представить в параметрической форме:

$$(7) \qquad y_i = y_i^0 t, \quad y_j = y_j^0 t^{-\mu_{ij}^+}, \quad y_i = y_i^0 t, \quad y_j = y_j^0 t^{-\mu_{ij}^-}, \quad t \in (0, +\infty).$$

Учитывая (7) и принимая за y^0 текущую точку y, приходим к базовому определению ИНОЗ.

Определение 1. *Интервалом неопределенности относительных замещений (ИНОЗ) называется интервал $\mu_{ij} = (\mu_{ij}^-,\ \mu_{ij}^+)$, где $0 < \mu_{ij}^- < \mu_{ij}^+$, порождающий на множестве векторных оценок $Z = \Re_+^m$ отношение предпочтения $P^{\mu_{ij}}$:*

$$(8) \qquad \left(y \parallel y_i t, y_j t^{-\mu_{ij}^+}\right) P^{\mu_{ij}} y \quad \textit{и} \quad y P^{\mu_{ij}} \left(y \parallel y_i t, y_j t^{-\mu_{ij}^-}\right)$$
$$\textit{для любых} \quad y \in Z \quad \textit{и} \quad t \in (0,1).$$

Нетрудно убедиться в том, что определение (8) равносильно следующему, которое иногда может оказаться удобнее:

$$(9) \qquad y P^{\mu_{ij}} \left(y \parallel y_i t,\ y_j t^{-\mu_{ij}^+}\right) \quad \text{и} \quad \left(y \parallel y_i t,\ y_j t^{-\mu_{ij}^-}\right) P^{\mu_{ij}} y$$
$$\text{для любых} \quad y \in Z \quad \text{и} \quad t > 1.$$

Описанную выше процедуру интервального оценивания относительных замещений критериев можно несколько видоизменить. А именно, значение y_i^0 критерия i можно не уменьшать, а увеличивать на $\delta_i \cdot 100\%$, т.е. до величины $(1+\delta_i)y_i^0$. И тогда придется спрашивать ЛПР, как будут изменяться его предпочтения, если одновременно с указанным увеличением значения критерия i уменьшать значение y_j^0 критерия j на $\delta_j \cdot 100\%$, т.е. до величины $(1-\delta_j)y_j^0$. В итоге, после проведения всей процедуры оценивания прежним порядком, но с очевидными изменениями, будет получена интервальная оценка (δ^-, δ^+), показывающая, что если критерий i увеличить на $\delta_i \cdot 100\%$, то одновременное уменьшение критерия j на $\delta^- \cdot 100\%$ приведет к увеличению предпочтений, а уменьшение критерия j на $\delta^+ \cdot 100\%$ приведет к уменьшению предпочтений.

Далее можно получить последовательность более предпочтительных, чем y^0, векторных оценок $y^{k-} = \left(y^{(k-1)-} \parallel (1+\delta_i)y_i^{(k-1)-}, (1-\delta^-)y_j^{(k-1)-}\right)$ и последовательность менее предпочтительных векторных оценок $y^{k+} = \left(y^{(k-1)+} \parallel (1+\delta_i)y_i^{(k-1)+},\right.$ $\left.(1-\delta^+)y_j^{(k-1)+}\right)$, $k = 2, 3, \ldots$. А затем – последовательности более предпочтительных, чем y^0, векторных оценок $y^{k+} = \left(y^{(k+1)+} \parallel (1+\delta_i)^k y_i^{(k+1)+}, (1-\delta^+)^k y_j^{(k+1)+}\right)$

и менее предпочтительных векторных оценок $y^{k-} = \Big(y^{(k+1)-} \parallel (1+\delta_i)^k y_i^{(k+1)-}$, $(1-\delta^-)^k y_j^{(k+1)-}\Big)$, $k = -1, -2, \ldots$

Все точки (векторные оценки) y^0, y^{k+}, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ лежат на кривой в координатной плоскости $(y_i 0 y_j)$, задаваемой уравнением:

$$\frac{y_j}{y_j^0} = \left(\frac{y_i}{y_i^0}\right)^{-\mu_{ij}^+}, \quad \text{где} \quad \mu_{ij}^- = -\frac{\ln(1-\delta^+)}{\ln(1+\delta_i)}.$$

Аналогично, все точки (векторные оценки) y^0, y^{k-}, $k = \pm 1, \pm 2$, лежат на кривой в координатной плоскости $(y_i 0 y_j)$, задаваемой уравнением:

$$\frac{y_j}{y_j^0} = \left(\frac{y_i}{y_i^0}\right)^{-\mu_{ij}^-}, \quad \text{где} \quad \mu_{ij}^- = -\frac{\ln(1-\delta^-)}{\ln(1+\delta_i)}.$$

Наконец, допустив «нелинейную интерполяцию», придем опять же к определению 1 с заданием отношения $P^{\mu_{ij}}$ в виде (9), которое, как уже отмечалось, равносильно (8).

Примечание 1. Если рассматривать лишь только одну из оценок μ_{ij}^- или μ_{ij}^+, то придем к односторонним интервальным оценкам. Такие оценки для абсолютных замещений критериев рассматривались в теории параметрической важности критериев [1, 3, 4].

4. Отношение предпочтения, порождаемое интервальной информацией об относительных замещениях критериев

Пусть М – совокупность накопленных (полученных от ЛПР и/или экспертов) ИНОЗ. Каждый ИНОЗ $\mu_{ij} = (\mu_{ij}^-, \mu_{ij}^+)$ согласно его определению порождает на множестве векторных оценок $Z = \Re_+^m$ отношение строгого предпочтения $P^{\mu_{ij}}$. Поскольку отношение предпочтения ЛПР P транзитивно, то (в предположении, что ИНОЗ адекватно представляют предпочтения ЛПР, т.е. $P^{\mu_{ij}} \subset P$) отношение предпочтения P^{M}, порождаемое на Z информацией М, определяется как наименьшее транзитивное отношение, включающее объединение всех отношений $P^{\mu_{ij}}$ и отношения Парето P^0:

$$P^{\mathrm{M}} = \mathrm{TrCl}\left[\left(\bigcup_{\mu_{ij}\in \mathrm{M}} P^{\mu_{ij}}\right) \bigcup P^0\right], \tag{10}$$

где TrCl – символ операции транзитивного замыкания бинарного отношения.

В соответствии с определением (10) $yP^{\mathrm{M}}z$ выполнено в том и только в том случае, если существует цепочка

$$yP^1z^1,\ z^1P^2z^2, \ldots, z^{n-1}P^nz, \tag{11}$$

где все $z^k \in Z$, а P^k есть P^0 или $P^{\mu_{ij}}$ для некоторого $\mu_{ij} \in \mathrm{M}$ при каждом $k = 1, 2, \ldots, n$ (число n, разумеется, зависит от y, z).

Определение (11) неконструктивно, и потому требуется разработка эффективных методов его построения. О них речь пойдет ниже.

Практически, в интервальную информацию М могут вкрасться ошибки. В качестве необходимого условия их отсутствия примем аналогично [1, 3] внутреннюю непротиворечивость самой этой информации.

Определение 2. Информация М *(внутренне) непротиворечива, если отношение* P^{M} *иррефлексивно.*

Конструктивные методы проверки непротиворечивости информации М рассмотрены ниже.

5. Логарифмическое преобразование критериев и связь ИНОЗ с ИНАЗ

Далее будем использовать следующие обозначения:

$$u_i = \ln y_i, \quad v_i = \ln z_i, \quad g_i = \ln f_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Введем в рассмотрение отношения $P_{\ln}^{\mu_{ij}}$, индуцируемые на $\Re^m$ отношениями $P^{\mu_{ij}}$ (см. (8)):

$$(12) \qquad \left(u \parallel u_i - \tau, u_j + \mu_{ij}^{+}\tau\right) P_{\ln}^{\mu_{ij}} u \quad \text{и} \quad u P_{\ln}^{\mu_{ij}} \left(u \parallel u_i - \tau, u_j + \mu_{ij}^{-}\tau\right)$$
$$\text{для любых} \quad u \in R^m \quad \text{и} \quad \tau > 0,$$

а также отношение $P_{\ln}^{0} : uP_{\ln}^{0}v \Leftrightarrow u \geq v$.

Рассматривая (12), нетрудно увидеть, что ИНОЗ μ_{ij} для критериев f_i из (1) играет роль ИНАЗ для логарифмически преобразованных критериев $g_i = \ln f_i$ (см. [1, 3, 4]). Поэтому отношение P^{M} индуцирует на $\Re^m$ отношение $P_{\ln}^{\mathrm{M}}$:

$$(13) \qquad P_{\ln}^{\mathrm{M}} = \mathrm{TrCl}\left[\left(\bigcup_{\mu_{ij} \in \mathrm{M}} P_{\ln}^{\mu_{ij}}\right) \bigcup P_{\ln}^{0}\right].$$

Поскольку

$$yP^{\mu_{ij}}z \Leftrightarrow uP_{\ln}^{\mu_{ij}}v \quad \text{и} \quad yP^{0}z \Leftrightarrow uP_{\ln}^{0}v,$$

то всякой цепочке (11) будет соответствовать цепочка

$$(14) \qquad uP^1v^1, \quad v^1P^2v^2, \quad \ldots, \quad v^{n-1}P^nv,$$

где все $v^k \in \Re^m$, а P^k есть $P_{\ln}^{0}$ или $P_{\ln}^{\mu_{ij}}$ для некоторого $\mu_{ij} \in \mathrm{M}$ при каждом $k = 1, 2, \ldots, n$. И, наоборот, каждой цепочке (14) будет соответствовать цепочка (11). Следовательно, $yP^{\mathrm{M}}z$ верно тогда и только тогда, когда выполнено $uP_{\ln}^{\mathrm{M}}v$. Поэтому для исследования отношения $P_{\ln}^{\mathrm{M}}$, порождаемого ИНОЗ, и связанных с ним конструкций и определений можно использовать результаты, «наработанные» ранее для отношения P^{M}, порождаемого ИНАЗ [3, 4]. Таким образом, для анализа многокритериальных задач при наличии интервальной информации об относительных замещениях критериев можно воспользоваться методами, полученными ранее для интервальной информации об абсолютных замещениях, если прологарифмировать исходные критерии.

Для движения по указанному пути каждому $\mu_{ij} \in \mathrm{M}$ поставим в соответствие две вектор-строки $a^{-}(\mu_{ij})$ и $a^{+}(\mu_{ij})$:

$$(15) \qquad a_k^{-}(\mu_{ij}) = \begin{cases} -\mu_{ij}^{-}, & k = j, \\ 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i, j; \end{cases} \qquad a_k^{+}(\mu_{ij}) = \begin{cases} \mu_{ij}^{+}, & k = j, \\ -1, & k = i, \\ 0, & k \neq i, j. \end{cases}$$

Пусть q – число ИНОЗ в М. Используя вектор-строки (15) (их можно брать в произвольном порядке), составим $(2q \times m)$-матрицу A^{M}. Введем в рассмотрение множество

$$(16) \qquad \mathrm{B}^{\mathrm{M}} = \left\{\beta \in \Re^m \mid \beta > 0, \ A^{\mathrm{M}}\beta > 0\right\}.$$

Обозначим через R^{M} бинарное отношение на $Z = \Re^m_+$, определяемое как объединение отношения P^{M} и отношения равенства векторов из Z. Приведем следующие два базовых утверждения, получаемые из соответствующих утверждений для ИНАЗ.

Теорема 1. Информация M *непротиворечива тогда и только тогда, когда множество* B^{M} *не пусто.*

Теорема 2. Если информация M *непротиворечива и* $y \neq z$, *то* $yP^{\mathrm{M}}z$ *справедливо тогда и только тогда, когда существует вектор* $h \in \Re^{2q}$ *с неотрицательными компонентами, такой, что*

$$u - v \geqq hA^{\mathrm{M}}. \tag{17}$$

Доказательства теорем 1 и 2 вынесены в Приложение.

Согласно теореме 1 проверка непротиворечивости информации M сводится к выяснению совместности системы строгих линейных неравенств

$$A^{\mathrm{M}}\beta > 0, \quad \beta > 0.$$

Очевидно, что эта однородная система совместна тогда и только тогда, когда совместна следующая система нестрогих линейных неравенств:

$$A^{\mathrm{M}}\beta \geqq \bar{\varepsilon}, \quad \beta \geqq \bar{\varepsilon}, \tag{18}$$

где $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon, \ldots, \varepsilon)$ и ε – произвольное фиксированное положительное число.

В соответствии с теоремой 2 для проверки справедливости $yP^{\mathrm{M}}z$ при $y \neq z$ следует выяснить, совместна ли следующая система линейных неравенств, в которой $b = u - v$:

$$hA^{\mathrm{M}} \leqq b, \quad h \geqq 0. \tag{19}$$

Практически важно то обстоятельство, что проверку совместности систем неравенств (18) и (19) можно проводить при помощи методов линейного программирования, используя подходящий пакет компьютерных программ (например, MS Excel). Заметим также, что для проверки непротиворечивости информации M часто удобнее использовать другое условие из [4], сформулированное при помощи понятия цикла на графе.

Примечание 2. На практике могут встретиться задачи, в которых будет удобно сопоставлять абсолютные уменьшения (увеличения) одних критериев с относительными увеличениями (уменьшениями) других. Для такого «смешанного» случая в предположении, что шкалой каждого критерия, для которого рассматриваются абсолютные приращения, является вся числовая прямая, несложно провести соответствующие теоретические построения, подобные проделанным выше с учетом конструкций из [3, 4], и получить аналогичные результаты (с надлежащими модификациями в записях и формулировках). Понятно, что при этом логарифмировать придется только те критерии, для которых рассматриваются относительные приращения. Пусть, например, значение y_i^0 критерия i уменьшается на $\Delta_i > 0$ и рассматривается увеличение значения y_j^0 критерия j до $(1 + \delta_j)y_j^0$. Введя в рассмотрение векторные оценки вида $\widetilde{y} = (y \parallel \ln y_j)$, вместо (8) и (12) получим:

$$\left(\widetilde{y} \parallel y_i - t, \ln y_j + \rho^- t\right) P^{\mu_{ij}} \widetilde{y} \quad \text{и} \quad \widetilde{y} P^{\mu_{ij}} \left(\widetilde{y} \parallel y_i - t, \ln y_j + \rho^+ t\right)$$
$$\text{для любых} \quad y \in Z \quad \text{и} \quad t > 0,$$

где $\rho^- = \ln(1 + \delta^-)/\Delta_i$, $\rho^+ = \ln(1 + \delta^+)/\Delta_i$. Более подробное рассмотрение «смешанного» случая выходит за рамки данной статьи.

6. Задачи с базовым критерием

Построение отношения P^{M} указанными выше общими методами может оказаться обременительным уже при «не очень большом» числе вариантов. Поэтому актуальной является разработка эффективных методов для структур интервальной информации М специальных видов.

Будем рассматривать задачи, в которых М состоит из интервалов неопределенности относительных замещений (ИНОЗ) каждого из критериев $2, \ldots, m$ критерием 1 (его называют *базовым*): $\mathrm{M} = \{\mu_{21}, \ldots, \mu_{m1}\}$.

Из результатов исследования непротиворечивости [4] сразу вытекает, что справедлива

Теорема 3. *Информация* $\mathrm{M} = \{\mu_{21}, \ldots, \mu_{m1}\}$ *непротиворечива.*

С практической точки зрения рассматриваемые задачи представляют несомненный интерес, так как в роли базового естественно может выступать критерий, имеющий смысл денежной суммы (например, величины расходов или затрат). Поэтому приведем дальнейшие результаты именно для такого случая, когда базовый критерий желательно минимизировать, а все остальные – максимизировать. Эти результаты можно формально получить из результатов для задач, в которых все критерии желательно максимизировать, заменой f_1 на $1/f_1$. Однако здесь возникают некоторые особенности, и потому рассматриваемый случай стоит разобрать более подробно.

Прежде всего, заметим, что при определении интервальной оценки замещений критерия i базовым критерием 1 удобнее («естественнее») увеличить значение y_i^0 критерия i до величины $(1+\delta_i)y_i^0$ и анализировать изменение предпочтений при одновременном увеличении значения базового критерия 1 до величины $(1+\delta)y_1^0$. А полученный интервал $(\delta^-,\ \delta^+)$ будет иметь следующий смысл: если критерий i увеличить на $\delta_i \cdot 100\%$, то одновременное увеличение критерия 1 на $\delta^+ \cdot 100\%$ приведет к уменьшению предпочтений, а увеличение критерия 1 на $\delta^- \cdot 100\%$ приведет к увеличению предпочтений. В частности, если $\delta_i = 0{,}01$, то можно сказать, что за увеличение критерия i на 1% ЛПР согласен заплатить дополнительно $100 \cdot \delta^-\%$ от суммы y_1^0 и не согласен доплачивать $\delta^+ \cdot 100\%$.

При указанном порядке оценивания вместо кривых (5) и (3) получим кривые:

$$\frac{y_1}{y_1^0} = \left(\frac{y_i}{y_i^0}\right)^{\mu_{i1}^-}, \quad \frac{y_1}{y_1^0} = \left(\frac{y_i}{y_i^0}\right)^{\mu_{i1}^+},$$

где

$$\mu_{ij}^- = \frac{\ln(1+\delta^-)}{\ln(1+\delta_i)}, \quad \mu_{ij}^+ = \frac{\ln(1+\delta^+)}{\ln(1+\delta_i)}.$$

В определении 1 вместо (8) следует записать:

$$\left(y \parallel y_i t,\, y_1 t^{\mu_{i1}^-}\right) P^{\mu_{i1}} y \quad \text{и} \quad y P^{\mu_{ij}} \left(y \parallel y_i t,\, y_1 t^{\mu_{i1}^+}\right)$$
$$\text{для любых} \quad y \in Z \quad \text{и} \quad t \in (0,1).$$

Конструкция отношения предпочтения P^{M} и определение 2 остаются без изменений.

Пусть y и z – произвольные фиксированные векторные оценки. Выделим из множества всех критериев без базового $J = \{2, 3, \ldots, m\}$ два непересекающихся подмножества:

$$J^+ = \{i \in J \mid y_i > z_i\}, \quad J^- = \{i \in J \mid y_i < z_i\}. \tag{20}$$

При $y_i \neq z_i$ для некоторого $i > 1$, по крайней мере, одно из двух введенных множеств не пусто. Положим:

$$\rho^- = \frac{z_1}{y_1} \cdot \prod_{i \in J^+} \left(\frac{y_i}{z_i}\right)^{\mu_{i1}^-} \cdot \prod_{i \in J^-} \left(\frac{y_i}{z_i}\right)^{\mu_{i1}^+}; \tag{21}$$

$$\rho^+ = \frac{z_1}{y_1} \cdot \prod_{i \in J^+} \left(\frac{y_i}{z_i}\right)^{\mu_{i1}^-} \cdot \prod_{i \in J^-} \left(\frac{y_i}{z_i}\right)^{\mu_{i1}^+}. \tag{22}$$

(Если одно из множеств J^+ или J^- пусто, то соответствующие произведения в (21) и (22) равны 1.) Заметим, что $\rho^+ \geqslant \rho^-$, причем равенство достигается лишь при $y = z$.

Теорема 4. Если $y_i \neq z_i$ для некоторого $i > 1$, то

$$yP^{\mathrm{M}}z \Leftrightarrow \rho^- \geqslant 1; \quad zP^{\mathrm{M}}y \Leftrightarrow 1 \geqslant \rho^+; \quad yN^{\mathrm{M}}z \Leftrightarrow \rho^- < 1 < \rho^+. \tag{23}$$

В (23) через N^{M} обозначено отношение несравнимости: $yN^{\mathrm{M}}z$ означает, что $y \neq z$ и неверно ни $yP^{\mathrm{M}}z$, ни $zP^{\mathrm{M}}y$. Доказательство теоремы 4 вынесено в Приложение.

Теорема 4 имеет интересный смысл: она показывает, что всю «интервальную» неопределенность, касающуюся оценки относительных замещений каждого из $m-1$ критериев базовым, можно пересчитать в один интервал неопределенности (ρ^-, ρ^+). Правда, последний интервал зависит от пары сравниваемых векторных оценок.

Примечание 3. На случай, когда не для всех критериев имеются интервальные оценки относительных замещений базовым критерием, теоремы 1–4 легко обобщаются при помощи принципа декомпозиции [1, 11].

7. Задачи с ограниченными или дискретными критериями

Выше рассматривался случай, когда все критерии континуальны, положительны и не ограничены сверху. Но в практических задачах шкалы критериев могут быть ограничены снизу и/или сверху некоторыми положительными числами, а также быть не континуальными, а дискретными (обычно целочисленными). Для этого, более общего, случая, в котором преобразование исходной векторной оценки может вывести за пределы множества векторных оценок Z, определение (8) следует переформулировать следующим образом:

$$zP^{\mu_{ij}}y, \quad \text{где} \quad y, z = \left(y \parallel y_i t, y_j t^{-k_{ij}^+}\right) \in Z, \quad t \in (0,1),$$

и

$$yP^{\mu_{ij}}z, \quad \text{где} \quad y, z = \left(y \parallel y_i t, y_j t^{-k_{ij}^-}\right) \in Z, \quad t \in (0,1).$$

Аналогичным образом следует переформулировать и определение (9).

Вопрос о возможности переноса полученных выше результатов сводится, по существу, к аналогичному вопросу для ИНАЗ, который достаточно подробно исследован в [3, 4]. Приведем краткую сводку соответствующих результатов применительно к ИНОЗ.

Если все критерии континуальны, причем ни для одного ограниченного критерия i шкала Z_i не является отрезком вида $[a_i, b_i]$, где $0 < a_i < b_i$, то теоремы 1–2 остаются верными. В противном случае, а также при наличии дискретных критериев из теоремы 1 сохраняют силу лишь необходимые условия, а из теоремы 2 – достаточные условия.

Однако если все критерии континуальны или же лишь только базовый критерий континуален, но его шкала Z_1 не является отрезком вида $[a_1, b_1]$, где $0 < a_1 < b_1$ (при этом все остальные критерии могут быть ограниченными континуальными и/или дискретными), то теоремы 3 и 4 остаются верными.

8. Заключение

В статье изложена методология использования интервальной информации об относительных замещениях критериев в анализе многокритериальных задач принятия решений:

– предложен способ получения интервальных оценок относительных замещений (ИНОЗ) критериев;

– введено определение отношения предпочтения, порождаемого ИНОЗ для одной пары критериев;

– определено отношение предпочтения, учитывающее всю накопленную интервальную информацию об относительных замещениях критериев;

– установлена тесная взаимосвязь интервальных оценок относительных и абсолютных замещений критериев, что позволяет использовать (с надлежащими изменениями) результаты, полученные ранее для ИНАЗ, и для информации в форме ИНОЗ;

– указаны методы проверки накопленной интервальной информации об относительных замещениях критериев на непротиворечивость;

– предложены оптимизационные методы сравнения многокритериальных вариантов по предпочтительности с использованием информации в форме ИНОЗ, ориентированные на реализацию в компьютерных системах поддержки принятия решений;

– описан аналитический метод сравнения многокритериальных вариантов по предпочтительности для задач с базовым критерием, ориентированный как на применение в компьютерных системах поддержки принятия решений, так и (при небольшом числе критериев и вариантов) для использования «вручную» – при помощи обычных вычислительных средств выполнения математических операций.

Автор признателен рецензенту за замечания, которые учтены при доработке статьи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1.

Информация M непротиворечива тогда и только тогда, когда отношение $P^{\mathrm{M}}_{\ln}$, порождаемое на $\Re^m$ отношением P^{M}, иррефлексивно. А для иррефлексивности $P^{\mathrm{M}}_{\ln}$, согласно теореме 3 из [4] (или следствию 1 из [3]) необходимо и достаточно, чтобы множество B^{M} не было пустым.

Доказательство теоремы 2.

Согласно пояснению, данному в [4] после теоремы 1, если информация M непротиворечива и $u \neq v$, то $uP^{\mathrm{M}}_{\ln}v$ выполняется тогда и только тогда, когда существует вектор $h \in \Re^{2q}$ с неотрицательными компонентами такой, что $u - v \geqq hA^{\mathrm{M}}$. Остается вспомнить, что $u \neq v$ и $uP^{\mathrm{M}}_{\ln}v$ равносильно $y \neq z$ и $yP^{\mathrm{M}}z$.

Доказательство теоремы 4.

Заменив базовый критерий f_1 на $1/f_1$ (его желательно максимизировать), будем рассматривать векторные оценки вида $\widetilde{y} = (1/y_1, y_2, \ldots, y_m)$ и соответствующие векторы $\widetilde{v} = (-\ln y_1, \ln y_2, \ldots, \ln y_m)$.

Пусть $w = \widetilde{u} - \widetilde{v}$. Положим:

$$w_1^- = w_1 + \sum_{i \in J^+} w_i \mu_{i1}^- + \sum_{i \in J^-} w_i \mu_{i1}^+; \qquad w_1^+ = w_1 + \sum_{i \in J^+} w_i \mu_{i1}^+ + \sum_{i \in J^-} w_i \mu_{i1}^-.$$

Согласно [4] справедливо утверждение:

$$(24) \qquad uP_{\ln}^{\mathrm{M}} v \Leftrightarrow w_1^- \geqslant 0; \quad vP_{\ln}^{\mathrm{M}} u \Leftrightarrow 0 \geqslant w_1^+; \quad uN_{\ln}^{\mathrm{M}} v \Leftrightarrow w_1^- < 0 < w_1^+.$$

Перепишем приведенные результаты для исходных векторных оценок, обозначив $\rho^- = \exp(w_1^-)$, $\rho^+ = \exp(w_1^+)$. Учитывая, что

$$\exp(w_1) = \exp(\widetilde{u}_1 - \widetilde{v}_1) = \frac{\exp \widetilde{u}_1}{\exp \widetilde{v}_1} = \frac{\exp \ln(1/y_1)}{\exp \ln(1/z_1)} = \frac{z_1}{y_1},$$

$$\exp(w_i \mu_{i1}^-) = \exp \mu_{i1}^- (u_i - v_i) = \exp \mu_{i1}^- (\ln y_i - \ln z_i) =$$

$$= \exp \mu_{i1}^- \left(\ln \frac{y_i}{z_i} \right) = \exp \left[\ln \left(\frac{y_i}{z_i} \right)^{\mu_{i1}^-} \right] = \left(\frac{y_i}{z_i} \right)^{\mu_{i1}^-},$$

из (24) сразу получаем (23).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Подиновский В.В.* Об относительной важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений / Многокритериальные задачи принятия решений. М.: Машиностроение, 1978.
2. *Levanon Y., Passy U.* The indifference band in multiple criteria decision problems // Omega. 1980. V. 8. P. 647–654.
3. *Меньшикова О.Р., Подиновский В.В.* Построение отношения предпочтения и ядра в многокритериальных задачах с упорядоченными по важности неоднородными критериями // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1988. № 5. С. 647–659.
4. *Подиновский В.В.* Параметрическая важность критериев и интервалы неопределенности замещений в анализе многокритериальных задач // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 2008. Т. 48. № 11. С. 1979–1998.
5. *Подиновский В.В., Кривцун И.Л.* Параметрическая множественная важность критериев в анализе многокритериальных задач // Тр. IV междунар. конф. по пробл. упр. (26–30 января 2009 г. М.: ИПУ РАН). М.: ИПУ РАН, 2009. С. 1067–1071.
6. *Вэриан Х.Р.* Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход. Уч. для вузов / Пер. с англ. М.: ЮНИТИ, 1997.
7. *Подиновский В.В.* Выбор нескольких лучших объектов при частичном отношении предпочтения // Докл. АН. 2009. Т. 424. № 5. С. 604–606.
8. *Ларичев О.И.* Теория и методы принятия решений / Уч. для вузов. М.: Университет. книга, Логос, 2006.
9. *Меньшикова О.Р., Подиновский В.В.* Отношение предпочтения с интервалами неопределенности замещений // АиТ. 2007. № 6. С. 157–165.
10. *Кини Р.Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1981.
11. *Подиновский В.В.* Аксиоматическое решение проблемы оценки важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений / Современное состояние теории исследования операций. М.: Наука, 1979.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.Ю. Чеботаревым.

Поступила в редакцию 25.01.2010