Вариант 1

1. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(1-4x) > -2.$$

2. Решить уравнение

$$4\cdot 3^{x-1}+7\cdot 3^{x}=25.$$

3. Решить уравнение

$$\frac{3x-1}{x^2+x-6}+\frac{2x-5}{x-2}=-2.$$

4. Решить уравнение

$$\sqrt{3x+10}+x=6.$$

5. Найти область определения и множество значений функции

$$y=\log_2\left(12+4x-x^2\right).$$

6. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\frac{ax-6}{x+1}=x+3$$

имеет единственное решение.

7. Найти все пары целых чисел x, y, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases}3y-x<5\\ x+y>26\\ 3x-2y<46.\end{cases}$$

8. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. На ребре DD_1 взята точка M так, что $D_1M=\frac{1}{3}$. Найти:

а) периметр треугольника AMC;

б) расстояние от вершины C_1 до плоскости, проходящей через точки A, M, C.

9. Найти все значения a, при которых уравнение

$$9\cos 2x-12\sin x=a$$

имеет решения.

Решение варианта 1

Задача 1.

$$\log_{\frac{1}{3}}(1-4x)>-2 \quad\Leftrightarrow\quad \log_{\frac{1}{3}}(1-4x)>\log_{\frac{1}{3}}9 \quad\Leftrightarrow\quad 0<1-4x<9$$

$$\Leftrightarrow\quad -1<-4x<8 \quad\Leftrightarrow\quad -2<x<\frac{1}{4}.$$

Ответ: $x\in\left(-2;\frac{1}{4}\right)$.

Задача 2.

$$4\cdot 3^{x-1}+7\cdot 3^{x}=25 \quad\Leftrightarrow\quad 3^x\left(\frac{4}{3}+7\right)=25 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3^x\cdot 25}{3}=25$$

$$\Leftrightarrow\quad 3^x=3 \quad\Leftrightarrow\quad x=1.$$

Ответ: 1 .

Задача 3.

$$\frac{3x-1}{x^2+x-6}+\frac{2x-5}{x-2}=-2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3x-1}{(x+3)(x-2)}+\frac{2x-5}{x-2}+2=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}3x-1+(2x-5)(x+3)+2\left(x^2+x-6\right)=0\\ x\neq-3;\ x\neq 2\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}4x^2+6x-28=0\\ x\neq-3;\ x\neq 2\end{cases} \quad\Leftrightarrow.$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-\dfrac{7}{2}\end{array}\right.\\ x\neq-3;\ x\neq2\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad x=-\frac{7}{2}.$$

Ответ: $-\frac{7}{2}$.

Задача 4.

$$\sqrt{3x+10}+x=6\quad\Leftrightarrow\quad\sqrt{3x+10}=6-x\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}3x+10=(6-x)^2\\ 6-x\geq0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x^2-15x+26=0\\ x\leq6\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=13\end{array}\right.\\ x\leq6\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad x=2.$$

Ответ: 2.

Задача 5.

1) Область определения функции $y=\log_2(12+4x-x^2)$ задается неравенством

$12+4x-x^2>0\quad\Leftrightarrow\quad x^2-4x-12<0\quad\Leftrightarrow\quad x\in(-2;6)$.

Значит $D(y)=(-2;6)$.

2) Найдем $E(y)$ – множество значений функции. Воспользуемся тем, что $a\in E(y)\Leftrightarrow$ уравнение $\log_2(12+4x-x^2)=a$ имеет решение.

$\log_2(12+4x-x^2)=a\quad\Leftrightarrow\quad 12+4x-x^2=2^a\quad\Leftrightarrow\quad x^2-4x+2^a-12=0$.

Полученное квадратное уравнение имеет решение, если $D\geq0$. Значит:

$D=16-4(2^a-12)=64-4\cdot2^a\geq0\quad\Leftrightarrow\quad 2^a\leq16\quad\Leftrightarrow\quad a\leq4$.

Следовательно, $E(y)=(-\infty;4]$.

Ответ: $D(y)=(-2;6)$

$E(y)=(-\infty;4]$.

Задача 6.

$$\frac{ax-6}{x+1}=x+3\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x^2+(4-a)x+9=0\\ x\neq-1\end{cases}$$

Определим, при каких a дискриминант полученного квадратного уравнения равен нулю:

$$D=(4-a)^2-36=0\quad\Leftrightarrow\quad a^2-8a-20=0\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l}a_1=-2\\ a_2=10.\end{array}\right.$$

Чтобы узнать, при каких a квадратное уравнение будет иметь корень $x=-1$, подставим это значение в уравнение. Мы получим

$$1-(4-a)+9=0\quad\Rightarrow\quad a=-6.$$

Таким образом, если $a=-2$ или $a=10$, то квадратное уравнение имеет один корень, который не равен -1, т.е. эти значения a удовлетворяют условию задачи. Если $a=-6$, то квадратное уравнение имеет два корня ($D>0$), и один из корней равен -1. Значит второй корень является единственным корнем исходного уравнения, т.е. и это значение a тоже удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a\in\{-6;-2;10\}$.

Задача 7.

$$\begin{cases}3y-x<5\\ x+y>26\\ 3x-2y<46.\end{cases}$$

Используя неравенства системы, оценим x.

Умножим второе неравенство на -3 и сложим его с первым:

$$\begin{cases}3y-x<5\\ -3x-3y<-78\end{cases}\quad\Rightarrow\quad-4x<-73\quad\Rightarrow\quad x>\frac{73}{4}=18\frac{1}{4}.$$

Умножив первое неравенство на 2, а третье неравенство на 3, сложим их:

$$\begin{cases}6y-2x<10\\9x-6y<138\end{cases} \Rightarrow \quad 7x<148 \quad \Rightarrow \quad x<\frac{148}{7}=21\frac{1}{7}.$$

Значит $18\frac{1}{3}<x<21\frac{1}{7}$. Поскольку x – целое число, то x=19 или x=20.

1) Пусть $x=19$. Подставим это значение в систему:

$$\begin{cases}3y-19<5\\19+y>26\\57-2y<46\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y<8\\y>7\\y>\frac{11}{12}.\end{cases}$$

Полученная система не имеет целых решений.

2) Пусть $x=20$. Подставим это значение в систему:

$$\begin{cases}3y-20<5\\20+y>26\\60-2y<46\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y<\frac{25}{3}=8\frac{1}{3}\\y>6\\y>7.\end{cases}$$

Полученная система имеет только одно целые решение $y=8$.

Ответ: $\begin{cases}x=20\\y=8\end{cases}.$

Задача 8.

1) Найдем периметр треугольника AMC (рис. 1)

$$AC=\sqrt{1+1}=\sqrt{2};\ \ AM=MC=\sqrt{1^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{13}}{3}.$$

$$p=AC+AM+MC=\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{13}}{3}.$$

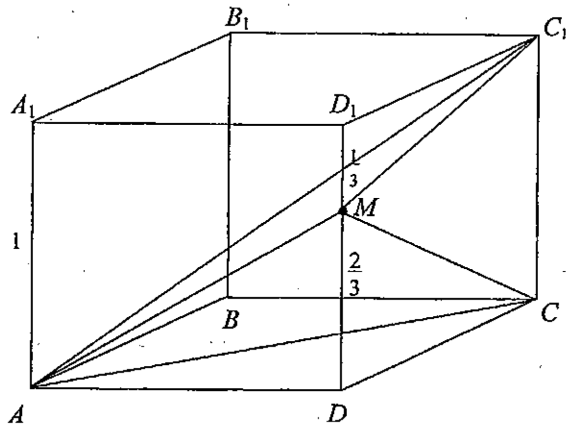


Рис. 1

2) Найдем расстояние от вершины C_1 до плоскости AMC. Опустим перпендикуляр из C_1 на плоскость AMC. Обозначим длину этого перпендикуляра за h. Чтобы найти h, вычислим V – объем треугольной пирамиды AMC_1C двумя способами:

а) $V=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta MC_1C}\cdot AD=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{6}$;

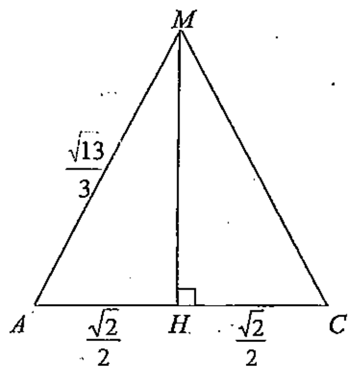


Рис. 2

б) $V=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta AMC}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{17}}{6}\cdot h=\frac{h\sqrt{17}}{18}$.

Площадь треугольника AMC вычисляется так:

$$MH=\sqrt{AM^2-AH^2}=\sqrt{\frac{13}{9}-\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{34}}{6};$$

$$S_{\Delta AMC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{34}}{6}=\frac{\sqrt{17}}{6}\text{ (рис. 2).}$$

Приравнивая вычисленные объемы, найдем h:

$$\frac{1}{6}=\frac{h\sqrt{17}}{18}\quad\Rightarrow\quad h=\frac{3}{\sqrt{17}}.$$

Ответ: 1) $p=\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{13}}{3}$;

2) $\frac{3}{\sqrt{17}}$.

Задача 9.

Перепишем уравнение в виде квадратного уравнения относительно $t=\sin x$.

$$9(1-2t^2)-12t=a\quad\Rightarrow\quad -18t^2-12t+9=a,\ t\in[-1;1]$$

Построим график функции $y=-18t^2-12t+9$, где $t\in[-1;1]$ (рис. 3).

Графиком будет парабола, ветви которой направлены вниз; вершина находится в точке $t_0=-\frac{в}{2a}=-\frac{1}{3}$; $y\left(-\frac{1}{3}\right)=-2+4+9=11$;

$y(-1)=3$; $y(1)=-21$.

Уравнение будет иметь решение, если горизонтальная прямая $y=a$ пересекает график функции. Это будет при $a\in[-21;11]$.

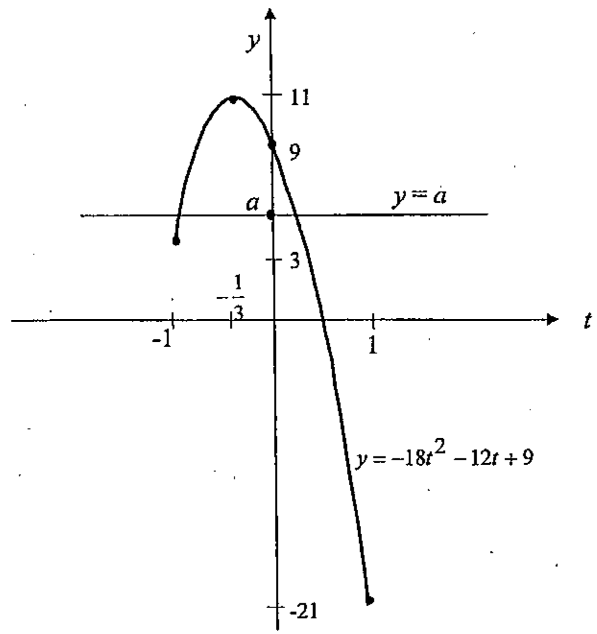


Рис. 3

Ответ: $a\in[-21;11]$.

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\frac{2}{x+1} \ge \frac{3}{x-1}.$$

2. Решить уравнение

$$4^{x^2} \cdot 2^{x-3} = \frac{1}{4}.$$

3. Решить неравенство

$$x^4 + 2x^2 - 3 < 0.$$

4. Решить уравнение

$$\left|x^2 - 8x - 4\right| = x - 4.$$

5. Найти область определения функции

$$y = \log_3\left(\sqrt{x+2} - x\right).$$

6. Найти множество значений функции

$$y = 4\sin^2 2x - 8\cos^2 x + 3.$$

7. Область G задана на координатной плоскости XOY системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 8x - 7 \\ y + x \ge 1 \end{cases}$$

Найти площадь области G.

8. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC $\left(AB = AC = 8\sqrt{5}; BC = 16\right)$. Высота пирамиды проходит через вершину C. Радиус сферы, описанной вокруг пирамиды равен 26. Найти объем пирамиды.

9. Найти все пары чисел x, y, которые удовлетворяют равенству

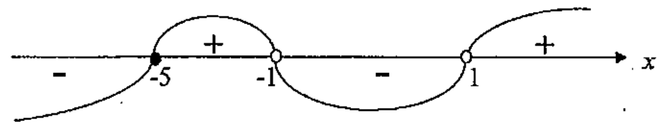
$$\cos y - \frac{1}{2} + \sqrt{x^3 + x^2 - 6x} = x\left(y - y^2 - 1\right) + \sqrt{2x - x^2}.$$

Решение варианта 2

Задача 1.

$$\frac{2}{x+1} \ge \frac{3}{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x-5}{(x+1)(x-1)} \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+5}{(x+1)(x-1)} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; -5] \cup (-1; 1).$$



Ответ: $x \in (-\infty; -5] \cup (-1; 1)$.

Задача 2.

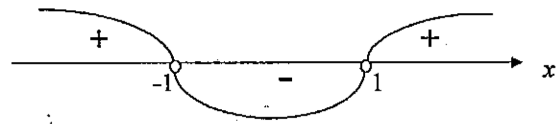
$$4^{x^2} \cdot 2^{x-3} = \frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; 2^{2x^2+x-3} = 2^{-2} \;\Leftrightarrow\; 2x^2 + x - 3 = -2 \;\Leftrightarrow\; 2x^2 + x - 1 \;\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$.

Задача 3.

$$x^4 + 2x^2 - 3 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 3\right) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x+1) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-1; 1)$$



Ответ: $x \in (-1; 1)$.

Задача 4.

$|x^2-8x\ -4|=x-4$. Рассмотрим два случая:

1) $\begin{cases} x^2-8x-4=x-4 \\ x-4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-9x=0 \\ x\ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=9 \end{array}\right. \\ x\ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow x=9;$

2) $\begin{cases} x^2-8x-4=-x+4 \\ x-4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x-8=0 \\ x\ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ x\ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow x=8.$

Ответ: $\{8;9\}$.

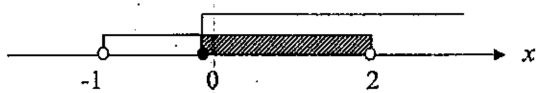
Задача 5.

Область определения функции $y=\log_3\left(\sqrt{x+2}-x\right)$ задается неравенством: $\sqrt{x+2}-x>0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x+2}>x$.

Дальнейшее решение распадается на два случая:

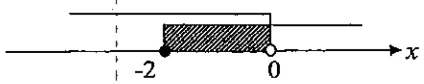
Случай 1.

$\begin{cases} x\ge 0 \\ x+2>x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-x-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ -1<x<2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[0;2)$



Случай 2.

$\begin{cases} x<0 \\ x+2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ x\ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-2;0).$



Объединяя, получаем окончательный ответ $x\in[-2;2)$.

Ответ: $D(y)=[-2;2)$.

Задача 6.

Воспользуемся формулами понижения степени:

$y=4\sin^2 2x-8\cos^2 x+3=16\sin^2 x\cdot\cos^2 x-8\cos^2 x+3$,

$y=16\cdot\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)-8\cdot\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)+3$,

$y=-4\cos^2 2x-4\cos 2x+3$.

Обозначим $t=\cos 2x, t\in[-1;1]$. Наша функция является квадратным трехчленом $y=-4t^2-4t+3$ относительно $t\in[-1;1]$.

Построим график этой функции – параболу, вершина которой будет в точке $t_0=-\frac{в}{2a}=-\frac{1}{2}$; $y\left(-\frac{1}{2}\right)=3$. Ветви параболы будут направлены вниз; $y(-1)=3; y(1)=-5$ (рис. 4).

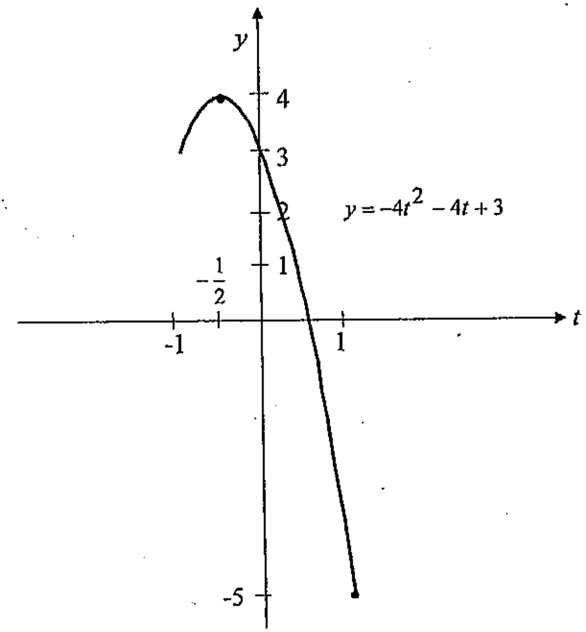


Рис. 4

Таким образом, множество значений функции будет отрезок [–5; 4].

Ответ: $\mathrm{E}(y) = [-5; 4]$.

Задача 7.

$$G: \begin{cases} x^2 + y^2 \le 8x - 7 \\ y + x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 + y^2 \le 9 \\ y \ge 1 - x \end{cases}$$

Первое неравенство системы задает круг радиуса 3 с центром в точке C (4; 0). Второе неравенство задает полуплоскость, лежащую выше прямой $y = 1 - x$. Область G выделена штриховкой на рис. 5.

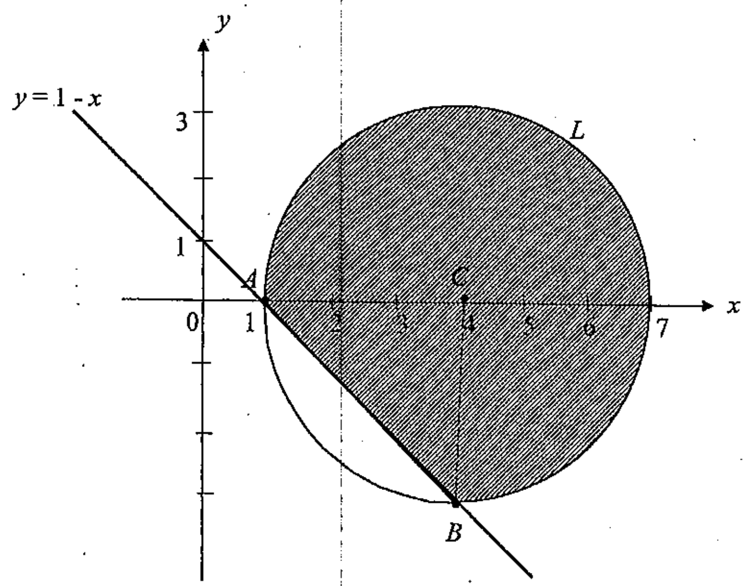


Рис. 5

Область G состоит из кругового сектора $CALB$ и прямоугольного треугольника ABC. Площадь G можно вычислить, сложив площади фигур, из которых G состоит:

$$S_G = \frac{3}{4} \cdot \pi R^2 + \frac{R^2}{2} = \frac{3}{4} \cdot 9\pi + \frac{9}{2} = \frac{27\pi}{4} + \frac{9}{2}.$$

Ответ: $\frac{27\pi}{4} + \frac{9}{2}$.

Задача 8.

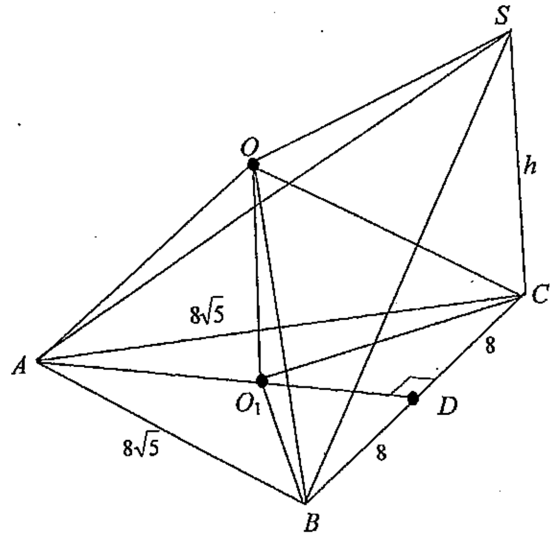


Рис. 6

Пусть O – центр сферы, описанной вокруг пирамиды $SABC$ (рис. 6); $OA = OB = OC = OS = 26$. Опустим перпендикуляр OO_1 на плоскость ABC. Точка O_1 будет центром описанной около треугольника ABC окружности. $AO_1 = R_1$ – радиус этой окружности:

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{\left(8\sqrt{5}\right)^2 - 8^2} = 16;$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 16 = 128;$$

$$R_1 = \frac{abc}{4S} = \frac{AC \cdot BC \cdot AB}{4S_{\Delta ABC}} = \frac{8\sqrt{5} \cdot 8\sqrt{5} \cdot 16}{4 \cdot 128} = 10.$$

По теореме Пифагора найдем OO_1:

$$OO_1 = \sqrt{AO^2 - AO_1^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24.$$

Поскольку $OO_1 = \frac{h}{2}$, то $SC = h = 48$. Отсюда

$$V_{SABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABC}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 128\cdot 48=2048.$$

Ответ: 2048.

Задача 9.

$$\cos y-\frac{1}{2}+\sqrt{x^3+x^2-6x}=x\left(y-y^2-1\right)+\sqrt{2x-x^2}.$$

Найдем О.Д.З. уравнения:

$$\begin{cases}x^3+x^2-6x\geq 0\\ 2x-x^2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\left(x^2+x-6\right)\geq 0\\ x(x-2)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x-2)(x+3)\geq 0\\ x(x-2)\leq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\in[-3;0]\cup[2;+\infty)\\ x\in[0;2]\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$$

Таким образом, x может принимать лишь два значения: 0 или 2.

1) Пусть $x=0$. Тогда уравнение примет вид:

$$\cos y-\frac{1}{2}=0\quad\Rightarrow\quad\cos y=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$$

2) Пусть $x=2$. Тогда уравнение примет вид:

$$\cos y-\frac{1}{2}=2\left(y-y^2-1\right)\quad\Leftrightarrow\quad\cos y=-2y^2+2y-\frac{3}{2}\quad\Leftrightarrow$$

$$\cos y=-2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-1\leq -1.$$

Равенство – 1 достигается только при $y=\frac{1}{2}$, но при этом $\cos y\neq -1$.

Следовательно, в этом случае решений нет.

Ответ: $\begin{cases}x=0\\ y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z\end{cases}$.

Вариант 3

1. Решить неравенство

$$\sqrt{12+x-x^2}>\sqrt{4x+8}.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{3^x}{9}>27^{-x^2}.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x^3y+xy^3=30\\ x^2+y^2=10\end{cases}.$$

4. Найти точки максимума функции

$$y=2x^3+9x^2-24x-7.$$

5. Решить неравенство

$$\log_3(1+2x)\geq\log_{27}(1+14x).$$

6. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{7}{2}\sin x-2\cos 2x}+\cos x=0.$$

7. Дана окружность, проходящая через точки $A(-1;3)$, $B(4;6)$, $C(7;1)$. Определить, пересекает ли эту окружность прямая, проходящая через точки $M(28;10)$ и $N(-10;-9)$.

8. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 8. Высота пирамиды равна $8\sqrt{6}$. Точка K – середина ребра SA. Точка L лежит на ребре SD, причем $SL:LD=3:1$. Через точки K, L проведена плоскость, параллельная прямой CD. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

9. Верно ли, что при $a=9$ неравенство

$$\sqrt{a}\sin x+\cos x\le 5-\sqrt[3]{a},$$

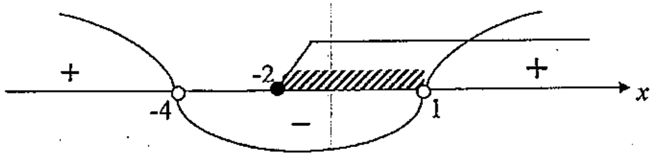
выполняется для всех x. Найти все значения a, при которых это неравенство выполняется для всех x.

Решение варианта 3

Задача 1.

$$\sqrt{12+x-x^2}>\sqrt{4x+8}\quad\Leftrightarrow\quad 12+x-x^2>4x+8\ge 0\quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x^2+3x-4<0\\ x\ge -2\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}-4<x<1\\ x\ge -2\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad x\in[-2;1).$$



Ответ: $x\in[-2;1)$.

Задача 2.

$$\frac{3^x}{9}>27^{-x^2}\quad\Leftrightarrow\quad 3^{x-2}>3^{-3x^2}\quad\Leftrightarrow\quad x-2>-3x^2\quad\Leftrightarrow\quad 3x^2+x-2>0\quad\Leftrightarrow$$

$$-1<x<\frac{2}{3}.$$

Ответ: $x\in\left(-1;\frac{2}{3}\right)$.

Задача 3.

$$\begin{cases}x^3y+xy^3=30\\ x^2+y^2=10\end{cases}\quad\Rightarrow\quad xy\left(x^2+y^2\right)=30\ \Rightarrow\ xy\cdot 10=30\ \Rightarrow\ xy=3\ \Rightarrow\ y=\frac{3}{x}.$$

Подставим $y=\frac{3}{x}$ во второе уравнение системы:

$$x^2+\frac{9}{x^2}=10\quad\Leftrightarrow\quad t+\frac{9}{t}=10\ \left(x^2=t\right)\quad\Leftrightarrow\quad t^2-10t+9=0\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}t=9\\ t=1\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x=3;\ y=1\\ x=-3;\ y=-1\\ x=1;\ y=3\\ x=-1;\ y=-3\end{array}\right..$$

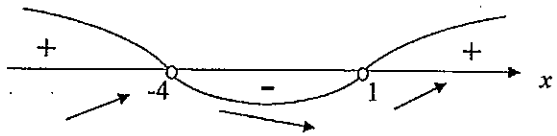
Ответ: $\begin{cases}x=3\\ y=1\end{cases};\ \begin{cases}x=-3\\ y=-1\end{cases};\ \begin{cases}x=1\\ y=3\end{cases};\ \begin{cases}x=-1\\ y=-3\end{cases}.$

Задача 4.

$$y=2x^3+9x^2-24x-7.$$

$$y'=6x^2+18x-24=6(x+4)(x-1)=0\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l}x=-4\\ x=1\end{array}\right..$$

Найдем знаки y':



Значит y возрастает на промежутке $(-\infty;-4)$; y убывает на промежутке $(-4;\ 1)$; y возрастает на промежутке $(1;\ +\infty)$. Следовательно, $x=-4$ точка максимума функции.

Ответ: $x_{\max}=-4$.

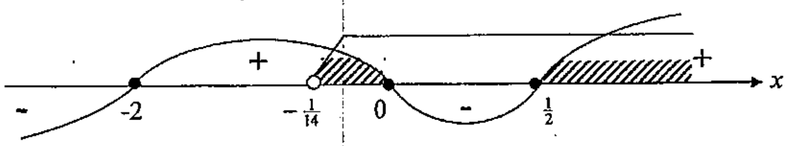
Задача 5.

$$\log_3(1+2x)\ge\log_{27}(1+14x)\ \Leftrightarrow\ \log_3(1+2x)\ge\log_{3^3}(1+14x)\ \Leftrightarrow$$

$$\log_3(1+2x)^3\ge\log_3(1+14x)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}(1+2x)^3\ge 1+14x\\ 1+14x>0\end{cases}\ \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}1+3\cdot 2x+3\cdot 4x^2+8x^3\ge 1+14x\\ x>-\dfrac{1}{14}\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}8x^3+12x^2-8x\ge 0\\ x>-\dfrac{1}{14}\end{cases}\ \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x(2x^2+3x-2)\ge 0\\ x>-\dfrac{1}{14}\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x+2)\ge 0\\ x>-\dfrac{1}{14}\end{cases}\ \Leftrightarrow\ x\in\left(-\frac{1}{14};0\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right).$$



Ответ: $x\in\left(-\frac{1}{14};0\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

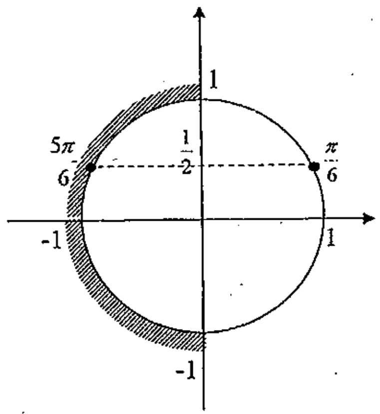
Задача 6.

$$\sqrt{\frac{7}{2}\sin x-2\cos 2x}+\cos x=0\ \Leftrightarrow\ \sqrt{\frac{7}{2}\sin x-2\cos 2x}=-\cos x\ \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{7}{2}\sin x-2\cos 2x=\cos^2 x\\ -\cos x\ge 0\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}7\sin x-4(1-2\sin^2 x)=2(1-\sin^2 x)\\ \cos x\le 0\end{cases}\ \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}10\sin^2 x+7\sin x-6=0\\ \cos x\le 0\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ \sin x=-\dfrac{6}{5}\end{array}\right.\\ \cos x\le 0\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ \cos x\le 0\end{cases}\ \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z\ .$$



Ответ: $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$.

Задача 7.

1) Получим уравнение окружности, проходящей через точки A, B, C. Найдем стороны треугольника ABC:

$$AB=\sqrt{(4-(-1))^2+(6-3)^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34};$$

$$BC=\sqrt{(7-4)^2+(1-6)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34};$$

$$AC=\sqrt{(7-(-1))^2+(1-3)^2}=\sqrt{64+4}=\sqrt{68}.$$

Поскольку $AC^2=AB^2+BC^2$, то по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ABC – прямоугольный с гипотенузой AC. Тогда центром описанной вокруг треугольника ABC окружности будет точка D – середина гипотенузы AC, а радиус этой окружности будут равен $\dfrac{AC}{2}=\dfrac{\sqrt{68}}{2}=\sqrt{17}$. Найдем координаты D:

$$x_0=\frac{-1+7}{2}=3;\ y_0=\frac{3+1}{2}=2\ \Rightarrow\ D(3;2).$$

Уравнение описанной окружности примет вид:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2\ \Rightarrow\ (x-3)^2+(y-2)^2=17.$$

2) Найдем уравнение прямой, проходящей через точки $M(28;\ 10)$ и $N(-10;\ -9)$. Запишем это уравнение в виде $y = kx + в$. Из условия следует, что:

$$\begin{cases}10 = 28k + в\\ -9 = -10k + в\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k = \dfrac{1}{2}\\ в = -4\end{cases}.$$

Следовательно, прямая, проходящая через точки M, N задается уравнением $y = \dfrac{x}{2} - 4$.

3) Точки пересечения окружности и прямой определяются системой уравнений:

$$\begin{cases}(x-3)^2 + (y-2)^2 = 17\\ y = \dfrac{x}{2} - 4\end{cases} \Rightarrow (x-3)^2 + \left(\frac{x}{2} - 6\right)^2 = 17 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 6x + 9 + \frac{x^2}{4} - 6x + 36 - 17 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 48x + 112 = 0$$

Так как $\dfrac{D}{4} = 24^2 - 5\cdot 112 = 576 - 560 = 16 > 0$, то квадратное уравнение имеет решение, а значит прямая и окружность пересекаются.

Ответ: пересекает.

Задача 8.

Проведем $KM \,||\, AB$ и $LN \,||\, DC$ (рис. 7). Тогда M – середина SB и $SN : NC = 3:1$. Искомым сечением будет равнобочная трапеция $KMNL$. Пусть P – середина AB, Q – середина DC; E – точка пересечения PS и KM; F – точка пересечения LN и SQ. Тогда EF – высота трапеции.

1. $KM = \dfrac{AB}{2} = 4$ (KM – средняя линия треугольника ASB).

2. $\Delta LSN \sim \Delta DSC \Rightarrow \dfrac{LN}{DC} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow LN = \dfrac{3\cdot 8}{4} = 6$.

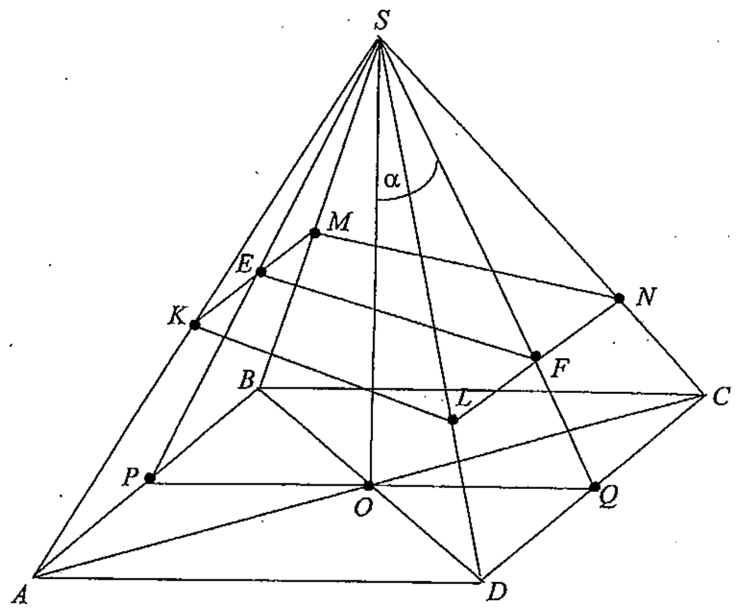


Рис. 7

3. Найдем EF.

1) $SP = \sqrt{SO^2 + OP^2} = \sqrt{\left(8\sqrt{6}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{400} = 20$;

2) $SE = \dfrac{SP}{2} = 10$;

3) $SF = \dfrac{3}{4}\cdot SQ = \dfrac{3\cdot 20}{4} = 15$;

4) Обозначим $\alpha = \angle OSQ$, $2\alpha = \angle PSQ$. Тогда

$$\sin\alpha = \frac{OQ}{SQ} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5};\ \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{23}{25}.$$

5) Воспользуемся теоремой косинусов:

$$EF^2 = ES^2 + SF^2 - 2ES\cdot SF\cdot\cos 2\alpha = 100 + 225 - \frac{2\cdot 10\cdot 15\cdot 23}{25};$$

$$EF^2 = 49;\ EF = 7.$$

Теперь можно вычислить площадь сечения:

$$S_{KMNL} = \frac{(KM + LN)}{2} \cdot EF = \frac{(4+6)}{2} \cdot 7 = 35.$$

Ответ: 35.

Задача 9.

$$\sqrt{a}\sin x + \cos x \le 5 - \sqrt[3]{a} \qquad (1)$$

1. Если $a = 9$, то неравенство примет вид

$3\sin x + \cos x \le 5 - \sqrt[3]{9}$.

При подстановке $x = \frac{\pi}{2}$ в это неравенство, получим

$3 \le 5 - \sqrt[3]{9} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{9} \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad 9 \le 8$.

Поскольку последнее неравенство неверно, то ответом на первый вопрос задачи будет: **нет, неверно**.

2. Найдем все значения a, при которых неравенство (1) выполняется для всех x. Для этого воспользуемся методом вспомогательного аргумента.

$$\sqrt{a}\sin x + \cos x = \sqrt{\left(\sqrt{a}\right)^2 + 1} \cdot \left(\sin x \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\left(\sqrt{a}\right)^2 + 1}} + \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{a}\right)^2 + 1}}\right);$$

$\sqrt{a}\sin x + \cos x = \sqrt{a+1}(\sin x \cos\varphi + \cos x \sin\varphi)$;

$$\sqrt{a}\sin x + \cos x = \sqrt{a+1}\sin(x+\varphi) \le \sqrt{a+1}. \qquad (2)$$

Причем равенство (2) достигается (т.е. при некотором значении x будет выполняться равенство).

Следовательно, максимальное значение функции, стоящей в левой части неравенства (2) равно $\sqrt{a+1}$. Тогда наша задача сведется к следующему: требуется найти все значения a, при которых выполняется неравенство

$$\sqrt{a+1} \le 5 - \sqrt[3]{a}. \qquad (3)$$

Применим для решения неравенства (3) графический способ.

1) Функция $y = \sqrt{a+1}$ возрастает на промежутке $a \in [0; +\infty)$ (из условия задачи следует, что $a \ge 0$).

2) Функция $y = 5 - \sqrt[3]{a}$ убывает на промежутке $a \in [0; +\infty)$.

3) Отсюда следует, что графики этих функций пересекаются лишь в одной точке, которую легко угадать: $a = 8$ (рис. 8).

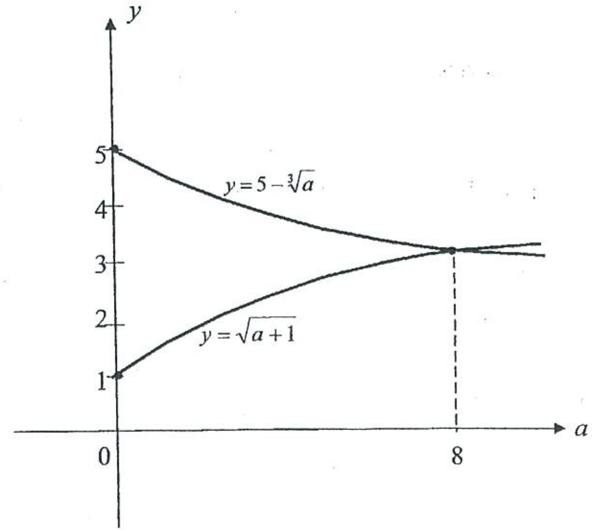


Рис. 8

Таким образом, график функции $y = 5 - \sqrt[3]{a}$ будет выше графика функции $y = \sqrt{a+1}$ при $a \in [0; 8]$. Значит, решением неравенства (3) будет промежуток $a \in [0; 8]$.

Ответ: нет, неверно; $a \in [0; 8]$.

Вариант 4

1. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(3-2x) > -3.$$

2. Решить уравнение

$$4\cdot 3^{x+2} - 5\cdot 3^{x} = 31.$$

3. Решить уравнение

$$\frac{5x+1}{x^2+x-2} + \frac{3x-5}{x-1} = 2.$$

4. Решить уравнение

$$\sqrt{x+24} - x = 4.$$

5. Найти область определения и множество значений функции

$$y = \log_3(5+4x-x^2).$$

6. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\frac{ax-9}{x-2} = x+4$$

имеет единственное решение.

7. Найти все пары целых чисел x, y, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 3y-2x<45 \\ x+y>24 \\ 3x-y<3 \end{cases}.$$

8. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. На ребре B_1B взята точка M так, что $B_1M = \frac{1}{2}$. Найти:

а) периметр треугольника AMC;

б) расстояние от вершины A_1 до плоскости, проходящей через точки A, M, C.

9. Найти все значения a, при уравнение

$$9\cos 2x + 24\cos x = a$$

имеет решения.

Ответы:

1. $x\in\left(-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$;
2. 1;
3. –5;
4. 1;
5. $D(y) = (-1;\ 5)$;

   $E(y) = (-\infty;\ 2]$;
6. $a\in\left\{0;\ 4;\ \frac{9}{2}\right\}$;
7. $\begin{cases} x=7 \\ y=19 \end{cases}$;
8. 1) $p=\sqrt{2}+\sqrt{5}$;

   2) $\frac{2}{\sqrt{6}}$;
9. $a\in[-17;33]$.

Вариант 5

1. Решить неравенство

$$\frac{1}{x+2} \geq \frac{2}{x+1}.$$

2. Решить уравнение

$$27^{x^2} \cdot 3^{x-3} = \frac{1}{3}.$$

3. Решить неравенство

$$9x^4 + 8x^2 - 1 < 0.$$

4. Решить уравнение

$$\left|x^2 - 4x - 16\right| = x - 2.$$

5. Найти область определения функции

$$y = \log_{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{3x-2} - x\right).$$

6. Найти множество значений функции

$$y = 9\sin^2 2x - 12\sin^2 x + 2.$$

7. Область G задана на координатной плоскости XOY системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 6y - 5 \\ y + x \leq 5 \end{cases}.$$

Найти площадь области G.

8. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC $\left(AB = AC = 4\sqrt{5}; BC = 8\right)$. Высота пирамиды проходит через вершину A. Радиус сферы, описанной вокруг пирамиды равен 11. Найти объем пирамиды.

9. Найти все пары чисел x, y, которые удовлетворяют равенству

$$\sin y + 1 + \sqrt{x^3 - x^2 - 6x} = x\left(y^2 - 4y + \frac{14}{3}\right) + \sqrt{3x - x^2}.$$

Ответы:

1. $x \in (-\infty; -3] \cup (-2; -1)$;
2. $\left\{-1; \frac{2}{3}\right\}$;
3. $x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$;
4. $\{6; 7\}$;
5. $D(y) = \left[\frac{2}{3}; 1\right)$;
6. $E(y) = [-5; 4]$;
7. $3\pi + 2$;
8. 256;
9. $\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \end{cases}$.

Вариант 6

1. Решить неравенство

$$\sqrt{3x+4-x^2} > \sqrt{3x-5}.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{4^x}{32} > 8^{-x^2}.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3y - xy^3 = 30 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$$

4. Найти точки минимума функции

$$y = -x^3 - 3x^2 + 45x + 6.$$

5. Решить неравенство

$$\log_4(1+4x) \ge \log_{64}(1+7x).$$

6. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{9}{2}\cos x + 3\cos 2x} + \sin x = 0.$$

7. Дана окружность, проходящая через точки $A(-6;\ 2)$, $B(1;\ 5)$, $C(4;-2)$. Определить, пересекает ли эту окружность прямая, проходящая через точки $M(12;\ -2)$ и $N(-12;\ 14)$.

8. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Высота пирамиды равна $3\sqrt{15}$. Точка K – середина ребра SA; точка L лежит на ребре SD, причем $SL : LD = 2 : 1$. Через точки K, L проведена плоскость, параллельная прямой CD. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

9. Верно ли, что при $a = 9$ неравенство

$$\sqrt{a}\cos x - \sin x \le 5 - \sqrt[4]{a+8},$$

выполняется для всех x. Найти все значения a, при которых это неравенство выполняется для всех x.

Ответы:

1. $x \in \left[\frac{5}{3}; 3\right)$;
2. $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{3}\right) \cup (1; +\infty)$;
3. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$;
4. $x_{\min} = -5$;
5. $x \in \left(-\frac{1}{7}; -\frac{1}{8}\right] \cup [0; +\infty)$;
6. $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$;
7. не пересекает;
8. 14;
9. нет, неверно; $a \in [0; 8]$.