ВОПРОСЫ ПСИХОЛОГИИ ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1955 ГОДА 2/2015

ПСИХОЛОГИЯ И ПРАКТИКА

ИСТОЧНИКИ ОШИБОК ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ «ОБЫДЕННЫХ» МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ

Ю.А. ТЮМЕНЕВА

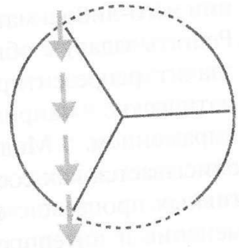
Школьные математические задания с обыденным контекстом оказываются сложными для российских школьников, как показывают результаты исследования PISA. В результате качественного анализа ошибок 60 учащихся VIII–X классов показано, что часть трудностей была связана с требованиями моделирования – специфическими для этих заданий. Однако подавляющая часть ошибок была следствием дефицита более общего характера: неумением работать с чертежами и рисунками и несформированной установкой на проверку и проблематизацию собственных рассуждений.

Ключевые слова: «обыденные» математические задачи, специфические трудности, трудности общего характера.

Школьные задания по математике, для выполнения которых нужно применить математические знания в контексте обыденной проблемы, становятся в России все более популярными. Интерес к этим так называемым обыденным заданиям (everyday problems) стимулируется не в последнюю очередь такими международными программами, как PISA[1], где обыденные задачи играют определяющую роль в оценке математической грамотности. В качестве примера приведем такое задание (взято из открытого банка заданий).

Вращающаяся дверь имеет три стеклянных перегородки, которые вместе с этой дверью вращаются внутри кругового пространства. Внутренний диаметр этого пространства 2 м. Перегородки делят пространство на три равных сектора.

Два дверных проема (пунктирные дуги на рисунке) имеют одинаковый размер. Если проемы слишком широкие, то вращающиеся перегородки не смогут закрыть открытое пространство и воздух сможет свободно поступать через вход и выход (как показано стрелками на рисунке).



Это приведет либо к нежелательной потере тепла, либо к его увеличению. Какую наибольшую длину (в см) может иметь каждый дверной проем, чтобы воздух не поступал свободно через вход и выход?

Утилитарная направленность таких заданий может быть предметом критики, но факт остается фактом: на протяжении последних десяти лет российские пятнадцатилетние школьники демонстрируют устойчиво низкие достижения в решении таких задач (Основные результаты..., 2012).

Все это дало основание говорить о недостаточной сформированности у российских учащихся умения использовать знания школьной математики в контексте повседневной жизни. Как следствие, новые стандарты прямо включают требование обучить российских школьников умению «применять математику», и теперь в учебниках для основной школы и в ЕГЭ все чаще появляются задания «на применение математики» (синонимичные их названия:

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2014 г.

[1] Programme International Students Assessment. Реализуется с 2000 г., Россия – постоянный участник. См. URL: http://www.oecd.org/pisa/.

«практические», «практико-ориентированные», «жизненные» (ФГОС, 2010).

Однако о чем мы говорим, когда говорим о «неумении применять математику»? Является ли это неумение частным случаем – просто стало очевидным из-за необычности для российских школьников «обыденного» контекста этих заданий – или носит более общий характер?

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ С ОБЫДЕННЫМ КОНТЕКСТОМ

Краеугольный камень заданий PISA по математике – концепция моделирования. Как ясно из самого термина, моделирование – это процесс создания модели. Математические модели, как они описываются в словарях или в исследовательской литературе, выполняют функцию репрезентации чего-либо в математических терминах. Решить задачу с обыденным контекстом – значит репрезентировать ситуацию математически, например, математическим выражением. Моделирование в PISA описывается как состоящее из трех когнитивных процессов: формулирование, применение и интерпретация. При формулировании проблемная ситуация, описанная в терминах обыденной жизни, переводится на язык математики и обретает математическую структуру. Затем нужно применить имеющиеся математические знания. Далее при интерпретации происходит процесс, по сути противоположный процессу формулирования, когда требуется перевести математическое решение вновь в контекст обыденной проблемы, т.е. придать ему обыденный смысл (PISA…, 2013, с. 28–32). В ряде подходов эти процессы описываются как фазы или шаги, и число самих стадий может разниться (см., например: Ferri, 2006). Распространено представление о пяти фазах процесса моделирования: понимание, упрощение/структурирование, математизация, вычисления, интерпретация/валидизация (Niss, Blum, Galbraith, 2007).

Взгляд на моделирование, предложенный ранее в рамках культурно-исторического подхода (Выготский, 1999; Гальперин, 1958; Талызина, 2011), фокусировался на целенаправленном развитии навыков моделирования. Наиболее емко описана последовательность из четырех шагов при моделировании в работах Н.Г. Салминой (1988): 1) предварительный анализ задачи (понимание общего смысла задачи, выделение смысловых частей и переформулирование их таким образом, чтобы стал возможен изоморфный перевод их на язык графических средств); 2) перевод словесной информации в модель; 3) преобразование модели; 4) соотнесение результатов. Важным для нас в этом подходе является момент перевода задачи с одного языка на другой (с обыденного на математический) и акцент на *подготовительной* роли переформулирования, при котором задача должна упроститься до своих ключевых компонентов.

С точки зрения осуществления перевода ключевой особенностью любой задачи с обыденным контекстом является присутствие в ее формулировке семантических схем, к которым нужно подобрать математический аналог (Салмина, 1988; Шевкин, 2005; Sfard, 2012). При моделировании решающий должен выбрать из имеющихся у него когнитивных математических схем ту, которая наиболее точно соответствует семантической схеме задачи. В конечном счете, вопрос решения задачи может быть сведен к наличию у решающего когнитивных схем, которые являются аналогами семантических отношений, представленных в задании (Verschaffel, Greer, De Corte, 2000). Это и отличает решение задач на моделирование от этапов, традиционно относящихся вообще к решению задач (problem solving) (см. для обзора: Novick, Bassok, 2005). Традиционное описание сводится к ориентировке (понимание, анализ, исследование задачи), этапам манипуляции (эвристики, алгоритмы и пр.), проверке промежуточных и итоговых решений. По отношению к процессам, общим для решения любых задач, необходимость перевода может стать дополнительным источником трудностей и ошибок в задачах на моделирование.

Можно выделить два источника специфических трудностей при решении заданий с обыденным контекстом. Первый – отсутствие в опыте решающего математического аналога для семантической схемы задания. Например, вопрос задачи «сколько сэкономит компания?» вызовет, вероятно, гораздо бо́льшие трудности, чем, например, вопрос «сколько потратит компания?», потому что за время обучения в школе учащийся, скорее всего, приобрел математические аналоги для «потратить», но не для «сэкономить». Можно предположить, что контекстные задачи будут вызывать наибольшие трудности, если будут полностью сформулированы на обыденном языке, не имеющем у решающего математических аналогов. В пользу этого предположения свидетельствуют несколько исследований, в частности, для арифметических задач (Cummins et al., 1988).

Кроме того, наличие в формулировке обыденной задачи математических терминов или привычных семантических схем может обернуться другим источником трудностей и ошибок. Решающий может легко опознавать знакомые семантические структуры и сразу же замещать их математическим аналогом. В этой ситуации этапы моделирования – понимание, упрощение, структурирование – опускаются и решающий переходит сразу к вычислениям. Поскольку анализа задачи в этом случае не происходит, вероятность ошибок в решении может увеличиваться.

НОВИЗНА И ОДНОРОДНОСТЬ ЗАДАНИЙ С ОБЫДЕННЫМ КОНТЕКСТОМ

Осуществление перевода и подготовка к нему собственно и должны оцениваться заданиями на применение математических знаний в обыденном контексте. Часто используемые для этой цели задания могут быть сравнены между собой по двум параметрам. Во-первых, являются ли семантические схемы, используемые в задаче, новыми для решающего. Во-вторых, сформулирована ли задача только и полностью на обыденном языке, т.е. является однородной, или включает еще и математические термины, т.е. неоднородна. С точки зрения конструктной валидности, задания, направленные на оценку умения моделировать обыденные ситуации, должны быть однородными, т.е. формулироваться на полностью обыденном языке, как и реальные жизненные ситуации, которые они должны репрезентировать. В-третьих, семантические схемы заданий не должны иметь устоявшихся переводов у решающего, т.е. должны быть новыми.

На практике обычные текстовые математические задания скорее неоднородны, так как содержат математические термины. Вопрос заключается в том, будут ли неоднородные школьные задания вызывать специфические ошибки по сравнению с полностью обыденными, которые лучше репрезентируют реальные жизненные ситуации, но практически не используются в практике обучения и оценки. Появление несовпадающих видов ошибок означало бы, что школьные текстовые задания вызывают другие трудности и требуют других умений, чем реальные обыденные ситуации. Это означало бы, в свою очередь, что успешность в решении математических текстовых заданий не говорит об умении применять математические знания в незнакомых обыденных ситуациях.

Довольно много известно о том, как на примере текстовых задач научить решать математические задачи с обыденным контекстом (Пойя, 1959; Фридман, 1977), однако практически не изучены специфические трудности, привносимые обыденным контекстом. Важно также, что в этих исследованиях не учитывается, насколько новой является семантическая схема задачи, владеет ли решающий готовым математическим аналогом или ему предстоит его построить. Трудности и ошибки при решении однородных математических задач вообще исследованы очень скупо и фрагментарно (Niss, Blum, Galbraith, 2007; Blum, Ferri, 2009; Ludwig, Xu, 2010). Таким образом, исследовательские вопросы, на которые будет отвечать данная работа, следующие. С какими трудностями сопряжено решение обыденных математических задач с незнакомыми семантическими схемами? Различаются ли виды ошибок и трудностей для однородных обыденных и неоднородных математических заданий?

ИСПЫТУЕМЫЕ И МЕТОДИКА

В исследовании участвовали ученики VIII–X классов (18 девочек и 42 мальчика) общеобразовательной школы г. Москвы. Школа имеет статус «Центр образования», в ней реализуется профильное обучение начиная с VIII класса. Участники нашего исследования обучались по профилям: лингвистический, театральный, физико-математический и общий.

Материалы

Использовались два математических задания с обыденным контекстом: одно – однородное, второе – неоднородное. Оба включали незнакомые для детей семантические схемы[2].

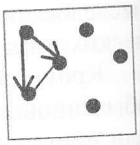
Первое задание, «Ананас» (Ludwig, Xu, 2010). Оно представляет собой двухминутное видео. Ребенок должен был просмотреть видео, где уличный торговец чистит ананас определенным способом[3]. Затем ребенка просили объяснить математически, почему именно так продавец избавляется от «глазков» в мякоти ананаса (см. рис. 1).

Рис. 1. Скриншот из видеоролика «Ананас» (Ludwig, Xu, 2010)

Решение этой задачи подразумевает следующие этапы процесса моделирования, как это указано в исследовании М. Людвига и Б. Ксу:

1) понимание проблемы: понять, что есть другие способы удаления «глазков», но выбранный продавцом способ является оптимальным с точки зрения затрачиваемого времени и экономии мякоти ананаса;

2) упрощение и структурирование: зафиксировать (на схеме) взаиморасположение точек и связать их линиями среза, выполненными продавцом и альтернативными;



3) математизация: рассмотреть два образованных отрезка как стороны геометрической фигуры (в оригинале – прямоугольного треугольника);

4) вычисления: применить свойства геометрической фигуры для обоснования, почему одна сторона длинней другой (в оригинале – теоремы Пифагора);

5) интерпретация: избранный продавцом способ экономит мякоть ананаса и время на его очистку[4].

Вторая задача, «Космонавты», взята из стандартного учебника (Погорелов, 2008): «Могут ли увидеть друг друга космонавты, летящие над поверхностью Земли на высоте 230 км, если расстояние между ними по прямой равно 2200 км? Радиус Земли равен 6370 км».

---

[2] Новизну использованных семантических схем мы подтвердили в предварительных беседах с восемью учащимися VIII–IX классов, не принимавшими участие в основном исследовании. Кроме того, в основном исследовании после завершения всех процедур мы опрашивали каждого ребенка относительно того, была ли задача для него знакома и выполняли ли они похожие задания в школе. За исключением одного ребенка, указавшего, что одна задача была ему знакома, остальные подтвердили новизну заданий.

[3] Ролик доступен по ссылке: http://www.youtube.com/watch?v=jJZsy-Y3c5M

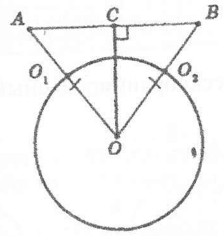
[4] Могут использоваться и другие способы решения, но принципиальная логика остается именно такой.

Решение задачи «Космонавты» в терминах моделирования сводится к нескольким шагам. Поскольку моделирование касается только обыденного элемента этой задачи, т.е. вопроса «смогут ли увидеть?», то этапы моделирования будут относиться только к этому вопросу. Перечислим их:

1) понимание проблемы: понять, что Земля может мешать зрительному контакту между космонавтами;

2) упрощение и структурирование: начертить окружность Земли и «линию взора», выделить любым образом расстояние между окружностью и линией взора как искомое;

3) математизация: рассмотреть схему как треугольник;



4) вычисления: применить свойства равнобедренного и прямоугольного треугольников, применить теорему Пифагора для нахождения стороны треугольника, сравнить длину стороны с радиусом;

5) интерпретация: найденная сторона треугольника больше радиуса, линия взора проходит выше поверхности Земли, и космонавты смогут увидеть друг друга.

Эта задача неоднородная: она содержит как математические, так и обыденные элементы. К математическим элементам, кроме расстояний, относятся «радиус», «высота» и «прямая». Термин «высота» встроен в нетипичный обыденный контекст – это высота над Землей, т.е. над окружностью. Основной обыденный элемент – сам вопрос задачи «смогут ли космонавты увидеть друг друга?». Дети не имели прямого математического аналога для этого обыденного вопроса.

Эти задачи различались по однородности, по формату (текстовая/видео) и по требованию: «Смогут ли увидеть?»/ «Объясните математически». По всем остальным основным параметрам они были схожи: требовали поиска и переформулирования проблемы, чертежа, преобразования, математизации. Оба задания предлагали достаточную, но не избыточную информацию и не требовали наличия специфического личного опыта. Предметные знания, необходимые для решения обеих задач, включали разделы геометрии «Треугольники» и «Теорема Пифагора», пройденные всеми участниками исследования.

Процедура

Учащиеся опрашивались индивидуально. После решения первой задачи без перерыва ребенку предлагалась вторая. Последовательность задач менялась: половина детей сначала решали задачу «Ананас», вторая половина – «Космонавты»[5]. Время ограничено не было, но, как правило, решение ребенком обеих задач занимало от 30 до 50 мин.

После предъявления задачи и инструкции ребенок решал задачу самостоятельно до тех пор, пока либо не давал какой-то ответ, либо не просил помочь. В последнем случае экспериментатор выяснял трудности и помогал ребенку наводящими вопросами. Если после дозированной помощи ребенок двигался дальше самостоятельно, помощь больше не оказывалась до следующей остановки или до конца решения.

Вся процедура записывалась на видеокамеру и затем протоколировалась дословно. Письменные записи могли быть соотнесены с видеозаписью.

Анализ протоколов

Отсутствие стандартизации в процедуре помощи сделало частотный анализ ошибок невозможным. Вместо этого ана-

[5] Чтобы уменьшить риск обмена информацией о задачах между детьми, уже принявшими участие в исследовании, и теми, кто только еще планировался для участия, были предприняты специальные процедуры подбора и времени опроса детей.

лиз сосредоточился на максимально полном описании видов ошибок и их типологизации. Процедура анализа выполнялась в рамках подхода «обоснованной теории» (grounded theory) (Strauss, Corbin, 1990).

Для проверки надежности разработанной типологии и критериев отнесения ошибки или трудности к какому-то типу несколько фрагментов протоколов были случайным образом отобраны для независимой кодировки двумя членами исследовательской группы. Согласованность кодировки наблюдалась в 95% случаев. Это свидетельствовало о достаточной надежности разработанной типологии ошибок.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Из 60 участников исследования самостоятельно решили задачу «Космонавты» два человека, «Ананас» – один. Все остальные дети смогли решить задачи при большей или меньшей помощи экспериментатора.

Все проявления трудностей и ошибки, допущенные детьми при решении задач, мы разделили на четыре большие группы. Первая объединила дефицит специфических навыков и знаний, прямо предусмотренных школьной программой. Проблемы, относящиеся к решению задач в общем, попали во вторую группу. Ошибки, связанные с валидизацией сделанных допущений и полученных решений – в третью и, наконец, собственно ошибки моделирования – в четвертую. Рассмотрим подробнее эти группы.

1. *Специфические предметные и процедурные ошибки*

Сюда попали ошибки, сделанные из-за незнания предметного материала, например, свойств треугольника или теоремы Пифагора. Однако подавляющее большинство ошибок было вызвано пробелами в умении рисовать чертеж к задаче, умении, также относящемся к числу «программных». Прежде всего, многие дети вообще избегали чертежа, в том числе и после того, как им прямо предлагалось это сделать. Поскольку без чертежа ни одна из двух задач не могла быть решена, отсутствие чертежа обычно полностью блокировало решение.

В процессе рисования чертежа дети могли затрудняться переносить все условия задачи на один рисунок и координировать их. В подавляющем большинстве случаев пропорции чертежа были нарушены (рис. 3–5). Понятно, что такие чертежи либо оставались бесполезны, либо даже препятствовали дальнейшему решению.

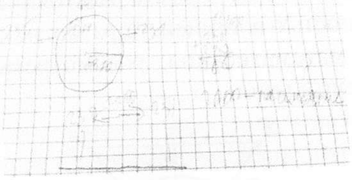


Рис. 3. Нескоординированный чертеж

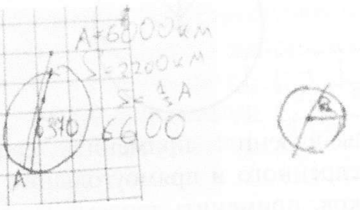


Рис. 4. Неполные и небрежные чертежи

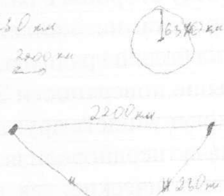


Рис. 5. Чертеж с резко выраженной диспропорциональностью

В задаче «Ананас» сложностью стало копирование изображения – навык, проверяемый при оценке готовности ребенка к школе. Вместо «шашечного» порядка в расположении черных «глазков» в ананасе дети могли изображать их друг под другом (рис. 6).

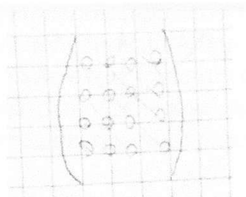


Рис. 6. Неправильное изображение расположения точек на ананасе

К этой же группе мы отнесли ошибки в изображении высоты над Землей (задача «Космонавты») как перпендикуляров, опущенных от «точек-космонавтов» вертикально вниз, а не по направлению к центру окружности, как следовало нарисовать (рис. 7).

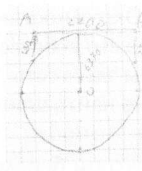


Рис. 7. Высота над окружностью изображается как высота над горизонтальной линией.

На рис. 3 также видна эта ошибка. Очевидно, именно затруднение изобразить высоту над окружностью побудило ребенка оставить эту часть рисунка отдельным изображением, где высота обозначена перпендикулярами к горизонтальной линии, т.е. в привычном для ребенка виде.

Эта же ошибка подводит нас к еще одному виду «предметных ошибок» – стереотипии в расположении определенных геометрических элементов. Причиной этого могут быть типовые изображения тех или иных фигур в учебниках и в ходе уроков, так что в другой позиции фигура становится уже неузнаваемой. Например, в задаче «Космонавты» обозначенный радиус оставался жестко зафиксированным в каком-то одном месте окружности и был как будто единственным. Ребенок не воспринимал другое пространство между центром окружности и самой окружностью как тоже «радиус». Это становилось очевидным из таких, например, восклицаний: «*А, да! Это же тоже радиус!*»

С положением радиусов был связан и другой стереотип: дети часто рисовали радиусы, проведенные под прямым углом друг к другу (рис. 8), что могло вызвать затем дополнительные трудности в решении задачи (об этом ниже).

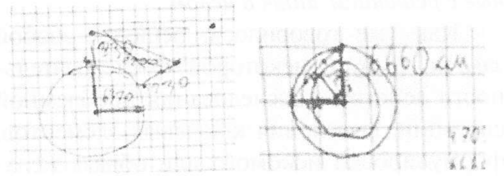


Рис. 8. Ригидное изображение радиусов, блокирующее решение задачи

Другая стереотипия проявилась при решении задачи «Ананас», когда дети соединяли точки таким образом, чтобы получаемый прямоугольный треугольник «лежал» на одном из катетов (рис. 9). При таком построении стороны треугольника включали по нескольку точек, что затрудняло дальнейшее сравнение. Если бы ребенок соединил в прямоугольный треугольник три точки, а не несколько, решить задачу было бы значительно легче. Но такой треугольник был бы повернут относительно привычного изображения, и это затрудняло его построение. В детских комментариях есть прямая отсылка к стереотипии: «*Я как-то не привыкла, чтобы треугольники располагались криво*», «*Наверное, потому, что обычно треугольники “стоят” на стороне*».

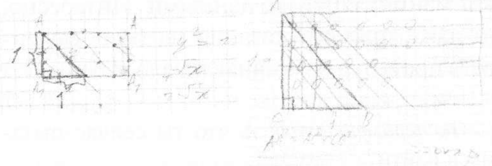


Рис. 9. Стереотипное изображение прямоугольного треугольника

Интересно, что дети не использовали формальных обозначений на чертеже. Работа с геометрическими фигурами требует их именования, например, треугольник ABC. Это правило вводится с самого начала курса геометрии, и к концу VIII и тем более IX и X класса можно было бы ожидать сформированности этого навыка. Хотя само по себе это не приводило к дальнейшим ошибкам, но затрудняло коммуникацию по поводу задачи.

2. *Трудности общего характера, связанные с решением задач в целом*

Как уже говорилось, решение любой задачи требует некоторой последовательности действий: исследования проблемной ситуации, выделения ключевых элементов, формулировки искомого или образа желательной ситуации, актуализации некоторых прошлых знаний, алгоритмов или эвристик, их применения и мониторинга прогресса в решении. В нашем случае все эти компоненты могли стать источником затруднений.

Прежде всего, дети могли пренебречь анализом проблемной ситуации. Проявлялось это, например, в неполных чертежах, когда не все условия были перенесены и скоординированы, но тем не менее непосредственно предваряли вычисления (рис. 10).

В обеих задачах недоисследование ситуации приводило к тому, что искомое не было определено. Так, в задаче «Ананас» в чертеж могли включаться только линии среза, реально произведенные продавцом, но не те, которые могли бы быть сделаны. Из-за этого не было и предмета сравнения. В задаче «Космонавты» отсутствие искомого приводило к последующим формальным и бессмысленным манипуляциям с данными. Интересно, что даже прямое указание на бессмысленность процедур не останавливало ребенка.

Экспериментатор: А что ты сейчас пытаешься найти?

Ребенок: Я ищу вот это расстояние (между космонавтами).

Э.: Оно же известно.

Р.: Нет, я его ищу.

Э.: А что его искать – оно известно – 2200?

Р.: Да, но это не то.

Вместо формулирования искомого дети подменяли его любым другим неизвестным, которое могли вычислить.

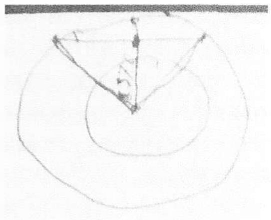


Рис. 10. Незаконченный чертеж, с которого ребенок прямо пытался перейти к вычислениям

Р. (сразу после прочтения задачи «Космонавты» и рисования чертежа к ней): Можно достать учебник по геометрии?

Э.: А он поможет?

Р.: Поможет, намного поможет.... Будет намного легче... (достает учебник, открывает его сразу на теме «Окружности», ищет чертежи, внешне похожие на его собственный рисунок). Так, какие формулы здесь есть... (долго смотрит в учебнике). Можно найти длину окружности...

Интересно, что ни бессмысленных манипуляций, ни подмен с искомым не было замечено при решении задачи «Ананас», которая не включала математические элементы, провоцирующих бессмысленные манипуляции с данными.

Исследование проблемной ситуации могло основываться не на ключевых, а на поверхностных деталях. Например, в задаче «Космонавты» ребенок мог рассуждать о наличии облаков между космонавтами, времени суток, скорости, с которой они двигаются, о том, могут ли они увидеть с этой высоты землю, о силе притяжения и пр. В задаче «Ананас» дети обсуждали «структуру мякоти ананаса», особенности инструмента, которым счищается кожура, глубину и ширину лунки, форму и количество кожуры и пр.

3. *Ошибки валидизации*

Ошибки валидизации – это ошибки, которые касаются безосновательного принятия суждений как истинных. Они выражались как в слабости логических связей в рассуждении, так и – самое главное – в отсутствии проверки построенной логики.

Дети не проблематизировали полученные решения или их основания. Например, ребенок мог строить рассуждения безо всякой связи с данными или делать вывод без опоры на свое же предшествующее рассуждение.

Р.: А можно написать ответ, основываясь не на точных цифрах, а на своем мнении из того, что как бы знаешь обо всем этом деле?

Э.: Если он будет обоснован, то – пожалуйста. Мнение же нужно обосновать.

Р.: Я считаю, что они не могут друг друга увидеть. Так как радиус Земли равен 6370, а расстояние между ними равно 2200. Как известно, Земля круглая, и получается, что часть Земли будет закрывать им обзор друг для друга.

Часть допущений делалась только на основе первого нарисованного варианта чертежа. Например, в рисунке к задаче «Космонавты» ребенок расположил радиусы под прямым углом, и этот вариант принимался затем как единственно возможный без проверки основания для такого допущения. В задаче «Ананас» ребенок мог просто пересчитать видимые на экране или чертеже линии срезов и количество точек и на этой основе делать выводы, не задумавшись о том, что количество, попавшее в поле зрения, может быть совершенно случайным.

4. *Ошибки моделирования*

В эту группы входили ошибки и трудности, касающиеся исключительно этапов моделирования, т.е. последовательного перевода обыденных семантических схем в математические и обратно.

Главным источником проблем в математизации обыденного дискурса была изначальная установка ребенка: рассматривать обыденное как не допускающее какой-либо математизации в принципе. Дети не могли приступить к структурированию обыденных элементов ни на чертеже, ни в обсуждении. Например, при попытке описать (зарисовать), как именно срезает продавец черные «глазк*и*» ананаса, дети рисовали чертежи без какой-либо ясной структуры (рис. 11).

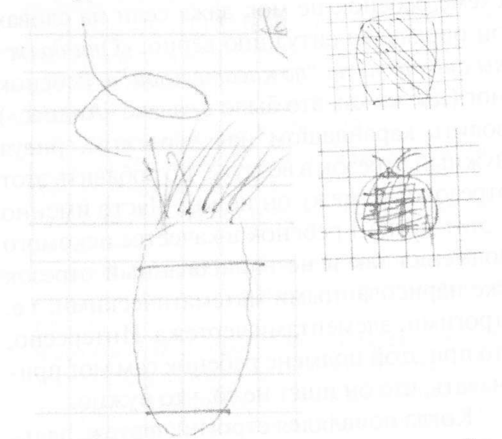


Рис. 11. Избегание изображения четкой структуры в задаче «Ананас»

Предложение экспериментатора нарисовать «ананас» более четко вызывало недоумение или даже отказы. Дети водили ручкой в воздухе, изображая расположения точек, но не прикасались к бумаге. Мы определили эту установку как *нестрогий* подход ребенка к обыденному.

То же «нестрогое» отношение к обыденным семантическим схемам проявилось и при структурировании вопроса «смогут ли увидеть?» в задаче «Космонавты». Перевод этого вопроса, для которого дети не имели готовых математических схем-эквивалентов (что значит «увидят» на языке математики?), в элемент чертежа было главной трудностью для всех детей за исключением трех. Если ребенок делал краткую запись задачи, то обычно в записи фигурировало: «*Дано: R, h, S* (радиус, высота, расстояние). *Найти: смогут ли увидеть*?»

Если ребенок по мере структурирования обыденного вопроса правильно определял, что «линия взора» должна проходить выше «поверхности Земли», он, тем не менее, не включал в чертеж какой-то схематический эквивалент этого «выше». Чертеж к тому времени уже содержал строгие математические элементы: окружность, центр, радиус, две точки над окружностью. Дорисовать, как-то обозначить обыденный элемент («выше») на уже существующей строгой схеме ребенок не мог, даже если на словах он определял ситуацию верно: «*Они должны смотреть не “по касательной”*». Ребенок мог (так же как это было в задаче «Ананас») водить карандашом над чертежом, рисуя нужный отрезок в воздухе, но добавить этот отрезок к чертежу он не мог. Часто именно в этот момент ребенок в качестве искомого подменял так и не нарисованный отрезок уже нарисованными математическими, т.е. строгими, элементами чертежа. Интересно, что при этой подмене ребенок сам мог признавать, что он ищет не то, что нужно.

Когда появлялся строгий чертеж, дальнейшая математизация не вызывала трудностей. Мы не зафиксировали ни одной ошибки перевода обыденных элементов на язык математики после того, как эти обыденные элементы были структурированы и показаны на схеме.

ОБСУЖДЕНИЕ

Мы пытались ответить на два вопроса: 1) с какими трудностями сопряжено решение задач с обыденным контекстом, в котором есть незнакомые семантические схемы? И 2) различаются ли эти трудности для однородных и неоднородных заданий? Напомним, что вопрос стоял именно о качественном сравнении характера ошибок при решении обыденных однородных и неоднородных задач. Поскольку однородные задачи репрезентировали «жизненные», «реальные» задачи, а неоднородные – обычные школьные текстовые, то появление несовпадающих видов ошибок означало бы, что однородные и неоднородные требуют разных умений для своего решения.

Выделенные нами группы ошибок – предметные, общие для решения любых задач, ошибки валидизации и ошибки моделирования – встречались и в однородной, и в неоднородной задаче. В этом смысле несовпадающих видов ошибок обнаружено не было. Однако при решении неоднородной задачи с обыденным контекстом все эти ошибки усугублялись влиянием математических элементов в составе задачи. Математические составляющие задавали свою логику решения, становившуюся помехой для процесса моделирования. Влияние математических элементов проявилось в группе «предметных» ошибок, когда ребенок не мог интегрировать обыденные элементы в геометрический чертеж. В группе общих ошибок решения задач математические элементы провоцировали подмену собой искомого и преждевременные вычисления формального характера. В группе ошибок валидизации, где, казалось бы, математические элементы должны задавать критичный и строгий подход к логике рассуждения, этого не происходило. Наконец, в группе ошибок моделирования математические элементы также усугубляли ситуацию, потому что они сами требовали одновременного встречного перевода.

Основываясь на наличии этих дополнительных трудностей, возникающих при решении неоднородных задач, можно утверждать, что задача с обыденным контекстом становится сложнее, а не легче, если содержит математические элементы, т.е. если она неоднородная. Неоднородная обыденная задача, как видно из наших результатов, не требует для своего решения процессов иных, чем полностью обыденная задача, но все эти процессы протекают труднее. Можно было бы возразить: тогда многочисленные текстовые задачи, присутствующие в стандартных учебниках, могли бы гарантированно подготовить ребенка к решению полностью обыденных заданий, чего мы как раз и не наблюдаем в достижениях российских детей по данным PISA. Главной причиной этого мы считаем тот факт, что текстовые задачи из учебников чаще всего типовые. «Тип» как раз и означает, что ребенок уже владеет стандартным способом ее решения, имеет математический аналог для обыденной семантики задачи. В этих условиях контекстная задача теряет свою обучающую и оценивающую функцию, так как для ее решения уже не требуется собственно моделирование. В соответствии с нашими результатами введение в учебники и тесты нового типа задач «на применение» будет только усугублять проблему.

Нам кажется уместным еще один вывод, имеющий отношение к интерпретации результатов PISA. Наши результаты показали, что задачи с обыденным контекстом наталкиваются на трудности, связанные скорее с общим неумением решать незнакомые задачи и проблемы, а не с каким-то особенным неумением «применять знания». Да, дети продемонстрировали специфические трудности с моделированием, но они составляют лишь небольшую часть проблемы. Основная часть ошибок вовсе не касается моделирования. Это ошибки, происходящие из несформированных стратегий анализа ситуации, стереотипии и механического воспроизведения формальных вычислений, неумения абстрагироваться от поверхностных деталей. Огромная часть ошибок пришла из неумения переносить условия задачи на чертеж, копировать изображение на бумагу, соблюдая пропорции. У детей не была сформирована потребность в проверке своих построений относительно данных.

Иными словами, общие стратегии решения новых задач сформированы недостаточно. И именно это было тотальной проблемой. Ведь одна только установка на то, что, прежде чем действовать, надо иметь ясную цель, могла бы предотвратить бóльшую часть ошибок. Возможно, мы сняли бы остроту вопроса с неумением «примененять математику» российскими учащимися, если бы просто поддержали культуру мышления на уроках математики.

1. *Выготский Л.С.* Педагогическая психология. М.: Педагогика-Пресс, 1999.
2. *Гальперин П.Я.* Типы ориентировки и типы формирования действий и понятий // Доклады АПН РСФСР. 1958. № 2. С. 75—78.
3. Основные результаты международного исследования PISA-2012. URL: http://www.centeroko.ru/public.htm#pisa_pub
4. *Погорелов А.В.* ГДЗ по геометрии к учебнику для VII—IX классов общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2008.
5. *Пойа Д.* Как решать задачу. М.: Изд-во Министерства просвещения РСФСР, 1959.
6. *Салмина Н.Г.* Знак и символ в обучении. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
7. *Талызина Н.Ф.* Педагогическая психология. М.: Академия, 2011.
8. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (2010).
9. *Фридман Л.М.* Логико-психологический анализ школьных учебных задач. М.: Педагогика, 1977.
10. *Шевкин А.* Текстовые задачи в школьном курсе математики. V—IX классы // Математика. 2005. № 23. С. 19—26.
11. *Blum W., Ferri R.B.* Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? // J. Math. Modelling and Application. 2009. N 1 (1). P. 45—58.
12. *Cummins D.D.* et al. The role of understanding in solving word problems / Cummins D.D., Kintsch W., Reusser K., Weimer R. // Cognit. Psychol. 1988. V. 20. P. 405—438.
13. *Ferri R.B.* Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process // ZDM Math. Educat. 2006. V. 38 (2). P. 86—95.
14. *Ludwig M., Xu B.* A comparative study on mathematical modelling competences with German and Chinese students // Journal für Mathematik-Didaktik. 2010. V. 31. N 1. P. 77—97.
15. *Niss M., Blum W., Galbraith P.* Introduction // Blum W., Galbraith P., Henn H.-W., Niss M. (eds). Modelling and applications in mathematics education (The 14th ICMI study). N.Y.: Springer, 2007. P. 3—32.
16. *Novick L.R., Bassok M.* Problem solving // Holyoak K.J., Morrison R.G. (eds). The Cambridge handbook of thinking and reasoning. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005. P. 321—350.
17. PISA 2012. Assessment and analytical framework: Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy. OECD Publishing, 2013.
18. *Sfard A.* Introduction: Developing mathematical discourse — Some insights from communicational research // Intern. J. Educat. Res. 2012. V. 51—52. P. 1—9.
19. *Strauss A., Corbin J.* Basics of qualitative research. Beverly Hills, CA: Sage Publications, 1990.
20. *Verschaffel L., Greer B., De Corte E.* Making sense of word problems. Lisse, The Netherlands: Swets and Zeitlinger, 2000.

Поступила в редакцию 7. VII 2014 г.

chool, discussions, Soviet
ospherical conception, im-

viet psychology in the 1920s

S.N. Bolshakov

ries of the mob developed
L.N. Voitolovsky, focusing
limitations as compared
ns of spontaneous groups.
t liquidation of research in
ted development of Soviet

s of the mob, characteris-
ogy, emotion-centered ap-

f event reconstruction of a
ne perspective

Petrash, A.A. Kuznetzova

with the aim of testing a
struction of a person's time
etric indices and diagnostic
has diagnostic and thera-
gnostic capacity is realized
d qualitative indices of a
e. The therapeutic capacity
on of events of a person's
ans of lowering emotional
experiencing a traumatic
ed with transformation of
development of a subjec-
ability of the technique has

s, time perspective, recon-
umatic event, psychodiag-

d intellect: The nature of
elation

T.N. Tikhomirova

studies of co-relation be-
tellect is presented. It pro-
including meta-analytical,
s between personal features
e psychometric intellect, as
e mechanism of the links.
findings of genetic studies
and genetic factors in co-
d intellect.
its, fluid and crystallized in-
ocietal and genetic factors.

НАШИ АВТОРЫ

Даниленко Ольга Ивановна – доктор культурологии, профессор кафедры факультета психологии Санкт-Петербургского государственного университета, danilenko.olga@gmail.com

Авдеева Юлия Викторовна – кандидат социологических наук, доцент МПГУ, avdeeva.yulija@mail.ru

Тюменева Юлия Алексеевна – кандидат психологических наук, старший научный сотрудник НИУ ВШЭ, jutu@yandex.ru

Юревич Андрей Владиславович – доктор психологических наук, профессор, член-корр. РАН, зам. директора Института психологии РАН, Москва, yurevich@psychol.ras.ru

Львова Елена Николаевна – сотрудница факультета психологии МГУ имени М.В. Ломоносова, enlvova@hotmail.com

Митина Ольга Валентиновна – кандидат психологических наук, доцент факультета психологии МГУ имени М.В. Ломоносова, ведущий научный сотрудник МГППУ, omitina@inbox.ru

Шлягина Елена Ивановна – кандидат психологических наук, старший научный сотрудник факультета психологии МГУ имени М.В. Ломоносова, e.shliagina@gmail.com

Солдатова Галина Уртамбековна – доктор психологических наук, профессор факультета психологии МГУ имени М.В. Ломоносова soldatova.galina@gmail.com

Рассказова Елена Игоревна – кандидат психологических наук, доцент факультета психологии МГУ имени М.В. Ломоносова, старший научный сотрудник НИУ ВШЭ, e.i.rasskazova@gmail.com

Ясько Бэла Аслановна – доктор психологических наук, профессор Кубанского государственного медицинского университета, Краснодар, shabela@yandex.ru

Казарин Борис Викторович – кандидат медицинских наук, профессор, зав. кафедрой Кубанского медицинского университета, Краснодар, borisvk2002@yandex.ru

Воскресенская Наталья Геннадьевна – кандидат психологических наук, старший преподаватель Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, navoskr@mail.ru

Алюшин Михаил Васильевич – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, доцент, зам. зав. кафедрой Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», MVAlyushin@mephi.ru, MVAlyushin@mail.ru

Колобашкина Любовь Викторовна – кандидат технических наук, доцент Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», lvkolobashkina@mephi.ru

Хазов Андрей Вячеславович – специалист первой категории Филиала ОАО «НТЦ ЕЭС» «Технологии автоматического управления», khazov.andrew@gmail.com

Рыбников Николай Александрович (1890–1961) – доктор психологических наук, профессор, член-корр. АПН РСФСР, Москва

Емельянова Татьяна Петровна – доктор психологических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Институт психологии РАН, t_emelyanova@inbox.ru

Мишарина Анна Владимировна – кандидат психологических наук, менеджер по персоналу ООО «Ком-Денталь», nutkins@mail.ru

Имедадзе Ираклий Владленович – доктор психологических наук, член-корр. Национальной академии наук Грузии, профессор Института общественных дел Грузии, Тбилиси, irimedi@yahoo.com

Горбатов Дмитрий Сергеевич – доктор психологических наук, профессор Санкт-Петербургского государственного университета, gorbatov.rus@gmail.com

Большаков Сергей Николаевич – доктор политических наук, доктор экономических наук, профессор Санкт-Петербургского государственного университета, snbolshakov@gmail.com

Никишина Вера Борисовна – доктор психологических наук, профессор, зав. кафедрой Курского государственного медицинского университета, декан факультета повышения квалификации, vbnikishina@mail.ru

Петраш Екатерина Анатольевна – кандидат психологических наук, старший преподаватель Курского государственного медицинского университета, petrash@mail.ru

Кузнецова Алеся Анатольевна – ассистент Курского государственного медицинского университета, kuznetsova.a80@mail.ru

Малых Сергей Борисович – доктор психологических наук, профессор, академик-секретарь отделения психологии и возрастной физиологии РАО, зав. лабораторией Психологического института РАО, malykhsb@mail.ru

Тихомирова Татьяна Николаевна – кандидат психологических наук, докторант Психологического института РАО, tikho@mail.ru

Формат 70×100 1/16. Тираж 1600 экз. Заказ 1570.
Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в АО «Первая Образцовая типография»
Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1
Сайт: www.chpd.ru. E-mail: sales@chpd.ru
тел. 8(499) 270-73-59