Российская академия наук
Институт психологии

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПСИХОЛОГИЯ: современное состояние и перспективы

Материалы международной научной конференции,
посвященной 90-летию со дня рождения В. Ю. Крылова
26–27 октября 2023 г., Москва

Ответственные редакторы:

А. Л. Журавлев,
Т. Н. Савченко,
Г. М. Головина

Москва
Институт психологии РАН
2023

УДК 159.9
ББК 88
М 34

М 34 **Математическая психология**: современное состояние и перспективы. Материалы международной научной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения В. Ю. Крылова. 26–27 октября 2023 г., Москва / Отв. ред. А. Л. Журавлев, Т. Н. Савченко, Г. М. Головина. – М.: Изд-во «Институт психологии РАН», 2023. – 320 с.

doi: 10.38098/conf_23_0469
ISBN 978-5-9270-0469-0

Настоящее издание включает материалы исследований, представленных российскими и зарубежными учеными на международной научной конференции «Математическая психология: современное состояние и перспективы», посвященной 90-летию со дня рождения В. Ю. Крылова. Содержание работ охватывает различные направления математической психологии и отражает ее современное состояние в России.

ISBN 978-5-9270-0469-0

Содержание

МЕТАНЕТРАНЗИТИВНЫЕ ОТНОШЕНИЯ ПРЕВОСХОДСТВА МЕЖДУ ВЫБОРКАМИ И ВНУТРИ ИХ ПОДВЫБОРОК[1]

А. Н. Поддьяков (*НИУ «Высшая школа экономики», Москва*)

apoddiakov@hse.ru

Нетранзитивные отношения превосходства (по принципу игры «камень, ножницы, бумага») встречаются в самых разных областях. Разрабатываются математические модели этих отношений. Интерес здесь могут представлять некоторые теоретические возможности, пока не подтвержденные реальными данными. Вводится понятие метанетранзитивности – нетранзитивных циклов превосходства, внутри которых имеются вложенные циклы превосходства и т. д. Приведен числовой пример метанетранзитивности 1-го порядка на гипотетическом материале круговых шахматных турниров на уровне классов и школ (команды трех классов A, B, C в каждой школе образуют свой нетранзитивный цикл превосходства, при этом круговой турнир между школами тоже обнаруживает нетранзитивный цикл превосходства). Пример с силой шахматистов можно заменить на другой, где у участников выборок и подвыборок оценивается какой-то другой параметр, – принцип метанетранзитивности останется прежним. Предположительно, можно доказать теоретическую возможность метанетранзитивных циклов произвольно большого порядка. При этом в практическом плане было бы интересно обнаружить на реальных данных пример метанетранзитивности хотя бы 1-го порядка.

Ключевые слова: нетранзитивные отношения превосходства, метанетранзитивность, числовые примеры.

Нетранзитивные отношения превосходства (по принципу игры «камень, ножницы, бумага») встречаются в самых разных областях – от биологии до наук о поведении. Разрабатываются математические модели этих отношений разной сложности. Интерес здесь могут представлять некоторые теоретические возможности, пока не подтвержденные реальными данными. Начну с подводящего примера.

1 Исследование выполнено при поддержке РНФ, проект № 23-18-00695.

Более 60 лет назад Л. Мозер показал, что соотношение между силой шахматистов трех команд (в каждой команде по 3 шахматиста) может быть таким, что в круговом турнире, где каждый участник встречается с каждым из двух других команд, будет наблюдаться следующее. Большинство шахматистов первой команды будут сильнее большинства шахматистов второй (и первая команда выиграет у второй), большинство шахматистов второй команды будет сильнее большинства шахматистов третьей (и вторая команда выиграет у третьей), а большинство шахматистов третьей команды будет сильнее большинства шахматистов первой (и третья команда выиграет у первой, как в игре «камень, ножницы, бумага»). Это возможно, например, если в команде A шахматисты имеют силу (в неких условных единицах) 2, 4, 9, в команде B – силу 3, 5, 7, а в команде C – силу 1, 6, 8.

Как показывают А. А. Корнеев и А. Н. Кричевец, такого типа соотношения (а приведенное – далеко не единственное) заставляют критически пересмотреть условия применимости критерия Манна–Уитни. «Мы видим, что при попарных сравнениях нарушена транзитивность отношения превосходства на „центральных тенденциях по Манну–Уитни“. Это показывает, что при более серьезном нарушении условия применимости критерия само понятие „центральная тенденция по Манну–Уитни“ некорректно. (Размножая экземпляры, можно добиться значимого циклического превосходства)» (Корнеев, Кричевец, 2011, с. 108; см. также: Thangavelu, Brunner, 2007). Этот критерий направлен на выявление превосходства одной выборки над другой по некоторому параметру. Аналогично может быть так, что большинство школьных оценок ученика A выше большинства оценок ученика B, большинство оценок ученика B выше большинства оценок ученика C, а большинство оценок ученика C выше большинства оценок ученика A (Буфеев, 2014). Это может касаться и оценок трех учеников по одному предмету – они тоже могут образовывать нетранзитивный цикл превосходства.

В 2021 г. мы ввели понятие метанетранзитивности (или метанетранзитивных циклов). Это нетранзитивные циклы превосходства, внутри которых имеются вложенные циклы превосходства, и т. д. (Поддьяков, 2021; Poddiakov, Lebedev, 2023). Количество уровней вложенных нетранзитивных циклов – это порядок метанетранзитивности. Если имеется один уровень вложенных нетранзитивных циклов, то имеет место метанетранзитивность 1-го порядка, если два уровня – то метанетранзитивность 2-го порядка, и т. д. Но чисто числовых примеров метанетранзитивности не было. Ниже я описываю такой пример. Оценку вероятности обнаружения метанетранзитивных циклов превосходства на реальных данных не даю (такие данные пока не найдены), а лишь показываю теоретическую возможность их существования.

Пусть в каждой из трех школ X, Y, Z есть по три класса A, B, C. В школе X это классы A_x, B_x, C_x, в школе Y – классы A_y, B_y, C_y, в школе Z – классы A_z, B_z, C_z. В каждом классе по три шахматиста со следующими оценками силы в неких условных единицах.

В классе A_x – шахматисты силой 22, 41, 93; в B_x – 21, 43, 92; в C_x – 23, 42, 91.
В классе A_y – шахматисты силой 12, 61, 83; в B_y – 11, 63, 82; в C_y – 13, 62, 81.
В классе A_z – шахматисты силой 32, 51, 73; в B_z – 31, 53, 72; в C_z – 33, 52, 71.

Положим, что шахматист большей силы всегда выигрывает у шахматиста меньшей силы. Можно убедиться, что команды трех классов A, B, C в каждой школе образуют свой нетранзитивный цикл превосходства (в круговом турнире в каждой школе классы будут побеждать друг друга по принципу «камень, ножницы, бумага»). При этом круговой турнир между школами тоже выявит нетранзитивный цикл превосходства: большинство шахматистов школы X сильнее большинства шахматистов школы Y, большинство шахматистов школы Y сильнее большинства шахматистов школы Z, большинство шахматистов школы Z сильнее большинства шахматистов школы X.

Пример с силой шахматистов можно заменить на другой, где у участников выборок и подвыборок оценивается какой-то другой параметр, – принцип метанетранзитивности останется прежним.

По аналогии я разработал пример метанетранзитивности более высокого 2-го порядка. В нем фигурируют уже не только классы и школы, но и районы города. Не привожу этот пример здесь из-за объема – он содержит 81 трехзначное число (а не 27 двузначных, как в примере метанетранзитивности 1-го порядка, приведенном выше). Предположительно можно доказать теоретическую возможность метанетранзитивных циклов произвольно большого порядка (с произвольно большим количеством уровней вложенных нетранзитивных циклов превосходства) и построить алгоритм генерации соответствующих численных примеров.

При этом в практическом плане было бы интересно обнаружить на реальных данных пример метанетранзитивности хотя бы 1-го порядка. (Реальные примеры просто нетранзитивных циклов превосходства без метанетранзитивности имеются во множестве в самых разных областях.)

Литература

Буфеев С. Парадокс нетранзитивных отношений // Учительская газета. 2014. № 48–49. С. 25. URL: https://ug.ru/paradoks-netranzitivnyh-otnoshenij (дата обращения: 21.06.2015).

Корнеев А. А., Кричевец А. Н. Оценка критериев Стьюдента и Манна–Уитни при различных нарушениях условий их применимости // Психологический журнал. 2011. Т. 32. № 1. С. 97–110.

Поддьяков А. Н. Понимание нетранзитивности превосходства и объекты экспериментального интереса в разных областях и парадигмах. Презентация доклада на заседании научно-теоретического семинара «Формальная философия» 30 июня 2021 г. URL: https://www.researchgate.net/publication/352856372 (дата обращения: 30.08.2021).

Poddiakov A., Lebedev A. V. Intransitivity and meta-intransitivity: meta-dice, levers and other opportunities // European Journal of Mathematics. 2023. V. 9. Art. 27. doi:10.1007/s40879-023-00618-z

Thangavelu K., Brunner E. Wilcoxon–Mann–Whitney test for stratified samples and Efron's paradox dice // Journal of Statistical Planning and Inference. 2007. № 3. P. 720–737. doi:10.1016/j.jspi.2006.06.00

Meta-intransitive superiority relations between samples and subsamples

A. N. Poddiakov (*HSE University, Moscow*)

Intransitive relations of superiority (like in rock-paper-scissors game) are described in various fields. Their mathematical models are being built. Here, some theoretical opportunities (even not confirmed with real data) can be of interest. A concept of meta-intransitivity – intransitive cycles containing nested intransitive cycles etc. – is introduced. A numerical example of meta-intransitivity of the 1st order based on hypothetical material of chess round-robin tournaments between schools and the schools' classes is given. Supposedly, it is possible to prove a theoretical opportunity of meta-intransitive cycles of arbitrary high orders. Practically, it would be of interest to find at least one real example of meta-intransitivity of the 1st order.

Key words: intransitive relations of superiority, meta-intransitivity, numerical examples.