ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2023, т. 321, с. 45–61

УДК 517.938

Критерий существования энергетической функции у регулярного гомеоморфизма 3-сферы[*]

М. К. Баринова[a], В. З. Гринес[a], О. В. Починка[a]

Поступило 04.03.2022; после доработки 10.08.2022; принято к публикации 09.01.2023

Фундаментальная теорема теории динамических систем, доказанная Ч. Конли, устанавливает факт существования непрерывной функции Ляпунова для любой динамической системы, в том числе и не гладкой (т.е. для непрерывного потока или дискретной динамической системы, порожденной гомеоморфизмом). Функция Ляпунова строго убывает вдоль траекторий динамической системы вне цепно рекуррентного множества и является константой на цепной компоненте. Наиболее тесную связь с динамикой имеет энергетическая функция — функция Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно рекуррентным множеством динамической системы. Известно, что не все динамические системы обладают энергетической функцией. В частности, согласно Д. Пикстону даже структурно устойчивые диффеоморфизмы с неблуждающим множеством, состоящим из четырех неподвижных точек, могут не иметь гладкой энергетической функции. Основным результатом работы является доказательство критерия существования непрерывной энергетической функции Морса для регулярных гомеоморфизмов 3-сферы, согласно которому существование такой функции равносильно асимптотической тривиальности одномерных седловых многообразий. Полученный критерий обобщает результаты В.З. Гринеса, Ф. Лауденбаха, О.В. Починки для 3-диффеоморфизмов Морса–Смейла в случае, когда несущее многообразие является трехмерной сферой. Из полученного критерия следует, в частности, что примеры Пикстона не обладают и непрерывной энергетической функцией.

DOI: https://doi.org/10.4213/tm4323

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть M^n — замкнутое n-мерное топологическое многообразие, снабженное метрикой d. Согласно Ч. Конли [3] *функцией Ляпунова* динамической системы (потока или каскада), заданной на M^n, называется непрерывная функция $\varphi\colon M^n \to \mathbb{R}$, которая постоянна на каждой цепной компоненте системы и убывает вдоль ее орбит вне цепно рекуррентного множества[1].

[1] Под *ε-цепью длины* $m \in \mathbb{N}$, соединяющей точку x с точкой y, для гомеоморфизма f понимается последовательность точек $x = x_0, \dots, x_m = y$ такая, что $d(f(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$ для $1 \le i \le m$. Для потока f^t под *ε-цепью длины* T, соединяющей точку x с точкой y, понимается последовательность точек $x = x_0, \dots, x_m = y$, для которых существует последовательность времен $t_1, \dots, t_m$ такая, что $d(f^{t_i}(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$, $t_i \ge 1$ для $1 \le i \le$ $\le m$ и $t_1 + \ldots + t_m = T$. Точка $x \in M^n$ называется *цепно рекуррентной* для гомеоморфизма f (потока f^t), если для любого $\varepsilon > 0$ существуют m (T), зависящее от $\varepsilon > 0$, и ε-цепь длины m (T), соединяющая точку x с ней самой. Множество всех цепно рекуррентных точек называется *цепно рекуррентным множеством*. На цепно рекуррентном множестве можно ввести отношение эквивалентности следующим образом: $x \sim y$, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют ε-цепи, соединяющие x с y и y с x. Тогда цепно рекуррентное множество разбивается на классы эквивалентности, называемые *цепными компонентами*.

[*] Исследование динамики диффеоморфизмов (разделы 2, 3) выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00010, https://rscf.ru/project/21-11-00010/. Построение энергетической функции (раздел 4) выполнено при финансовой поддержке лаборатории ДСП НИУ ВШЭ (соглашение с Министерством науки и высшего образования РФ № 075-15-2022-1101).

[a] Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Нижний Новгород, Россия.

E-mail: mkbarinova@yandex.ru (М.К. Баринова), olga-pochinka@yandex.ru (О.В. Починка).

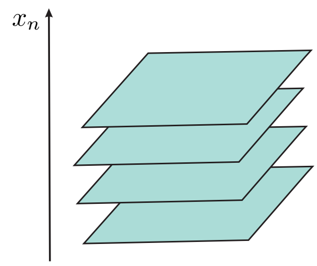

Рис. 1. Множества уровня в окрестности регулярной точки

Такая функция существует для любой динамической системы, а сам факт существования называется фундаментальной теоремой динамических систем. Следует отметить, что сам Конли дополнительно требовал, чтобы образ цепно рекуррентного множества в силу φ был нигде не плотен на прямой, а значения функции φ на различных компонентах цепно рекуррентного множества были различны, и называл такую функцию *полной функцией Ляпунова*. Числа, принадлежащие образу цепно рекуррентного множества, Конли назвал критическими значениями функции φ. Однако для гладкой функции ее критическим значением принято называть образ критической точки (точки, где градиент функции обращается в нуль), которая, вообще говоря, не обязана принадлежать цепно рекуррентному множеству. В связи с этим наряду с функцией Ляпунова в гладкой категории используется понятие *гладкой энергетической функции*, т.е. гладкой функции Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно рекуррентным множеством системы.

Первые результаты по построению гладкой энергетической функции принадлежат С. Смейлу [21], который в 1961 г. доказал существование энергетической функции Морса у градиентно-подобных потоков. К. Мейер [14] в 1968 г. обобщил этот результат, построив энергетическую функцию Морса–Ботта для произвольного потока Морса–Смейла.

Однако понятие критической точки вполне естественно вводится и для непрерывной функции $\varphi\colon M^n \to \mathbb{R}$ (см., например, [18]). Точка $p \in M^n$ называется *регулярной точкой* функции φ, если в точке p существует локальная карта $(V_p,\ \phi_p\colon y \in V_p \mapsto (x_1(y), \dots, x_n(y)) \in \mathbb{R}^n)$ такая, что

$$\varphi(y) = \varphi(p) + x_n(y)$$

(рис. 1). В противном случае p называется *критической точкой*. Обозначим через Cr_φ множество критических точек функции φ.

Следуя [14], назовем непрерывную функцию Ляпунова *непрерывной энергетической функцией* (далее — просто энергетической функцией) динамической системы, если множество критических точек функции совпадает с цепно рекуррентным множеством системы.

Критическая точка $p \in \mathrm{Cr}_\varphi$ функции φ называется *невырожденной критической точкой индекса* $\lambda \in \{0, \dots, n\}$, если в точке p существуют *координаты Морса*, т.е. локальная карта $(V_p,\ \phi_p\colon y \in V_p \mapsto (x_1(y), \dots, x_n(y)) \in \mathbb{R}^n)$ такая, что

$$\varphi(y) = \varphi(p) - \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2(y) + \sum_{i=\lambda+1}^{n} x_i^2(y)$$

(рис. 2). Функция φ называется *непрерывной функцией Морса*, если множество Cr_φ состоит из невырожденных критических точек. Понятие непрерывной функции Морса было введено еще в 1959 г. М. Морсом [18]; тогда же была доказана справедливость для нее неравенств Морса и свойств перестроек линий уровня, аналогичных гладкому случаю. Очевидно, что функция Морса может являться энергетической функцией для динамических систем, имеющих лишь конечное цепно рекуррентное множество.

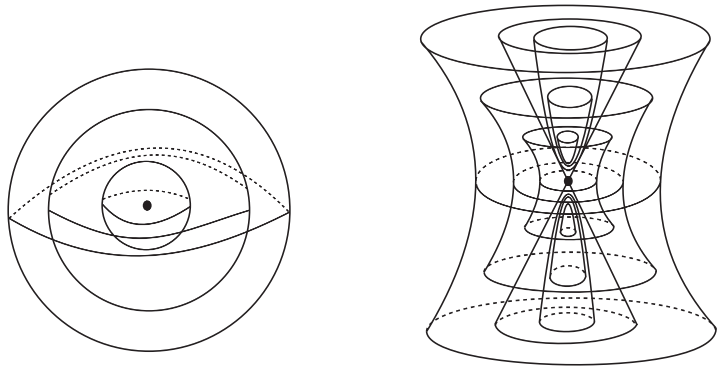

Рис. 2. Невырожденные критические точки индексов 0 и 1

Согласно [13] гомеоморфизм $f\colon M^n \to M^n$ называется *регулярным*, если он имеет конечное (следовательно, состоящее из периодических точек) цепно рекуррентное множество $\mathcal{R}_f$, которое является топологически гиперболическим. Последнее означает, что в окрестности точки $p \in \mathcal{R}_f$ периода $\operatorname{per}(p)$ гомеоморфизм $f^{\operatorname{per}(p)}$ топологически сопряжен линейному диффеоморфизму $a_{\lambda_p,\mu_p,\nu_p}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\lambda_p \in \{0,1,\dots,n\}$, $\mu_p,\nu_p \in \{-1,+1\}$, следующего вида:

$$a_{\lambda_p,\mu_p,\nu_p}(x_1,\dots,x_{\lambda_p},x_{\lambda_p+1},\dots,x_n) = \big(\mu_p \cdot 2x_1,\dots,2x_{\lambda_p},\nu_p \cdot 2^{-1}x_{\lambda_p+1},\dots,2^{-1}x_n\big).$$

При этом точка p называется *стоком*, если $\lambda_p = 0$, *источником*, если $\lambda_p = n$, и *седлом* в противном случае, а число λ_p называется ее *индексом Морса*.

В [13, Proposition 2.1, Theorem 2] установлено, что любая периодическая точка p регулярного гомеоморфизма f, имеющая период $\operatorname{per}(p)$, обладает неустойчивым W^{u}_p и устойчивым W^{s}_p многообразиями

$$W^{\mathrm{u}}_p = \Big\{y \in M^n\colon \lim_{k\to+\infty} d\big(f^{-k\operatorname{per}(p)}(y),p\big) = 0\Big\}, \quad W^{\mathrm{s}}_p = \Big\{y \in M^n\colon \lim_{k\to+\infty} d\big(f^{k\operatorname{per}(p)}(y),p\big) = 0\Big\},$$

являющимися топологическими подмногообразиями, гомеоморфными $\mathbb{R}^{\lambda_p}$ и $\mathbb{R}^{n-\lambda_p}$ соответственно, при этом

$$M^n = \bigcup_{p\in\mathcal{R}_f} W^{\mathrm{u}}_p = \bigcup_{p\in\mathcal{R}_f} W^{\mathrm{s}}_p.$$

Согласно определению Конли для регулярного гомеоморфизма $f\colon M^n \to M^n$ функция Ляпунова — это непрерывная функция $\varphi\colon M^n \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:

- $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$, если $x \notin R_f$;
- $\varphi(f(x)) = \varphi(x)$, если $x \in R_f$.

Заметим, что для любого регулярного гомеоморфизма f существует функция Ляпунова[2] $\varphi\colon M^n \to \mathbb{R}$, для которой любая периодическая точка $p \in \mathcal{R}_f$ является невырожденной критической точкой индекса λ_p с координатами Морса

$$x_1,\dots,x_n\colon \qquad \phi_p^{-1}(Ox_1\dots x_{\lambda_p}) \subset W^{\mathrm{u}}_p, \qquad \phi_p^{-1}(Ox_{\lambda_p+1}\dots x_n) \subset W^{\mathrm{s}}_p. \tag{1.1}$$

[2]Такую функцию можно построить, в частности, с помощью перехода к надстройке. Именно, пусть $\widehat{f}^{\,t}$ — топологический поток на многообразии $M^n \times \mathbb{R}$, заданный формулой $\widehat{f}^{\,t}(x) = x + t$. Определим гомеоморфизм $g\colon M^n \times \mathbb{R} \to M^n \times \mathbb{R}$ формулой $g(x,\tau) = (f(x),\tau-1)$. Положим $G = \{g^k\colon k \in \mathbb{Z}\}$ и $W = (M^n \times \mathbb{R})/G$. Обозначим через $p_W\colon M^n \times \mathbb{R} \to W$ естественную проекцию и через f^t поток на многообразии W, заданный формулой $f^t(x) = p_W(\widehat{f}^{\,t}(p_W^{-1}(x)))$. Поток f^t называется *надстройкой над гомеоморфизмом* f. По построению цепно рекуррентное множество потока f^t состоит из k_f периодических орбит $\delta_i = p_W(\mathcal{O}_i \times \mathbb{R})$, $i \in \{1,\dots,k_f\}$, т.е. надстройка f^t является регулярным потоком. Для таких потоков в работе [13] построена энергетическая функция, ограничение которой на M является искомой функцией Ляпунова для f.

Если при этом функция φ не имеет других критических точек ($\mathrm{Cr}_\varphi = \mathcal{R}_f$), то, следуя [19], мы называем ее *энергетической функцией Морса* регулярного гомеоморфизма f.

Поскольку топологически сопряженные регулярные гомеоморфизмы одновременно либо обладают, либо не обладают энергетической функцией Морса, факт ее наличия (отсутствия) является топологическим инвариантом системы, позволяющим выявлять тонкие эффекты поведения траекторий системы. Построение энергетической функции Морса для регулярного гомеоморфизма окружности является несложным упражнением. Для регулярных гомеоморфизмов поверхностей существование энергетической функции Морса следует из работ [19, 15].

Оказалось, что, начиная с размерности $n = 3$, существуют регулярные гомеоморфизмы (и даже диффеоморфизмы), у которых не существует энергетической функции Морса. Так, Д. Пикстон построил в [19] пример диффеоморфизма трехмерной сферы (см. разд. 2), не обладающего гладкой энергетической функцией Морса. Из результатов настоящей работы следует, что диффеоморфизм Пикстона не обладает также и непрерывной энергетической функцией Морса.

Пример диффеоморфизма Пикстона принадлежит более широкому классу систем, рассмотренных в данной работе. Обозначим через G класс регулярных гомеоморфизмов $f\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$, удовлетворяющих следующему условию:

($*$) если $W^{\mathrm{s}}_p \cap W^{\mathrm{u}}_q \neq \varnothing$ для седловых точек p, q, то $\lambda_p = \lambda_q$.

Обозначим через $\mathcal{O}_p$ орбиту периодической точки p, а через $W^{\mathrm{s}}_{\mathcal{O}_p}$ и $W^{\mathrm{u}}_{\mathcal{O}_p}$ ее устойчивое и неустойчивое многообразия, являющиеся объединениями соответствующих многообразий всех точек из орбиты. Введем на множестве периодических орбит гомеоморфизма $f \in G$ отношение Смейла, полагая

$$\mathcal{O}_p \prec \mathcal{O}_q \qquad \Leftrightarrow \qquad W^{\mathrm{s}}_{\mathcal{O}_p} \cap W^{\mathrm{u}}_{\mathcal{O}_q} \neq \varnothing.$$

Согласно Смейлу *m-циклом* ($m \geq 1$) называется набор попарно различных периодических орбит $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_m$, удовлетворяющих условию $\mathcal{O}_1 \prec \mathcal{O}_2 \prec \ldots \prec \mathcal{O}_m \prec \mathcal{O}_1$. Так как цепно рекуррентное множество $\mathcal{R}_f$ регулярного гомеоморфизма конечно, то гомеоморфизм $f \in G$ не имеет циклов. Поэтому отношение Смейла на множестве периодических орбит регулярного гомеоморфизма по транзитивности продолжается до отношения частичного порядка, а следовательно, по теореме Шпильрайна [22] может быть продолжено на множество всех периодических орбит до отношения полного порядка. В дальнейшем будем считать орбиты регулярного гомеоморфизма $f \in G$ пронумерованными в соответствии с некоторым фиксированным порядком:

$$\mathcal{O}_1 \prec \ldots \prec \mathcal{O}_{k_f}.$$

В силу условия ($*$) можно считать выбранный порядок *динамическим*, т.е.

$$\text{если} \quad \lambda_i < \lambda_j, \qquad \text{то} \quad \mathcal{O}_i \prec \mathcal{O}_j.$$

Энергетическую функцию φ гомеоморфизма f будем называть *динамически упорядоченной*, если $\varphi(\mathcal{O}_i) = i$.

Обозначим через W^{u}_i и W^{s}_i неустойчивое и устойчивое многообразия орбиты $\mathcal{O}_i$, через $\Omega_\lambda \subset \mathcal{R}_f$ множество периодических точек гомеоморфизма f, имеющих индекс Морса λ, и через k_λ число орбит в множестве Ω_λ. Положим

$$A_0 = \Omega_0, \quad W^{\mathrm{s}}_{A_0} = \bigcup_{j=1}^{k_0} W^{\mathrm{s}}_j, \qquad A_i = A_0 \cup \bigcup_{j=1}^{i} W^{\mathrm{u}}_{k_0+j}, \quad W^{\mathrm{s}}_{A_i} = W^{\mathrm{s}}_{A_0} \cup \bigcup_{j=1}^{i} W^{\mathrm{s}}_{k_0+j}, \quad i = 1, \ldots, k_1.$$

Обозначим через c_i число компонент связности множества A_i. В силу [13, Theorem 2(3)] имеем

$$\mathrm{cl}(W^{\mathrm{u}}_i) \setminus W^{\mathrm{u}}_i \subset A_{i-1}, \qquad i = 1, \ldots, k_1.$$

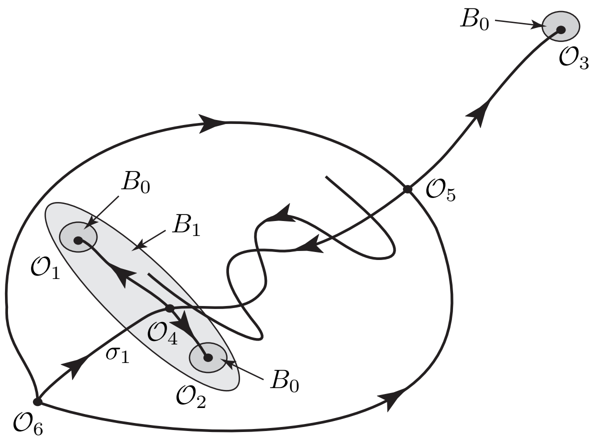

Рис. 3. Фазовый портрет диффеоморфизма $f \in G$ с асимптотически тривиальными одномерными сепаратрисами

Будем называть одномерное неустойчивое многообразие W_i^{u} седловой орбиты $\mathcal{O}_i$ *асимптотически тривиальным*, если множество A_{i-1} обладает окрестностью $B_{i-1} \subset W^{\mathrm{s}}_{A_{i-1}}$ со следующими свойствами (рис. 3):

(1) B_{i-1} является дизъюнктным объединением c_{i-1} ручно вложенных замкнутых 3-шаров, содержащим A_{i-1} в своей внутренности;

(2) каждая компонента связности множества $W_i^{\mathrm{u}} \setminus \mathcal{O}_i$ пересекает множество ∂B_{i-1} в единственной точке[3].

В противном случае многообразие W_i^{u} называется *асимптотически нетривиальным.* Переходом к гомеоморфизму f^{-1} определяются *асимптотически тривиальные и асимптотически нетривиальные* одномерные устойчивые многообразия седловых орбит.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1.1. *Гомеоморфизм $f \in G$ обладает динамически упорядоченной энергетической функцией тогда и только тогда, когда одномерные многообразия всех его седловых орбит являются асимптотически тривиальными*[4].

В частности, из теоремы 1.1 следует отсутствие энергетической функции у диффеоморфизма Пикстона. Действительно, цепно рекуррентное множество этого диффеоморфизма состоит в точности из четырех неподвижных точек: $\mathcal{O}_1 = \omega$, $\mathcal{O}_2 = S$ — стоки, $\mathcal{O}_3 = \sigma$ — седло индекса Морса 1, $\mathcal{O}_4 = N$ — источник. При этом замыкание одномерного неустойчивого многообразия $\mathrm{cl}(W^{\mathrm{u}}_\sigma)$ седловой точки σ является дико вложенной[5] дугой с точкой дикости S (рис. 4). Согласно результатам работы [7] (см. также [6, Theorem 4.1]) дикость дуги $\mathrm{cl}(W^{\mathrm{u}}_\sigma)$ равносильна

[3] Асимптотическая тривиальность неустойчивого седлового многообразия W_i^{u} равносильна *тесной вложенности* аттрактора A_{i-1} (каждая компонента связности множества W^{s}_{i-1} пересекает шары B_{i-1} по единственному 2-диску), введенной в [5].

[4] Полученный критерий не удается обобщить на гомеоморфизмы, заданные на 3-многообразиях, отличных от 3-сферы. Причина этого в том, что в общем случае множество A_{i-1} не обладает окрестностью $B_{i-1} \subset W^{\mathrm{s}}_{A_{i-1}}$, состоящей из 3-шаров, и множество $\operatorname{int} B_{i-1} \setminus A_{i-1}$ не гомеоморфно прямому произведению $\partial B_{i-1} \times \mathbb{R}$, что является препятствием к существованию энергетической функции.

[5] C^0-отображение $g\colon B \to X$ называется *топологическим вложением* топологического многообразия B в многообразие X, если оно гомеоморфно отображает B на подпространство $g(B)$ с индуцированной из X топологией. При этом образ $A = g(B)$ называется *топологически вложенным многообразием.* Заметим, что топологически вложенное многообразие не является топологическим подмногообразием в общем случае. Если A — подмногообразие, то оно называется *ручным или ручно вложенным*; в противном случае A называется *диким или дико вложенным* и точки, в которых не выполняются условия определения топологического подмногообразия, называются *точками дикости.*

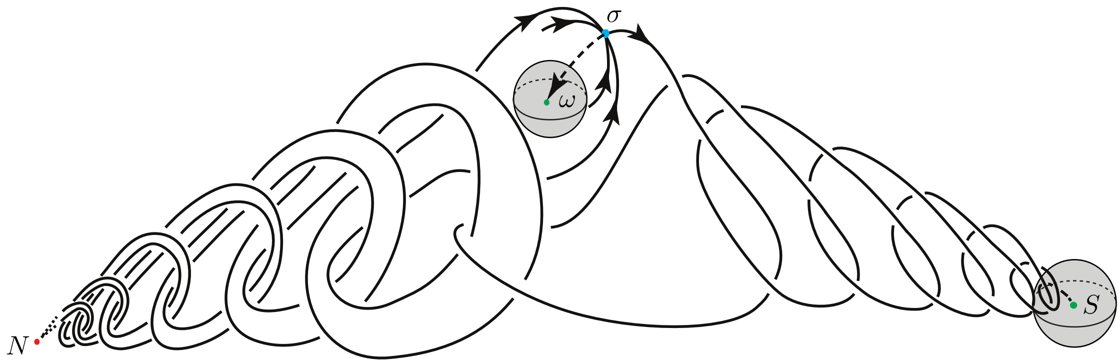

Рис. 4. Фазовый портрет диффеоморфизма Пикстона

асимптотической нетривиальности одномерного многообразия W^{u}_{σ} (см. предложение 3.2 ниже). Так, любой ручной 3-шар в бассейне стока S пересекает W^{u}_{σ} более чем в одной точке и, следовательно, одномерное многообразие W^{u}_{σ} является асимптотически нетривиальным.

2. КОНСТРУКЦИЯ ДИФФЕОМОРФИЗМА ПИКСТОНА

2.1. Построение дикой дуги Артина–Фокса. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ кольцо

$$V_2=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\colon \frac{1}{4}\le x_1^2+x_2^2\le 1,\ x_3=0\right\},$$

сферический слой

$$V_3=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\colon \frac{1}{4}\le x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 1\right\}$$

и гомотетию $h\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, определенную как

$$h(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{x_1}{2},\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{2}\right).$$

Рассмотрим многообразие $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$ как сферический слой V_3, границы которого отождествлены с помощью h. Так как $\mathbb{R}^3\setminus O$ можно представить как объединение $\mathbb{R}^3\setminus O=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}h^k(V_3)$, то естественная проекция

$$p\colon\ \mathbb{R}^3\setminus O\to\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$$

отображает каждый сферический слой $h^k(V_3)$ в $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$ и является накрытием.

Выберем на окружности $\mathbb{S}^1=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\colon x_1^2+x_2^2=1,\ x_3=0\}$ три различные точки α, β, γ (рис. 5, *а*). Пусть d — дуга окружности $\mathbb{S}^1$, ограниченная точками β, γ и такая, что $\alpha\notin d$. Пусть $a,b,c\subset V_3$ — попарно не пересекающиеся гладкие замкнутые дуги с граничными точками α и β, $h(\beta)$ и $h(\gamma)$, γ и $h(\alpha)$ соответственно, причем

- $a,c\subset V_2$ и эти дуги пересекают границу множества V_3 только в своих граничных точках;
- замкнутая кривая $b\cup h(d)$ — граница 2-диска $\Delta\subset V_3$, который пересекает ∂V_3 только по кривой $h(d)$ и трансверсально пересекает обе кривые a и c только по одному разу;
- каждая связная компонента множества $a\cup b\cup c\cup h(a\cup b\cup c)$ — гладкая дуга.

Пусть $\ell=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}h^k(a\cup b\cup c)$ (рис. 5, *б*). Дуга $\ell_O=\ell\cup O$ гладкая в $\mathbb{R}^3$, за исключением точки O. В работе [4] Э. Артин и Р. Фокс доказали, что ℓ_O дико вложена в $\mathbb{R}^3$.

Пусть

$$\widehat{\ell}=p(a\cup b\cup c).$$

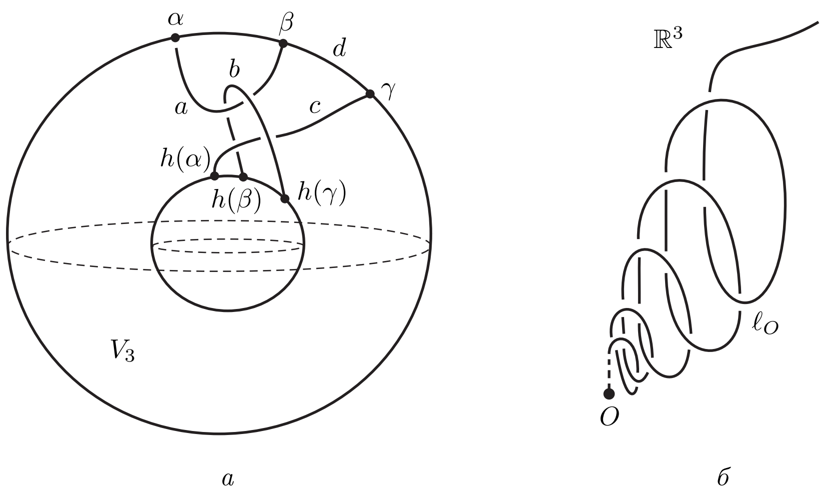

Рис. 5. Построение дикой дуги в $\mathbb{R}^3$

Нетрудно увидеть, что $\widehat{\ell}$ — гладкая замкнутая кривая (узел) в $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$. Этот узел впервые был построен Б. Мазуром в 1961 г. [11] в качестве примера узла, который в $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$ гомотопен тривиальному узлу $\widehat{l}=\{x\}\times\mathbb{S}^1$, $x\in\mathbb{S}^2$, но не является объемлюще гомеоморфным ему.

Теперь покажем, что дуга Артина–Фокса, построенная ранее, может быть реализована в качестве инвариантных подмножеств диффеоморфизмов с регулярной динамикой.

2.2. Дуга Артина–Фокса как инвариантное многообразие седловой точки. Дуга Артина–Фокса встречается в динамике впервые в статье Пикстона [19], где он построил диффеоморфизм Морса–Смейла на 3-сфере с единственной седловой точкой, инвариантные многообразия которой образуют дугу Артина–Фокса. Здесь мы даем современную конструкцию таких диффеоморфизмов, следуя работе Х. Бонатти и В. Гринеса [1], в которой диффеоморфизмы Пикстона были классифицированы (см. также [6, 12]).

Пусть $\widehat{\gamma}\subset\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$ — простая замкнутая кривая, гомотопная тривиальному узлу $\widehat{l}$, и пусть $N(\widehat{\gamma})$ — ее гладкая цилиндрическая окрестность. Множество $\gamma=p^{-1}(\widehat{\gamma})$ в $\mathbb{R}^3$ является h-инвариантной дугой. Пусть $N(\gamma)=p^{-1}(N(\widehat{\gamma}))$ есть h-инвариантная окрестность, диффеоморфная $\mathbb{D}^2\times\mathbb{R}^1$. Пусть $C=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\colon x_2^2+x_3^2\le 4\}$, и пусть поток $g^t\colon C\to C$ определен как

$$g^t(x_1,x_2,x_3)=(x_1+t,x_2,x_3).$$

Тогда существует диффеоморфизм $\zeta\colon N(\gamma)\to C$, который сопрягает $h|_{N(\gamma)}$ и $g=g^1|_C$. Определим поток ϕ^t на C с помощью формул

$$\dot x_1=\begin{cases}1-\dfrac19\bigl(x_1^2+x_2^2+x_3^2-4\bigr)^2, & x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 4,\\ 1, & x_1^2+x_2^2+x_3^2>4,\end{cases}$$

$$\dot x_2=\begin{cases}\dfrac{x_2}{2}\Bigl(\sin\Bigl(\dfrac{\pi}{2}\bigl(x_1^2+x_2^2+x_3^2-3\bigr)\Bigr)-1\Bigr), & 2<x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 4,\\ -x_2, & x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 2,\\ 0, & x_1^2+x_2^2+x_3^2>4,\end{cases}$$

$$\dot x_3=\begin{cases}\dfrac{x_3}{2}\Bigl(\sin\Bigl(\dfrac{\pi}{2}\bigl(x_1^2+x_2^2+x_3^2-3\bigr)\Bigr)-1\Bigr), & 2<x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 4,\\ -x_3, & x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 2,\\ 0, & x_1^2+x_2^2+x_3^2>4.\end{cases}$$

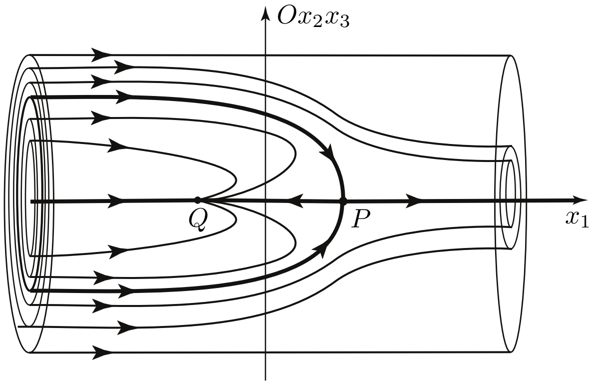

Рис. 6. Траектории потока ϕ^t

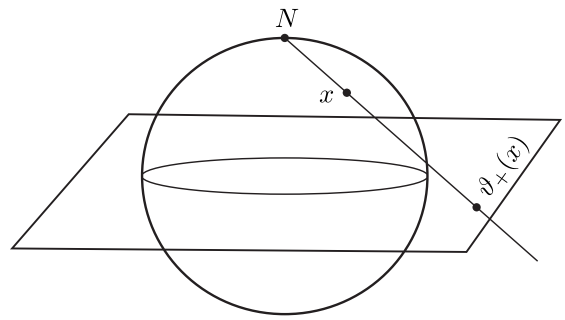

Рис. 7. Стереографическая проекция

По построению диффеоморфизм $\phi = \phi^1$ имеет две неподвижные точки: седло $P(1,0,0)$ и сток $Q(-1,0,0)$ (рис. 6), обе гиперболические. Одна неустойчивая сепаратриса седла P совпадает с открытым интервалом $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3\colon |x_1| < 1,\ x_2 = x_3 = 0\}$, принадлежащим бассейну стока Q, а другая — с лучом $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3\colon x_1 > 1,\ x_2 = x_3 = 0\}$. Заметим, что ϕ совпадает с диффеоморфизмом $g = g^1$ вне шара $\{(x_1,x_2,x_3) \in C\colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 4\}$. Определим диффеоморфизм $\overline{f}_\gamma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ таким образом, что $\overline{f}_\gamma$ совпадает с h вне $N(\gamma)$ и с $\zeta^{-1}\phi\zeta$ на $N(\gamma)$. Тогда $\overline{f}_\gamma$ имеет в $N(\gamma)$ две неподвижные точки: сток $\zeta^{-1}(Q)$ и седло $\zeta^{-1}(P)$, обе гиперболические. Неустойчивая сепаратриса седла $\zeta^{-1}(P)$ лежит в γ.

Теперь спроецируем динамику на 3-сферу. Обозначим через $N(0,0,0,1)$ северный полюс сферы $\mathbb{S}^3$. Для каждой точки $x \in \mathbb{S}^3 \setminus N$ существует единственная линия, проходящая через N и x, в $\mathbb{R}^4$ и эта линия пересекает $\mathbb{R}^3$ в единственной точке $\vartheta_+(x)$ (рис. 7). Стереографическая проекция точки x и есть точка $\vartheta_+(x)$. Несложно проверить, что

$$\vartheta_+(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left(\frac{x_1}{1-x_4}, \frac{x_2}{1-x_4}, \frac{x_3}{1-x_4}\right).$$

Таким образом, стереографическая проекция $\vartheta_+\colon \mathbb{S}^3 \setminus N \to \mathbb{R}^3$ — диффеоморфизм.

По построению диффеоморфизм $\overline{f}_\gamma$ совпадает с h в некоторой окрестности точки O и бесконечной точки, следовательно, он индуцирует на $\mathbb{S}^3$ диффеоморфизм Морса–Смейла

$$f_\gamma(x) = \begin{cases} \vartheta_+^{-1}\bigl(\overline{f}_\gamma(\vartheta_+(x))\bigr), & x \ne N, \\ N, & x = N. \end{cases}$$

Непосредственно из построения следует, что неблуждающее множество диффеоморфизма f_γ состоит из четырех неподвижных гиперболических точек: двух стоков $\omega = \vartheta_+^{-1}(\zeta^{-1}(Q))$, S, одного седла $\sigma = \vartheta_+^{-1}(\zeta^{-1}(P))$ и одного источника N.

Если кривая $\widehat{\gamma}$ выбрана так, что она является узлом $\widehat{\ell}$, описанным в предыдущем разделе, то γ — дуга Артина–Фокса ℓ в $\mathbb{R}^3$ и диффеоморфизм $f_\ell\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ — диффеоморфизм Пикстона. Его фазовый портрет изображен на рис. 4.

3. ДИНАМИКА ГОМЕОМОРФИЗМОВ КЛАССА G

Напомним, что через G мы обозначили класс регулярных гомеоморфизмов $f\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$, удовлетворяющих условию $(*)$ (если $W^{\mathrm{s}}_p \cap W^{\mathrm{u}}_q \ne \varnothing$ для седловых точек p, q, то $\lambda_p = \lambda_q$). Пусть $f \in G$. Полагая периодические орбиты гомеоморфизма f динамически упорядоченными

$$\mathcal{O}_1 \prec \ldots \prec \mathcal{O}_{k_f},$$

глобальную динамику гомеоморфизма f можно описать следующим образом.

Предложение 3.1 [13, Theorem 2]. *Пусть $f \in G$. Тогда*

(1) $\mathbb{S}^3 = \bigcup_{i=1}^{k_f} W_i^{\mathrm{u}} = \bigcup_{i=1}^{k_f} W_i^{\mathrm{s}}$;

(2) *многообразие W_i^{u} (W_i^{s}) является топологическим подмногообразием сферы $\mathbb{S}^3$, каждая компонента связности которого гомеоморфна $\mathbb{R}^{\lambda_i}$ ($\mathbb{R}^{n-\lambda_i}$);*

(3) $\mathrm{cl}(W_i^{\mathrm{u}}) \setminus W_i^{\mathrm{u}} \subset \bigcup_{j=1}^{i-1} W_j^{\mathrm{u}}$ *и* $\mathrm{cl}(W_i^{\mathrm{s}}) \setminus W_i^{\mathrm{s}} \subset \bigcup_{j=i+1}^{k_f} W_j^{\mathrm{s}}$.

Для точки $p \in \mathcal{R}_f$ компоненту связности ℓ_p^{u} (ℓ_p^{s}) множества $W_p^{\mathrm{u}} \setminus p$ ($W_p^{\mathrm{s}} \setminus p$) назовем *неустойчивой* (*устойчивой*) *сепаратрисой* точки p.

Утверждение 3.1. *Пусть $f \in G$ и p — седловая точка гомеоморфизма f, неустойчивая сепаратриса которой ℓ_p^{u} не пересекается с устойчивыми седловыми сепаратрисами. Тогда*

$$\mathrm{cl}(\ell_p^{\mathrm{u}}) \setminus (\ell_p^{\mathrm{u}} \cup p) = \omega,$$

где ω — стоковая периодическая точка. При этом если $\lambda_p = 1$, то $\mathrm{cl}(\ell_p^{\mathrm{u}})$ — топологически вложенная дуга, а если $\lambda_p = 2$, то $\mathrm{cl}(\ell_p^{\mathrm{u}})$ есть 2-сфера, топологически вложенная в $\mathbb{S}^3$.

Доказательство проведем для $\lambda_p = 2$ (для $\lambda_p = 1$ доказательство аналогично).

Так как сепаратриса ℓ_p^{u} не пересекается с сепаратрисами других седловых точек, то согласно утверждению (1) предложения 3.1 сепаратриса ℓ_p^{u} лежит в объединении устойчивых многообразий стоков. Поскольку она связна, существует единственный сток $\omega \in \mathcal{R}_f$ такой, что $\ell_p^{\mathrm{u}} \subset W_\omega^{\mathrm{s}}$. Тогда $\mathrm{cl}(\ell_p^{\mathrm{u}}) \setminus (\ell_p^{\mathrm{u}} \cup p) = \omega$.

В силу утверждения (2) предложения 3.1 множество $\ell_p^{\mathrm{u}} \cup p$ гомеоморфно $\mathbb{R}^2$. Пусть $g\colon \mathbb{S}^2 \setminus (1,0,0) \to \ell_p^{\mathrm{u}} \cup p$ — гомеоморфизм. Продолжим g до отображения $g\colon \mathbb{S}^2 \to \mathrm{cl}(\ell_p^{\mathrm{u}})$, положив $g(1,0,0) = \omega$. Очевидно, что отображение g является взаимно однозначным. Покажем, что g — гомеоморфизм. Так как g биективно, $\mathrm{cl}(\ell_p^{\mathrm{u}})$ компактно и $\mathbb{S}^2$ хаусдорфово, то для этого достаточно показать, что g открыто (см., например, [10, Theorem 8.8]).

Пусть d — открытый диск в $\mathbb{S}^2$. Если d не содержит точку $(1,0,0)$, то $g(d)$ открыто в $\ell_p^{\mathrm{u}} \cup p$, так как $g|_{\mathbb{S}^2 \setminus (1,0,0)}$ — гомеоморфизм, и, следовательно, открыто в $\mathrm{cl}(\ell_p^{\mathrm{u}})$. Если $(1,0,0) \in d$, то $F = \mathbb{S}^2 \setminus d$ — замкнутый диск. Тогда $g(F)$ замкнуто в $\ell_p^{\mathrm{u}} \cup p$ и, следовательно, существует замкнутое в $\mathbb{S}^3$ множество B такое, что $B \cap (\ell_p^{\mathrm{u}} \cup p) = g(F)$. Тогда $D = \mathbb{S}^3 \setminus B$ — открытое подмножество в $\mathbb{S}^3$ такое, что $D \cap \mathrm{cl}(\ell_p^{\mathrm{u}}) = g(d)$, т.е. $g(d)$ открыто в $\mathrm{cl}(\ell_p^{\mathrm{u}})$. $\square$

Таким образом, замыкание $\mathrm{cl}(\ell_p^{\mathrm{u}})$ неустойчивой сепаратрисы ℓ_p^{u}, не пересекающейся с устойчивыми седловыми сепаратрисами, является топологически вложенной дугой или сферой. Однако оно может оказаться *диким* в точке ω, т.е. не являться подмногообразием сферы $\mathbb{S}^3$; в этом случае сепаратриса ℓ_p^{u} называется *дикой*, в противном — *ручной*. Следующий критерий ручности седловой сепаратрисы вытекает из результатов работы [7] (см. также [6, Theorem 4.1]).

Предложение 3.2. *Пусть $f \in G$, ω — стоковая точка и ℓ_σ^{u} — одномерная (двумерная) сепаратриса седла σ такая, что $\mathrm{cl}(\ell_\sigma^{\mathrm{u}}) = \ell_\sigma^{\mathrm{u}} \cup \sigma \cup \omega$. Сепаратриса ℓ_σ^{u} является ручно вложенной в $\mathbb{S}^3$ тогда и только тогда, когда существует замкнутый 3-шар $D_\omega \subset W_\omega^{\mathrm{s}}$, являющийся подмногообразием, содержащий ω и такой, что сепаратриса ℓ_σ^{u} пересекает ∂D_ω в единственной точке (по единственной окружности)*[6].

Для доказательства фактов ниже нам понадобится понятие трансверсальности топологических подмногообразий и связанное с ним предложение 3.3.

[6] Критерий ручности для кривой (сферы), доказанный в [7], состоит в требовании, чтобы в любой окрестности точки можно было взять шар, в который кривая (сфера) входит единожды. Из-за динамики в случае сепаратрисы, накапливающейся к стоку, можно требовать, чтобы существовал один такой шар; шар с тем же свойством в малой окрестности стока будет получаться как образ этого шара под действием какой-то итерации отображения f.

Топологическое k-подмногообразие X топологического n-многообразия M $(k < n)$ называется *цилиндрически вложенным*, если оно обладает окрестностью $E_X \subset M$ и гомеоморфизмом $\psi_X\colon X \times \mathbb{D}^{n-k} \to E_X$ такими, что $\psi_X(x,0) = x$, $x \in X$.

Например, из результатов работы [17] следует, что ручно вложенная 2-сфера $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$ является *цилиндрически вложенной*.

Говорят (см., например, [9]), что *топологическое m-подмногообразие Y топологического n-многообразия M $(m < n)$ трансверсально цилиндрически вложенному*[7] *топологическому k-подмногообразию X*, если в некоторой окрестности E_X существует окрестность $U_X \subset E_X$ подмногообразия X такая, что

$$Y \cap U_X = \psi_X\bigl(\psi_X^{-1}(Y \cap X) \times \mathbb{D}^{n-k}\bigr) \cap U_X.$$

В этом случае пересечение $X \cap Y$ является цилиндрически вложенным подмногообразием размерности $k + m - n$, которое замкнуто, если X, Y замкнуты, и состоит из конечного числа компонент связности, если X, Y компактны.

Предложение 3.3 (теорема трансверсальности для подмногообразий [20])**.** *Пусть X и Y — подмногообразия замкнутого многообразия M. Пусть F — замкнутое подмножество в M такое, что Y трансверсально X на F. Тогда существует объемлющая изотопия $H_t\colon M \to M$ с носителем в сколь угодно малой окрестности множества $(M \setminus F) \cap X \cap Y$ такая, что $H_1(Y)$ трансверсально X на M.*

Напомним, что многообразие W^{u}_i, $i \in \{1,\dots,k_1\}$, называется асимптотически тривиальным, если множество A_{i-1} обладает окрестностью $B_{i-1} \subset W^{\mathrm{s}}_{A_{i-1}}$ со следующими свойствами:

(1) B_{i-1} является дизъюнктным объединением c_{i-1} ручно вложенных замкнутых 3-шаров, содержащим A_{i-1} в своей внутренности;

(2) каждая компонента связности множества $W^{\mathrm{u}}_i \setminus \mathcal{O}_i$ пересекает множество ∂B_{i-1} в единственной точке.

Лемма 3.1. *Если многообразие W^{u}_i, $i \in \{1,\dots,k_1\}$, является асимптотически тривиальным, то множество A_{i-1} обладает окрестностью B_{i-1} со свойствами* (1), (2) *такой, что $f(B_i) \subset \operatorname{int} B_i$.*

Доказательство[8]**.** Пусть A — компонента связности множества A_{i-1} такая, что $W^{\mathrm{u}}_i \cap W^{\mathrm{s}}_A \neq \varnothing$. Обозначим через L_i объединение компонент связности множества $W^{\mathrm{u}}_i \setminus \mathcal{O}_i$, принадлежащих W^{s}_A. Не уменьшая общности, можно считать, что $f(A) = A$; в противном случае все рассуждения можно провести относительно минимальной степени m_A диффеоморфизма, для которой $f^{m_A}(A) = A$. Поскольку многообразие W^{u}_i асимптотически тривиально, существует 3-шар $B_A \subset W^{\mathrm{s}}_A$, содержащий A в своей внутренности, являющийся топологическим подмногообразием таким, что каждая компонента связности множества L_i пересекает $S_0 = \partial B_A$ в единственной точке.

Пусть m — наименьшее натуральное число такое, что $f^k(S_0) \cap S_0 = \varnothing$ для всех $k > m$. Не уменьшая общности, будем считать, что S_0 трансверсальна своим образам $f(S_0),\dots,f^m(S_0)$. В противном случае этого можно добиться с помощью следующего построения. Для любого $x \in S_0$ выберем компактную окрестность $K_x \subset W^{\mathrm{s}}_A$ точки x такую, что $f(K_x) \cap K_x = \varnothing$. Такая окрестность всегда существует, так как на сфере S_0 нет неподвижных точек гомеоморфизма f. Из покрытия $\{K_x\colon x \in S_0\}$ выберем конечное подпокрытие $K_1,\dots,K_p$ сферы S_0. Согласно

[7] Понятие трансверсальности цилиндрически вложенному подмногообразию является частным случаем более общего понятия трансверсальности произвольных топологических подмногообразий.

[8] Доказательство леммы является обобщением доказательства леммы 4.2 из книги [6], где был рассмотрен частный случай, когда множество A_{i-1} является стоковой орбитой.

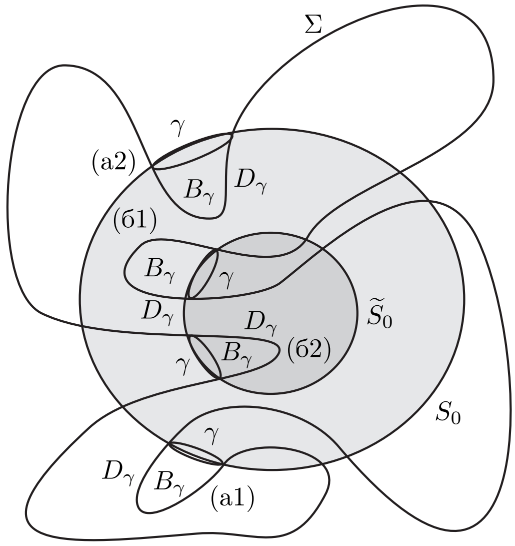

Рис. 8. Иллюстрация к доказательству леммы 3.1

предложению 3.3 мы можем аппроксимировать S_0 ручной сферой такой, что $f(S_0)$ трансверсально S_0 в $f(K_1)$. Следующая аппроксимация позволяет получить трансверсальность вдоль $K_1 \cup K_2$ и т.д. до $K_1 \cup \ldots \cup K_p$. Поступая аналогично, сделаем аппроксимацию полученной сферы таким образом, чтобы она была трансверсальна ее образам при отображениях f и f^2. Через m шагов мы получим сферу (обозначим ее снова через S_0), которая трансверсальна всем своим образам при отображениях $f, \ldots, f^m$. Более того, все аппроксимации можно произвести, сохранив свойство (2).

Далее рассмотрим два случая:

(I) $m = 1$, т.е. $f(S_0) \cap S_0 \neq \varnothing$, $f^k(S_0) \cap S_0 = \varnothing$ для всех $k > 1$;

(II) $m > 1$, т.е. $f^k(S_0) \cap S_0 \neq \varnothing$ для $k = 1, \ldots, m$, $f^k(S_0) \cap S_0 = \varnothing$ для всех $k > m$.

Рассмотрим случай (I). Покажем как модифицировать сферу S_0 в сферу S_1 так, чтобы для нее выполнялись свойство (2) и следующие два условия:

(i) $f^k(S_1) \cap S_1 = \varnothing$ для всех $k > 1$;

(ii) пересечение $f(S_1) \cap S_1$ содержит меньшее число кривых, чем $f(S_0) \cap S_0$.

Положим $\Sigma = f(S_0)$, $\widetilde{S}_0 = f^2(S_0)$ и $\widetilde{B}_A = f^2(B_A)$. Пусть γ — кривая из пересечения $\Sigma \cap (S_0 \cup \widetilde{S}_0)$. Назовем кривую γ *крайней* на Σ, если она ограничивает диск $D_\gamma \subset \Sigma$ такой, что $\operatorname{int} D_\gamma$ не содержит кривых из множества $\Sigma \cap (S_0 \cup \widetilde{S}_0)$. Рассмотрим такую крайнюю кривую γ. Возможны два случая:

(а) $\gamma \subset S_0$;

(б) $\gamma \subset \widetilde{S}_0$.

В случае (а) рассмотрим два подслучая:

(а1) $D_\gamma \cap \operatorname{int} B_A = \varnothing$;

(а2) $D_\gamma \subset B_A$.

В случае (а1) диск D_γ делит область $W^{\mathrm{s}}_A \setminus \operatorname{int} B_A$ на две части, замыкание в W^{s}_A одной из которых является ручным 3-шаром (обозначим его через B_γ). По построению $\operatorname{int} D_\gamma \cap f^k(S_0) = \varnothing$ для любого $k > 1$. Кроме того, диски D_γ и $B_\gamma \cap S_0$ не содержат точек пересечения с L_i. Поэтому граница 3-шара $B^1_A = B_A \cup N(B_\gamma)$, где $N(B_\gamma)$ — небольшая цилиндрическая окрестность шара B_γ, является искомой сферой S_1 (рис. 8).

В случае (а2) диск D_γ делит 3-шар B_A на два 3-шара, в точности один из которых не содержит A, так как $A\cap\Sigma=\varnothing$ (обозначим его замыкание через B_γ). Как и в случае (а1), искомая сфера — это граница 3-шара $B_A^1=\mathrm{cl}(B_A\setminus N(B_\gamma))$, где $N(B_\gamma)$ — небольшая цилиндрическая окрестность шара B_γ.

Рассмотрим два подслучая в случае (б):

(б1) $\widetilde D_\gamma\cap\operatorname{int}\widetilde B_A=\varnothing$;

(б2) $\widetilde D_\gamma\subset\widetilde B_A$.

В случае (б1) диск $\widetilde D_\gamma$ делит область $W^{\mathrm s}_A\setminus\operatorname{int}\widetilde B_A$ на две части, замыкание в $W^{\mathrm s}_A$ одной из которых является 3-шаром (обозначим его через $\widetilde B_\gamma$). По построению $\operatorname{int}\widetilde D_\gamma\cap f^k(\widetilde S_0)=\varnothing$ для любого $k<-1$. Кроме того, диски $\widetilde D_\gamma$ и $\widetilde B_\gamma\cap\widetilde S_0$ содержат одинаковое число точек пересечения с L_i. Поэтому граница 3-шара $\widetilde B_A^1=\widetilde B_A\cup\widetilde B_\gamma$, которую мы обозначим через $\widetilde S_1$, обладает свойством (2) и удовлетворяет следующим двум условиям:

(i) $f^k(\widetilde S_1)\cap\widetilde S_1=\varnothing$ для всех $k<-1$;

(ii) пересечение $f^{-1}(\widetilde S_1)\cap\widetilde S_1$ содержит меньшее число кривых, чем $f^{-1}(\widetilde S_0)\cap\widetilde S_0$.

Тогда граница шара $f^{-2}(\widetilde B_A^1)$ является искомой сферой S_1.

В случае (б2) диск $\widetilde D_\gamma$ делит 3-шар $\widetilde B_A$ на два 3-шара, в точности один из которых не содержит A, так как $A\cap\Sigma=\varnothing$ (обозначим его замыкание через $\widetilde B_\gamma$). Как и в случае (б1), искомая сфера — это граница 3-шара $f^{-2}(\widetilde B_A^1)$, где $\widetilde B_A^1=\mathrm{cl}(\widetilde B_A\setminus\widetilde B_\gamma)$.

Повторяя этот процесс, мы получим цилиндрическую сферу $\mathcal S_A$, которая пересекает каждую компоненту связности множества L_i в единственной точке и ограничивает шар $\mathcal B_A\subset W^{\mathrm s}_A$ такой, что $f(\mathcal B_A)\subset\operatorname{int}\mathcal B_A$.

Рассмотрим случай (II). Выберем натуральное число r такое, что $2^r\le m<2^{r+1}$. Положим $g_r=f^{2^r}$. Тогда $g_r^k(S_0)\cap S_0=\varnothing$ для всех $k\ge 2$. Используя описанную выше технику, мы построим сферу S_1, которая пересекает каждую компоненту связности множества L_i в единственной точке и такова, что $g_r(S_1)\cap S_1=\varnothing$. Тем самым мы уменьшим число r по крайней мере на 1: $f^{2^r}(S_1)\cap S_1=\varnothing$. Продолжая этот процесс, мы построим искомый шар $\mathcal B_A$. $\square$

Предложение 3.4 [6, Proposition 6.1]. *Пусть $\Sigma\subset M^3$ — топологическое вложение 2-сферы, являющееся подмногообразием*[9] *всюду, кроме, возможно, одной точки. Тогда любая окрестность V сферы Σ содержит окрестность K сферы Σ, гомеоморфную $\mathbb S^2\times[0,1]$.*

Положим $A_f^+=A_{k_1}$ и обозначим через r_f^+ число седловых точек и через l_f^+ число стоковых точек гомеоморфизма f на A_f^+. Аналогичные обозначения, но с индексом “$-$” вместо “$+$” введем для гомеоморфизма f^{-1}.

Лемма 3.2. *Для любого гомеоморфизма $f\in G$ множества A_f^+, A_f^- связны и*

$$l_f^+=r_f^++1,\qquad l_f^-=r_f^-+1.$$

Доказательство. Поскольку топологическая размерность множеств A_f^+, A_f^- не выше 1, из теории размерностей (см., например, теорему о разбивающих множествах в [8]) следует, что множество $\mathbb S^3\setminus A_f^-$ связно. С другой стороны, $\mathbb S^3\setminus A_f^-=W^{\mathrm s}_{A_f^+}$, откуда следует, что $W^{\mathrm s}_{A_f^+}$ и A_f^+ связны, а следовательно, связно и множество A_f^-.

Далее, с точностью до рассмотрения степени мы можем предполагать, что $\mathcal R_f$ состоит только из неподвижных точек и все сепаратрисы седловых точек инвариантны относительно f. Докажем теорему индукцией по числу r_f^- седловых точек индекса 2 гомеоморфизма f.

[9] В [6] от подмногообразия требовалась гладкость, однако доказательство полностью проходит и в случае топологического подмногообразия с использованием предложения 3.3.

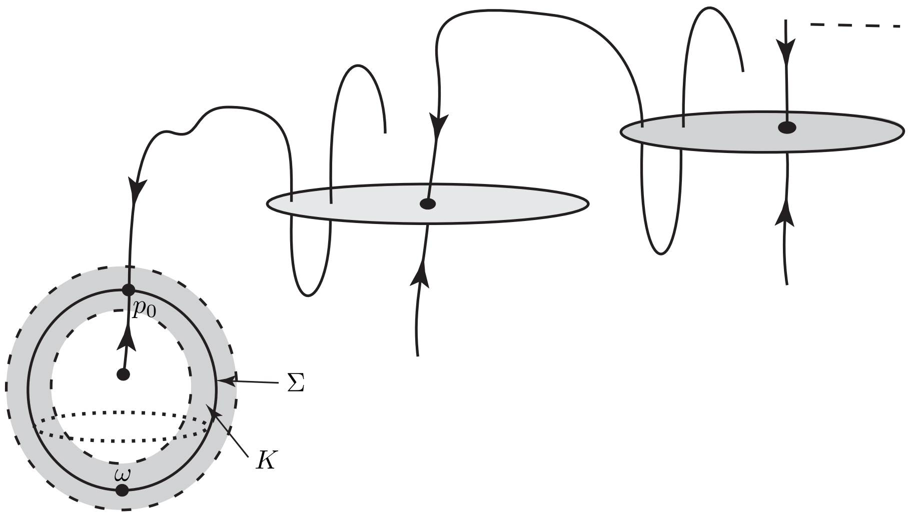

Рис. 9. Иллюстрация к доказательству леммы 3.2

Если $r^-_f = 0$, то A^-_f состоит из источников. Так как A^-_f связно, то $l^-_f = 1$ и теорема верна.

Рассмотрим случай $r^-_f > 0$ и предположим, что лемма доказана для всех гомеоморфизмов $f' \in G$ таких, что $r^-_{f'} < r_f$.

Поскольку все точки индекса Морса 2 упорядочены, неустойчивое многообразие минимальной относительно этого порядка точки (обозначим ее через p_0) не пересекается с сепаратрисами других седловых точек. Тогда согласно утверждению (3) предложения 3.1 существует сток $\omega \in \Omega_0$ такой, что сепаратриса $W^{\mathrm{u}}_{p_0} \setminus p_0$ содержится в W^{s}_ω. Положим $\Sigma = W^{\mathrm{u}}_{p_0} \cup \omega$. Согласно утверждению 3.1 множество Σ — топологически вложенная в $\mathbb{S}^3$ сфера, являющаяся подмногообразием всюду, кроме, может быть, одной точки ω. Согласно предложению 3.4 существует окрестность $K \subset W^{\mathrm{s}}_{p_0} \cup W^{\mathrm{s}}_\omega$ сферы Σ, гомеоморфная $\mathbb{S}^2 \times [0,1]$ (рис. 9).

Тогда, не уменьшая общности, можно считать, что $f(K) \subset \operatorname{int} K$ (в противном случае можно перейти к подходящей степени диффеоморфизма f). Удалив область $\operatorname{int} K$ из сферы $\mathbb{S}^3$, мы получим два трехмерных шара D_1, D_2. Обозначим через S_1, S_2 две 3-сферы, полученные из этих шаров приклеиванием к каждому из них по замкнутому 3-шару, и через $f_j\colon S_j \to S_j$, $j = 1, 2$, гомеоморфизм из класса G, совпадающий с f на D_j и такой, что $\mathcal{R}_{f_j} \cap (S_j \setminus D_j) = \omega_j$, где ω_j — неподвижный сток. Тогда $r^-_{f_j} < r^-_f$ и по предположению индукции $l^-_{f_j} = r^-_{f_j} + 1$. Так как $r^-_f = r^-_{f_1} + r^-_{f_2} + 1$ и $l^-_f = l^-_{f_1} + l^-_{f_2}$, то $l^-_f = r^-_f + 1$. $\square$

Для $i \in \{0, \dots, k_1\}$ обозначим через r_i число седловых точек и через l_i число стоковых точек в A_i. Напомним, что c_i — число компонент связности множества A_i, и положим

$$g_i = c_i + r_i - l_i.$$

Лемма 3.3. *Для любого гомеоморфизма $f \in G$ выполнено равенство*

$$g_i = 0, \qquad i \in \{0, \dots, k_1\}.$$

Доказательство. В силу леммы 3.2 множество A_f связно и, следовательно, $c_{k_1} = 1$, откуда $g_{k_1} = 1 + r_{k_1} - l_{k_1}$. В силу этой же леммы $1 + r_{k_1} - l_{k_1} = 0$ и, следовательно, $g_{k_1} = 0$. Далее покажем, что $g_i \le g_{i+1}$ для любого $i = 0, \dots, k_1 - 1$. Действительно,

$$g_{i+1} - g_i = (c_{i+1} - c_i) + (r_{i+1} - r_i) - (l_{i+1} - l_i).$$

При этом $l_{i+1} = l_i$ и $c_i \le c_{i+1} + (r_{i+1} - r_i)$, откуда $g_{i+1} \ge g_i$. По построению множество A_0 состоит из всех стоков гомеоморфизма f, откуда $r_0 = 0$, $l_0 = c_0$ и, следовательно, $g_0 = 0$. Таким образом, $g_i = 0$ для любого $i = 0, \dots, k_1$. $\square$

4. КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Перед доказательством теоремы 1.1 введем несколько необходимых понятий и докажем техническую лемму 4.1.

Для любого 3-подмногообразия $Y \subset \mathbb{S}^3$ такого, что $\mathcal{R}_f \cap \partial Y = \varnothing$, будем называть непрерывную функцию Морса $\varphi_Y\colon Y \to \mathbb{R}$ *динамически упорядоченной энергетической функцией* для f, если

- $\mathrm{Cr}_{\varphi_Y} = \mathcal{R}_f \cap Y$;
- для $\mathcal{O}_j \subset Y$ имеем $\varphi_Y(\mathcal{O}_j) = j$;
- для $y, f(y) \in Y \setminus \mathcal{R}_f$ имеем $\varphi_Y(f(y)) < \varphi_Y(y)$.

Окрестность $Q_i \subset W^{\mathrm{s}}_{A_i}$ множества A_i, являющуюся дизъюнктным объединением c_i ручно вложенных замкнутых 3-шаров, назовем *сжимаемой*, если $f(Q_i) \subset \operatorname{int} Q_i$.

Заметим, что из *теоремы о кольце* (см., например, [16]) следует, что для любых сжимаемых окрестностей $Q_i \subset P_i$ каждая компонента связности множества $G_i = P_i \setminus \operatorname{int} Q_i$ гомеоморфна $\mathbb{S}^2 \times [0,1]$.

Лемма 4.1. *Пусть $i \in \{0,\dots,k_1\}$ и P_i, Q_i — сжимаемые окрестности множества A_i. Если существует динамически упорядоченная энергетическая функция $\varphi_{Q_i}\colon Q_i \to \mathbb{R}$ для f с множеством уровня $S_{Q_i} = \partial Q_i$, то существует динамически упорядоченная энергетическая функция $\varphi_{P_i}\colon P_i \to \mathbb{R}$ для f с множеством уровня $S_{P_i} = \partial P_i$.*

Доказательство. Не уменьшая общности, предположим, что $Q_i \subset \operatorname{int} P_i$ (в противном случае вместо пары (Q_i, φ_{Q_i}) можно рассмотреть пару $(f^n(Q_i), \varphi_{f^n(Q_i)})$, где $f^n(Q_i) \subset \operatorname{int} P_i$ и $\varphi_{f^n(Q_i)} = \varphi_{Q_i} \circ f^{-n}$). Из теоремы о кольце следует, что каждая компонента связности множества $G_i = P_i \setminus \operatorname{int} Q_i$ гомеоморфна $\mathbb{S}^2 \times [0,1]$. Теперь построим функцию φ_{P_i}, для чего рассмотрим две возможности:

(1) $S_{P_i} \cap \bigcup_{n>0} f^{-n}(S_{Q_i}) = \varnothing$;

(2) $S_{P_i} \cap \bigcup_{n>0} f^{-n}(S_{Q_i}) \neq \varnothing$.

В случае (1) обозначим через m наименьшее натуральное число, для которого $f^m(P_i) \subset \subset \operatorname{int} Q_i$. Если $m = 1$, то искомая функция φ_{P_i} совпадает с φ_{Q_i} на Q_i и является константой на каждом сферическом слое множества G_i, каждая компонента связности которого гомеоморфна $\mathbb{S}^2 \times [0,1]$. Если $m > 1$, то 2-сферы множеств $f(S_{P_i}), f^2(S_{P_i}), \dots, f^{m-1}(S_{P_i})$ попарно ограничивают множество, гомеоморфное $\mathbb{S}^2 \times [0,1]$ и, следовательно, искомая функция φ_{P_i} строится как последовательное продолжение функции φ_{Q_i} на множества

$$f^{m-1}(P_i) \setminus \operatorname{int} Q_i, \quad f^{m-2}(P_i) \setminus \operatorname{int} f^{m-1}(P_i), \quad \dots, \quad P_i \setminus \operatorname{int} f(P_i).$$

В случае (2) в силу предложения 3.3 можно считать, что сфера S_{P_i} топологически трансверсальна множеству $\bigcup_{n>0} f^{-n}(S_{Q_i})$ (в противном случае продолжим функцию на чуть больший шар с нужным свойством). Тогда множество $\Gamma = S_{P_i} \cap \bigcup_{n>0} f^{-n}(S_{Q_i})$ состоит из конечного числа замкнутых кривых. Покажем, как уменьшить число кривых в пересечении, изотопно меняя Q_i с сохранением свойства сжимаемости.

Пусть $\gamma \subset \Gamma$ — *крайняя кривая*, т.е. γ ограничивает 2-диск $D_\gamma \subset S_{P_i}$ такой, что $\operatorname{int} D_\gamma$ не содержит кривых семейства Γ. Так как $\gamma \subset f^{-n}(S_{Q_i})$, то γ ограничивает 2-диск $d_\gamma \subset f^{-n}(S_{Q_i})$ такой, что $D_\gamma \cup d_\gamma$ — цилиндрически вложенная 2-сфера, ограничивающая 3-шар B_γ, не пересекающийся с A_i.

Существуют две возможности:

(а) $f^n(B_\gamma) \subset Q_i$;

(б) $f^n(B_\gamma) \subset f^{-1}(Q_i)$.

Определим $\widetilde{Q}_i$ как $\mathrm{cl}(Q_i \setminus f^n(N(B_\gamma)))$ в случае (а) и как $Q_i \cup f^n(N(B_\gamma))$ в случае (б), где $N(B_\gamma)$ — небольшая цилиндрическая окрестность шара B_γ. Так как γ — крайняя кривая, то $f(\partial Q_i) \cap \partial\widetilde{Q}_i = \varnothing$ и $f^{-1}(\partial Q_i) \cap \partial\widetilde{Q}_i = \varnothing$. Тогда $f(Q_i) \subset \widetilde{Q}_i \subset Q_i$ в случае (а) и $Q_i \subset \widetilde{Q}_i \subset f^{-1}(Q_i)$ в случае (б). В обоих случаях $\widetilde{Q}_i$ является сжимаемым и число кривых в пересечении $S_{P_i} \cap \bigcup_{n>0} f^{-n}(\partial\widetilde{Q}_i)$ меньше мощности множества Γ.

В случае (а) функция $\varphi_{f(Q_i)} = \varphi_{Q_i} \circ f^{-1}\colon f(Q_i) \to \mathbb{R}$ является динамически упорядоченной энергетической функцией, постоянной на границе. Более того, каждая компонента связности множества $\widetilde{Q}_i \setminus \operatorname{int} f(Q_i)$ гомеоморфна $\mathbb{S}^2 \times [0,1]$ и, следовательно, существует аналогичная функция на $\widetilde{Q}_i$. Аналогично в случае (б) множество $\widetilde{Q}_i$ обладает динамически упорядоченной энергетической функцией, постоянной на границе, поскольку каждая компонента связности множества $\widetilde{Q}_i \setminus \operatorname{int} f(Q_i)$ гомеоморфна $\mathbb{S}^2 \times [0,1]$.

Сделав аналогичные построения для всех кривых множества Γ, придем к случаю (1). $\square$

Доказательство теоремы 1.1. *Необходимость.* Докажем, что если гомеоморфизм $f \in G$ обладает динамически упорядоченной энергетической функцией φ, то все его одномерные седловые многообразия являются асимптотически тривиальными.

Заметим, что f и f^{-1} обладают динамически упорядоченной энергетической функцией одновременно. Действительно, если $\varphi\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}$ — динамически упорядоченная энергетическая функция для f, то $\widetilde{\varphi} = k_f + 1 - \varphi\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}$ — динамически упорядоченная энергетическая функция для f^{-1}. Поэтому достаточно провести доказательство для неустойчивых одномерных многообразий гомеоморфизма f.

Положим $B_{i-1} = \varphi^{-1}([1, i - \varepsilon_i])$, $\varepsilon_i > 0$. Из свойства (1.1) энергетической функции следует, что существует ε_i такое, что каждая компонента связности множества $W^{\mathrm{u}}_i \setminus \mathcal{O}_i$ пересекает множество ∂B_{i-1} в единственной точке. Из свойств динамически упорядоченной функции следует, что любая орбита $\mathcal{O}_j$ с номером $j < i$ принадлежит B_{i-1}; кроме того, $W^{\mathrm{u}}_j \subset \operatorname{int} B_{i-1}$. Таким образом, $A_{i-1} \subset \operatorname{int} B_{i-1}$ и $B_{i-1} \subset W^{\mathrm{s}}_{A_{i-1}}$. Из определения функции Ляпунова вытекает, что $f(B_{i-1}) \subset \operatorname{int} B_{i-1}$ и, следовательно, $\bigcap_{k\geq 0} f^k(B_{i-1}) = A_{i-1}$. Тогда B_{i-1} имеет столько же компонент связности, сколько и множество A_{i-1}. Согласно теории Морса каждая компонента связности является ручечным телом, имеющим гомотопический тип клеточного комплекса, состоящего из l_{i-1} нульмерных и r_{i-1} одномерных клеток. Тогда род тела равен $g_{i-1} = c_{i-1} + r_{i-1} - l_{i-1}$. В силу леммы 3.3 имеем $g_{i-1} = 0$, поэтому каждая компонента связности множества B_{i-1} является 3-шаром. Кроме того, так как ∂B_{i-1} — линия уровня функции Морса, шары ручно вложены.

Достаточность. Используя идеи работы [5], докажем, что если все одномерные седловые многообразия гомеоморфизма $f \in G$ являются асимптотически тривиальными, то f обладает динамически упорядоченной энергетической функцией φ.

Индукцией по $i = 0, \dots, k_1$ на некоторой сжимаемой окрестности M_i множества A_i построим динамически упорядоченную энергетическую функцию φ_{M_i} с множеством уровня $S_i = \partial M_i$.

Для $i = 0$ множество A_0 является объединением стоковых орбит гомеоморфизма f. В силу определения топологической гиперболичности в окрестности каждой точки орбиты $\mathcal{O}_j \subset A_0$ существуют координаты (x_1, x_2, x_3), в которых функция $\varphi_{\mathcal{O}_j}(x_1, x_2, x_3) = j + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ является энергетической функцией гомеоморфизма f. Обозначим через φ_0 функцию, составленную из функций $\varphi_{\mathcal{O}_j}$, $j \in \{1, \dots, k_0\}$. Тогда найдется значение $\varepsilon_0 > 0$ такое, что множество $M_0 = \varphi_0^{-1}([1, k_0 + \varepsilon_0])$ состоит из c_0 сжимаемых трехмерных шаров. Положим $\varphi_{M_0} = \varphi_0|_{M_0}$.

Пусть по предположению индукции существует динамически упорядоченная энергетическая функция $\varphi_{M_{i-1}}$ на некоторой сжимаемой окрестности M_{i-1} множества A_{i-1} с множеством уровня S_{i-1} и $\varphi_{M_{i-1}}(S_{i-1}) = \rho_{i-1}$. Построим функцию φ_{M_i}.

В силу определения топологической гиперболичности существует окрестность U_i орбиты $\mathcal{O}_{k_0+i}$ такая, что каждая ее компонента связности обладает координатами Морса $x_1 \in W^{\mathrm{u}}_{k_0+i}$,

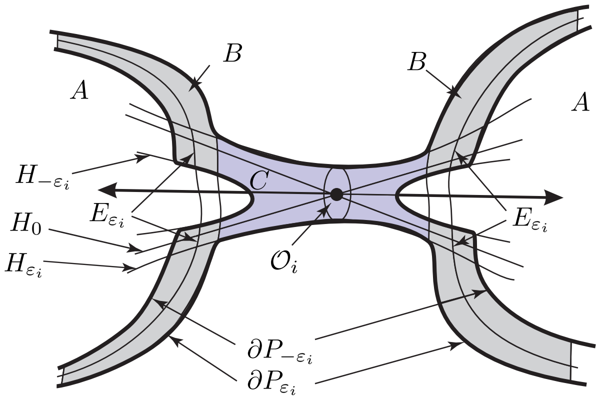

Рис. 10. Иллюстрация к шагу индукции

$(x_2, x_3) \in W^{\mathrm{s}}_{k_0+i}$, в которых функция $\varphi_i(x_1, x_2, x_3) = k_0 + i - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ является энергетической функцией гомеоморфизма f. В силу асимптотической тривиальности многообразия $W^{\mathrm{u}}_{k_0+i}$ каждая компонента связности множества $W^{\mathrm{u}}_{k_0+i} \setminus \mathcal{O}_{k_0+i}$ пересекает поверхность уровня S_{i-1} в единственной точке. Тогда в силу лемм 3.1, 4.1 и предложения 3.3, не уменьшая общности, можно считать, что для некоторого $\varepsilon_i > 0$ поверхность уровня $\varphi^{-1}_{M_{i-1}}(\rho_{i-1} - \tau)$, $\tau \in [0, 2\varepsilon_i]$, пересекает каждую компоненту связности множества U_i по двум дискам, имеющим в координатах Морса вид $|x_1| = \delta_i - t$, $\delta_i > 0$. Кроме того, положим $\rho_{i-1} = k_0 + i + \varepsilon_i$, $\varepsilon_i > 0$ (этого всегда можно добиться переопределением значений на регулярных уровнях функции Морса).

Для $t \in [-\varepsilon_i, \varepsilon_i]$ положим

$$P_t = \varphi^{-1}_{M_{i-1}}([1, k_0 + i + t]), \qquad H_t = \big\{x \in U_i \colon \varphi_i(x) \le k_0 + i + t\big\},$$
$$E_{\varepsilon_i} = (P_{\varepsilon_i} \setminus \operatorname{int} P_{-\varepsilon_i}) \cap (H_{\varepsilon_i} \setminus \operatorname{int} H_{-\varepsilon_i})$$

(рис. 10). Заметим, что $P_{\varepsilon_i} = M_{i-1}$ и, следовательно, $f(P_{\varepsilon_i}) \subset \operatorname{int} P_{\varepsilon_i}$. Так как φ_i — функция Ляпунова для $f|_{U_i}$, то имеет место неравенство $\varphi_i(f^{-1}(\varphi_i^{-1}(k_0+i) \setminus \mathcal{O}_{k_0+i})) > k_0 + i$ и, следовательно, $H_0 \setminus \mathcal{O}_{k_0+i} \subset \operatorname{int} f^{-1}(H_0 \setminus \mathcal{O}_{k_0+i})$. Поэтому, не уменьшая общности, будем считать, что значение ε_i обладает следующими свойствами:

(1) $f(P_{\varepsilon_i}) \subset \operatorname{int} P_{-\varepsilon_i}$;

(2) $f^{-1}(E_{\varepsilon_i}) \cap H_{\varepsilon_i} = \varnothing$.

Для $t \in [-\varepsilon_i, \varepsilon_i]$ положим $Q_t = P_t \cup H_t$. По построению $f(Q_t) \subset \operatorname{int} Q_t$, $t \ne 0$. Более того, $Q_{-\varepsilon_i}$ является сжимаемой окрестностью множества A_{i-1}. В силу предположения индукции и леммы 4.1 на множестве $Q_{-\varepsilon_i}$ существует динамически упорядоченная энергетическая функция $\varphi_{Q_{-\varepsilon_i}}$, постоянная на $\partial Q_{-\varepsilon_i}$. Поскольку $\varphi_{Q_{-\varepsilon_i}}(A_{i-1}) \le k_0 + i - 1$, можно считать, что $\varphi_{Q_{-\varepsilon_i}}(Q_{-\varepsilon_i}) = k_0 + i - \varepsilon_i$. Положим $M_i = Q_{\varepsilon_i}$. По построению M_i — сжимаемая окрестность множества A_i, которая в силу леммы 3.3 является дизъюнктным объединением c_i замкнутых 3-шаров. Определим на множестве M_i функцию $\varphi_{M_i} \colon M_i \to \mathbb{R}$ формулой

$$\varphi_{M_i}(x) = \begin{cases} \varphi_{Q_{-\varepsilon_i}}(x), & x \in Q_{-\varepsilon_i}, \\ k_0 + i + t, & x \in \partial Q_t. \end{cases}$$

Проверим, что φ_{M_i} является динамически упорядоченной энергетической функцией для f.

Представим множество M_i в виде объединения подмножеств с попарно не пересекающимися внутренностями: $M_i = A \cup B \cup C$, где $A = Q_{-\varepsilon_i}$, $B = P_{\varepsilon_i} \setminus Q_{-\varepsilon_i}$ и $C = M_i \setminus (P_{\varepsilon_i} \cup Q_{-\varepsilon_i})$ (см. рис. 10). По построению функция $\varphi_{M_i}|_A$ является динамически упорядоченной энергетической функцией для f, $\varphi_{M_i}(\partial A) = k_0 + i - \varepsilon_i$, функция $\varphi_{M_i}|_B$ не имеет критических точек и функция $\varphi_{M_i}|_C$ совпадает с функцией $\varphi_i|_C$. Проверим свойство убывания функции φ_{M_i} вдоль траекторий.

Если $x \in A$, то $f(x) \in A$ и $\varphi_{M_i}(f(x)) < \varphi_{M_i}(x)$, поскольку $\varphi_{M_i}|_A$ — функция Ляпунова. Если $x \in B$, то в силу условия (1) выбора ε_i имеем $f(x) \in A$ и, следовательно, $\varphi_{M_i}(x) > k_0 + i - \varepsilon_i$, а $\varphi_{M_i}(f(x)) < k_0 + i - \varepsilon_i$, откуда $\varphi_{M_i}(f(x)) < \varphi_{M_i}(x)$. Если $x \in C$, то в силу условия (2) выбора ε_i либо $f(x) \in A$ и убывание доказывается аналогично случаю $x \in B$, либо $f(x) \in C$ и убывание следует из того, что $\varphi_{M_i}|_C$ — функция Ляпунова.

Таким образом, по индукции для гомеоморфизма f мы построим динамически упорядоченную энергетическую функцию $\varphi_+ = \varphi_{M_{k_1}}$ на сжимаемом 3-шаре (поскольку $c_{k_1} = 1$ в силу леммы 3.2) $M_+ = M_{k_1}$, содержащем множество A_f^+ в своей внутренности. Аналогичным образом строится динамически упорядоченная энергетическая функция φ_- для f^{-1} на сжимаемой окрестности M_- множества A_f^-. Из теоремы Шёнфлиса (см., например, [2]) следует, что множество $\mathbb{S}^3 \setminus \operatorname{int} M_-$ является сжимаемым 3-шаром, содержащим A_f^+ в своей внутренности. Тогда существование искомой функции φ следует из леммы 4.1. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bonatti C., Grines V.Z.* Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 // J. Dyn. Control Syst. 2000. V. 6, N 4. P. 579–602.
2. *Brown M.* A proof of the generalized Schoenflies theorem // Bull. Amer. Math. Soc. 1960. V. 66, N 2. P. 74–76.
3. *Conley C.* Isolated invariant sets and the Morse index. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1978. (Reg. Conf. Ser. Math.; N 38).
4. *Fox R.H., Artin E.* Some wild cells and spheres in three-dimensional space // Ann. Math. Ser. 2. 1948. V. 99. P. 979–990.
5. *Гринес В.З., Лауденбах Ф., Починка О.В.* Динамически упорядоченная энергетическая функция для диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразиях // Тр. МИАН. 2012. Т. 278. С. 34–48.
6. *Grines V.Z., Medvedev T.V., Pochinka O.V.* Dynamical systems on 2- and 3-manifolds. Cham: Springer, 2016. (Dev. Math.; V. 46).
7. *Harrold O.G.,* Jr., *Griffith H.C., Posey E.E.* A characterization of tame curves in three-space // Trans. Amer. Math. Soc. 1955. V. 79, N 1. P. 12–34.
8. *Hurewicz W., Wallman H.* Dimension theory. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 2015. (Princeton Math. Ser.; V. 4).
9. *Kirby R.C., Siebenmann L.C.* Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and triangulations. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 2016. (Ann. Math. Stud.; V. 88).
10. *Kosniowski C.* A first course in algebraic topology. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980.
11. *Mazur B.* A note on some contractible 4-manifolds // Ann. Math. Ser. 2. 1961. V. 73. P. 221–228.
12. *Medvedev T.V., Pochinka O.V.* The wild Fox–Artin arc in invariant sets of dynamical systems // Dyn. Syst. 2018. V. 33, N 4. P. 660–666.
13. *Medvedev T.V., Pochinka O.V., Zinina S.K.* On existence of Morse energy function for topological flows // Adv. Math. 2021. V. 378. Pap. 107518.
14. *Meyer K.R.* Energy functions for Morse–Smale systems // Amer. J. Math. 1968. V. 90, N 4. P. 1031–1040.
15. *Митрякова Т.М., Починка О.В., Шишенкова А.Е.* Энергетическая функция для диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством // Журн. Средневолжск. мат. о-ва. 2012. Т. 14, №1. С. 98–106.
16. *Moise E.E.* Affine structures in 3-manifolds. V: The triangulation theorem and Hauptvermutung // Ann. Math. Ser. 2. 1952. V. 56. P. 96–114.
17. *Moise E.E.* Geometric topology in dimensions 2 and 3. New York: Springer, 1977. (Grad. Texts Math.; V. 47).
18. *Morse M.* Topologically non-degenerate functions on a compact n-manifold M // J. anal. math. 1959. V. 7. P. 189–208.
19. *Pixton D.* Wild unstable manifolds // Topology. 1977. V. 16. P. 167–172.
20. *Quinn F.* Topological transversality holds in all dimensions // Bull Amer. Math. Soc. 1988. V. 18, N 2. P. 145–148.
21. *Smale S.* On gradient dynamical systems // Ann. Math. Ser. 2. 1961. V. 74. P. 199–206.
22. *Szpilrajn E.* Sur l'extension de l'ordre partiel // Fundam. math. 1930. V. 16. P. 386–389.