

УДК 517.938

## Третий тип динамики и гомоклинические траектории Пуанкаре

С.В. Гонченко, А.С. Гонченко, К.Е. Морозов

Нижегородский университет им. Н.И. Лобачевского, Научно-образовательный математический центр “Математика технологий будущего”

E-mail: sergey.gonchenko@mail.ru, agonchenko@mail.ru, kirill.morozov@itmm.unn.ru

### Аннотация

В этой работе мы даем обзор некоторых фундаментальных результатов в теории динамических систем, которые привели к открытию динамического хаоса и его трех форм, двух классических – это “консервативный хаос” и “диссипативный хаос”, а также третьей, совсем новой – это так называемая “смешанная динамика”, при которой множества аттракторов и репеллеров имеют непустое пересечение. Большая часть работы посвящена гомоклиническим траекториям Пуанкаре, т.е. двоякоасимптотическим траекториям к седловым периодическим, как основным элементам динамического хаоса. Мы показываем на простых примерах, как такие траектории появляются при периодических возмущениях двумерных консервативных систем. Как известно, гомоклинические траектории были открыты Пуанкаре. В работе мы обсуждаем ту самую задачу (плоскую ограниченную круговую задачу трех тел), при решении которой было сделано это открытие, а также, в приложении, приводим некоторые интересные факты, касающиеся его истории.

## 1 Введение

Теория динамического хаоса – междисциплинарная наука, изучающая различными методами “нерегулярные, непредсказуемые изменения состояния полностью детерминированных систем, обладающие основными свойствами случайного процесса” [1]. Соответствующие сложные хаотические явления характерны для многих физических, биологических, химических и т.п. моделей естествознания и техники. Математическая теория динамического хаоса нацелена на объяснение этих явлений преимущественно математическим языком, а также на разработку всевозможных аналитических, качественных и численных методов исследования хаоса. Одной из основных задач этой теории является объяснение механизмов возникновения хаоса, в частности, при переходе к нему от простых режимов: стационарных, периодических и

квазипериодических. И здесь большую роль играет теория бифуркаций – раздел качественной теории динамических систем, изучающий явления перестроек фазовых портретов динамических систем при изменении их параметров.

Когда говорят о динамическом хаосе в конечномерных системах, обычно имеют в виду две его совершенно разные формы: консервативный и диссипативный хаос. Однако совсем недавние исследования показывают, что к этим двум классическим формам динамического хаоса следует добавить еще одну форму, т.н. *смешанную динамику* [2], которая, с одной стороны, представляет собой вполне самостоятельный тип хаоса, а с другой, сочетает в себе фундаментальные свойства и консервативного, и диссипативного хаоса. Это проявляется в том, что в смешанной динамике присутствуют как диссипативные аттракторы и репеллеры (аттракторы в обратном времени), так и некоторые элементы консервативного хаоса – инвариантные множества (т.н. обратимые ядра), которые ничего не притягивают и ничего не отталкивают.

*Консервативный хаос* характерен для систем, сохраняющих фазовый объем, в частности, для многомерных гамильтоновых систем. При этом все фазовое пространство такой хаотической (неинтегрируемой) системы даже в случае полутора и двух степеней свободы выглядит как некоторое неравномерно гиперболическое “хаотическое море” с беспорядочно разбросанными внутри него эллиптическими островами (островками устойчивости по Ляпунову) [3, 4, 5, 6]. Здесь хаос как бы “размазан”, типично крайне неравномерно, по всему фазовому пространству так, что даже внутри эллиптических островов можно опять обнаружить зоны хаотического поведения, разделенные континуумом инвариантных КАМ-торов [7, 8, 9, 10]. В случае числа степеней свободы больше 2 ситуация еще более усложняется. Здесь многомерные КАМ-торы уже не разделяют фазовое пространство на уровне гамильтониана, и поведение типичных траекторий становится неустойчивым по Ляпунову, в силу возможности их хаотического дрейфа, т.н. диффузии Арнольда [11, 5, 6].

*Диссипативный хаос* имеет совсем другую природу, он ассоциируется прежде всего со странными аттракторами [12] – асимптотически устойчивыми замкнутыми инвариантными множествами с нетривиальной динамикой. Поэтому фазовое пространство диссипативной системы устроено совсем по-другому, чем у консервативных систем. Когда такое фазовое пространство компактно, в нем существуют “дырки” двух типов – это поглощающие области, в которые входят все положительные полутраектории, пересекающие их границу, и отталкивающие области, которые являются поглощающими в обратном времени. При этом аттракторы лежат внутри поглощающих областей, а репеллеры – внутри отталкивающих областей. Соответственно, здесь аттракторы и репеллеры лежат в разных частях фазового пространства.

Эти две формы динамического хаоса, как видно, не имеют ничего общего. При этом известные классические результаты по исследованию систем, близких к гамильтоновым, см., например, [13, 14, 15, 16, 17], касались только вопросов о том, как раз-

рушается консервативность при диссипативных возмущениях. Однако, можно поставить обратный вопрос: а как она может сохраняться? Точнее, возможно ли, вообще, что при диссипативных возмущениях гамильтоновых систем какие-то элементы консервативного поведения траекторий сохраняются – если не для всех возмущений, то хотя бы для типичных, т.е. образующих подмножества второй категории Бэра в множестве всех достаточно гладких возмущений. Ответ оказался положительным и, кроме того, он привел, весьма неожиданно, к открытию смешанной динамики – новой, третьей формы динамического хаоса.

Основные элементы математической теории смешанной динамики были заложены в работах [2, 18, 19]. В этой теории нет ничего необычного, кроме того, что аттрактор здесь понимается не как *притягивающее* (т.е. асимптотически устойчивое) замкнутое инвариантное множество системы, а как *устойчивое* множество. При этом в качестве типа устойчивости рассматривается *устойчивость при постоянно действующих возмущениях*, которая определяется в топологической динамике [20] как устойчивость по Ляпунову для  $\varepsilon$ -траекторий<sup>1</sup>, а в физике – как устойчивость относительно малого ограниченного шума. Такое определение аттрактора не является новым, оно восходит к работам Конли, Рюэля и Харли [21, 22, 23]. При этом разделение форм хаоса на консервативный и диссипативный по-прежнему остается, но также и появляется что-то новое.

Обозначим через  $A$  и  $R$  множества аттракторов и репеллеров системы: в терминологии [2],  $A$  – это полный аттрактор системы, а  $R$  – это полный репеллер системы.<sup>2</sup> Как хорошо известно, все траектории консервативных систем неустойчивы относительно постоянных возмущений (хотя могут быть устойчивы или орбитно-устойчивы по Ляпунову). Поэтому с точки зрения [2], все консервативные системы устроены одинаково: единственным устойчивым множеством в прямом и обратном времени здесь является все фазовое пространство  $M$ , которое, следовательно, является одновременно и аттрактором, и репеллером системы. Тогда в случае консервативной динамики получаем соотношение  $A = R$ , а в случае диссипативной – соотношение

<sup>1</sup>Для отображения вида  $\bar{x} = f(x)$  его траектория – это последовательность точек вида  $(\dots, x_i, x_{i+1}, \dots)$ , где  $x_{i+1} = f(x_i)$ ; а  $\varepsilon$ -траектория – это последовательность вида  $(\dots, y_i, y_{i+1}, \dots)$ , где  $\rho(y_{i+1}, f(y_i)) < \varepsilon$  и  $\rho(a, b)$  – расстояние между точками  $a$  и  $b$ . Траектория  $L$  устойчива по Ляпунову, если близость начальных точек  $x_0$  и  $x'_0$  траекторий  $L$  и  $L'$  влечет близость точек  $x_i \in L$  и  $x'_i \in L'$  при всех  $i \geq 0$ . Устойчивость траектории  $L$  при постоянно действующих возмущениях означает близость к  $L$  всех  $\varepsilon$ -траекторий с достаточно малым  $\varepsilon > 0$ , т.е. близость  $x_i$  и  $y_i$  при всех  $i \geq 0$ .

<sup>2</sup>Мы используем следующие определения из [2]. Замкнутое инвариантное множество называется цепно-транзитивным, если между любыми двумя его точками для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\varepsilon$ -траектория их соединяющая. Аттрактором точки  $x$  называется устойчивое цепно-транзитивное множество  $A_x$ , достижимое по  $\varepsilon$ -траекториям от точки  $x$  (т.е. между точкой  $x$  и любой точкой из  $A_x$  для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\varepsilon$ -траектория, их соединяющая). Полным аттрактором системы называется множество  $A$ , которое является замыканием объединения аттракторов всех ее точек. Аналогично определяется полный репеллер  $R$ , как полный аттрактор в обратном времени.

$A \cap R = \emptyset$ . По законам формальной логики остается еще одна возможность:  $A \cap R \neq \emptyset$  и  $A \neq R$ , которая означает, что множества аттракторов и репеллеров системы имеют непустое пересечение, но не совпадают, в отличие от консервативного случая. Это смешанная динамика.

Заметим, что замкнутое инвариантное множество  $C = A \cap R$  обладает весьма необычными свойствами. С одной стороны, по определению, оно является одновременно и аттрактором, и репеллером. С другой стороны, оно, как репеллер, не притягивает никаких траекторий (и даже  $\varepsilon$ -траекторий), и, как аттрактор, не отталкивает никаких траекторий. Соответственно, множество  $C$ , названное нами в [2] *обратимым ядром* (reversible core), имеет явные черты консервативной динамики. Тем не менее, динамика в его окрестности не может быть чисто консервативной. В частности, в работе [2] было показано, что обратимое ядро является пределом счетного множества диссипативных аттракторов и репеллеров (асимптотически устойчивых для  $\varepsilon$ -траекторий в прямом и соответственно обратном времени).<sup>3</sup> Таким образом, можно сказать, что смешанная динамика – это тот тип динамического хаоса, при котором его диссипативные и консервативные элементы (диссипативные аттракторы-репеллеры и обратимые ядра) неустранимо сцеплены, и довольно сложным способом. Что касается математической теории, то еще в работе [19] было показано, что таким свойством обладают системы из т.н. *абсолютных областей Ньюхауса* [27, 28], которые имеют одновременно счетные множества периодических аттракторов (стоков) и периодических репеллеров (источников), *замыкания множеств которых имеют непустое пересечение*. По любому разумному определению аттрактора системы, периодические стоки должны ему принадлежать, также как и периодические источники должны принадлежать репеллеру. Соответственно, замкнутое множество  $A$  содержит все периодические стоки и их замыкание, аналогично, множество  $R$  содержит все периодические источники и их замыкание. Это влечет непустоту пересечения множеств  $A$  и  $R$ . Но также и  $A \neq R$ , поскольку аттрактору не принадлежат периодические источники, а репеллеру – стоки.

Заметим, что для существования абсолютных областей Ньюхауса в параметрических семействах систем, как показано в [19, 29], нужно чтобы эти системы были со знакопеременной дивергенцией (или, в случае отображений, их итерации где-то сжимали объемы, а где-то растягивали) и обладали сложной динамикой. Оба эти свойства не являются слишком ограничительными, в том числе для систем из при-

---

<sup>3</sup>Достаточно простыми примерами обратимых ядер являются типичные симметричные эллиптические периодические траектории обратимых двумерных диффеоморфизмов, которые, как было показано в [24, 2] (см. также [25]), окружены диссипативными зонами-гирляндами, содержащими периодические стоки и источники – те самые диссипативные аттракторы и репеллеры. О структуре динамики на обратимых ядрах в общем случае пока практически ничего неизвестно. Здесь можно отметить только одну работу [26] Емельяновой и Некоркина, в которой такая динамика была исследована численно в системе двух адаптивно связанных фазовых осцилляторов.

ложений. Поэтому к настоящему времени примеров конкретных моделей, в которых обнаружена смешанная динамика, известно достаточно много, см., например, соответствующие ссылки в [25].

Одной из целей настоящей работы является обзор основных результатов, которые в совокупности привели к открытию динамического хаоса и всех его трех форм. Прежде всего это связано с доказательством Пуанкаре существования гомоклинических траекторий в близких к интегрируемым гамильтоновым системам и, тем самым, с открытием консервативного хаоса. Этой теме посвящены три раздела статьи, § 2 и § 3, а также приложение, § 6. При этом в § 2 мы даем определение гомоклинических траекторий Пуанкаре, как грубых, так и негрубых (гомоклинических касаний), а также рассматриваем некоторые задачи, в которых они появляются естественным образом. Одна из самых простых таких задач – задача о периодических возмущениях двумерной консервативной системы, имеющей петлю сепаратрисы седлового состояния равновесия, рассматривается в § 2.1 и § 2.2. В § 2.3 дается описание гораздо более сложной задачи, плоской ограниченной круговой задачи трех тел, при исследовании которой Пуанкаре открыл гомоклинические траектории. В § 3 и § 4 мы даем краткий исторический обзор основных этапов становления современной теории динамического хаоса.<sup>4</sup> В § 5 кратко представлены некоторые элементы теории глобальных бифуркаций, а также показано как их исследование привело к открытию новых типов странных аттракторов и смешанной динамики. В приложении, § 6, мы приводим некоторые исторические сведения, касающиеся “гениальной” ошибки Пуанкаре, связанной с его первоначальным “неоткрытием” динамического хаоса. Эта ошибка, однако, была быстро исправлена самим Пуанкаре, но невольно стимулировала пересмотреть коренным образом основы его же собственной теории, которые стали, в конце концов, математическим фундаментом теории динамического хаоса.

---

<sup>4</sup>Этот обзор ни в коей мере не претендует на полноту даже в той части, которая касается качественной теории многомерных динамических систем со сложным хаотическим поведением траекторий. Мы совсем не касаемся таких фундаментальных направлений теории динамического хаоса, как метрическая и эргодическая теория (чьи достижения обязаны таким выдающимся ученым как Биркгоф, Боголюбов, Крылов, Боуэн, Рюэль, Синай и др.), КАМ теория (теория Колмогорова-Арнольда-Мозера), статистическая теория динамических систем, основы которой были заложены еще в работе А.А. Андропова, А.А. Витта и Л.С. Понтрягина [30], опубликованной в 1933 г. и опередившей нелинейную науку лет на 40-50, и др.

## 2 О гомоклинических траекториях Пуанкаре в периодически возмущенных двумерных консервативных системах.

Гомоклинической траекторией Пуанкаре называется траектория, двоякоасимптотическая (при  $t \rightarrow +\infty$  и при  $t \rightarrow -\infty$ ) к седловой периодической орбите. В случае потоков используется также термин *гомоклиническая кривая Пуанкаре* или просто гомоклиническая кривая. Хорошо известно, что у седлового периодического движения  $L$  существуют инвариантные устойчивое  $W^s$  и неустойчивое  $W^u$  многообразия, которые трансверсально пересекаются по  $L$ . При этом, по определению,  $W^s$  содержит все те траектории, которые стремятся к  $L$  при  $t \rightarrow +\infty$ , а  $W^u$  – все те траектории, которые стремятся к  $L$  при  $t \rightarrow -\infty$ . Таким образом, гомоклиническая траектория должна принадлежать одновременно и  $W^s$ , и  $W^u$ , т.е.  $\Gamma_0 \in \{W^s \cap W^u\} \setminus L$ , см. рис. 1. Если указанное пересечение трансверсально, соответствующая гомоклиническая траектория называется *грубой*; в случае нетрансверсального пересечения говорят о *негрубой* гомоклинической траектории или о *гомоклиническом касании*. Также траектории, лежащие в пересечении инвариантных многообразий двух разных седловых периодических траекторий, называются *гетероклиническими*.

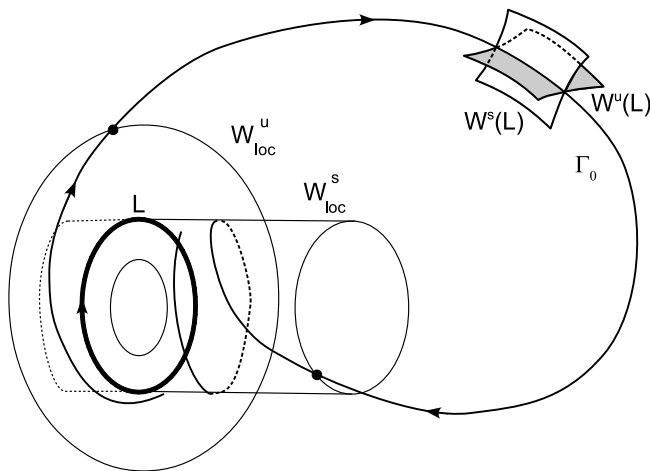


Рис. 1: Эскиз трехмерной системы, имеющей седловое периодическое движение  $L$  и гомоклиническую к нему траекторию (кривую)  $\Gamma_0$ .

Гомоклинические и гетероклинические траектории были открыты А. Пуанкаре в конце 19 века при исследовании задачи о возмущении интегрируемых гамильтоновых систем из небесной механики, см. подробнее в § 2.3. Ниже мы рассмотрим примеры

динамических систем, в которых вопрос о существовании у них гомоклинических решений решается достаточно просто, во всяком случае несравнимо проще, чем в оригинальной работе Пуанкаре [31]. Сейчас мы можем сказать, что Пуанкаре открыл гомоклинические траектории в одном из самых трудных и неприспособленном для этого классе систем.

## 2.1 Простые примеры систем с гомоклиническими траекториями

Двоякоасимптотические траектории к седловым состояниям равновесия были хорошо известны еще до Пуанкаре. В случае двумерных потоков им соответствуют петли сепаратрис седловых состояний равновесия, которые называются также гомоклиническими петлями. Для примера рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} - \lambda(x - x^2) = 0, \quad (1)$$

или в гамильтоновой форме

$$\dot{x} = \frac{\partial H_0}{\partial y} = y, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H_0}{\partial x} = \lambda(x - x^2) \quad (2)$$

с гамильтонианом  $H_0(x, y) = y^2/2 - \lambda(x^2/2 - x^3/3)$ .

Система (2) интегрируема, и ее фазовый портрет имеет вид, показанный на рис. 2. Система (2) имеет на фазовой плоскости  $(x, y)$  два состояния равновесия: седло  $O_1(0, 0)$  с собственными значениями  $\pm\sqrt{\lambda}$  и центр  $O_2(1, 0)$  с собственными значениями  $\pm i\sqrt{\lambda}$ . Одна из сепаратрис седла, выходящая из равновесия  $O_1(0, 0)$  при  $t \rightarrow -\infty$ , возвращается в него же при  $t \rightarrow +\infty$ , образуя петлю сепаратрис  $\Gamma_0$ , которая лежит на уровне  $H_0 = 0$  гамильтониана и, соответственно, имеет уравнение  $y^2 = \lambda(x^2 - 2x^3/3)$ ,  $0 < x \leq 3/2$ .

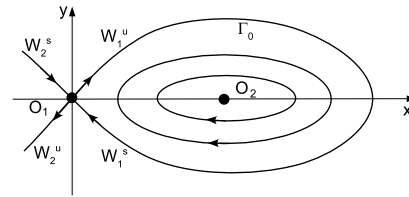


Рис. 2: Фазовый портрет системы (1).

Используя уравнение (1), нетрудно построить примеры двоякоасимптотических траекторий к седловым периодическим движениям. Наверное самый простой способ связан с рассмотрением системы

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \lambda(x - x^2) &= 0, \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned} \quad (3)$$

в которой новая переменная  $\theta$  является циклической с периодом  $2\pi$ . Ее фазовым пространством является  $R^2 \times S_1$ , где  $S_1$  – окружность. Поток (3) имеет два периодических решения  $L_1$  и  $L_2$  периода  $2\pi$ , проходящих соответственно через состояния равновесия  $O_1$  и  $O_2$  системы (2). Но теперь седловое периодическое движение  $L_1 : \{x = \dot{x} = 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}$  имеет двумерные устойчивое и неустойчивое многообразия  $W^s(L_1)$  и  $W^u(L_1)$ , две половинки которых  $W_1^s(L_1)$  и  $W_1^u(L_2)$  совпадают. Соответственно система (3) имеет континуум двоякоасимптотических траекторий, каждой из которых отвечает решение проходящее через начальную точку с координатами  $(x, \dot{x})$  на петле сепаратрис системы (1), см. рис. 3а.

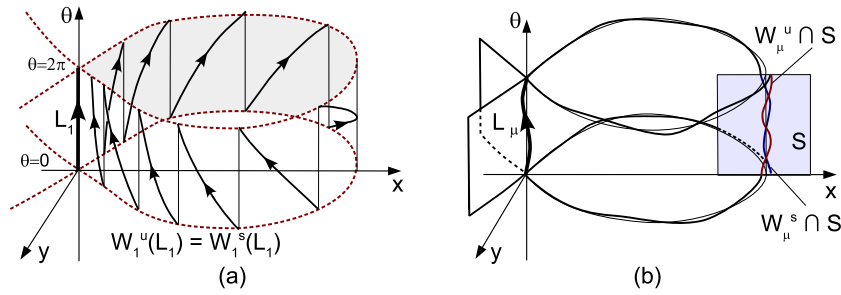


Рис. 3: (а) Сепаратрисные поверхности  $W_1^u(L_1)$  и  $W_1^s(L_1)$  совпадают в интегрируемом случае, для системы (3); (б) они расщеплены при возмущении, для системы (5).

Поскольку в этом примере секущие  $\theta = 0$  и  $\theta = 2\pi$  отождествлены, исследование трехмерной системы (3) удобно сводить к изучению двумерного отображения  $T : \theta = 0 \mapsto \theta = 2\pi$  по траекториям системы. Фазовый портрет этого отображения будет в точности таким же как и у двумерной системы (1), см. рис. 2. Однако теперь это будет дискретная система – двумерное отображение  $T$  сдвига на время  $t = 2\pi$  по траекториям системы (3). Соответственно, точка  $O_1(0, 0)$  – это теперь седловая неподвижная точка отображения  $T$ , ее устойчивое  $W^s$  и неустойчивое  $W^u$  одномерные инвариантные многообразия уже не отдельные траектории, а инвариантные кривые, состоящие из континуума траекторий.

Такое поведение асимптотических траекторий и поверхностей характерно для интегрируемых гамильтоновых систем, что было хорошо известно еще до Пуанкаре. Фундаментальное достижение Пуанкаре состоит в том, что он показал, что у неинтегрируемых гамильтоновых систем устойчивое и неустойчивое многообразия седловых периодических движений *могут пересекаться, не совпадая*.



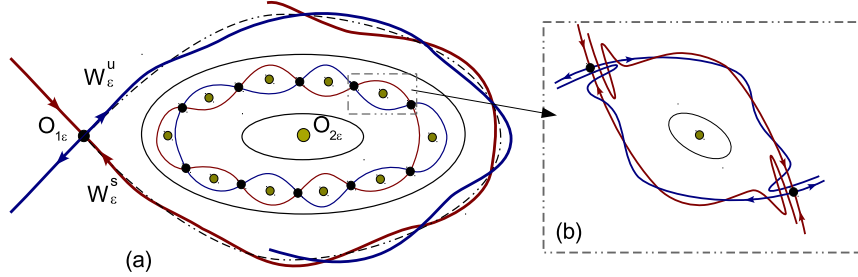


Рис. 4: Качественная картина фазового портрета отображения  $T_\varepsilon$ . Это сохраняющее площадь отображение, имеющее две неподвижные точки, седло  $O_{1\varepsilon}$  и эллиптическую  $O_{2\varepsilon}$ . При этом сепаратрисы седла расщеплены. Точка  $O_{2\varepsilon}$  окружена континуумом замкнутых инвариантных кривых – КАМ-кривых, и счетным множеством резонансных зон, содержащих “гирлянды” из седловых и эллиптических периодических траекторий. Одна из таких зон показана на рисунке (а). Увеличенный фрагмент одного звена гирлянды показан на рисунке (b): сепаратрисы седел в гирлянде расщеплены, но это расщепление, как показал еще Пуанкаре [31], экспоненциально мало по  $\varepsilon$ .

Достаточно простая такая ситуация имеет место в неавтономном уравнении

$$\ddot{x} - \lambda(x - x^2) = \lambda\varepsilon \sin t, \quad (4)$$

которое можно представить также как автономную трехмерную систему

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \lambda(x - x^2) &= \lambda\varepsilon \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь отображение  $T_\varepsilon : \theta = 0 \mapsto \theta = 2\pi$  имеет по-прежнему седловую неподвижную точку  $O_1(\varepsilon)$ , при этом  $O_1(\varepsilon) \rightarrow O(0, 0)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В свою очередь, инвариантные кривые  $W_\varepsilon^s$  и  $W_\varepsilon^u$  будут близки к  $W_0^s$  и  $W_0^u$  на любом компактном куске. Но теперь они могут пересекаться, см. рис. 4а. Также это расщепление, но уже для двумерных сепаратрисных поверхностей  $W^s(L_\varepsilon)$  и  $W^u(L_\varepsilon)$  периодического движения  $L_\varepsilon$  системы (5), схематично показано на рис. 3б.

Для уравнения (4) и соответствующему ему отображения  $T_\varepsilon$  за период  $t = 2\pi$  возмущения, расщепление инвариантных кривых  $W_\varepsilon^s$  и  $W_\varepsilon^u$  неподвижной точки  $O_1(\varepsilon)$  может быть установлено методом Мельникова [32]. Соответствующие вычисления, поскольку они представляют специальный интерес, мы проведем в параграфе ниже.

## 2.2 О расщеплении сепаратрис в уравнении (4)

Рассмотрим уравнение (4). Его можно представить в форме неавтономной гамильтоновой системы

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = y, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \lambda(x - x^2) + \lambda\varepsilon \sin t, \quad (6)$$

где  $H(x, y, t) = H_0(x, y) + \lambda\varepsilon H_1(x, y, t)$  и  $H_1(x, y, t) = -x \sin t$ .

При  $\varepsilon = 0$  система (6) интегрируема, см. рис. 2, и она имеет петлю сепаратрис  $\Gamma_0$ , уравнение которой, как фазовой траектории, может быть представлено в виде

$$x_s(t) = \frac{3}{2 \operatorname{ch}^2(\sqrt{\lambda}t/2)}, \quad y_s(t) = -\frac{3\sqrt{\lambda} \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}t/2)}{2 \operatorname{ch}^3(\sqrt{\lambda}t/2)}, \quad (7)$$

где  $\operatorname{sh}(t)$  и  $\operatorname{ch}(t)$  – гиперболические синус и косинус.<sup>5</sup>

Возьмем точку  $M_0 = (x_0 = x_s(t_0), y_0 = y_s(t_0))$  на петле  $\Gamma_0$ , и проведем через нее нормаль  $n_0 = (-\dot{y}, \dot{x})|_{\varepsilon=0}$ . Теперь при достаточно малых  $\varepsilon$  рассмотрим связанные куски  $l_\varepsilon^s$  и  $l_\varepsilon^u$  инвариантных многообразий  $W_\varepsilon^s(O_{1\varepsilon})$  и  $W_\varepsilon^u(O_{1\varepsilon})$  от точки  $O_{1\varepsilon}$  до пересечения с  $n_0$ . Обозначим точки пересечения кривых  $l_\varepsilon^s$  и  $l_\varepsilon^u$  с  $n_0$  через  $M_s$  и  $M_u$ . Как было показано в работе В.К. Мельникова [32], расстояние между точками  $M_s$  и  $M_u$ , т.е. величина расщепления многообразий  $W_\varepsilon^s$  и  $W_\varepsilon^u$  при  $t$  близких к  $t_0$ , характеризуется следующей величиной  $\Delta(t_0) = \varepsilon\Delta_1(t_0) + O(\varepsilon^2)$ . Метод построения функции  $\Delta(t_0)$ , т.н. *метод Пуанкаре-Мельникова* для систем, близких к интегрируемым гамильтоновым, был предложен в работах Пуанкаре [31] и Мельникова [32]. Как видно, главный вклад в функцию  $\Delta(t_0)$  при достаточно малых  $\varepsilon$  дает первое слагаемое  $\varepsilon\Delta_1(t_0)$ . Функция  $\Delta_1(t_0)$  называется *функцией Мельникова*, для которой в работе [32] была получена соответствующая формула. В рассматриваемом двумерном случае для функции Мельникова имеет место следующее выражение:

$$\Delta_1(t_0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\partial H_1}{\partial x}(x_s(t+t_0), y_s(t+t_0), t) \dot{x}_s(t+t_0) + \frac{\partial H_1}{\partial y}(x_s(t+t_0), y_s(t+t_0), t) \dot{y}_s(t+t_0) \right] dt$$

В случае системы (6), так как  $\partial H_1 / \partial y \equiv 0$ , получаем, что

$$\Delta_1(t_0) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}_s(t+t_0) \sin t dt = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} y_s(t) \sin(t-t_0) dt = 1.5\lambda(\alpha \sin t_0 + \beta \cos t_0),$$

<sup>5</sup>Покажем, как получается решение (7). При  $\varepsilon = 0$  петля имеет уравнение  $y^2 = \lambda(x^2 - 2/3 x^3)$ , где  $0 < x \leq 3/2$ . Тогда координата  $x(t)$  точки на петле  $\Gamma_0$  удовлетворяют уравнению  $\dot{x} = \sqrt{\lambda x \sqrt{1 - 2/3 x}}$ , которое стандартно интегрируется:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x \sqrt{1 - 2/3 x}} = \sqrt{\lambda} \int_{\bar{t}_0}^t dt$$

Если взять начальную точку  $(x(\bar{t}_0) = 3/2, y(\bar{t}_0) = 0)$  на петле  $\Gamma_0$ , то получим искомое решение (7).

где, в силу (7),

$$\alpha = -\sqrt{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda}t/2}{\operatorname{ch}^3 \sqrt{\lambda}t/2} \cos t \, dt = 0, \quad \beta = \sqrt{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda}t/2}{\operatorname{ch}^3 \sqrt{\lambda}t/2} \sin t \, dt = \frac{-4\pi}{\lambda \operatorname{sh} \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}}$$

Здесь  $\alpha = 0$  как интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку, а для  $\beta$  (при интегрировании по частям) получается табличный интеграл. Окончательно,

$$\Delta_1(t_0) = -\frac{6\pi}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}} \cos t_0.$$

Таким образом получаем, что  $\Delta_1(t_0) = 0$  при  $t_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \dots$ , и все эти нули являются невырожденными, так как производная функции Мельникова  $\Delta'_1(t_0) = \pm 12\pi e^{-\pi/2\sqrt{\lambda}} (1 - e^{-\pi/\sqrt{\lambda}})$  в этих точках не равна нулю. При этом чередующиеся точки с “+” и “-” соответствуют двум разным грубым гомоклиническим к  $O_{1\varepsilon}$  траекториям. Кроме того, величина расщепления многообразий  $W_\varepsilon^s$  и  $W_\varepsilon^u$  имеет порядок  $\varepsilon$  при малых  $\varepsilon$  и фиксированном  $\lambda > 0$ .

**Замечание 1.** *Когда рассматривается двухпараметрическое семейство систем (6), в котором  $\varepsilon$  и  $\lambda$  являются малыми независимыми параметрами, расщепление многообразий  $W_\varepsilon^s$  и  $W_\varepsilon^u$  нужно считать величиной порядка  $\varepsilon e^{-\pi/2\sqrt{\lambda}}$ . Соответственно, оно становится экспоненциально малым по  $\lambda$  при  $\lambda \rightarrow 0$ . Тогда, чтобы говорить определенно о существовании расщепления сепаратрис,  $\varepsilon$  также должно быть достаточно малым. В частности, члены с  $\varepsilon^2$  в функции расщепления  $\Delta(t_0)$  должны быть меньше, чем  $\varepsilon\Delta_1$ , что выполняется, например, если  $\varepsilon = o(e^{-\pi/2\sqrt{\lambda}})$ .*

## 2.3 Задача Пуанкаре и открытие гомоклинических траекторий

Как мы показали на примере из предыдущего параграфа, грубые гомоклинические траектории Пуанкаре появляются общим образом при возмущениях интегрируемых гамильтоновых систем. Однако здесь много зависит от поставленной задачи. Мы рассмотрели, наверное, самую простую: задачу о расщеплении сепаратрисы грубого (гиперболического) седла двумерной консервативной системы при малом периодическом возмущении. В своем знаменитом мемуаре [31] Пуанкаре рассматривал похожую по смыслу, но гораздо более сложную и актуальную задачу небесной механики, т.н. *ограниченную плоскую круговую задачу трех тел*. В его формулировке она выглядит следующим образом [31], с.362:

- “Представим себе два тела, первое большой массы, второе конечной, но очень малой массы, и предположим, что эти два тела описывают вокруг их общего центра тяжести окружности, двигаясь равномерно. Рассмотрим затем третье тело бесконечно малой массы, такой, что его движение испытывает возмущение из-за притяжения первых двух тел, но само оно не может возмущать орбиты этих тел. Кроме того, ограничимся случаем, когда движение третьего тела происходит в плоскости окружностей, описываемых двумя первыми массами.

Это как раз случай маленькой планеты, движущейся под влиянием Солнца и Юпитера, если пренебречь эксцентриситетом Юпитера и наклоном орбит.

Это мы имеем и в случае Луны, движущейся под влиянием Солнца и Земли, если пренебречь эксцентриситетом земной орбиты и наклоном лунной орбиты к эклиптике.”

Таким образом предполагается, что массы  $m_i$  тел  $p_i$  удовлетворяют соотношению  $m_1 = M \gg m_2 = \varepsilon, m_3 = 0$ . Тогда движение тел масс  $M$  и  $\varepsilon$  происходит в силу интегрируемой гамильтоновой системы, отвечающей круговой задаче двух тел. При этом тело  $p_3$  совершает свои движения под влиянием двух других, и уже система, описывающая его динамику, является неинтегрируемой при  $\varepsilon \neq 0$ . При  $\varepsilon = 0$  она интегрируема – это задача Кеплера для тел с большой массой  $M$  и инфинитезимальной массой  $m_3$ . Так как в системе тел  $\{p_1, p_2\}$  движение тела  $p_2$  периодически, то движение тела  $p_3$  должно описываться двумерной гамильтоновой системой с малым (порядка  $\varepsilon$ ) периодическим возмущением. В этой задаче Пуанкаре исследует вопрос об устойчивости движения тела  $p_3$  при малых  $\varepsilon$ .

На первый взгляд эта задача похожа на ту, которую мы рассматривали выше. Но теперь речь идет о том, если сравнивать со случаем системы (1), что происходит с траекториями, лежащими внутри области, ограниченной сепаратрисой  $\Gamma_0$ , рис. 2. Рассмотрим отображение сдвига  $T_\tau$  по траекториям на время  $\tau$ , равное периоду движения тела  $p_2$ . При  $\varepsilon = 0$  это отображение распадается на континуум одномерных отображений, определенных на замкнутых инвариантных кривых с чередующимися рациональными и иррациональными числами вращения (понятие числа вращения было также введено Пуанкаре). При  $\varepsilon \neq 0$  орбиты с рациональными числами вращения,  $\tau = p/q$ , разрушаются и на их месте образуются резонансные зоны, на которых отображение  $T_\tau$  становится двумерным консервативным отображением, у

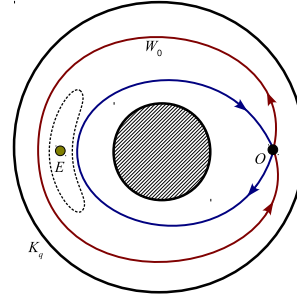


Рис. 5: Фазовый портрет редуцированной системы в резонансной зоне.

которого появляются периодические орбиты двух типов – седловые и эллиптические одного и того же периода  $q$ , которые образуют гирлянды такие, как на рис. 4а). Для первого приближения, действие отображения  $T_\tau^q$  заменяется консервативным потоком, инвариантным относительно поворота на угол  $2\pi/q$  и определенным на кольце  $\mathcal{K} = \{r_1 < r < r_2, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ . Тогда в этом потоке точки отличающиеся по  $\theta$  на  $2\pi/q$  можно отождествить. В результате получится новый редуцированный поток маятникового типа на цилиндре  $\mathcal{K}_q = \{r_1 < r < r_2, 0 \leq \theta < 2\pi/q\}$ . Этот поток имеет 2 состояния равновесия: седло и центр, и сепаратрисы седла образуют гомоклиническую восьмерку, охватывающую цилиндр, который представлен рис. 5 в виде кольца на плоскости.

В работе Пуанкаре [31] получена целая серия фундаментальных результатов, которые составили базис современной теории гамильтоновых систем. Существование гомоклинических траекторий в неинтегрируемых системах – один из них. Чтобы изучить это явление в деталях Пуанкаре рассматривает конкретный пример гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, зависящей от двух малых параметров  $\varepsilon$  и  $\mu$ , где  $\varepsilon$  – это масса тела  $p_2$ , а  $\mu$  – это внутренний параметр редуцированной системы в резонансной зоне  $Q_{p/q}$ . Эти два параметра относительно независимы, но  $\mu \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и, кроме того,  $\mu \rightarrow 0$  при  $q \rightarrow \infty$ , т.е. амплитуда изменения  $\mu$  ограничивается шириной соответствующей резонансной зоны. Пуанкаре рассматривает систему с гамильтонианом следующего вида

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = y_1 + y_2^2 - 2\mu \sin^2 \frac{x_2}{2} - \mu\varepsilon \cos x_1 \sin x_2,$$

где  $x_i$  и  $y_i$  – координаты и импульсы, при этом координаты  $x_i$  являются угловыми переменными с периодом  $2\pi$ . Соответствующая гамильтонова система имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\partial H}{\partial y_1} = 1, & \dot{y}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\mu\varepsilon \sin x_1 \sin x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{\partial H}{\partial y_2} = 2y_2, & \dot{y}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = \mu \sin x_2 + \mu\varepsilon \cos x_1 \sin x_2. \end{aligned} \tag{8}$$

В этих уравнениях координата  $y_1$  не входит в уравнения для  $x_2$  и  $y_2$ , и тогда, если  $y_1$  не учитывать, система (8) становится по форме похожей на систему (5) с  $x_1 = \theta$ . При  $\varepsilon = 0$  уравнения для  $x_2$  и  $y_2$  имеют вид  $\dot{x}_2 = 2y_2$ ,  $\dot{y}_2 = \mu \sin x_2$ . Эта двумерная система описывает движение “медленного” маятника, ее фазовый портрет на цилиндре, если его развернуть на плоскость, – такой как на рис. 5.

Пуанкаре показывает, что в этой задаче расщепление сепаратрис является экспоненциально малым по  $\mu$  при  $\mu \rightarrow 0$ . Причиной этого является то, что у соответствующего редуцированного потока первого приближения собственные значения седла равны  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2\mu}$ . При  $\varepsilon = 0$  сепаратрисы седла  $O$  попарно совпадают, образуя гомоклиническую восьмерку. При  $\varepsilon \neq 0$  они расщепляются. Чтобы показать это, Пуанкаре строит уравнения устойчивого и неустойчивого многообразий точки  $O$  в виде

рядов по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$W^{s,u} = W^0 + w_1^{s,u} \varepsilon + w_2^{s,u} \varepsilon^2 + \dots \quad (9)$$

При этом он показывает, что, во первых, эти ряды сходятся, а, во-вторых, разность  $\delta_1 = |w_1^s - w_1^u|$  экспоненциально мала по  $\mu$ , именно,  $\max \delta_1 = \exp(-\frac{\pi}{\sqrt{2\mu}})$ , см. также замечание 1.

Что касается эллиптических периодических орбит, то они оставались устойчивыми и вполне отвечали наблюдениям за малыми планетами в небесной механике – как писал Пуанкаре: “... особая ценность этих периодических решений заключается в том, что они являются единственной брешью, через которую мы могли бы попытаться проникнуть в область, считавшуюся недоступной.” [33], т.1, стр. 75.

В этом смысле, седловые орбиты неустойчивы и как-бы “неинтересны”. Однако Пуанкаре сделал фундаментальное открытие, что их инвариантные многообразия могут пересекаться. И тогда, наряду с неустойчивостью седловых периодических траекторий, возникает механизм возвращаемости к ним – это то, что является неотъемлемым свойством динамического хаоса. Более того, Пуанкаре рассматривал факт существования гомоклинических траекторий в качестве важного критерия неинтегрируемости динамической системы и существенным препятствием для получения корректных решений с помощью рядов.

Возможно из-за того, что Пуанкаре больше интересовали вопросы устойчивости в задачах небесной механики, у него практически не было строгих математических результатов о гомоклинических структурах, кроме одного: он показал, что если существует одна грубая гомоклиническая траектория, то их существует также еще счетное множество. Это утверждение Пуанкаре выводит из того факта, что устойчивое и неустойчивое многообразия седловой периодической траектории являются инвариантными множествами (это понятие он сам и ввел в теорию), а поэтому в своем пересечении они должны необходимо образовывать весьма нетривиальную, запутанную “фигуру”, см. рис. 6, по поводу которой он писал, [33], т.2, с. 339 :

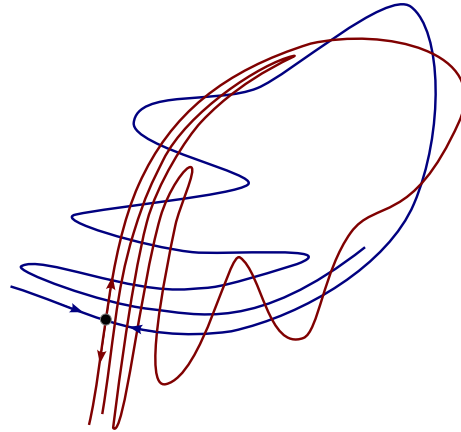


Рис. 6: Иллюстрация сложности гомоклинической “фигуры” в случае двумерного отображения.

- “Если попытаться представить себе фигуру, образованную этими двумя кривыми и их бесчисленными пересечениями, каждое из которых соответствует

двоякоасимптотическому решению, то эти пересечения образуют нечто вроде решетки, ткани, сети с бесконечно тесными петлями. Ни одна из этих петель не должна пересечь самоё себя, но она должна навиваться на себя очень сложным образом, чтобы пересечь бесконечно много раз все петли сети. Поражаешься сложности этой фигуры, которую я даже не пытаюсь изобразить.“

Эту выразительную цитату можно рассматривать как неформальное, но геометрически точное, описание-определение гомоклинического хаоса.

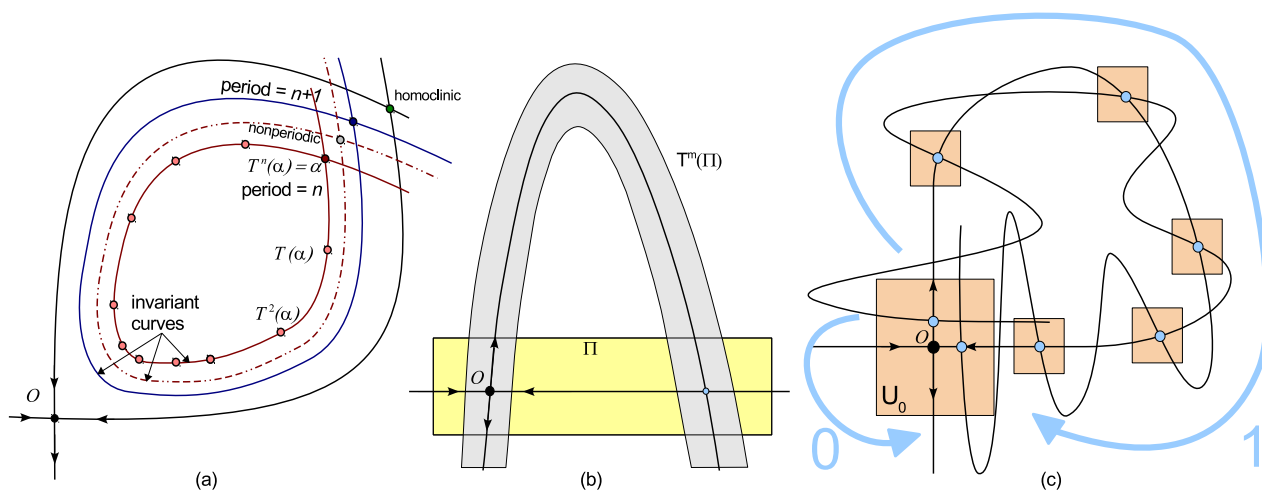


Рис. 7: (а) К методу Биркгофа: окрестность точки  $O$  расслаивается на инвариантные кривые, которые продолжаются за эту окрестность и имеют точки самопересечения (вблизи гомоклинической точки), счетное множество из которых отвечают периодическим точкам. (б) Подкова Смейла в гомоклиническом пересечении получается при итерировании исходной окрестности  $\Pi$ , содержащей седло  $O$  и гомоклиническую точку. (с) Метод Шильникова позволяет учитывать все орбиты множества  $N$ : каждая из этих орбит однозначно кодируется последовательностью нулей и единиц: символ “0” соответствует итерации в малой окрестности  $U_0$  седла  $O$  орбиты, а “1” – обходу из  $U_0$  в  $U_0$  по траекториям, близким к гомоклинической орбите.

Нужно сказать, что более или менее детальная картина поведения траекторий в окрестности грубой гомоклинической орбиты Пуанкаре оставалась неизвестной фактически вплоть до середины 1960-х годов. Единственный частный результат был получен Д.Биркгофом в 1935 г., который показал существование бесконечного числа периодических орбит в этой окрестности в случае сохраняющих площадь двумерных аналитических отображений [34], см. рис. 7а.

В 1965 г. С. Смейл [35] установил существование нетривиального гиперболического множества (подковы Смейла) в окрестности грубой гомоклиники, рис. 7(b). В 1967 году Л.П. Шильников “закрыл” проблему, дав полное описание структуры множества  $N$  траекторий, целиком лежащих в малой окрестности грубой гомоклинической орбиты Пуанкаре. В частности, он доказал [36], что

- множество  $N$  равномерно гиперболично и его траектории находятся во взаимно однозначном соответствии с траекториями топологической схемы Бернулли из двух символов, см. рис. 7(c).

Отметим, что Шильников первым одновременно поставил и решил задачу полного описания динамики вблизи грубой гомоклинической орбиты, тем самым “демистифицировав” гомоклиническую путаницу Пуанкаре. Сам он считал этот результат принципиально важным и не уставал повторять, что гомоклиническая орбита Пуанкаре – это “элементарный кирпичик” хаоса, см. также его обзор [37].

### 3 Консервативный хаос: от Пуанкаре до наших дней

Консервативный хаос был открыт в фундаментальном труде Пуанкаре “О проблеме трех тел и об уравнениях динамики” [31], который еще именуют “призовым мемуаром”, поскольку он был представлен на международный конкурс имени шведского короля Оскара II на лучшее математическое исследование актуальной научной проблемы (см. также § 6). Этот мемуар в дальнейшем вошел как составная часть в фундаментальный труд Пуанкаре “Новые методы небесной механики”. В этом поразительном по богатству идеями и результатами трехтомнике Пуанкаре по существу заложил основы современной теории динамических систем, в особенности теории гамильтоновых систем и симплектических отображений.<sup>6</sup> А его открытие гомоклинических траекторий (существование которых в динамических системах Пуанкаре рассматривал в качестве основного критерия их неинтегрируемости) по праву приравнивается к открытию детерминированного хаоса.

Кроме того, Пуанкаре в своих “Новых методах” фактически сформулировал необходимые условия для существования динамического хаоса – это то, что сейчас называется “чувствительная зависимость от начальных условий” и “ограниченность решений в фазовом пространстве”. В рассмотренных Пуанкаре моделях небесной

---

<sup>6</sup>Этот капитальный труд был переведен на русский язык [33], и в аннотации к изданию было отмечено: “В “Новых методах небесной механики” А. Пуанкаре разработал теорию интегральных инвариантов, построил теорию асимптотических разложений, исследовал периодические орбиты, внес значительный вклад в решение ряда других задач прикладной математики, механики, астрономии. Это произведение, ставшее классическим, оказало большое влияние на развитие точных наук и не потеряло своего значения и в наши дни.”



механики оба эти свойства динамики выполняются в силу существования грубых гомоклинических траекторий и компактности уровня гамильтониана. Главной особенностью открытого Пуанкаре консервативного хаоса является то, что здесь наряду с неравномерно гиперболическими множествами сосуществуют устойчивые по Ляпунову периодические траектории (эллиптического типа), которые возможно плотны в фазовом пространстве (гипотеза Пуанкаре, не доказанная до сих пор).

Важно отметить также, что еще Адамар в 1898 г. [38] показал, что консервативный хаос может встречаться и в другой форме, без устойчивых по Ляпунову траекторий. Он привел пример такой системы, гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, которая описывает динамику геодезического потока на замкнутой поверхности постоянной отрицательной кривизны. Адамару для этой системы, которая называется “бильярд Адамара”, удалось доказать, что все ее траектории неустойчивы.

Далеко идущие обобщения примера Адамара, а по существу новые теории, были получены только лишь в 60-70-х годах XX века в работах Д.В. Аносова, Я.Г. Синая и др. У Аносова это привело к становлению и развитию гиперболической теории, т.е. теории грубых многомерных систем, а у Синая – к развитию эргодической теории и теории бильярдных систем.

С развитием идей Пуанкаре о консервативном хаосе в гамильтоновых системах, близких к интегрируемым, связано становление в 50-60-х годах знаменитой КАМ-теории – теории Колмогорова-Арнольда-Мозера, одним из основных результатов которых явилось то, что большее число инвариантных торов (финитных движений в небесной механике) сохраняются при малых консервативных возмущениях. Что происходит с другими торами, было также объяснено, в том числе с помощью знаменитой геометрической теоремы Пуанкаре<sup>7</sup> и ее обобщений. В частности, было показано, что резонансные торы разрушаются и на их месте возникают резонансные структуры, представляющие собой в общем случае гирлянды из периодических траекторий седлового и эллиптического типов (при этом, что было показано еще Пуанкаре, инвариантные многообразия седел расщеплены, и эти расщепления экспоненциально малы по параметру возмущения).

В настоящее время тематика, связанная с изучением консервативного хаоса, остается весьма актуальной и популярной.

---

<sup>7</sup>Эта теорема формулируется так: *Пусть дано сохраняющее площади взаимнооднозначное отображение плоского кругового кольца. Предположим, что граничные окружности кольца сдвигаются отображением в разные стороны. Тогда это отображение имеет не менее двух неподвижных точек.* Пуанкаре не успел доказать эту теорему, но работу на эту тему все же опубликовал в 1912 г., см. [39]. Объясняя причину этого, он писал: “Никогда до сих пор я не выступал в печати с настолько незаконченной работой... С другой стороны, значение предмета слишком велико, а совокупность полученных результатов слишком значительна, чтобы я решился бесполезно забросить их.” Доказательство геометрической теоремы Пуанкаре (которую называют также “последней теоремой Пуанкаре”) было получено Биркгофом [40].

## 4 Диссипативная динамика и хаос

Если не вдаваться в некоторые детали, то год рождения диссипативного хаоса можно назвать определенно – это 1963, год опубликования знаменитой работы Э. Лоренца “Детерминированное непериодическое течение” [41]. В этой работе был не только приведен пример знаменитого аттрактора трехмерной системы, который называется аттрактором Лоренца, но также фактически заново открыты условия “чувствительной зависимости от начальных условий” (или “эффект бабочки”, как его еще называл Лоренц) и “ограниченности решений”, необходимых для наблюдения хаоса.<sup>8</sup>

Работа Лоренца [41], как это часто бывает, долгое время не была известна математикам. Однако, как только математики о ней узнали, в короткое время, в конце 70-х – начале 80-х, появилось большое число работ на эту тему, см., например, статьи из сборника “Странные аттракторы” [42], а также цикл работ Афраймовича, Быкова и Шильникова [43, 44, 45], в которых были получены наиболее значительные результаты по теории аттракторов лоренцевского типа.

Нужно отметить, что аттрактор Лоренца появился как бы спонтанно – без какой-либо особой предыстории.<sup>9</sup> На первый взгляд это выглядит странным. Казалось бы, что теоретические результаты Пуанкаре и Адамара, а также их гениальные идеи по теории динамического хаоса, должны были задолго до 60-х годов стимулировать усилия математиков и физиков на дальнейшие исследования в этой области. Однако этого не произошло, по видимому по двум основным причинам. Первая – эти идеи были “слишком пионерскими”, и к тому же ни у Пуанкаре, ни у Адамара не было, что называется, своих школ. Они были, по существу, учеными-одиночками. Во вторых, идеи детерминированного хаоса отошли на второй план после открытия квантовой механики. Как писал Д. Рюэль [47]: “Новая механика изменила научные перспективы физиков и забрала всю их энергию на много лет. Почему они должны были стараться, например, объяснить случайность чувствительной зависимостью от начальных условий в классической механике, когда квантовая механика ввела новый – более существенный источник случайности и хаотичности”.

Однако развитие науки никогда не являлось прямолинейным и независимым от достижений предшественников (некоторые из таких достижений, правда, иногда за-

---

<sup>8</sup>Как писал Э. Лоренц в резюме к своей статье [41]: “Для таких систем с ограниченными решениями установлено, что непериодические решения обычно неустойчивы, в результате чего решения с близкими начальными условиями могут через некоторое время сильно различаться”. Известен также его замечательный афоризм-определение: “Динамический хаос: когда настоящее определяет будущее, но приблизительное настоящее не определяет его даже приблизительно”.

<sup>9</sup>Если не считать того, что сама модель Лоренца, описываемая системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений, была получена как сильное упрощение системы уравнений в частных производных для описания конечно-амплитудной конвекции в слое жидкости, подогреваемой снизу (эксперимент Реллея [46]).

бываются и переоткрываются заново). В 20-30-х годах XX века, в связи с развитием радиотехники, стали весьма актуальными задачи исследования автоколебательных периодических режимов, которые по определению А.А. Андронова – это “такие колебания, амплитуда которых, с одной стороны, в течение долгого времени может оставаться постоянной, а с другой стороны, вообще говоря, не зависит от начальных условий и определяется не начальными условиями, а свойствами самой системы” [48], с.221. И здесь принципиальным моментом, связующим звеном между физикой и математикой, стало открытие Андронова того, что математическим образом автоколебаний являются устойчивые предельные циклы Пуанкаре [49]. В связи с этой парадигмой, им была поставлена математическая задача об исследовании бифуркационных механизмов возникновения устойчивых предельных циклов в автономных системах. В свою очередь, как известно, это привело к существенному развитию и продвижению качественной теории и теории бифуркаций двумерных систем на плоскости [50, 51] в работах нижегородской (горьковской) школы Андронова по нелинейной динамике.<sup>10</sup>

В частности, в этих работах были изучены все основные, коразмерности 1, бифуркации, приводящие к (устойчивым) предельным циклам: бифуркации состояний равновесия типа сложный фокус (жесткая и мягкая бифуркация Андронова-Хопфа), бифуркации негрубых предельных циклов, бифуркации рождения предельных циклов из гомоклинических петель седла и седло-узла. Последняя бифуркация была открыта в работе Андронова и Витта [52] весьма необычным способом. Она была “увидена” при изучении структуры вынужденных колебаний<sup>11</sup> в уравнении Ван дер Поля с периодическим возмущением

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = \mu A \sin \omega t$$

вблизи 1:1 резонанса, т.е. когда  $\omega = \omega_0$ . Здесь в усредненной двумерной системе была найдена замкнутая кривая, состоящая из континуума состояний равновесия, которые при изменении параметров могли либо совсем исчезнуть, либо остаться только два. Андронов и Витт догадались, что простейшим, коразмерности 1, аналогом такой бифуркации является бифуркация гомоклинической петли седло-узла.

Что касается диссипативного хаоса, то он был, наоборот, сначала “услышан”. В 1927 г. Ван дер Поля и Ван дер Марк [54] опубликовали свои результаты по экспериментальному исследованию генератора с неоновой лампой, находящегося под

<sup>10</sup>При этом авторы [50, 51] отмечали огромную роль пионерских работ Пуанкаре, в частности, его мемуара [53] в становлении этой теории: “Впервые задача качественного исследования дифференциальных уравнений в нетривиальных своих аспектах с полной отчетливостью была поставлена Пуанкаре (в конце прошлого столетия”, [50], с. 15.

<sup>11</sup>Нужно сказать, что автоколебания отличаются от двух других известных в физике колебаний: свободных и вынужденных. Свойства свободных колебаний существенно зависят от начальных условий, а вынужденных колебаний – от внешних воздействий на систему.

воздействием периодического сигнала. При этом они написали следующее: “Часто в телефонной трубке слышен переходный шум, прежде чем частота перескакивает на следующее более низкое значение. Однако это второстепенное явление, главный эффект заключается в регулярном делении частоты”. А это означало, что они “слушали” два разных режима: режим сосуществования устойчивых периодических траекторий с разными периодами (часто очень большими, в экспериментах они были в 100-200 раз больше, чем период внешней силы), а также режим сложной динамики (хоть и оцененный ими как второстепенный эффект). Сейчас мы можем сказать, что они обнаружили динамический хаос, а скорее всего, странный аттрактор, возникающий в результате разрушения двумерного резонансного тора [55].

Работа [54] была скорее “спонтанной” в цикле работ, посвященных колебаниям. Другая работа в этом направлении английских математиков М. Картрайт и Дж. Литтлвуда [56], в которой практически целенаправленно был обнаружен детерминированный хаос, оказала более существенное влияние на развитие нелинейной динамики. Эта работа была опубликована в 1945 году, и была посвящена анализу периодически возмущенного уравнения Ван дер Поля

$$\ddot{y} - k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\lambda k \cos(\lambda t + a) \quad (10)$$

при больших  $k$ , т.е. при большом трении и большой амплитуде внешней силы. При этом было открыто, что трехмерная диссипативная модель может иметь счетное число седловых периодических траекторий и континуум апериодических. В частности, было показано, что в уравнении (10), помимо двух устойчивых периодических траекторий, существует также нетривиальное множество, допускающее описание в терминах символической динамики.

В 1949 г. Н. Левинсон [57] дал объяснение этим результатам на примере более простого кусочно-линейного уравнения

$$\varepsilon \ddot{x} + \phi(x)\dot{x} + \varepsilon x = b \sin t, \quad (11)$$

где  $\varepsilon > 0$  – малая константа и  $\phi(x) = 1$  при  $|x| > 1$ ,  $\phi(x) = -1$  при  $|x| < 1$ . Левинсон показал, что в уравнении (11) существует инвариантное множество, аналогичное тому, что было у Картрайт и Литтлвуда, однако он специально отметил (и даже использовал при доказательствах) тот факт, что это множество в отображении Пуанкаре за период сохраняется при малых возмущениях. Тем не менее, работы Картрайт, Литтлвуда и даже Левинсона по-видимому были слишком сложными для математиков того времени,<sup>12</sup> и понадобился гений С. Смейла, чтобы наполнить их геометрическим содержанием и не только.

<sup>12</sup>Впоследствии уравнение Левинсона было детально изучено в работах А.В. Осипова [58, 59, 60], в которых, в частности, было показано, что инвариантное множество Левинсона является равномерно гиперболическим. Мы не знаем, получены ли подобные результаты для более сложного уравнения (10) Картрайт и Литтлвуда.

К 1960-м годам С. Смейл был уже хорошо известен в математическом мире, благодаря его выдающимся результатам в топологии.<sup>13</sup> Одной из его первых работ по динамическим системам была статья [64], в которой он высказал гипотезу о том, что грубые системы с простой структурой, которые были названы впоследствии системами Морса-Смейла, плотны в пространстве гладких динамических систем. По этому поводу Смейл позднее вспоминал [65]: “В то время, как тополог, я гордился статьей, которую я только что опубликовал по динамике. Я был восхищен гипотезой в этой статье, следствием которой было то, что (в современной терминологии) «хаоса не существует!»”. Однако вскоре он получил письмо от Левинсона, о том, что гипотеза скорее всего неверна. Когда Смейл ознакомился с работой Левинсона, в которой были одни формулы, он попытался перевести ее “на геометрический язык”.<sup>14</sup> В результате была открыта подкова Смейла. Это открытие было сделано в 1960 г., когда Смейл был на стажировке (как постдок) в Рио де Жанейро, в только что основанном Институте чистой и прикладной математики (ИМРА) – как он сам писал “моя лучшая работа была сделана на пляжах Рио”.

В 1961 году Смейл обнаружил [61] свой знаменитый пример *подковы Смейла* – двумерного отображения с нетривиальным гиперболическим множеством, на Международном симпозиуме по нелинейным колебаниям в Киеве. Доклад Смейла произвел большое впечатление на многих участников симпозиума.<sup>15</sup> С этого момента, как принято считать, и началась современная теория динамического хаоса.

**Замечание 2.** *Правда, самого термина “динамический хаос” в то время еще не существовало. Он появился и стал популярным после опубликованной в 1975 статьи Ли и Йорка [66] со звучным названием “Period Three Implies Chaos”. Нужно сказать, однако, что годом ранее слово “хаос” появилось в названии статьи Роберта Мэя [67] “Biological Populations with Nonoverlapping Generations: Stable Points, Stable*

<sup>13</sup>В 1958 году Смейл произвел сенсацию в дифференциальной топологии, открыв возможность “выворачивания наизнанку” сферы в трёхмерном пространстве [62], впоследствии названной парадоксом Смейла. Он также доказал обобщенную гипотезу Пуанкаре для  $n$ -мерной сферы при  $n \geq 5$  [63]. За эти топологические результаты Смейл получил в 1966 году Филдсовскую премию – высшую математическую награду для молодых ученых.

<sup>14</sup>Как сам Смейл писал в замечательной по стилю и содержанию математической новелле с названием “Finding a Horseshoe on the Beaches of Rio” [65]: “Я работал дни и ночи, пытаюсь ответить на вызов моим убеждениям, брошенный этим письмом. Прежде всего было необходимо перевести аналитические рассуждения Левинсона на мой собственный способ думать геометрически.”

<sup>15</sup>По воспоминаниям Д.В. Аносова [70]: “Киевляне издали к началу конференции тезисы ряда докладов в виде отдельных брошюрок, причем тезисы иностранцев были переведены на русский язык. И вот, стоя в очереди регистрирующихся участников и заглядывая через плечи вперед, я прочитал название одной из них: С. Смейл “Структурно устойчивый дифференцируемый гомеоморфизм с бесконечным числом периодических точек”. В этот момент мир для меня перевернулся, и началась новая жизнь.”

*Cycles, and Chaos*”, в которой автор пишет, что термин “хаотический” был придуман Джеймсом Йорком. Интересно, что термин “хаотический”(правда, применительно к движению жидкости) был использован еще в знаменитой работе Рюэля и Такенса [12], опубликованной в 1970. При этом слово “хаотический” встречается у них два раза, тогда как “странный аттрактор” – пять раз.

Подкова Смейла представляет собой простейший пример отображения с гиперболической хаотической динамикой. Этот пример, как пишет сам Смейл, был ответом на вопрос Андронова о существовании грубых многомерных систем с бесконечным числом периодических траекторий. Правда, “подкова” это еще не аттрактор, но гиперболические аттракторы не заставили себя ждать. Вскоре был придуман ряд математических моделей с нетривиальными гиперболическими аттракторами: аттрактор Смейла-Вильямса, аттрактор Аносова, аттрактор Плыкина и др., см., например, [68].

Гиперболические аттракторы очень долгое время представляли собой чисто математический объект, так как не встречались в моделях естественнонаучного происхождения. Ситуация изменилась после работы Тураева и Шильникова [69], в которой были описаны простые бифуркации, приводящие к появлению гиперболических аттракторов различных типов, а главное, после работ С.П. Кузнецова, см. [68], в которых он обнаружил нетривиальные гиперболические аттракторы в ряде радиофизических моделей.

Однако, в целом, задача нахождения гиперболических аттракторов в приложениях казалась весьма трудной и, по-началу, бесперспективной<sup>16</sup>. Тем более, что в начале 70-х годов стало активно развиваться направление, связанное с исследованиями в области математической теории и ее приложений для новых объектов, которые были названы в работе Рюэля и Такенса [12] “странными аттракторами”. Эта работа вызвала в свое время большой интерес у физиков и математиков, так как показала, что хорошо известный феноменологический сценарий Ландау-Хопфа [71, 72] возникновения турбулентности в результате бесконечной цепочки добавления частот может легко прерываться и приводить к хаотической динамике уже при появлении четвертой частоты – в [12] это доказано для сколь угодно малых возмущениях постоянного векторного поля на торе  $T^k$  при  $k \geq 4$ .<sup>17</sup> Тем самым в [12] было показано, что динамический хаос (странные аттракторы) может возникать уже у конечномерных диссипативных систем.

---

<sup>16</sup>Как писал Аносов [70]: “Такое впечатление, будто Господь Бог предпочитает пойти на некоторое ослабление гиперболичности, нежели возиться с ограничениями на топологию аттрактора, возникающего при его настоящей (полной и равномерной) гиперболичности образца 60-х годов.”

<sup>17</sup>В работе Ньюхауса, Рюэля и Такенса [73] было показано, что аналогичный результат имеет место и на трехмерном торе, при  $k = 3$ . В работах Афраймовича и Шильникова [74, 75, 55] было показано, что странные аттракторы могут возникать и при разрушении двумерных инвариантных торов.

## 5 Странные аттракторы, глобальные бифуркации и смешанная динамика

Все известные на сегодня странные хаотические аттракторы гладких динамических систем можно разделить на 4 типа:

- 1) гиперболические аттракторы;
- 2) сингулярно-гиперболические аттракторы (аттракторы лоренцевского типа);
- 3) псевдогиперболические дикие аттракторы (их известные нам примеры показаны на рис. 8);
- 4) квазиаттракторы.

Аттракторы первых трех типов являются настоящими аттракторами, так как сохраняют свою хаотичность при всех малых возмущениях. При этом псевдогиперболические дикие аттракторы, теория которых была построена в работе Тураева и Шильникова [76], допускают гомоклинические касания. Примеров таких аттракторов известно пока не так уж много. Практически все они показаны на рис. 8. На рис. 8(a)–(d) показаны примеры дискретных аттракторов трехмерных отображений, а на рис. 8(e) показан пример дикого спирального аттрактора четырехмерного потока (он содержит состояние равновесия типа седло-фокус с одномерным неустойчивым многообразием). Аттракторы рис. 8(a)–(c) имеют свои аналоги (сингулярно-гиперболические аттракторы) в случае трехмерных потоков – соответственно аттрактор Лоренца, гетероклинический аттрактор Лоренца [77] и двоянный аттрактор Лоренца [78] (с одним, двумя и тремя состояниями равновесия). У дискретного восьмерочного аттрактора 8(d) вообще нет потокового аналога (если не считать аналогом простой аттрактор типа гомоклинической восьмерки седла).

Однако странные аттракторы первых трех типов не слишком часто встречаются в приложениях. Возможно это связано с тем, что системы с такими аттракторами должны удовлетворять определенным жестким условиям во всех точках поглощающей области. Для гиперболических аттракторов – это условия равномерной гиперболичности, которые, для сингулярно-гиперболических аттракторов, нарушаются только в конечном числе точек (в состояниях равновесия), и которые, для псевдогиперболических аттракторов, ослабляются до условий растяжения объемов на центрально-неустойчивых инвариантных многообразиях всех точек [76, 79].

Всего этого не требуется в случае квазиаттракторов, поэтому совершенно не случайно то, что они чаще всего встречаются в приложениях. Понятие квазиаттрактора было введено в работе Афраймовича и Шильникова [85] для обозначения широкого класса аттракторов, являющихся странными “на физическом уровне строгости”.

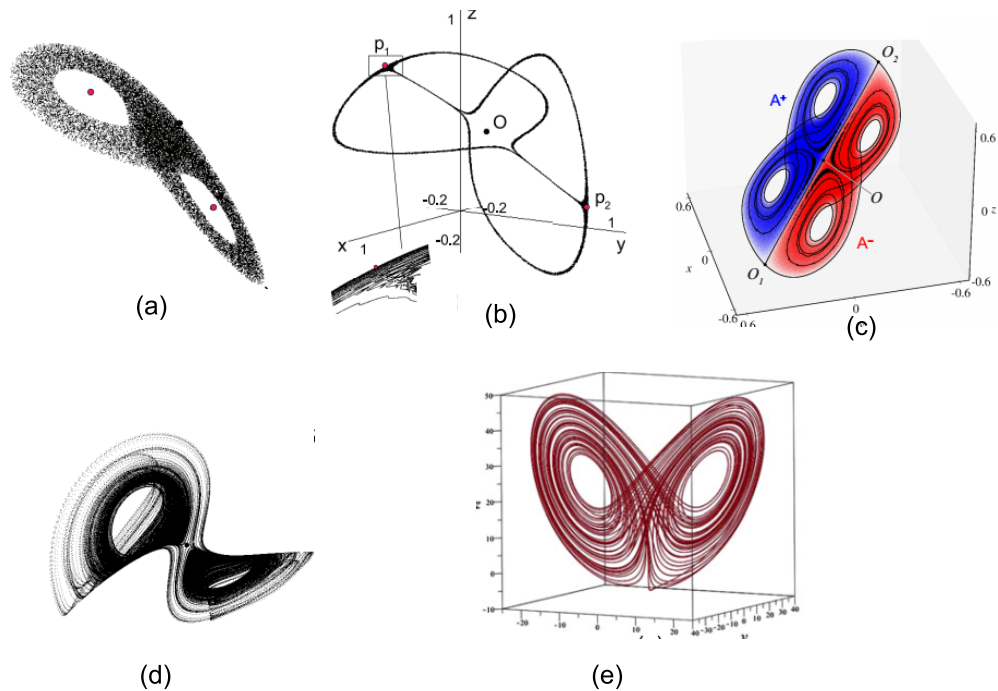


Рис. 8: Примеры гомоклинических аттракторов: (a) дискретный аттрактор Лоренца, [80, 81, 82, 77]; (b) дискретный гетероклинический аттрактор Лоренца, [77]; (c) сдвоенный аттрактор Лоренца, [78]; (d) дискретный восьмерочный аттрактор, [83]; (e) дикий спиральный аттрактор, [84].

Такие аттракторы, по определению, либо сами, либо сколь угодно близкие, содержат периодические стоки с чрезвычайно узкими областями притяжения. Так что эти стоки становятся совершенно незаметными в численных экспериментах, и аттрактор выглядит хаотическим.

Одним из самых известных квазиаттракторов является странный аттрактор в квадратичном отображении

$$T : \bar{x} = 1 + y + ax^2, \bar{y} = bx,$$

которое было введено в работе [86] французского математика и астронома Мишеля Эно. Он обнаружил странный аттрактор в этом отображении при  $a = 1.4, b = 0.3$ .

До сих пор точно (математически) неизвестно является ли аттрактор при этих значениях параметров хаотическим. Однако в работе [87] было показано, что экстремально близко к классическим значениям параметров  $a = 1.4; b = 0.3$  (на расстоянии



$\sim 10^{-22}$ ) у отображения Эно существует устойчивая точка периода 115, область притяжения которой имеет ширину  $\sim 10^{-51}$ . Конечно, такую траекторию невозможно идентифицировать стандартными численными методами.

Фундаментальным свойством квазиаттракторов является то, что соответствующие им системы принадлежат *диссипативным областям Ньюхауса* [88], т.е. открытым областям в пространстве динамических систем, в которых плотны системы с гомоклиническими касаниями, а также *системы с бесконечным множеством периодических стоков*.

Этот математический результат был доказан в ряде работ, см., например, [88, 89, 90, 91], в которых были также изучены основные бифуркации, приводящие к возникновению периодических стоков. Такие бифуркации – это бифуркации гомоклинических касаний многомерных динамических систем, которые с одной стороны выступают еще и как критерии того, что рассматриваемые аттракторы являются квазиаттракторами, а с другой стороны, подтверждают известный эмпирический факт “ненаблюдаемости” периодических стоков в (квази)аттракторах. Последнее является следствием того, что и “окна устойчивости” (области значений параметров, отвечающих существованию периодических стоков), и бассейны притяжения периодических стоков являются экспоненциально малыми по величине параметра расщепления гомоклинического касания [92, 93, 88, 94]. В этом смысле, ситуация с аттрактором Эно, рассмотренная выше, является типичной для квазиаттракторов.

Бифуркации гомоклинических касаний были впервые изучены в работах Гаврилова и Шильникова [92, 93], в которых были рассмотрены двумерные диффеоморфизмы (и трехмерные потоки). Предполагалось, что исходный диффеоморфизм имеет седловую неподвижную точку  $O$  с мультипликаторами  $\lambda$  и  $\gamma$ , где  $0 < |\lambda| < 1 < |\gamma|$ , и кроме того многообразия  $W^u(O)$  и  $W^s(O)$  точки  $O$  имеют квадратичное касание в точках некоторой гомоклинической траектории  $\Gamma_0$ , рис. 9а. Здесь важную роль играет седловая величина  $\sigma = |\lambda||\gamma|$ . Так в [93] было показано, что при  $\sigma < 1$  при расщеплении гомоклинического касания рождаются периодические стоки, а при  $\sigma > 1$  – периодические источники.

Важно отметить, что, как было доказано в работе [95], области Ньюхауса существуют в любой окрестности двумерного диффеоморфизма с гомоклиническим касанием. При этом, если  $\sigma < 1$ , в таких областях Ньюхауса будут плотны диффеоморфизмы со счетным множеством периодических стоков, а если  $\sigma > 1$  – со счетным множеством периодических источников. Отсюда естественным образом возникает задача о существовании (абсолютных) областей Ньюхауса, в которых системы могут иметь одновременно и периодические стоки, и периодические источники.

Эта задача была решена в работе [19], в которой были изучены бифуркации двумерных диффеоморфизмов с негрубыми гетероклиническими контурами смешанного типа. В простейшем случае такой контур имеет две седловые неподвижные точки

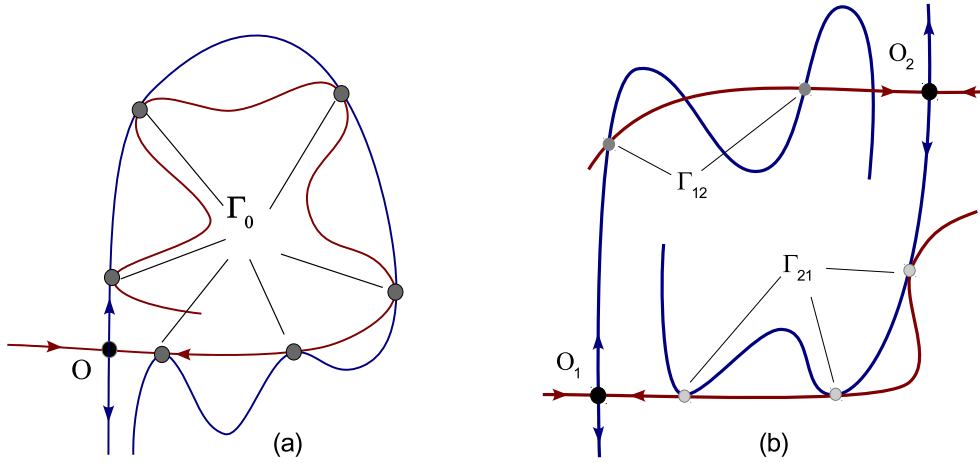


Рис. 9: Примеры двумерных диффеоморфизмов (a) с гомоклиническим касанием; (b) с негрубым гетероклиническим контуром.

$O_1$  и  $O_2$  с седловыми величинами  $\sigma_1 < 1$  и  $\sigma_2 > 1$ , кроме того, пара инвариантных многообразий  $W^u(O_1)$  и  $W^s(O_2)$  пересекаются трансверсально в точках некоторой гетероклинической траектории  $\Gamma_{12}$ , и еще одна пара инвариантных многообразий  $W^u(O_2)$  и  $W^s(O_1)$  квадратично касаются в точках некоторой гетероклинической траектории  $\Gamma_{21}$ , см. рис. 9b. Такой гетероклинический контур был выбран из простых геометрических соображений: при расщеплении гетероклинического касания можно получать квадратичные гомоклинические касания как к точке  $O_1$ , так и  $O_2$ , и тогда, соответственно, при бифуркациях этих касаний могут рождаться как устойчивые, так и вполне неустойчивые периодические траектории. А дальше дело математической техники, с помощью которой в [19] доказывается существование абсолютных областей Ньюхауса в любой окрестности исходного диффеоморфизма с негрубыми гетероклиническими контурами смешанного типа.

Как мы сейчас знаем, в работе [19] было открыто новое динамическое явление, названное впоследствии *смешанной динамикой*. Как оказалось, у этого явления существует два взаимно связанных, но принципиально разных уровня. Первый, чисто математический, – это новый цикл результатов в теории динамических систем, связанный с существованием многомерных систем, демонстрирующих исключительное и максимальное разнообразие динамики, и постулируемый в таких новых понятиях, как абсолютные области Ньюхауса и ультимативно дикое гиперболическое множества [27, 28], системы с универсальной динамикой [96], системы с максимальной эффективной и бифуркационной размерностью [29] и т.п. Второй уровень – это все

то, что привело к открытию нового, третьего, типа динамического хаоса, который называется “смешанной динамикой”. Второй уровень – гораздо более широкий, и он выходит далеко за рамки просто математики и теории динамических систем. Работа [19] относится, конечно, к первому уровню, но в ней были получены прорывные результаты, которые собственно и позволили, почти через 20 лет, перейти на второй уровень. В результате чего, в работах [97, 98] уже в явном виде обсуждались проблемы смешанной динамики как третьей формы динамического хаоса. В работе [98], см. также [99], было, в частности, показано, что смешанная динамика наблюдается в неголономной модели кельтского камня. По сути это была первая модель из приложений, в которой этот тип хаоса был целенаправленно обнаружен и исследован. Математическое обоснование смешанной динамики было дано в работах [18] и [2]. При этом в [18] рассматривались только обратимые (реверсивные) системы, а в [2] теория смешанной динамики была построена в самом общем виде, для гомеоморфизмов компактных фазовых пространств, на основе базовых понятий топологической динамики.

## 5.1 Пример системы со смешанной динамикой

К настоящему времени известно немало динамических моделей, в которых обнаружена смешанная динамика. Так, в работе [25] приведен список из 16 работ, в которых, в общей сложности, рассмотрено 14 различных моделей со смешанной динамикой. В большинстве из этих моделей такой тип хаоса был обнаружен численно и, насколько мы знаем, только для одной из них, именно, для модели Пиковского-Топажа 4-х симметрично связанных ротаторов [100], существование смешанной динамики строго доказано в работе [101].

Модель Пиковского-Топажа [100] имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= 1 - 2\varepsilon \sin \psi_1 + \varepsilon \sin \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 &= 1 - 2\varepsilon \sin \psi_2 + \varepsilon \sin \psi_1 + \varepsilon \sin \psi_3 \\ \dot{\psi}_3 &= 1 - 2\varepsilon \sin \psi_3 + \varepsilon \sin \psi_2.\end{aligned}\tag{12}$$

Система (12) описывает динамику для разности фаз  $\psi_i = \Psi_i - \Psi_{i+1}$  четырех симметрично связанных элементарных ротаторов  $\dot{\Psi}_k = \omega_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , с частотами  $\omega_i$  такими, что  $\omega_i - \omega_{i+1} = 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Соответственно,  $\psi_i \in [0, 2\pi)$  – это угловые переменные, и фазовым пространством системы (12) является трехмерный тор  $\mathbb{T}^3$ . В уравнении (12) коэффициент  $\varepsilon$  задает величину нелинейной связи между ротаторами. При этом в работе [100] вид связи был выбран специально таким, чтобы система (12) была обратимой: она инвариантна относительно обращения времени  $t \rightarrow -t$  и замены координат вида

$$h : \psi_1 \rightarrow \pi - \psi_3, \quad \psi_2 \rightarrow \pi - \psi_2, \quad \psi_3 \rightarrow \pi - \psi_1,\tag{13}$$

которая является инволюцией, т.е.  $h^2 = id$ , в случае трехмерного тора.

После замены координат

$$\xi = \frac{\psi_1 - \psi_3}{2}, \quad \eta = \frac{\psi_1 + \psi_3 - \pi}{2}, \quad \rho = \frac{\psi_1 + \psi_3 - \pi}{2} + \psi_2 - \pi$$

и времени  $t_{new} = (2 + \varepsilon \cos(\rho - \eta))t$ , система (12) принимает следующий вид, см. [101],

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{2\varepsilon \sin \xi \sin \eta}{2 + \varepsilon \cos(\rho - \eta)} \\ \dot{\eta} &= \frac{1 - \varepsilon \cos(\rho - \eta) - 2\varepsilon \cos \xi \cos \eta}{2 + \varepsilon \cos(\rho - \eta)} \\ \dot{\rho} &= 1 \end{aligned}$$

или, что эквивалентно, она может быть представлена в форме неавтономной периодической по времени (с периодом  $2\pi$ ) системы вида

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{2\varepsilon \sin \xi \sin \eta}{2 + \varepsilon \cos(t - \eta)} \\ \dot{\eta} &= \frac{1 - \varepsilon \cos(t - \eta) - 2\varepsilon \cos \xi \cos \eta}{2 + \varepsilon \cos(t - \eta)} \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что система (14) корректно определена при всех  $\varepsilon < 2$ . Кроме того, она сама, а также ее отображение Пуанкаре  $T = T_{2\pi}$ , т.е. отображение сдвига по траекториям за период  $t = 2\pi$ , обладают целым рядом симметрий [101].

- Отображение  $T_{2\pi}$  является обратимым относительно инволюции

$$R : \xi \rightarrow \xi, \quad \eta \rightarrow -\eta,$$

которая является следствием инволюции (13). Это означает, что отображение  $T_{2\pi}$  и его обратное  $T_{2\pi}^{-1}$  сопряжены с помощью инволюции  $R$ , т.е.  $T_{2\pi}^{-1} = R \circ T_{2\pi} \circ R$ .

- Система (14) и отображение  $T_{2\pi}$  симметричны относительно линейного преобразования вида

$$\sigma : \xi \rightarrow \pi - \xi, \quad \eta \rightarrow \pi + \eta. \quad (15)$$

- Отображение  $T_{2\pi}$  является квадратом неориентируемого отображения, именно,  $T_{2\pi} = (\tilde{T})^2$ , где  $\tilde{T} = \sigma \circ T_\pi$  и  $T_\pi$  – ориентируемое отображение сдвига по траекториям системы (14) за пол-периода ( $t = \pi$ ).<sup>18</sup>

---

<sup>18</sup>Последнее свойство симметрии отображения Пуанкаре является следствием т.н. симметрии потока по сдвигу времени (time-shift symmetry), часто встречающейся в периодически возмущенных автономных системах [102, 103, 104].

При  $\varepsilon = 0$  система (14) является автономной и ее динамика тривиальна – фазовое пространство заполнено замкнутыми траекториями. Соответственно, динамика отображения  $T_{2\pi}(\varepsilon)$  при  $\varepsilon = 0$  будет полностью квазипериодической. Однако при увеличении  $\varepsilon$  у  $T_{2\pi}(\varepsilon)$  начинают происходить многочисленные бифуркации, связанные с возникновением периодических траекторий, первоначально очень больших периодов, затем эти периоды постепенно уменьшаются, что позволяет численно проследить соответствующие бифуркации.

Так как отображение  $T_{2\pi}$  обратимо, то большой интерес здесь представляют бифуркации, связанные с рождением симметричных периодических траекторий, которые пересекают множество  $\text{Fix}(R) : \{\eta = 0\} \cup \{\eta = \pi\}$  неподвижных точек инволюции  $R$ .

В бифуркационный момент негрубая симметричная периодическая траектория двумерного ориентируемого отображения  $T_{2\pi}$  имеет два мультипликатора, равные  $+1$ . Напомним, что если траектория  $Q$  отображения  $T$  имеет период  $n$ , т.е.  $T^n(q) = q$  для любой точки  $q \in Q$ , то ее мультипликаторы это собственные значения матрицы линеаризации  $DT^n$  в точке  $q$ . В случае обратимых отображений симметричные периодические траектории рождаются обычно в результате т.н. параболических бифуркаций, имеющих тип “ $0 \rightarrow 2$ ”, когда из ничего у  $T^n$  возникает симметричная неподвижная точка с мультипликаторами  $(+1; +1)$ , которая затем распадается на две симметричные неподвижные точки – седловую и эллиптическую. Для нашей задачи такие бифуркации не очень интересны, так как они в главном порядке являются консервативными.

Гораздо больший интерес представляют обратимые бифуркации типа “ $0 \rightarrow 4$ ”, которые, как показано [101], встречаются в модели и разрушают ее консервативность. Они появляются здесь благодаря тому, что отображение Пуанкаре  $T_{2\pi}$  является квадратом неориентируемого отображения  $\tilde{T} = \sigma T_\pi$ . Соответственно, у отображения  $\tilde{T}$  рождающиеся симметричные периодические точки будут иметь мультипликаторы  $+1$  и  $-1$ , а значит, они могут распадаться на 4 точки – две из которых образуют симметричный (и консервативный) цикл периода 2, а две другие являются неподвижными точками неконсервативного типа. Локальная теория таких бифуркаций, называемых обратимыми бифуркациями потери симметрии (symmetry-breaking bifurcations), была представлена в работах [105, 106, 101]. В частности, там было показано, что в случае симметричной неподвижной точки с мультипликаторами  $+1$  и  $-1$  возможны два случая невырожденных бифуркаций типа “ $0 \rightarrow 4$ ”. В первом случае точка распадается на две симметричные эллиптические точки периода 2 и две несимметричные седловые неподвижные точки с якобианами больше и меньше 1. Во втором случае точка распадается на две симметричные седловые точки периода 2 и две несимметричные неподвижные устойчивую и неустойчивую точки (сток и источник). Соответственно, у квадрата неориентируемого отображения будут появляться 4 непо-

движные точки соответствующих типов. Это показывает, что бифуркации “ $0 \rightarrow 4$ ” должны быть характерными для периодических траекторий отображения  $T_{2\pi}$  в случае нечетных периодов  $n = 2m + 1$ , т.е. когда отображение первого возвращения  $T_{2\pi}^{2m+1} = (\tilde{T}^{2m+1})^2 = (\tilde{T}^{2m+1})^2$  является квадратом неориентируемого отображения. Заметим, что в случае четных периодов отображение  $T_{2\pi}^{2m}$  будет квадратом ориентируемого отображения  $\tilde{T}^{2m}$ , и поэтому здесь, скорее всего, должны происходить лишь консервативные параболические бифуркации.

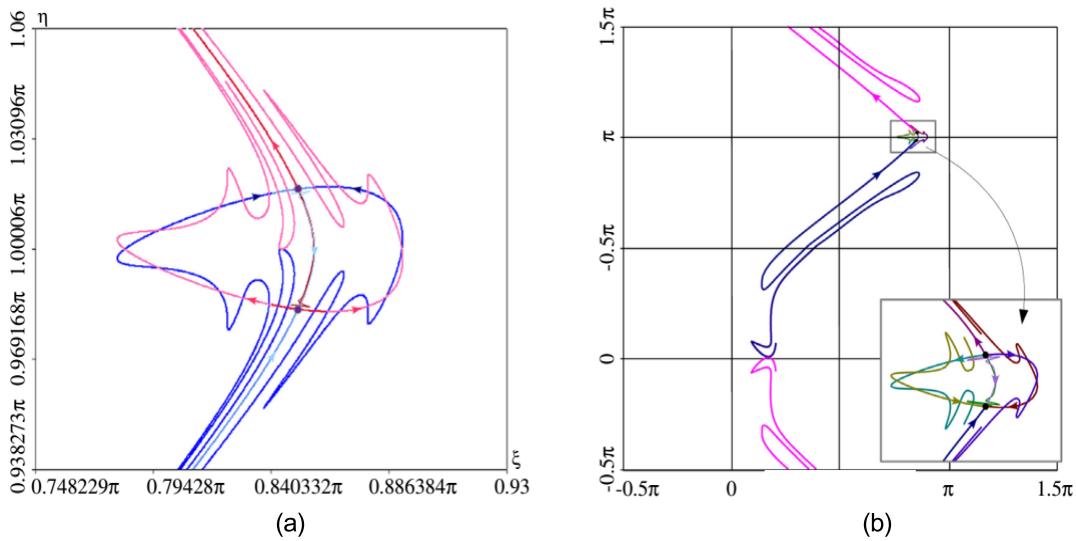


Рис. 10: (а) Образование “малого” гетероклинического контура при  $\varepsilon \approx 0.46207$ . (б) Образование “большого” гетероклинического контура при  $\varepsilon \approx 0.463$ .

В работе [101] были исследованы бифуркации типа “ $0 \rightarrow 4$ ” периодических точек отображения  $T_{2\pi}$  в случае нечетных периодов  $n \leq 9$  (для точек периодов  $\geq 11$  моменты бифуркаций еще можно было найти, но исключительная малость масштабов не позволяла исследовать что-то большее).

Отметим, что указанные локальные бифуркации, которые разрушают консервативность, ведут также и к глобальным бифуркациям, связанным с образованием негрубых гетероклинических контуров смешанного типа (содержащих седла с якобианами больше и меньше 1), таких как на рис. 9b. В случае несимметричных седел периода 3, примеры таких контуров, найденных в [101] численно, показаны на рис. 10. В силу теорем из работ [19, 107], бифуркации таких контуров приводят к возникновению смешанной динамики – когда у системы появляется счетное множество периодических стоков, источников и седел, в совокупности неотделимых друг

от друга. Фазовый портрет этой смешанной динамики при  $\varepsilon = 0.6$  показан на рис. 11.

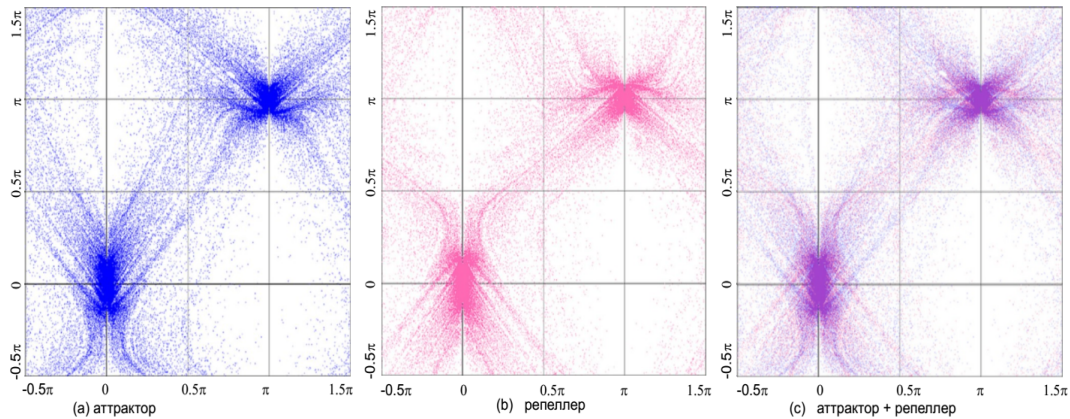


Рис. 11: Пример хаотической динамики в модели Пиковского-Топажа при  $\varepsilon = 0.6$ . Здесь фазовое пространство для отображения Пуанкаре является двумерным тором. Подсчитано  $2 \cdot 10^5$  итераций, последние  $10^5$  из них показаны на картинках; (а) аттрактор – результат итерирования вперед показан синими точками; (б) репеллер – результат итерирования назад показан красными точками; (с) смешанная динамика – результат итерирования в обоих направлениях: то множество, по которому аттрактор пересекается с репеллером, получилось в фиолетовых тонах.

Таким образом, в работе [101] вопрос о существовании смешанной динамики в модели Пиковского-Топажа был исследован с разных сторон. Был подтвержден не только факт ее существования, но и исследованы бифуркационные механизмы ее возникновения, как локальные, разрушающие консервативность, так и глобальные, распространяющие неконсервативные элементы динамики (периодические стоки и источники, например) далеко по фазовому пространству.

## 6 Приложение. Премия Оскара II и гомоклинические траектории Пуанкаре

В этом параграфе мы напомним возможно не всем известные факты истории открытия Пуанкаре гомоклинических траекторий и, тем самым, открытия динамического хаоса. В своем изложении мы во многом опираемся на некоторые публикации по этой теме [37, 108, 109, 110] и, в особенности, на статью Андерсона [111], в которой были использованы архивные материалы.

В 1882 году был основан первый в Скандинавии математический журнал Acta Mathematica, который до сих пор является одним из ведущих математических жур-

налов. Его покровителем был шведский король Оскар II. В 1884 году с целью привлечения внимания к Acta Mathematica была учреждена международная премия имени Оскара II, предназначенная для поощрения открытий в математике. Было образовано жюри конкурса из трех человек. Председателем жюри стал Густав (Гёста) Миттаг-Леффлер – главный редактор Acta Mathematica, а членами жюри – два “патриарха” математики того времени Шарль Эрмит и Карл Вейерштрасс.

Жюри предложило четыре конкурсных темы. Первой темой была задача небесной механики (другие темы были чисто математические). Речь шла о возможности представления решений задачи  $n$  тел в отсутствие соударений в виде рядов по каким-либо известным функциям времени. Причем было добавлено: “Но если бы предложенную проблему нельзя было решить в назначенный срок, то премию можно было бы присудить за работу, в которой указанным образом была бы рассмотрена и полностью решена другая проблема механики.”

Всего на конкурс поступило 11 работ из разных стран, в том числе и мемуар Пуанкаре. Ради объективности, а также в традициях того времени, работы подавались анонимно, под девизами. В качестве девиза и эпиграфа Пуанкаре выбрал латинское изречение: “Nunquam praescriptos transbunt sidera fines” (“Никогда не перейдут светила предписанных границ”).

Итоги конкурса были официально объявлены 21 января 1889 г., в день 60-летия короля Швеции Оскара II. Главный приз, золотая медаль с портретом короля и поощрительная премия размером в 2500 шведских крон, был присужден двум французским математикам Полю Аппелю и Анри Пуанкаре за их мемуары, представленные на конкурс. Оставалось только опубликовать эти труды...

Однако этот процесс в случае работы Пуанкаре оказался непростым. Вейерштрассу пришлось взять на себя роль основного “рецензента”. В своих письмах к Миттаг-Леффлеру он жалуется, что работа Пуанкаре очень сложная. Поэтому к чтению рукописи Пуанкаре присоединяется еще и молодой помощник редактора Acta Mathematica Ларс Эдвар Фрагмен (Lars Edvard Phragmén). Замечаний много, и некоторые из них существенные. Тем не менее Пуанкаре скрупулезно и быстро отвечает на все замечания и вносит соответствующие исправления в рукопись.

Дата публикации трудов назначена на середину ноября 1889 года. Между Фрагменом и Пуанкаре проходил активный обмен письмами, заканчивающийся письмом Фрагмена, отправленным 16 сентября. Но в этот раз от Пуанкаре долго не было ответа. Затем 30 ноября (заметим, что уже после того как мемуар Пуанкаре был опубликован и даже частично распространен) приходит телеграмма от Пуанкаре с просьбой прекратить печать и ждать его письма с разъяснением ситуации. 1 декабря Пуанкаре пишет Миттаг-Леффлеру (цитируется по [111]):

- “Мой дорогой друг, сегодня утром я написал мистеру Фрагмену, чтобы сообщить ему об ошибке, которую я совершил, и он, несомненно, сообщил Вам о



моем письме. Но последствия этой ошибки гораздо серьезнее, чем я думал сначала.

Неверно, что асимптотические поверхности замкнуты, по крайней мере, не в том смысле, который я имел в виду ранее. Верно лишь то, что если рассмотреть две части этой поверхности (которые я еще вчера считал совпадающими друг с другом), то они пересекаются по бесконечному числу асимптотических траекторий, и, кроме того, расстояние между ними является бесконечно малым более высокого порядка, чем  $\mu^p$ , каким бы большим ни было  $p$ .

Я действительно верил, что все асимптотические кривые после того, как оставили замкнутую кривую, представляющую собой периодическое решение, снова асимптотически приближались к той же замкнутой кривой. Что верно, так это то, что существует бесконечно много [асимптотических кривых], обладающих этим свойством.

Я не скрываю от Вас, какую тревогу причиняет мне это открытие. Во-первых, я не знаю, считаете ли Вы, что представленные результаты, т. е. существование периодических решений, асимптотических решений, теория характеристических показателей, отсутствие аналитических интегралов и расходимость рядов г-на Линдштедта до сих пор заслуживают той высокой награды, которую Вы им присудили.

С другой стороны, потребуются обширные доработки, и я не знаю что будет, если кто-то начал печатать мемуары; я послал об этом телеграмму г-ну Фрагмену.”

Фактически, здесь Пуанкаре пишет о своем открытии гомоклинических траекторий, о том, что если существует одна такая траектория, то их существует счетное множество, и о том, что расщепление сепаратрис при возмущениях интегрируемой системы (в задаче трех тел) является экспоненциально малым по параметру. То есть, здесь речь идет о гигантских открытиях, захватывающих, конечно, не только небесную механику. Миттаг-Леффлер это прекрасно понимает, а также понимает, что уже происшедшая публикация может затронуть репутацию журнала, а также короля. Он прекратил распространение журнала и написал письма ряду математиков с просьбой вернуть полученные экземпляры. Он также написал Пуанкаре письмо, в котором предложил переделать мемуары и спросил, готов ли Пуанкаре взять на себя расходы ( $\sim 3500$  шведских крон) по *перепубликации* мемуаров. Пуанкаре согласился и уже 5 января 1890 г. Пуанкаре прислал новый вариант. В своем окончательном виде “коронованные мемуары” появились в 13-м томе Acta Mathematica в декабре 1890 года.

В этой истории сначала “неоткрытия”, а затем открытия динамического хаоса, есть один любопытный момент. Какое замечание сделал Фрагмен в своем письме

Пуанкаре, которое заставило того надолго “замолчать”? Скорее всего, судя по ответу Пуанкаре, в письме среди прочих содержался “наивный” вопрос: а почему, собственно, асимптотические поверхности должны оставаться совпадающими и после возмущения? Это тот самый вопрос, который для подготовленного человека является своего рода искрой-источником мгновенного озарения и глубокого осмысления существа проблемы. Наверное, в том числе и это, породило один самых известных афоризмов Пуанкаре: “Проблема не в том, каков ответ, – проблема в том, каков вопрос”.

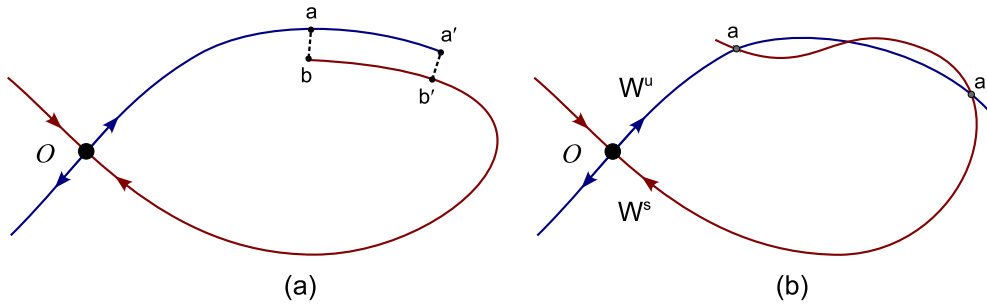


Рис. 12: (а) В случае двумерного потока сепаратрисы  $W^u$  и  $W^s$  являются траекториями, и поэтому могут либо совпадать, либо вообще не пересекаться – последнее влечет, что площади не сохраняются. (б) У сохраняющего площадь отображения инвариантные многообразия седловой периодической точки состоят из континуума траекторий и типично расщепляются.

Во всяком случае, Пуанкаре мгновенно понял свою ошибку в аргументации по поводу нерасщепления сепаратрисных поверхностей при возмущениях. В интегрируемом случае, при  $\varepsilon = 0$ , – для двумерной консервативной системы, сепаратрисы седла действительно не могут разойтись из-за сохранения площади, см. рис. 12а. Здесь площади фигуры, ограниченной кривыми  $[O, a]$ ,  $[a, b]$  и  $[b, O]$ , и фигуры, ограниченной кривыми  $[O, a']$ ,  $[a', b']$  и  $[b', O]$  при сдвиге на  $\Delta t$ , будут разными. В неинтегрируемом случае  $\varepsilon \neq 0$  для отображения  $T_\varepsilon$  будет типичной такая картинка, рис. 12б, когда инвариантные кривые  $W^s$  и  $W^u$  пересекаются в точках  $a$  и  $a'$  – тогда площади фигур, ограниченных кривыми  $[O, a]$  и  $[a, O]$  и кривыми  $[O, a']$  и  $[a', O]$ , будут равными. Случай совпадения инвариантных кривых  $W^s$  и  $W^u$  – бесконечно вырожденный.

Конечно, Пуанкаре это знал... Однако его “подвела” интерпретация сделанных им вычислений инвариантных кривых  $W^s$  и  $W^u$  с помощью рядов по параметру  $\sqrt{\mu}$ :

$$W^{s,u} = W^0 + w_1^{s,u} \sqrt{\mu} + w_2^{s,u} \mu + \dots,$$

в которых он обнаружил, что  $w_i^s = w_i^u$  для всех  $i$ . Пуанкаре, как говорится “на автомате”, решил, что ряды сходятся и, следовательно, инвариантные многообразия  $W^s$  и  $W^u$  не расщепляются. Впоследствии он показал, что указанные ряды расходятся, а правильный результат, что величина расщеплений многообразий  $W^s$  и  $W^u$  является величиной экспоненциально малой по  $\mu$ , был получен им с помощью других рядов. Именно, рядов вида (9) по малому параметру  $\varepsilon$ , см. § 2.3.

Вообще, как нам кажется, не сделать какой-либо “принципиальной” ошибки в той задаче, которую рассматривал Пуанкаре, является практически невозможным событием, если только строго не придерживаться сухой, формальной логики на каждом шагу – но тогда также практически невозможно будет получить какие-либо принципиальные результаты, не говоря уже о фундаментальных открытиях. Более того, первоначальная ошибка Пуанкаре вполне могла стимулировать его на глубокое исследование характера пересечения инвариантных кривых и на доказательство его экспоненциальной малости. И здесь мы полностью согласны с замечательным и в каком-то смысле парадоксальным для математики высказыванием В.И. Арнольда [109]: “Я полагаю, что ошибки вообще составляют важную часть научной деятельности и что их роль в развитии науки может быть большей, чем роль непонятных, но правильных формальных доказательств следствий из аксиом. Истории этих ошибок предыдущих поколений нужно рассказывать студентам в виде стимулирующих примеров и как источник вдохновения, причем ошибки величайших ученых наиболее поучительны.”

Авторы благодарят Е.А. Андронову и Д.В. Тураева за полезные замечания. Эта работа выполнена при финансовой поддержке гранта 19-11-00280 Российского Научного Фонда. Исследования в § 2.1 и § 2.2 проведены в рамках гранта 0729-2020-0036 Министерства Науки и Высшего Образования РФ. С. Гонченко также благодарит Фонд развития теоретической физики и математики <БАЗИС> за поддержку научных исследований его группы.

## Список литературы

- [1] Рабинович М. И., Рульков Н. Ф., Динамический Хаос // Большая Российская Энциклопедия 2004-2017.
- [2] Гонченко С.В., Тураев Д.В. // Труды МИАН. 2017. Т. 297. С. 133–157. doi: 10.1134/S0371968517020078
- [3] Заславский Г. М., Чириков Б. В. // УФН. 1971. Т. 105, № 1. С. 3-39.

- [4] Chirikov B. V. // Phys. Rep. 52: 263 (1979)
- [5] Арнольд В.И. Математические методы классической механики // М.: Наука, 1974, 431 с.
- [6] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики, Динамические системы - 3, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, 3, ВИНТИ, М., 1985, 5-290.
- [7] Колмогоров А. Н. // Докл. АН СССР, 1954, т. 98 с. 572.
- [8] Moser J. // Nachr. Akad. Wiss. Goettingen Math. Phys. K1 I 1962.
- [9] В. И. Арнольд, // УМН, 1963, том 18, выпуск 5, 13-40.
- [10] Арнольд В. И. // Успехи математических наук, 1963, т. 18, с 85.
- [11] Арнольд В. И. // ДАН СССР. 1964. Т. 156. С. 9-12.
- [12] Ruelle D., Takens F. // Comm. Math. Phys. 1971. V.20. P.167–192. doi: 10.1007/BF01646553
- [13] Крылов Н. М. Введение в нелинейную механику // М.:Изд-во АН СССР, 1937. 365 с.
- [14] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний // Москва: Госиздательство физико-математической литературы, 1958. 408 с.
- [15] Чириков Б. В. Нелинейные колебания в системах, близких к консервативным // дис. кандидата физико-математических наук: 01.00.00. - Новосибирск, 1959. - 110 с.
- [16] Морозов А. Д., Шильников Л. П. // ДАН СССР. 1975. Т. 223, № 6. С. 1340-1343.
- [17] Морозов А. Д., Шильников Л. П. // ПММ. 1983. Т. 47, № 3. С. 385-394.
- [18] Gonchenko S.V. // Discontin. Nonlinearity Complex. 2016. V. 5, No. 5. P.365–374. doi: 10.5890/DNC.2016.12.003
- [19] Гонченко С.В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. // Труды МИАН. 1997. Т. 216. С. 76–125.
- [20] Аносов Д. В., Бронштейн И. У. // Динамические системы–1 / под ред. Р. В. Гамкрелидзе, З. А. Измайлова. М.: ВИНТИ, 1985. С. 204–227.

- [21] Conley C.C. Isolated invariant sets and the Morse index. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, V.38. Providence : American Math. Soc., 1978. 89 p.
- [22] Ruelle D. // *Comm. Math. Phys.* 1981. V.82, No.1. P.137–151. doi: 10.1007/BF01206949
- [23] Hurley M. // *American Math. Soc.* 1982. V.269, No.1. P.247–271. doi: 10.1090/S0002-9947-1982-0637037-7
- [24] С.В.Гонченко, Й.С.В.Лэмб, И.Риос, Д.Тураев // *Доклады РАН*, 2014, т.454, No.4, 375–378.
- [25] Гонченко С.В. // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2020. Т.63, №9. С.840–862.
- [26] Emelianova A.A, Nekorkin V.I.// *Chaos*. 2021 Mar;31(3):033102. doi: 10.1063/5.0038833.
- [27] Turaev D. // *Proc. Int. Congr. Math.* 19–27 August 2010, Hyderabad, India. P.1804–1815.
- [28] Turaev D. // *Comm. Math. Phys.* 2015. V.335, No.3. P.1235–1277. doi: 10.1007/s00220-015-2338-4
- [29] Turaev D.V. // *Int. J. Bif. Chaos*. 1996. V.6, No.5. P.919–948. doi: 10.1142/S0218127496000515
- [30] Андронов А. А., Витт А. А., Понтрягин Л. С. // *Ж. эксперим. и теор. физики*. 1933. Т. 3. № 3. С. 165.
- [31] Пуанкаре А., О проблеме трех тел и об уравнениях динамики // в кн. “Пуанкаре. Избранные труды. В 3 т.” Т. 2 / под ред. Н.Н. Боголюбова, В.И. Арнольда, И.Б. Погребыцкого. М.: Наука, 1972. С. 357–452.
- [32] Мельников В.К. // *Труды Моск. матем. общ-ва*. 1963. Т.12. С. 3–52.
- [33] Пуанкаре А. // *Пуанкаре. Избранные труды. В 3 т.* / под ред. Н.Н. Боголюбова, В.И. Арнольда, И.Б. Погребыцкого. М. : Наука, Т. 1, 1971. 771 с.; Т. 2, 1972. 999 с.; Т. 3, 1974. 769 с.
- [34] Birkhoff G.D. // *Memoire Pont. Acad. Sci. Novi. Lancaei*. 1935. V.53. pp.85-216.
- [35] Smale S. // *Diff. and Comb. Topology*, Princeton Univ. Press, 1965, pp.63-80.

- [36] Шильников Л. П. // Мат. сб. 1967. Т. 74(116), № 3. С. 378–397.
- [37] Шильников Л. П. Математические события XX века. / под ред. В. И. Арнольда и др. М.: ФАЗИС, 2003. С. 465–489.
- [38] Hadamard J. // J. de Math 5 Ser. 1898. V. 4. P. 27–73.
- [39] Пуанкаре А., Об одной геометрической теореме // в кн. “Пуанкаре. Избранные труды. В 3 т.” Т. 2 / под ред. Н. Н. Боголюбова, В. И. Арнольда, И. Б. Погрёбского. М.: Наука, 1972. С. 775–807.
- [40] Birkhoff G.D. // Trans. Amer. Math. Soc. 1913. V. 14, No. 1. P. 14–22. doi: 10.2307/1988766
- [41] Lorenz E. // J. Atmospheric Sci. 1963. V. 20, No. 2. P. 130–141. doi: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2
- [42] Странные аттракторы / под ред. Я. Г. Синая, Л. П. Шильникова. М. : Мир, 1981. 256 с.
- [43] Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. // ДАН СССР. 1977. Т. 234, № 2. С. 336–339.
- [44] Шильников Л. П. Бифуркация рождения цикла и ее приложения / под ред. Н. Н. Баутина, Е. А. Леонтович. М. : Мир, 1980. С. 317–335.
- [45] Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. // Труды ММО. 1982. Т. 44. С. 150–212.
- [46] Reileigh. // Phil. Mag. 1916. V. 32. P. 529–546.
- [47] Рюэль Д. Случайность и хаос. М. : Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 191 с.
- [48] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М. : Наука, 1981. 568 с.
- [49] Андронов А. А. // VI съезд русских физиков. 5–16 августа 1928 г., Москва, Н. Новгород, Казань, Саратов, Россия. С. 23–24.
- [50] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М. : Наука, 1966. 567 с.

- [51] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М. : Наука, 1967. 487 с.
- [52] Andronov A. A., Vitt A. A. // Archiv f. Elektrotechnik. 1930. V. 24. P. 99–110. doi: 10.1007/BF01659580
- [53] Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями // Гостехиздат, М.-Л. 1947.
- [54] Van der Pol B., Van der Mark J. // Nature. 1927. V. 120. P. 363–364. doi: 10.1038/120363a0
- [55] Афраимович В. С., Шильников Л. П. Методы качественной теории дифференциальных уравнений / под ред. Е. А. Леонтович, Н. Н. Баутина. Горький: Изд-во ГГУ, 1983. P. 3–26.
- [56] Cartwright M. L., Littlewood J. E. // J. Lond. Math. Soc. 1945. V. 20. P. 180–189. doi: 10.1112/jlms/s1-20.3.180
- [57] Levinson N. // Ann. Math. 1949. V. 50, No. 1. P. 127–153. doi: 10.2307/1969357
- [58] Осипов А. В., // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11, № 10. С. 1795–1800.
- [59] Осипов А. В., // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12, № 11. С. 2000–2008.
- [60] Осипов А. В., // Вестн. Ленингр. ун-та. 1976. № 7, вып. 2. С. 156–157.
- [61] Smale S. // Труды Межд. Симп. по нелинейным колебаниям. 12–18 сентября 1961 г., Киев, СССР. Т. 2. С. 365–366.
- [62] Smale S. // Trans. Am. Math. Soc. 1959. V. 90(2). P. 281–290. doi:10.1090/S0002-9947-1959-0104227-9.
- [63] Smale S. // Annals of Math. Second Ser. 1961. V. 74 (2). P. 391–406. doi:10.2307/1970239.
- [64] Smale S. // Bull. Amer. Math. Soc. 1960. V. 66 (1). P. 43–49. doi:10.1090/S0002-9904-1960-10386-2.
- [65] Smale S. // Chaos Avant-Garde. Singapore: World Sci. 2000. P. 7–22.
- [66] Li T. Y., Yorke J. // Am. Math. Monthly. 1975. V. 82. P. 985–992.
- [67] May R. M. // Science, December 1974. V. 186(4164). P. 645–7. DOI:10.1126/science.186.4164.645

- [68] Кузнецов С. П. Динамический хаос и гиперболические аттракторы. От математики к физике. Москва-Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2013. 488 с.
- [69] Shilnikov L. P., Turaev D. V. // *Comp. Math. Appl.* 1997. V. 34, No. 2-4, P. 173–193. doi: 10.1016/S0898-1221(97)00123-5
- [70] Аносов Д. В. Математические события XX века. / под ред. В. И. Арнольда и др. М.: ФАЗИС, 2003. С. 1–18.
- [71] Ландау Л. Д. // *ДАН СССР.* 1944. Т. 44. С. 339-342.
- [72] Hopf E. // *Commun. Pure and Appl. Math.* 1948. V. 1. P. 303-322.
- [73] Newhouse S., Ruelle D., Takens F. // *Commun. Math. Phys.* 1978. V. 64. P. 35-40.
- [74] Афраймович В. С., Шильников Л. П. // *ДАН СССР,* 1974, т. 219, 6, 1281-1284.
- [75] Афраймович В. С., Шильников Л. П. // *ПММ,* 1977, т. 41, 4, 618-627.
- [76] Тураев Д. В., Шильников Л. П. // *Матем. сборник.* 1998. Т. 189, № 2. С. 137–160.
- [77] Gonchenko S., Gonchenko A., Kazakov A., Samylna E. // *Chaos.* 2021. V. 31. Art. no. 023117. doi: 10.1063/5.0037621
- [78] Gonchenko S., Karatetskaia E., Kazakov A., Kruglov V. // *Chaos.* 2022. V. 32. Art. no. 121107. doi: 10.1063/5.0123426
- [79] Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Kozlov A. D. // *Int. J. Bif. Chaos.* 2018. V. 28, No. 11. Art. no. 1830036. doi: 10.1142/S0218127418300367.
- [80] Gonchenko S., Ovsyannikov I., Simo C., Turaev D. // *Int. J. Bif. Chaos.* 2005. V. 15, No. 11. P. 3493–3508. doi: 10.1142/S0218127405014180
- [81] Гонченко А. С., Гонченко С. В., Шильников Л. П. // *Нелинейная Динамика.* 2012. Т. 8, № 1. С. 3–28.
- [82] Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D. // *Int. J. Bif. Chaos.* 2014. V. 24, No. 8. Art. no. 1440005. doi: 10.1142/S0218127414400057
- [83] Borisov A., Kazakov A., Sataev I. // *Reg. Chaot. Dyn.* 2014. V. 19, No. 6. P. 718–733. doi: 10.1134/S1560354714060094
- [84] Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D. // *Nonlinearity.* 2021. V. 34, No. 4. P. 2018–2047. doi: 10.1088/1361-6544/abc794



- [85] Afraimovich V. S., Shilnikov L. P. // *Nonlinear Dynamics and Turbulence* / ed. by G.I.Barenblatt, G.Iooss, D.D.Joseph. Boston: Pitman, 1983. P. 1–34.
- [86] Henon M. // *Commun. Math. Phys.* 1976. V. 50. P. 69–77. doi: 10.1007/BF01608556
- [87] Galias Z., Tucker W. // *Chaos*. 2015. V. 25. Art. no. 033102. doi: 10.1063/1.4913945
- [88] Newhouse S. // *Topology*. 1974. V. 13. P. 9–18. doi:10.1016/0040-9383(74)90034-2
- [89] Palis J., Viana M. // *Ann. Math. Ser. 2*. 1994. V. 140, No. 1. P. 91–136. doi: 10.2307/2118546
- [90] Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V. // *Chaos*. 1996. V. 6, No. 1. P. 15–31. doi: 10.1063/1.166154
- [91] Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. // *Nonlinearity*. 2008. V. 21, No. 5. P. 923–972. doi: 10.1088/0951-7715/21/5/003
- [92] Гаврилов Н.К., Шильников Л.П. // *Матем. сборник*. 1972. Т. 88, № 4. P. 475–492.
- [93] Гаврилов Н.К., Шильников Л.П. // *Матем. сборник*. 1973. Т. 90, № 1. P. 139–157.
- [94] Гонченко С.В. // *Мат. заметки*. 1983. Т. 33, № 5. P. 745–755. doi: 10.1007/BF01158287
- [95] Newhouse S. // *Publ. Math. IHES*. 1979. V. 50. P. 101–152. doi: 10.1007/BF02684771
- [96] Gonchenko S., Shilnikov L., Turaev D. // *Nonlinearity*. 2007. V. 20. P. 241–275. doi: 10.1088/0951-7715/20/2/002
- [97] Delshams A., Gonchenko S. V., Gonchenko V. S., Lazaro J. T., Sten'kin O. // *Nonlinearity*. 2013. V. 26. P. 1–33. doi: 10.1088/0951-7715/26/1/1
- [98] Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O. // *Reg. Chaot. Dyn.* 2013. V. 18, No. 5. P. 521–538. doi: 10.1134/S1560354713050055
- [99] Гонченко А.С., Гонченко С.В., Казаков А.О., Самылина Е.А. // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2018. Т. 61, № 10. С. 867–882.>
- [100] Pikovsky A., Toraj D. // *Physica D*. 2002, V. 170. P. 118–130.

- [101] Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D. V. // *Physica D*. 2017. V. 350. P. 45-57.
- [102] Dmitriev A.S., Komlev Yu.A., Turaev D.V. // *Int. J. Bifurcation Chaos*. 1992. V. 2(1). P. 93-100. <http://dx.doi.org/10.1142/S0218127492000094>.
- [103] Lamb J.S.W., Roberts J.A.G. // *Physica D*. 1998. V. 112. P. 1-39.
- [104] Rom-Kedar V., Wiggins S. // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1990. V. 109(3). P. 239-298.
- [105] Haragus M., Iooss G. *Reversible Bifurcations* // In: *Local Bifurcations, Center Manifolds, and Normal Forms in Infinite-Dimensional Dynamical Systems*. Universitext, Springer - London, 2011.
- [106] Lerman L. M., Turaev D. V. // *Reg. Chaotic Dyn.* 2012. V. 17(3-4). P. 318-336.
- [107] Lamb J.S.W., Stenkin O.V. // *Nonlinearity*. 2004. V. 17. P. 1217-1244.
- [108] Аносов Д. В. // *Историко-математические исследования*. 2001. Вып.6. С. 57-72.
- [109] В. И. Арнольд // *Успехи мат. наук*. 2006. Т. 61, № 1. С. 3-24. doi: 10.4213/rm1714.
- [110] И.Б. Погребысский // *Пуанкаре. Избранные труды*. В 3 т. Т. 2 / под ред. Н. Н. Боголюбова, В. И. Арнольда, И. Б. Погребысского. М. : Наука, 1972. С. 967-976.
- [111] Andersson K. G. // *Arch. Hist. Exact Sci.* 1994. V.48. P.133-147. doi: 10.1007/BF00374437