ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль–сентябрь 2023. Т. 30, № 3. С. 97–117

УДК 519.17 DOI 10.33048/daio.2023.30.755

О ДЕРЕВЬЯХ ЗАДАННОГО ДИАМЕТРА С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ КОЛИЧЕСТВОМ k-ДИСТАНЦИОННЫХ НЕЗАВИСИМЫХ МНОЖЕСТВ

Д. С. Талецкий[1, 2]

[1] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», ул. Большая Печерская, 25/12, 603155 Нижний Новгород, Россия

[2] Нижегородский гос. университет им. Н. И. Лобачевского, пр. Гагарина, 23, 603950 Нижний Новгород, Россия

E-mail: `dmitalmail@gmail.com`

Аннотация. Множество вершин графа называется *k-дистанционным независимым*, если расстояние между любыми двумя его вершинами больше некоторого целого числа $k \geqslant 1$. В работе рассматривается задача описания n-вершинных деревьев фиксированного диаметра d, содержащих максимально и минимально возможное число k-дистанционных независимых множеств среди всех таких деревьев. Задача на максимум решается для случая $1 < k < d \leqslant 5$ при всех достаточно больших значениях n. Задача на минимум существенно более простая и решается для всех значений параметров $1 < k < d < n$. Ил. 4, библиогр. 8.

Ключевые слова: дерево, независимое множество, k-дистанционное независимое множество, диаметр.

Введение

Независимым множеством графа называется произвольное подмножество попарно не смежных его вершин. *k-Дистанционным независимым множеством* (сокращённо k-ДНМ) графа называется подмножество его вершин, любые две из которых находятся на расстоянии более $k \geqslant 1$ друг от друга. В частности, 1-ДНМ является обычным независимым множеством. *Диаметром* $\mathrm{diam}(G)$ связного графа G называется максимально возможное расстояние между двумя его вершинами. Через $i_k(G)$ обозначается число различных k-ДНМ, которое содержит граф G. Будем называть n-вершинное дерево диаметра d (i_k, d, n)-*максимальным*

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21–11–00194).

((i_k, d, n)-*минимальным*), если оно содержит максимально (минимально) возможное число k-ДНМ среди всех таких деревьев.

Обозначим через $S_{d,n}$ n-вершинное дерево диаметра d, полученное из пути P_d присоединением $n-d$ листьев к одному из его концов. Очевидно, что звезда S_n, изоморфная $S_{2,n}$, является единственным $(i_1, 2, n)$-максимальным деревом. В [1] показано, что для всех $2 < d < n$ единственным (i_1, d, n)-максимальным деревом является граф $S_{d,n}$. С другой стороны, (i_1, d, n)-минимальные деревья устроены значительно сложнее, и задача их описания в случае $d \geqslant 8$ остаётся открытой. В работе [2] описаны (i_1, d, n)-минимальные деревья при $d \leqslant 4$ и произвольном n, а также при $d = 5$ и всех достаточно больших n. В [3] доказаны некоторые важные свойства (i_1, d, n)-минимальных деревьев при $d \geqslant 6$ и частично описана структура $(i_1, 6, n)$-минимальных деревьев. В недавней работе [4] описаны $(i_1, 6, n)$-минимальные и $(i_1, 7, n)$-минимальные деревья при $n > 160$ и $n > 400$ соответственно.

На сегодняшний день известно сравнительно мало результатов, связанных с k-ДНМ в графах. В [5–9] получены оценки на *число k-дистанционной независимости* графа (т. е. на наибольшую мощность его k-ДНМ). В [10] перечисляются k-ДНМ простого пути P_n при некоторых дополнительных ограничениях.

В настоящей работе исследуются (i_k, d, n)-максимальные и (i_k, d, n)-минимальные деревья в случае $k \geqslant 2$. Ясно, что при $k \geqslant d$ каждое n-вершинное дерево диаметра d содержит ровно $n+1$ k-ДНМ (каждое k-ДНМ в этом случае содержит не более одной вершины дерева), поэтому интерес представляет только нетривиальный случай $k < d$. Для всех $1 < k < d \leqslant 5$ и $n \geqslant 120$ найдено (i_k, d, n)-максимальное дерево $\widehat{T}_{k,d,n}$ и доказано, что оно единственно. Кроме того, для всех $1 < k < d < n$ найдено (i_k, d, n)-минимальное дерево $T_{k,d,n}$ и указаны все тройки (k, d, n), для которых это дерево единственно.

1. Некоторые определения и обозначения

Как обычно, через $N[v]$ обозначается *замкнутая окрестность* вершины v, т. е. множество, состоящее из v и всех смежных с ней вершин. Для $s \geqslant 1$ обозначим через $N_s[v]$ множество всех вершин, находящихся на расстоянии не более чем s от вершины v.

Вершина дерева T называется *предлистовой*, если она смежна хотя бы с одним его листом; *центральной*, если она находится на расстоянии не более $\lfloor \frac{\mathrm{diam}(T)+1}{2} \rfloor$ от всех его листьев. Как известно, деревья чётного диаметра содержат ровно одну центральную вершину, а деревья нечётного диаметра — ровно две. *Диаметральным путём* дерева T называется его простой путь, содержащий $\mathrm{diam}(T)+1$ вершин. Лист дерева T, являющийся концом диаметрального пути T, назовём *диаметральным*.

Напомним, что через $i_k(G)$ обозначается число различных k-ДНМ, которое содержит граф G. Через $i_k^+(G, v)$ ($i_k^-(G, v)$) обозначается число k-ДНМ графа G, содержащих (не содержащих) вершину v. Нетрудно видеть, что при всех $n \geqslant 2$ и $k \geqslant 1$ для любого n-вершинного дерева T и любой его вершины v имеет место строгое неравенство $i_k^+(T, v) < i_k^-(T, v)$. Действительно, обозначим через u произвольного соседа v. Тогда

$$i_k^-(T, v) \geqslant i_k(T \setminus N_1[v]) + i_k^+(T, u) > i_k(T \setminus N_k[v]) = i_k^+(T, v).$$

Обозначим через $M_{a,b}^l$ дерево диаметра 4, центральная вершина которого смежна с l листьями, a путями P_2 и b центральными вершинами путей P_3. Обозначим через $M_{a,b,c,d'}^{p,q}$ дерево диаметра 5, полученное из леса $M_{a,b}^p \cup M_{c,d'}^q$ соединением центральных вершин двух его поддеревьев. Будем использовать обозначение $M_{a,b}$ для дерева $M_{a,b}^0$ и M_n — для n-вершинного дерева $M_{a,b}$, где $a \leqslant 2$ (см. рис. 1). Кроме того, через $M'_{a,b,c,d'}$ обозначим дерево $M_{a,b,c,d'}^{1,0}$, а через $M_{a,b,c,d'}$ — дерево $M_{a,b,c,d'}^{0,0}$.

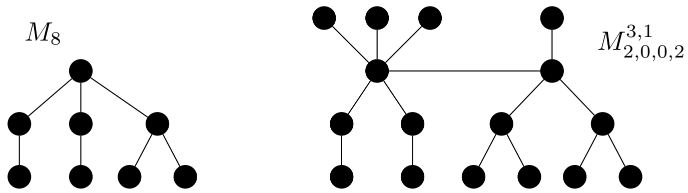

Рис. 1. Деревья M_8 и $M_{2,0,0,2}^{3,1}$

Будем называть (i_k, d, n)-максимальное ((i_k, d, n)-минимальное) дерево *максимальным* (*минимальным*), если значения параметров k, d и n понятны из контекста.

2. Случай $(i_{2k'}, 2k' + 1, n)$-максимальных деревьев

Рассмотрим дерево T диаметра $2k' + 1$ с центральными вершинами u и v. Обозначим через T_u максимальное по включению поддерево T, содержащее вершину u и не содержащее вершины v. Аналогичным образом определим поддерево T_v. Обозначим через l_u и l_v число диаметральных листьев T, содержащихся в поддеревьях T_u и T_v соответственно.

Теорема 1. *Для всех $n \geqslant 2k' + 2$ и $k' \geqslant 1$ каждое $(i_{2k'}, 2k' + 1, n)$-максимальное дерево единственно и изоморфно пути $P_{2k'}$, к концам которого присоединено $\left\lfloor \frac{n-2k'+1}{2} \right\rfloor$ и $\left\lfloor \frac{n-2k'}{2} \right\rfloor$ листьев соответственно.*

Доказательство. Очевидно, что каждое $2k'$-ДНМ дерева T содержит не более одной вершины из поддерева T_u и не более одной вершины из поддерева T_v. При этом если оно содержит ровно две вершины, то обе они являются диаметральными листьями T. Тогда найдётся $(l_u+1)(l_v+1)$ k-ДНМ (включая пустое множество), все элементы которых являются диаметральными листьями. Кроме того, существует $(n-l_u-l_v)$ k-ДНМ, состоящих из одной вершины, не являющейся диаметральным листом. Таким образом,

$$i_{2k'}(T) = (n - l_u - l_v) + (l_u + 1)(l_v + 1) = n + l_u l_v + 1.$$

Ясно, что величина $l_u l_v$ будет принимать наибольшее значение в случае, если T содержит минимально возможное число нелистовых вершин и $|l_u - l_v| \leqslant 1$. Значит, T изоморфно простому пути $P_{2k'}$, к концам которого присоединено l_u и l_v листьев соответственно. Считаем, что $l_u \geqslant l_v$, тогда $l_u = \lfloor \frac{n-2k'+1}{2} \rfloor$ и $l_v = \lfloor \frac{n-2k'}{2} \rfloor$. Теорема 1 доказана.

Таким образом, в этом разделе описаны $(i_2, 3, n)$-максимальные деревья $\widehat{T}_{2,3,n}$ и $(i_4, 5, n)$-максимальные деревья $\widehat{T}_{4,5,n}$ (см. рис. 2). Показано, что при всех допустимых значениях n такие деревья единственны с точностью до изоморфизма.

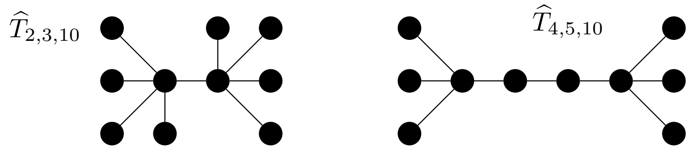

Рис. 2. Деревья $\widehat{T}_{2,3,10}$ и $\widehat{T}_{4,5,10}$

3. Случай $(i_k, 4, n)$-максимальных деревьев

Напомним, что граф $S_{4,n}$ является единственным с точностью до изоморфизма $(i_1, 4, n)$-максимальным деревом [1]. В этом разделе покажем, что при $k \in \{2, 3\}$ и $n \geqslant 53$ граф M_n является единственным $(i_k, 4, n)$-максимальным деревом.

3.1. Вариант $d = 4$, $k = 2$. Пусть центральная вершина u дерева T диаметра 4 смежна с l листьями, а также с $m \geqslant 2$ предлистовыми вершинами $u_1, \ldots, u_m$. Введём обозначение $\mathcal{L} = \prod_{i=1}^{m} \deg(u_i)$.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$i_2(T) = 1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathcal{L}}{\deg(u_i)} + (l + 1) \cdot \mathcal{L}.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что существует $\mathcal{L}$ 2-ДНМ, все элементы которых являются диаметральными листьями. Тогда найдётся $(l+1)\cdot\mathcal{L}$ 2-ДНМ, не содержащих ни одной нелистовой вершины дерева. Кроме того, для каждого $1 \leqslant i \leqslant m$ существует $\frac{\mathcal{L}}{\deg(u_i)}$ 2-ДНМ, содержащих вершину u_i, причём каждое из них не содержит других вершин из окрестности $N[u]$. Наконец, найдётся единственное 2-ДНМ $\{u\}$, содержащее центральную вершину u. Лемма 1 доказана.

Для деревьев вида $M^l_{a,b}$ имеет место равенство $\mathcal{L} = 2^a \cdot 3^b$, а значит,

$$i_2\big(M^l_{a,b}\big) = 1 + a\cdot 2^{a-1}\cdot 3^b + b\cdot 2^a\cdot 3^{b-1} + (l+1)\cdot 2^a\cdot 3^b.$$

Теорема 2. *Для всех $n \geqslant 53$ единственным $(i_2, 4, n)$-максимальным деревом является дерево M_n.*

Доказательство. Рассмотрим некоторое $(i_2, 4, n)$-максимальное дерево T и докажем по шагам, что оно совпадает с M_n.

Шаг 1. Покажем, что T имеет вид $M^l_{a,b}$. Пусть это не так. Тогда его центральная вершина u смежна хотя бы с одной вершиной u_0 степени $q_0 \geqslant 4$. Обозначим через w_1 и w_2 два произвольных листа, смежных с u_0. Через T_1 обозначим дерево, полученное удалением этих листьев из T, а через T_2 — дерево, полученное удалением вершины u_0 и всех смежных с ней листьев из T. Заменим в дереве T рёбра u_0w_1 и u_0w_2 на uw_1 и w_1w_2 и обозначим через T' получившееся дерево. Нетрудно видеть, что

$$i_2(T) = i_2(T_1) + i_2^+(T, w_1) + i_2^+(T, w_2) = i_2(T_1) + 2\cdot i_2^-(T_2, u),$$
$$i_2(T') = i_2(T_1) + i_2^+(T', w_2) + i_2^+(T', w_1) \geqslant i_2(T_1) + i_2^-(T_1, u) + 1.$$

Обозначим через w_3 произвольный лист, смежный с u_0 в T_1. Тогда

$$i_2^-(T_1, u) \geqslant (q_0 - 2)\cdot i_2^+(T_1, w_3) \geqslant (q_0 - 2)\cdot i_2^-(T_2, u),$$

откуда $i_2(T') > i_2(T)$, что противоречит максимальности T.

Шаг 2. Покажем, что T имеет вид $M_{a,b}$. Пусть это не так. Тогда T имеет вид $M^l_{a,b}$, где $l > 0$. Если при этом $a > 0$, то рассмотрим дерево $M^{l-1}_{a-1,b+1}$. Имеют место равенства

$$i_2\big(M^l_{a,b}\big) = 1 + a\cdot 2^{a-1}\cdot 3^b + b\cdot 2^a\cdot 3^{b-1} + (l+1)\cdot 2^a\cdot 3^b,$$
$$i_2\big(M^{l-1}_{a-1,b+1}\big) = 1 + (a-1)\cdot 2^{a-2}\cdot 3^{b+1} + (b+1)\cdot 2^{a-1}\cdot 3^b + l\cdot 2^{a-1}\cdot 3^{b+1}.$$

Легко проверить, что при $a, b, l \geqslant 0$ неравенство

$$i_2\big(M^{l-1}_{a-1,b+1}\big) > i_2\big(M^l_{a,b}\big)$$

равносильно неравенству $3a+2b+6l > 15$, которое верно при всех $n \geqslant 53$.

Если же $a = 0$, то T имеет вид $M_{0,b}^l$ и $i_2\big(M_{0,b}^l\big) = 1 + b\cdot 3^{b-1} + (l+1)\cdot 3^b$. Тогда при всех $b, l \geqslant 1$ имеем

$$i_2\big(M_{2,b-1}^{l-1}\big) = 1 + 4\cdot 3^{b-1} + 4\cdot(b-1)\cdot 3^{b-2} + 4\cdot l\cdot 3^{b-1} > i_2\big(M_{0,b}^l\big).$$

Таким образом, при $l > 0$ дерево $M_{a,b}^l$ не максимальное.

Шаг 3. Покажем, что T изоморфно M_n. Достаточно доказать, что при $n \geqslant 53$ и $a \geqslant 3$ верно неравенство $i_2(M_{a,b}) < i_2(M_{a-3,b+2})$. Имеем

$$i_2(M_{a,b}) = 1 + a\cdot 2^{a-1}\cdot 3^b + b\cdot 2^a\cdot 3^{b-1} + 2^a\cdot 3^b,$$

$$i_2(M_{a-3,b+2}) = 1 + (a-3)\cdot 2^{a-4}\cdot 3^{b+2} + (b+2)\cdot 2^{a-3}\cdot 3^{b+1} + 2^{a-3}\cdot 3^{b+2}.$$

Поскольку при $n \geqslant 53$ и $a \geqslant 3$ верно $3a + 2b \geqslant 40$, требуемое неравенство выполнено. Теорема 2 доказана.

Заметим, что при $n = 52$ утверждение теоремы неверно, так как

$$i_2(M_{3,15}) = i_2(M_{0,17}).$$

3.2. Вариант $d = 4$, $k = 3$. Объектом нашего изучения по-прежнему является дерево T диаметра 4 с центральной вершиной u, смежной с $l \geqslant 0$ листьями, а также с предлистовыми вершинами $u_1, \ldots, u_m$, при этом $\mathcal{L} = \prod\limits_{i=1}^{m} \deg(u_i)$.

Лемма 2. *Имеет место равенство* $i_3(T) = 1 + \deg(u) + \mathcal{L}$.

Доказательство. Ясно, что существует ровно $1 + \deg(u)$ 3-ДНМ, содержащих хотя бы одну вершину из окрестности $N[u]$. Кроме того, найдётся $\mathcal{L}$ 3-ДНМ, не содержащих ни одной вершины из $N[u]$, откуда и следует требуемое равенство. Лемма 2 доказана.

Теорема 3. *При* $n \geqslant 5$, $n \neq 7$ *единственным* $(i_3, 4, n)$*-максимальным деревом является дерево* M_n. *При* $n = 7$ *деревья* M_7 *и* $M_{3,0}$ *и только они* $(i_3, 4, n)$*-максимальны.*

Доказательство. При $5 \leqslant n \leqslant 7$ выполнение условия теоремы легко проверить перебором всех n-вершинных деревьев диаметра 4. Предположим, что при $n \geqslant 8$ найдётся $(i_3, 4, n)$-максимальное дерево T, не изоморфное M_n. Аналогично предыдущей теореме проведём доказательство по шагам.

Шаг 1. Покажем, что T имеет вид $M_{a,b}^l$. Пусть это не так. Тогда его центральная вершина u смежна с некоторой вершиной u_0 такой, что $\deg(u_0) = q_0 \geqslant 4$. Обозначим через $u_1, \ldots, u_m$ других соседей вершины u и положим $\mathcal{L}' = \prod\limits_{i=1}^{m} \deg(u_i)$. Обозначим через w_1 и w_2 два произвольных листа, смежных с u_0. Заменим в T рёбра u_0w_1 и u_0w_2 рёбрами uw_1 и w_1w_2. Обозначим через T' полученное дерево. Тогда

$$i_3(T') = 1 + (\deg(u) + 1) + 2 \cdot (q_0 - 2) \cdot \mathcal{L}' > 1 + \deg(u) + q_0 \cdot \mathcal{L}' = i_3(T);$$

противоречие с максимальностью T.

Шаг 2. Покажем, что T имеет вид $M_{a,b}$. Пусть это не так. Тогда T имеет вид $M^l_{a,b}$, где $l \geqslant 1$, т. е. вершина u смежна хотя бы с одним листом w. В этом случае $i_3^+(T, w) = 1$, поскольку все вершины дерева T находятся на расстоянии не более 3 от w. Рассмотрим некоторый диаметральный путь $w_1u_1uu_2w_2$ в T, заменим ребро uw ребром u_1w и обозначим через T' получившееся дерево. Ясно, что множество $\{w, w_2\}$ является 3-НДМ в T', откуда $i_3^+(T', w) \geqslant 2$. С другой стороны, $i_3^-(T, w) = i_3^-(T', w) = i_3(M^{l-1}_{a,b})$, откуда $i_3(T) < i_3(T')$, что противоречит максимальности T.

Шаг 3. Покажем, что T изоморфно M_n. Пусть это не так. Тогда T изоморфно дереву $M_{a,b}$, где $a \geqslant 3$. Покажем, что $i_3(M_{a,b}) < i_3(M_{a-3,b+2})$. Поскольку при $n \geqslant 8$ и $a \geqslant 3$ верно $2^{a-3} \cdot 3^b > 1$, то

$$i_3(M_{a,b}) = 1 + (a + b) + 2^a \cdot 3^b < 1 + (a + b - 1) + 2^{a-3} \cdot 3^{b+2} = i_3(M_{a-3,b+2});$$

противоречие с максимальностью T. Теорема 3 доказана.

4. Случай $(i_k, 5, n)$-максимальных деревьев

4.1. Вариант $d = 5$, $k = 2$. Обозначим через T'' дерево $M^{1,1}_{a,b,c,d'}$ с центральными вершинами u и v, которые смежны с листьями u' и v' соответственно. Обозначим через T' результат удаления листа v' из T'', а через T результат удаления листа u' из T'. Отметим, что деревья T и T' изоморфны деревьям $M_{a,b,c,d'}$ и $M'_{a,b,c,d'}$ соответственно.

Лемма 3. *Имеют место равенства*

$$i_2^-(T_u, u) = 2^a \cdot 3^b + a \cdot 2^{a-1} \cdot 3^b + b \cdot 2^a \cdot 3^{b-1},$$
$$i_2^-(T_v, v) = 2^c \cdot 3^{d'} + c \cdot 2^{c-1} \cdot 3^{d'} + d' \cdot 2^c \cdot 3^{d'-1},$$
$$i_2(T) = 2^a \cdot 3^b + 2^c \cdot 3^{d'} + i_2^-(T_u, u) \cdot i_2^-(T_v, v),$$
$$i_2(T') = i_2(T) + 2^a \cdot 3^b \cdot i_2^-(T_v, v),$$
$$i_2(T'') = i_2(T') + 2^c \cdot 3^{d'} \cdot i_2^-(T_u, u) + 2^{a+c} \cdot 3^{b+d'}.$$

Доказательство. Первые два равенства вытекают из леммы 1. Докажем третье равенство. Если некоторое 2-ДНМ I дерева T содержит его центральную вершину u (соответственно v), то все остальные вершины I являются диаметральными листьями поддерева T_v (T_u). Кроме того, для каждого 2-НДМ I_u дерева T_u и каждого 2-ДНМ I_v дерева T_v, не содержащих вершин u и v соответственно, множество $I_u \cup I_v$ является 2-ДНМ дерева T. Четвёртое равенство следует из соотношений $i_2^-(T', u') = i_2(T)$ и $i_2^+(T', u') = 2^a \cdot 3^b \cdot i_2^-(T_v, v)$. Аналогично пятое равенство вытекает из соотношений $i_2^-(T'', v') = i_2(T')$ и $i_2^+(T'', v') = 2^c \cdot 3^{d'} \cdot i_2^-(T_u, u) + 2^{a+c} \cdot 3^{b+d'}$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *При $n \geqslant 120$ каждое $(i_2, 5, n)$-максимальное дерево имеет вид $M_{a,b,c,d'}$.*

Доказательство. Предположим, что найдётся $(i_2, 5, n)$-максимальное дерево T, для которого утверждение леммы неверно. Рассмотрим четыре случая.

Случай 1. Хотя бы одна из центральных вершин T (считаем, что вершина u) смежна с вершиной u_0 степени $q_0 \geqslant 4$. В этом случае действуем аналогично шагу 1 теоремы 2. Обозначим через w_1 и w_2 два произвольных листа, смежных с u_0. Через T_1 обозначим дерево, полученное удалением этих листьев из T. Через T_2 обозначим дерево, полученное удалением вершины u_0 и всех смежных с ней листьев из T. Заменим в дереве T рёбра u_0w_1 и u_0w_2 на uw_1 и w_1w_2, обозначим через T' получившееся дерево. Нетрудно видеть, что

$$i_2(T) = i_2(T_1) + i_2^+(T, w_1) + i_2^+(T, w_2) = i_2(T_1) + 2 \cdot i_2^-(T_2, u),$$

$$i_2(T') = i_2(T_1) + i_2^+(T', w_2) + i_2^+(T', w_1) \geqslant i_2(T_1) + (q_0 - 2) \cdot i_2^-(T_2, u) + 1.$$

Таким образом, $i_2(T') > i_2(T)$, что противоречит максимальности T.

Случай 2. Хотя бы одна из центральных вершин T (считаем, что это вершина u) смежна с двумя различными листьями u' и u''. Удалим ребро uu'', добавим ребро $u'u''$ и обозначим получившееся дерево через T'. Очевидно, что $i_2^-(T, u'') = i_2^-(T', u'')$. Кроме того, любое 2-ДНМ дерева T, содержащее вершину u'', является 2-ДНМ дерева T', поскольку оно не содержит вершин u и u'. Однако множество $\{u'', v\}$ является 2-ДНМ T', но не является 2-ДНМ T, откуда $i_2^+(T', u'') > i_2^+(T, u'')$ и $i_2(T') > i_2(T)$, что противоречит максимальности T.

Случай 3. Дерево T имеет вид $M^{1,1}_{a,b,c,d'}$. Напомним, что через u и v обозначаются его центральные вершины, а через u' и v' — смежные с ними листья. Обозначим через $\widehat{T}$ результат удаления этих листьев из T. По лемме 3 имеем

$$i_2(T) = i_2(\widehat{T}) + 2^a \cdot 3^b \cdot i_2^-(\widehat{T}_v, v) + 2^c \cdot 3^{d'} \cdot i_2^-(\widehat{T}_u, u) + 2^{a+c} \cdot 3^{b+d'}.$$

Рассмотрим дерево T', полученное из дерева T заменой ребра vv' на $u'v'$. Тогда

$$i_2(T') = i_2(\widehat{T}) + i_2^+(T', v') + i_2^+(T', u') = i_2(\widehat{T}) + i_2^-(\widehat{T}, u) + 2^a \cdot 3^b \cdot i_2^-(\widehat{T}_v, v).$$

Покажем, что $i_2(T') > i_2(T)$. Предполагаем, что $n \geqslant 120$, тем самым $2 \cdot (a+c) + 3 \cdot (b+d') \geqslant 118$. В этом случае верно неравенство

$$i_2^-(\widehat{T}, u) > i_2^-(\widehat{T}_u, u) \cdot i_2^-(\widehat{T}_v, v) = 2^{a+c} \cdot 3^{b+d'} \cdot \left(1 + \frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{c}{2} + \frac{d'}{3}\right)$$

$$> 2^{a+c} \cdot 3^{b+d'} \cdot \left(2 + \frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right) = 2^c \cdot 3^{d'} \cdot i_2^-(\widehat{T}_u, u) + 2^{a+c} \cdot 3^{b+d'}.$$

Таким образом, $i_2(T) < i_2(T')$, что противоречит максимальности T.

Случай 4. Дерево T имеет вид $M'_{a,b,c,d'}$. Рассмотрим все возможные варианты и покажем, что в каждом из них T не максимально.

Вариант $b \geqslant 1$. Рассмотрим дерево $M_{a+2,b-1,c,d'}$. Имеем

$$i_2(M'_{a,b,c,d'}) = 2^a \cdot 3^b + 2^c \cdot 3^{d'} + (2^{a+1} \cdot 3^b + a \cdot 2^{a-1} \cdot 3^b + b \cdot 2^a \cdot 3^{b-1}) \cdot i_2^-(T_v, v),$$

$$i_2(M_{a+2,b-1,c,d'}) = 2^{a+2} \cdot 3^{b-1} + 2^c \cdot 3^{d'} + (2^{a+2} \cdot 3^{b-1} + (a+2) \cdot 2^{a+1} \cdot 3^{b-1} + (b-1) \cdot 2^{a+2} \cdot 3^{b-2}) \cdot i_2^-(T_v, v).$$

Тогда для всех $b \geqslant 1$ верно $i_2(M'_{a,b,c,d'}) < i_2(M_{a+2,b-1,c,d'})$.

Вариант $a \geqslant 3,\ b = 0$. Рассмотрим дерево $M_{a-1,1,c,d'}$. Имеем

$$i_2(M'_{a,0,c,d'}) = 2^a + 2^c \cdot 3^{d'} + 2^{a-2} \cdot (2a+8) \cdot i_2^-(T_v, v),$$

$$i_2(M_{a-1,1,c,d'}) = 3 \cdot 2^{a-1} + 2^c \cdot 3^{d'} + 2^{a-2} \cdot (3a+5) \cdot i_2^-(T_v, v).$$

Тогда для всех $a \geqslant 3$ верно $i_2(M'_{a,0,c,d'}) < i_2(M_{a-1,1,c,d'})$.

Вариант $a \leqslant 2,\ b = 0,\ c = 1$. Рассмотрим дерево $M'_{a+1,0,0,d'}$. Имеем

$$i_2(M'_{a,0,1,d'}) = 2^a + 2 \cdot 3^{d'} + 2^{a-1} \cdot 3^{d'-1} \cdot (a+4) \cdot (2d'+9),$$

$$i_2(M'_{a+1,0,0,d'}) = 2^{a+1} + 3^{d'} + 2^{a-1} \cdot 3^{d'-1} \cdot (2a+10) \cdot (d'+3).$$

Тогда для всех $a \leqslant 2$ и $d' \geqslant 7$ верно $i_2(M'_{a,0,1,d'}) < i_2(M'_{a+1,0,0,d'})$.

Вариант $a \leqslant 2,\ b = 0,\ c = 2$. Рассмотрим дерево $M'_{a+2,0,0,d'}$. Имеем

$$i_2(M'_{a,0,2,d'}) = 2^a + 4 \cdot 3^{d'} + 2^{a-1} \cdot 3^{d'-1} \cdot (a+4) \cdot (4d'+24),$$

$$i_2(M'_{a+2,0,0,d'}) = 2^{a+2} + 3^{d'} + 2^{a-1} \cdot 3^{d'-1} \cdot (4a+24) \cdot (d'+3).$$

Тогда для всех $a \leqslant 2$ и $d' \geqslant 7$ верно $i_2(M'_{a,0,2,d'}) < i_2(M'_{a+2,0,0,d'})$.

Вариант $a \leqslant 2,\ b = 0,\ c \geqslant 3$. Рассмотрим дерево $M'_{a,0,c-3,d'+2}$. Имеем

$$i_2(M'_{a,0,c,d'}) = 2^a + 2^c \cdot 3^{d'} + 2^{c-4} \cdot 3^{d'-1} \cdot (48 + 24c + 16d') \cdot i_2^-(T_u, u),$$

$$i_2(M'_{a,0,c-3,d'+2}) = 2^a + 2^{c-3} \cdot 3^{d'+2} + 2^{c-4} \cdot 3^{d'-1} \cdot (27c + 18d' + 9) \cdot i_2^-(T_u, u).$$

Так как $a \leqslant 2$, то $3c + 2d' \geqslant 40$, а значит, $i_2(M'_{a,0,c,d'}) > i_2(M'_{a,0,c-3,d'+2})$.

Вариант $a = 1,\ b = c = 0$. Рассмотрим дерево $M_{0,3,0,d'-2}$. Имеем

$$i_2(M'_{1,0,0,d'}) = 2 + 3^{d'} + 5 \cdot (3^{d'} + d' \cdot 3^{d'-1}),$$
$$i_2(M_{0,3,0,d'-2}) = 27 + 3^{d'-2} + 54 \cdot (3^{d'-2} + (d'-2) \cdot 3^{d'-3}).$$

Тогда для всех $d' \geqslant 12$ верно $i_2(M'_{1,0,0,d'}) < i_2(M_{0,3,0,d'-2})$.

Вариант $a = 2,\ b = c = 0$. Рассмотрим дерево $M_{1,3,0,d'-2}$. Имеем

$$i_2(M'_{2,0,0,d'}) = 4 + 3^{d'} + 12 \cdot (3^{d'} + d' \cdot 3^{d'-1}),$$
$$i_2(M_{1,3,0,d'-2}) = 54 + 3^{d'-2} + 135 \cdot (3^{d'-2} + (d'-2) \cdot 3^{d'-3}).$$

Тогда для всех $d' \geqslant 3$ верно $i_2(M'_{2,0,0,d'}) < i_2(M_{1,3,0,d'-2})$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть $(i_2, 5, n)$-максимальное дерево T имеет вид $M_{a,b,c,d'}$. Если при этом $3a + 2b \geqslant 40$, то $a \leqslant 2$. Если же $3c + 2d' \geqslant 40$, то $c \leqslant 2$.*

Доказательство. Предположим, что $3a + 2b \geqslant 40$ и $a \geqslant 3$. По лемме 3 имеют место соотношения

$$i_2(M_{a,b,c,d'}) = 2^a \cdot 3^b + 2^c \cdot 3^{d'} + 2^a \cdot 3^b \cdot \left(1 + \frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right) \cdot i_2^-(T_v, v),$$
$$i_2(M_{a-3,b+2,c,d'}) = 2^{a-3} \cdot 3^{b+2} + 2^c \cdot 3^{d'} + 2^{a-3} \cdot 3^{b+2} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right) \cdot i_2^-(T_v, v).$$

Легко проверить, что в случае $3a + 2b \geqslant 40$ имеет место неравенство $i_2(M_{a,b,c,d'}) < i_2(M_{a-3,b+2,c,d'})$, что противоречит максимальности T. Случай $3c + 2d' \geqslant 40$ рассматривается аналогично. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Если $n \geqslant 120$, то каждое $(i_2, 5, n)$-максимальное дерево имеет вид $M_{a,b,c,d'}$, при этом $|(3a + 2b) - (3c + 2d')| \leqslant 2$.*

Доказательство. По лемме 4 каждое максимальное дерево имеет вид $M_{a,b,c,d'}$. Предположим, что $3a+2b+3 \leqslant 3c+2d'$. Если $d' = 0$, то $c \leqslant 13$ по лемме 5, откуда $3a + 2b \leqslant 36$ и $n < 120$, что противоречит условию леммы. Если же $d' \geqslant 1$, то рассмотрим дерево $M_{a,b+1,c,d'-1}$. Имеем

$$i_2(M_{a,b,c,d'}) = 2^a \cdot 3^b + 2^c \cdot 3^{d'} + 2^{a+c} \cdot 3^{b+d'} \cdot \left(1 + \frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{c}{2} + \frac{d'}{3}\right),$$
$$i_2(M_{a,b+1,c,d'-1}) = 2^a \cdot 3^{b+1} + 2^c \cdot 3^{d'-1} + 2^{a+c} \cdot 3^{b+d'} \cdot \left(\frac{4}{3} + \frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{c}{2} + \frac{d'}{3}\right).$$

Из этих соотношений следует неравенство

$$i_2(M_{a,b+1,c,d'-1}) - i_2(M_{a,b,c,d'}) > \\ 2^{a+c-1} \cdot 3^{b+d'-2}(3c + 2d' - 3a - 2b - 2) - 2^{c+1} \cdot 3^{d'-1}.$$

Предполагаем, что $2a+3b+2c+3d' \geqslant 118$ и $3c+2d' \geqslant 3a+2b+3$. Тогда, как нетрудно проверить, выполнено хотя бы одно из неравенств $2^{a-2} \cdot 3^{b-1} \geqslant 1$ и $3c + 2d' \geqslant 3a + 2b + 14$, откуда $i_2(M_{a,b+1,c,d'-1}) > i_2(M_{a,b,c,d'})$, что противоречит экстремальности $M_{a,b,c,d'}$. Лемма 6 доказана.

Теорема 4. *Для всех* $n \geqslant 120$ *максимальное дерево* $\widehat{T}_{2,5,n}$ *единственно, при этом*

$$\widehat{T}_{2,5,n} = \begin{cases} M_{1,p-1,1,p-1}, & \text{если } n = 6p, \\ M_{1,p-1,0,p}, & \text{если } n = 6p+1, \\ M_{0,p,0,p}, & \text{если } n = 6p+2, \\ M_{2,p-2,0,p+1}, & \text{если } n = 6p+3, \\ M_{1,p-1,0,p+1}, & \text{если } n = 6p+4, \\ M_{0,p+1,0,p}, & \text{если } n = 6p+5. \end{cases}$$

Доказательство. Назовём дерево вида $M_{a,b,c,d'}$ *подходящим*, если выполнены условия $|(3a+2b) - (3c+2d')| \leqslant 2$ и $\max(a,c) \leqslant 2$. Покажем, что при $n \geqslant 120$ искомое дерево $\widehat{T}_{2,5,n}$ подходящее. Достаточно проверить условие $\max(a,c) \leqslant 2$. Если $3a + 2b \leqslant 39$, то $3c + 2d' \leqslant 41$ по лемме 6. Тогда $2a+3b+2c+3d' \leqslant 117$, что противоречит предположению. Случай $3c+2d' \leqslant 39$ рассматривается аналогично. Если же $\min(3a+2b, 3c+2d') \geqslant 40$, то $\max(a,c) \leqslant 2$ по лемме 5, что и требовалось. Считаем, что $c \leqslant a \leqslant 2$ и, если $a = c$, то $b \geqslant d'$ (так как деревья $M_{a,b,c,d'}$ и $M_{a,d',c,b}$ в этом случае совпадают).

Случай $n = 6p$. Здесь сумма $2a + 3b + 2c + 3d' + 2$ кратна 3, откуда $a + c = 2$. Найдутся три подходящих дерева: $M_{1,p-1,1,p-1}$, $M_{2,p-2,0,p}$ и $M_{2,p-3,0,p+1}$. Тогда

$$i_2(M_{1,p-1,1,p-1}) = 4 \cdot 3^{p-1} + (3^p + 2 \cdot (p-1) \cdot 3^{p-2})^2,$$

$$i_2(M_{2,p-2,0,p}) = 13 \cdot 3^{p-2} + (8 \cdot 3^{p-2} + 4 \cdot (p-2) \cdot 3^{p-3}) \cdot (3^p + p \cdot 3^{p-1}),$$

$$i_2(M_{2,p-3,0,p+1}) = 85 \cdot 3^{p-3} + (8 \cdot 3^{p-3} + 4 \cdot (p-3) \cdot 3^{p-4}) \cdot (4 \cdot 3^p + p \cdot 3^p).$$

Нетрудно проверить, что при всех $p \geqslant 20$ дерево $M_{1,p-1,1,p-1}$ будет единственным $(i_2, 5, 6p)$-максимальным.

Случай $n = 6p + 1$. Здесь $a + c \in \{1, 4\}$. Найдутся два подходящих дерева: $M_{1,p-1,0,p}$ и $M_{2,p-1,2,p-2}$. Нетрудно проверить, что $i_2(M_{1,p-1,0,p}) > i_2(M_{2,p-1,2,p-2})$ при $p \geqslant 20$.

Случай $n = 6p+2$. В этом случае $a+c \in \{0,3\}$. Найдутся два подходящих дерева: $M_{0,p,0,p}$ и $M_{2,p-2,1,p}$. Нетрудно проверить, что $i_2(M_{0,p,0,p}) > i_2(M_{2,p-2,1,p})$ при $p \geqslant 20$.

Случай $n = 6p+3$. Здесь $a+c = 2$, деревья $M_{1,p,1,p-1}$ и $M_{2,p-2,0,p+1}$ подходящие и нетрудно проверить, что $i_2(M_{2,p-2,0,p+1}) > i_2(M_{1,p,1,p-1})$ при $p \geqslant 20$.

Случай $n = 6p+4$. В этом случае $a+c \in \{1,4\}$. Найдутся два подходящих дерева: $M_{1,p-1,0,p+1}$ и $M_{2,p-1,2,p-1}$. Нетрудно проверить, что $i_2(M_{1,p-1,0,p+1}) > i_2(M_{2,p-1,2,p-1})$ при $p \geqslant 20$.

Случай $n = 6p+5$. Здесь $a+c \in \{0,3\}$, деревья $M_{0,p+1,0,p}$ и $M_{2,p-1,1,p}$ подходящие и нетрудно проверить, что $i_2(M_{0,p+1,0,p}) > i_2(M_{2,p-1,1,p})$ при $p \geqslant 20$. Теорема 4 доказана.

4.2. Вариант $d = 5$, $k = 3$. Объектом нашего изучения по-прежнему является дерево T диаметра 5 с центральными вершинами u и v, которые смежны с вершинами $u_1, \ldots, u_p$ и $v_1, \ldots, v_q$ соответственно. Введём обозначения $\mathcal{L}_u = \prod\limits_{i=1}^{p} \deg(u_i)$ и $\mathcal{L}_v = \prod\limits_{i=1}^{q} \deg(v_i)$.

Лемма 7. *Имеет место равенство*

$$i_3(T) = 2 + (\deg(u) - 1) \cdot \mathcal{L}_v + (\deg(v) - 1) \cdot \mathcal{L}_u + \mathcal{L}_u \cdot \mathcal{L}_v.$$

Доказательство. Ясно, что существует ровно два 3-ДНМ, содержащих хотя бы одну из центральных вершин T. Кроме того, существует $(\deg(u) - 1) \cdot \mathcal{L}_v$ 3-ДНМ, содержащих хотя бы одну из вершин $u_1, \ldots, u_p$ и $(\deg(v)-1) \cdot \mathcal{L}_u$ 3-ДНМ, содержащих хотя бы одну из вершин $v_1, \ldots, v_q$. Наконец, найдётся $\mathcal{L}_u \cdot \mathcal{L}_v$ 3-ДНМ, все элементы которых являются диаметральными листьями T. Лемма 7 доказана.

Заметим, что для дерева $M_{a,b,c,d'}$ выполнено соотношение

$$i_3(M_{a,b,c,d'}) = 2 + (a+b) \cdot 2^c \cdot 3^{d'} + (c+d') \cdot 2^a \cdot 3^b + 2^{a+c} \cdot 3^{b+d'}.$$

Лемма 8. *Каждое $(i_3, 5, n)$-максимальное дерево T имеет вид $M_{a,b,c,d'}$, при этом* $\max(a,c) \leqslant 2$.

Доказательство снова проведём по шагам.

Шаг 1. Покажем, что T имеет вид $M_{a,b,c,d'}^{p',q'}$. Пусть это не так. Тогда найдётся хотя бы одна предлистовая вершина u_0 степени $q_0 \geqslant 4$, смежная с одной из центральных вершин (считаем, что с вершиной u). Обозначим соседей u, отличных от v и u_0, через $u_1, \ldots, u_p$, а соседей v, отличных от u, через $v_1, \ldots, v_q$. Положим $\mathcal{L}'_u = \prod\limits_{i=1}^{p} \deg(u_i)$, если $p \geqslant 1$, и $\mathcal{L}'_u = 1$, если $p = 0$. Обозначим через w_1 и w_2 два произвольных листа, смежных с u_0.

Заменим в дереве T рёбра u_0w_1 и u_0w_2 рёбрами uw_1 и w_1w_2, обозначим через T' получившееся дерево. Тогда

$$i_3(T) = 2 + (\deg(u) - 1)\cdot \mathcal{L}_v + (\deg(v) - 1)\cdot q_0 \cdot \mathcal{L}'_u + q_0\cdot \mathcal{L}'_u \cdot \mathcal{L}_v,$$

$$i_3(T') = 2 + \deg(u)\cdot \mathcal{L}_v + (\deg(v) - 1)\cdot 2\cdot (q_0 - 2)\cdot \mathcal{L}'_u + 2\cdot (q_0 - 2)\cdot \mathcal{L}'_u \cdot \mathcal{L}_v.$$

Поскольку $q_0 \geqslant 4$, то $i_3(T') > i_3(T)$ и T не максимальное; противоречие.

Шаг 2. Покажем, что T имеет вид $M_{a,b,c,d'}$. Предположим, что это не так и хотя бы одна из центральных вершин (например, вершина u) смежна с листом u'. Рассмотрим в дереве T некоторый диаметральный путь $u_2u_1uvv_1v_2$. Удалим ребро uu' и добавим ребро u_1u', обозначим через T' получившееся дерево. Ясно, что $i_3^-(T, u') = i_3^-(T', u')$. Поскольку каждое 3-ДНМ дерева T, содержащее u', не содержит других вершин поддерева T_u и вершин из окрестности $N[v]$, оно является 3-ДНМ дерева T'. С другой стороны, множество $\{u', v_1\}$ не является 3-ДНМ дерева T, но является 3-ДНМ дерева T', откуда $i_3(T) < i_3(T')$; противоречие.

Шаг 3. Покажем, что $\max(a, c) \leqslant 2$. Предположим, что $a \geqslant 3$. Тогда

$$i_3(M_{a,b,c,d'}) = 2 + (a + b)\cdot 2^c \cdot 3^{d'} + (c + d')\cdot 2^a \cdot 3^b + 2^{a+c}\cdot 3^{b+d'},$$

$$\begin{aligned} i_3(M_{a-3,b+2,c,d'}) = 2 &+ (a + b - 1)\cdot 2^c \cdot 3^{d'} \\ &+ (c + d')\cdot 2^{a-3}\cdot 3^{b+2} + 2^{a+c-3}\cdot 3^{b+d'+2}. \end{aligned}$$

Ясно, что $i_3(M_{a-3,b+2,c,d'}) > i_3(M_{a,b,c,d'})$ при $a \geqslant 3$ и $\min(c, d') > 0$, что противоречит максимальности T. Случай $c \geqslant 3$ рассматривается аналогично. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Для всех* $n \geqslant 13$ *каждое* $(i_3, 5, n)$*−максимальное дерево имеет вид* $M_{a,b,c,d'}$*, при этом либо* $\min(a, c) = 0$ *и* $\min(b, d') = 1$*, либо* $\min(b, d') = 0$.

Доказательство. Предположим, что некоторое максимальное дерево T имеет вид $M_{a,b,c,d'}$ и при этом либо $\min(a, c) = 0$ и $\min(b, d') \geqslant 2$, либо $\min(a, b, c, d') \geqslant 1$ и $\max(a, b, c, d') \geqslant 2$. Введём обозначение

$$j_3(M_{a,b,c,d'}) = i_3(M_{a,b,c,d'}) - 2 - 2^{a+c}\cdot 3^{b+d'} = (a + b)\cdot 2^c \cdot 3^{d'} + (c + d')\cdot 2^a \cdot 3^b.$$

По предположению деревья $M_{a,b-1,c,d'+1}$ и $M_{a,b+1,c,d'-1}$ существуют и имеют диаметр 5. При этом, так как дерево $M_{a,b,c,d'}$ максимально, имеем

$$i_3(M_{a,b,c,d'}) \geqslant \max(i_3(M_{a,b-1,c,d'+1}),\ i_3(M_{a,b+1,c,d'-1})).$$

Тем самым $j_3(M_{a,b,c,d'}) \geqslant \max(j_3(M_{a,b-1,c,d'+1}),\ j_3(M_{a,b+1,c,d'-1}))$ и выполняется система неравенств

$$\begin{cases} 2^c 3^{d'}(a + b) + 2^a 3^b (c + d') \geqslant 2^c 3^{d'+1}(a + b - 1) + 2^a 3^{b-1}(c + d' + 1), \\ 2^c 3^{d'}(a + b) + 2^a 3^b (c + d') \geqslant 2^c 3^{d'-1}(a + b + 1) + 2^a 3^{b+1}(c + d' - 1). \end{cases}$$

Преобразуя эту систему, получаем

$$\begin{cases}(2c+2d'-1)\cdot 2^a\cdot 3^{b-1}\geqslant(2a+2b-3)\cdot 2^c\cdot 3^{d'},\\(2a+2b-1)\cdot 2^c\cdot 3^{d'-1}\geqslant(2c+2d'-3)\cdot 2^a\cdot 3^b,\end{cases}$$

откуда следует неравенство

$$\frac{2a+2b-1}{2c+2d'-3}\geqslant 9\cdot\frac{2a+2b-3}{2c+2d'-1}.$$

Поскольку $\min(a+b,c+d')\geqslant 2$, данное неравенство имеет решения лишь в случае $a+b=c+d'=2$. По предположению это возможно только при $a=c=0$ и $b=d'=2$. В этом случае $i_3(M_{0,2,0,2})<i_3(M_{2,0,1,2})$. Таким образом, каждое дерево $M_{a,b,c,d'}$, не удовлетворяющее условию леммы, не максимальное, что и требовалось. Лемма 9 доказана.

Теорема 5. *Для всех $n\geqslant 11$ максимальное дерево $\widehat{T}_{3,5,n}$ единственно, при этом*

$$\widehat{T}_{3,5,n}=\begin{cases}M_{2,0,0,q-2}, & \text{если } n=3q,\\M_{1,0,0,q-1}, & \text{если } n=3q+1,\\M_{2,0,1,q-2}, & \text{если } n=3q+2.\end{cases}$$

Доказательство. Назовём максимальное дерево *подходящим*, если оно имеет вид $M_{a,b,c,d'}$, где $c\leqslant a\leqslant 2$ и либо $\min(a,c)=0$ и $\min(b,d')=1$, либо $\min(b,d')=0$. По леммам 8 и 9 при $n\geqslant 13$ искомое дерево $\widehat{T}_{3,5,n}$ подходящее. Считаем, что если $a=c$, то $b\leqslant d'$ (так как деревья $M_{a,b,c,d'}$ и $M_{a,d',c,b}$ в этом случае совпадают).

Случай $n=3q$.

Вариант $q=4$. По лемме 4 каждое $(i_3,5,12)$-максимальное дерево имеет вид $M_{a,b,c,d'}$, где $\max(a,c)\leqslant 2$. Поскольку число вершин дерева чётно, то $b+d'\in\{0,2\}$, откуда $b+d'=a+c=2$. Так как

$$i_3(M_{2,0,0,2})>\max(i_3(M_{1,1,1,1}),\,i_3(M_{1,0,1,2}),\,i_3(M_{2,1,0,1})),$$

дерево $M_{2,0,0,2}$ единственное $(i_3,5,12)$-максимальное.

Вариант $q\geqslant 5$. Если $a=c=1$, то единственным подходящим деревом является $M_{1,0,1,q-2}$, при этом $i_3(M_{1,0,1,q-2})=2\cdot 3^{q-1}+2q$. Если же $a=2$ и $c=0$, то найдутся три подходящих дерева: $M_{2,0,0,q-2}$, $M_{2,q-3,0,1}$ и $M_{2,1,0,q-3}$. При этом $i_3(M_{2,0,0,q-2})=2\cdot 3^{q-1}+4q-6$, $i_3(M_{2,q-3,0,1})=16\cdot 3^{q-3}+2q$ и $i_3(M_{2,1,0,q-3})=5\cdot 3^{q-2}+12q-34$. Поскольку при всех $q\geqslant 5$ верно неравенство

$$i_3(M_{2,0,0,q-2})>\max(i_3(M_{1,0,1,q-2}),\,i_3(M_{2,q-3,0,1}),\,i_3(M_{2,1,0,q-3})),$$

дерево $M_{2,0,0,q-2}$ единственное $(i_3,5,3q)$-максимальное.

Случай $n=3q+1$. Если $a=1$ и $c=0$, то найдутся три подходящих дерева: $M_{1,0,0,q-1}$, $M_{1,q-2,0,1}$ и $M_{1,1,0,q-2}$, при этом $i_3(M_{1,0,0,q-1})=3^q+2q$,

$i_3(M_{1,q-2,0,1}) = 8 \cdot 3^{q-2} + 2q$ и $i_3(M_{1,1,0,q-2}) = 8 \cdot 3^{q-2} + 6q - 10$. Если же $a = c = 2$, то единственным подходящим деревом является дерево $M_{2,0,2,q-3}$, при этом $i_3(M_{2,0,2,q-3}) = 8 \cdot 3^{q-2} + 4q - 2$. Поскольку при $q \geqslant 4$ верно

$$i_3(M_{1,0,0,q-1}) > \max(i_3(M_{1,q-2,0,1}),\, i_3(M_{1,1,0,q-2}),\, i_3(M_{2,0,2,q-3})),$$

дерево $M_{1,0,0,q-1}$ единственное $(i_3, 5, 3q+1)$-максимальное.

Случай $n = 3q + 2$.

Вариант $q = 3$. По лемме 8 каждое $(i_3, 5, 11)$-максимальное дерево имеет вид $M_{a,b,c,d'}$, где $\max(a, c) \leqslant 2$. Поскольку число вершин дерева нечётно, то $b + d' \in \{1, 3\}$, тогда $a + c \in \{0, 3\}$. Имеем

$$i_3(M_{2,0,1,1}) > \max(i_3(M_{0,1,0,2}),\, i_3(M_{2,1,1,0})),$$

а значит, дерево $M_{2,0,1,1}$ единственное $(i_3, 5, 11)$-максимальное.

Вариант $q \geqslant 4$. Если $a = c = 0$, то единственным подходящим деревом является $M_{0,1,0,q-1}$, при этом $i_3(M_{0,1,0,q-1}) = 4 \cdot 3^{q-1} + 3q - 1$. Если же $a = 2$ и $c = 1$, то найдутся два подходящих дерева: $M_{2,q-2,1,0}$ и $M_{2,0,1,q-2}$, при этом $i_3(M_{2,q-2,1,0}) = 4 \cdot 3^{q-1} + 2q + 2$ и $i_3(M_{2,0,1,q-2}) = 4 \cdot 3^{q-1} + 4q - 2$. Поскольку

$$i_3(M_{2,0,1,q-2}) > \max(i_3(M_{0,1,0,q-1}),\, i_3(M_{2,q-2,1,0})),$$

дерево $M_{2,0,1,q-2}$ единственное $(i_3, 5, 3q+2)$-максимальное. Теорема 5 доказана.

Заметим, что при $n = 10$ условие теоремы не выполнено, поскольку $i_3(M_{2,0,2,0}) > i_3(M_{1,0,0,2})$.

5. Случай (i_k, d, n)-минимальных деревьев

Напомним, что задача описания (i_1, d, n)-минимальных деревьев остаётся открытой при $d \geqslant 8$. В этом разделе для всех $1 < k < d < n$ построено (i_k, d, n)-минимальное дерево $T_{k,d,n}$ и указаны все тройки (k, d, n), при которых оно единственно. Кроме того, описаны все минимальные деревья в случае $1 < k < d \leqslant 5$.

Из определения k-ДНМ следует, что при $n, k \geqslant 1$ верно равенство

$$i_k(P_n) = i_k(P_{n-1}) + i_k(P_{n-k-1}),$$

где $i_k(P_{-s}) = 1$ при $0 \leqslant s \leqslant k$. Заметим, что $i_k(P_n) = n + 1$ при $0 \leqslant n \leqslant k + 1$.

Лемма 10. *Пусть $k \geqslant 2$ и $1 \leqslant m \leqslant n - 1$. Тогда*

$$i_k(P_n) < i_k(P_m) \cdot i_k(P_{n-m}).$$

Доказательство. Индукция по n при фиксированном $k \geqslant 2$. База индукции $n \leqslant k+1$ очевидна. По предположению индукции имеют место соотношения

$$\frac{i_k(P_{n-1})}{i_k(P_{n-m-1})} \leqslant i_k(P_m), \quad \frac{i_k(P_{n-k-1})}{i_k(P_{n-m-k-1})} \leqslant i_k(P_m).$$

Первое неравенство переходит в равенство лишь в случае $m = n-1$, но тогда, очевидно, второе неравенство строгое. Таким образом, верно строгое неравенство

$$\frac{i_k(P_n)}{i_k(P_{n-m})} = \frac{i_k(P_{n-1}) + i_k(P_{n-k-1})}{i_k(P_{n-m-1}) + i_k(P_{n-m-k-1})} < i_k(P_m).$$

Лемма 10 доказана.

Обозначим через $T_{k,d,n}$ дерево, полученное из пути P_{d+1} присоединением $n-d-1$ листьев либо к его k-ой от конца вершине, если $d > 2k-2$, либо к его центральной вершине, если $d \leqslant 2k-2$. Определим дерево $T'_{k,d,n}$ следующим образом. Если d чётно, то $T'_{k,d,n}$ получается из пути P_{d+1} присоединением $n-d-1$ листьев к одной из вершин, смежной с центральной вершиной пути (см. рис. 3). Если же d нечётно, то $T'_{k,d,n}$ получается из пути P_{d+1} присоединением листа к одной из его центральных вершин и $n-d-2$ листьев — к другой из его центральных вершин.

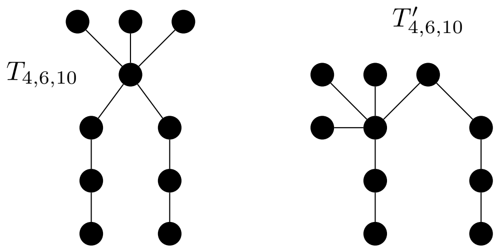

Рис. 3. Деревья $T_{4,6,10}$ и $T'_{4,6,10}$

Теорема 6. *При всех значениях $1 < k < d < n$ дерево $T_{k,d,n}$ будет (i_k, d, n)-минимальным. Кроме того, оно единственное минимальное, если и только если выполнено одно из следующих условий:*

1) $n = d+1$;
2) $n = d+2$ *и* $d \geqslant 2k-3$;
3) $n \geqslant d+3$ *и либо* $d = 2k-2$, *либо* $d \geqslant 3k-3$.

Доказательство. Рассмотрим три случая.

Случай $n = d{+}1$. Единственным $(d{+}1)$-вершинным деревом диаметра d является путь P_{d+1}, совпадающий с деревом $T_{k,d,d+1}$. Таким образом, это единственное $(i_k, d, d+1)$-минимальное дерево.

Случай $n \geqslant d + 3$. Рассмотрим два варианта.

Вариант $d \leqslant 2k - 2$. По определению дерева $T_{k,d,n}$ все его листья, не лежащие на диаметральном пути, смежны с одной из центральных вершин. Тогда каждый из этих листьев находится на расстоянии не более k от всех остальных вершин дерева и

$$i_k(T_{k,d,n}) = i_k(P_{d+1}) + (n - d - 1).$$

Докажем, что $i_k(T) \geqslant i_k(T_{k,d,n})$ для любого n-вершинного дерева T диаметра d. Зафиксируем некоторый диаметральный путь P в дереве T. Ясно, что T содержит ровно $i_k(P_{d+1})$ k-ДНМ, содержащих только вершины P и не менее чем $n - d - 1$ k-ДНМ, содержащих хотя бы одну вершину не из P, откуда сразу же вытекает требуемое неравенство.

Если $d = 2k - 2$, то равенство $i_k(T) = i_k(T_{k,d,n})$ возможно лишь в том случае, когда все вершины T, не принадлежащие P, являются листьями, смежными с центральной вершиной T. Поскольку при чётном значении d центральная вершина единственна, дерево $T_{k,d,n}$ единственное минимальное. Если же $d < 2k - 2$, то $i_k(T_{k,d,n}) = i_k(T'_{k,d,n})$, причём деревья $T_{k,d,n}$ и $T'_{k,d,n}$ не совпадают. Значит, дерево $T_{k,d,n}$ не единственное минимальное.

Вариант $d > 2k - 2$. Поскольку для каждого листа дерева $T_{k,d,n}$, не лежащего на его диаметральном пути, вершины на расстоянии более k от него образуют путь P_{d-2k+2}, имеет место равенство

$$i_k(T'_{k,d,n}) = i_k(P_{d+1}) + (n - d - 1) \cdot i_k(P_{d-2k+2}).$$

Докажем, что $i_k(T) \geqslant i_k(T_{k,d,n})$ для любого n-вершинного дерева T диаметра d. Зафиксируем в T некоторый диаметральный путь P. Для любой вершины u, не лежащей на P, найдётся хотя бы $d - 2k + 2$ вершин P на расстоянии более k от u. При этом такие вершины образуют либо один простой путь, либо два простых пути. Тогда по лемме 10 имеем

$$\begin{aligned} i_k(T) \geqslant i_k(P_{d+1}) + (n - d - 1) \cdot \min_{0 \leqslant m \leqslant d-2k+2} (i_k(P_m) \cdot i_k(P_{d-2k+2-m})) \\ = i_k(P_{d+1}) + (n - d - 1) \cdot i_k(P_{d-2k+2}) = i_k(T_{k,d,n}). \end{aligned}$$

Равенство $i_k(T) = i_k(T_{k,d,n})$ означает, что каждая вершина T, не лежащая на P, является листом, находящимся на расстоянии k от одного из концов P, и все такие листья находятся на расстоянии не более k

друг от друга. При $d > 2k-2$ путь P содержит две различные вершины, находящиеся на расстоянии $k-1$ от одного из его концов, обозначим их через v_1 и v_2. Тогда каждый лист T, не лежащий на P, смежен с одной из этих вершин. При этом если T не изоморфно $T_{k,d,n}$, то $\min(\deg(v_1), \deg(v_2)) \geqslant 3$. Поскольку расстояние между v_1 и v_2 не превосходит $k-2$, путь P содержит не более $3k-3$ вершин и T имеет диаметр не более $3k-4$. Значит, при $d \geqslant 3k-3$ дерево $T_{k,d,n}$ единственно, что и требовалось.

Случай $n = d+2$.

Вариант $d > 2k-2$. Из рассуждений предыдущего случая следует, что единственное $(i_k, d, d+2)$-минимальное дерево получается из пути P_{d+1} присоединением листа к его k-ой от конца вершине. Значит, оно совпадает с деревом $T_{k,d,d+2}$.

Вариант $d \in \{2k-2, 2k-3\}$. Ясно, что $i_k(T_{k,d,d+2}) = i_k(P_{d+1}) + 1$. Рассмотрим произвольное $(d+2)$-вершинное дерево T диаметра d. Оно состоит из диаметрального пути P_{d+1} и некоторого листа u, не лежащего на нём. При этом если T не совпадает с $T_{k,d,d+2}$, то лист u не смежен с центральной вершиной пути, откуда $i_k^+(T, u) > 1$ и $i_k(T) > i_k(T_{k,d,d+2})$, тогда дерево $T_{k,d,d+2}$ единственное минимальное.

Вариант $d < 2k-3$. Обозначим через $T''_{k,d,d+2}$ дерево, полученное из пути P_d присоединением листа к его вершине, которая смежна с одной из центральных вершин. Тогда $i_k(T_{k,d,d+2}) = i_k(T''_{k,d,d+2}) = i_k(P_{d+1}) + 1$ и дерево $T_{k,d,d+2}$ минимально, но не единственно. Теорема 6 доказана.

Дадим явное описание всех (i_k, d, n)-минимальных деревьев в случае $1 < k < d \leqslant 5$.

Следствие 1. *Для всех $n \geqslant 4$ единственным $(i_2, 3, n)$-минимальным деревом является граф $S_{3,n}$, при этом $i_2(S_{3,n}) = 2n-2$.*

Следствие 2. *Для всех $n \geqslant 5$ верны следующие утверждения.*

1) *Единственным $(i_2, 4, n)$-минимальным деревом является граф $S_{4,n}$, при этом $i_2(S_{4,n}) = 3n-6$.*

2) *Единственным $(i_3, 4, n)$-минимальным деревом является $M_{2,0}^{n-5}$, при этом $i_3(M_{2,0}^{n-5}) = n+2$.*

Следствие 3. *Для всех $n \geqslant 6$ верны следующие утверждения.*

1) *Единственным $(i_2, 5, n)$-минимальным деревом является граф $S_{5,n}$, при этом $i_2(S_{5,n}) = 4n-11$.*

2) *При $k \in \{3, 4\}$ каждое $(i_k, 5, n)$-максимальное дерево имеет вид $M_{1,0,1,0}^{p,q}$, где $p+q = n-6$, при этом $i_3\big(M_{1,0,1,0}^{p,q}\big) = 2n-2$ и $i_4\big(M_{1,0,1,0}^{p,q}\big) = n+2$.*

Отметим, что число попарно неизоморфных $(i_k, 5, n)$-максимальных деревьев при $k \in \{3, 4\}$ растёт линейно от n (см. рис. 4).

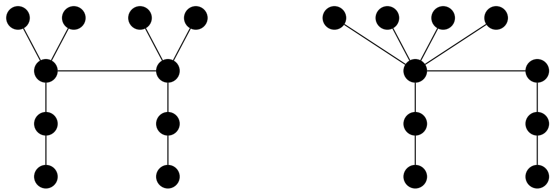

Рис. 4. Два попарно не изоморфных $(i_3, 5, 10)$-минимальных дерева

ЛИТЕРАТУРА

1. **Pedersen A. S., Vestergaard P. D.** An upper bound on the number of independent sets in a tree // Ars Comb. 2007. V. 84. P. 85–96.
2. **Frendrup A., Pedersen A. S., Sapozhenko A. A., Vestergaard P. D.** Merrifield–Simmons index and minimum number of independent sets in short trees // Ars Comb. 2013. V. 111. P. 85–95.
3. **Дайняк А. Б.** О числе независимых множеств в деревьях фиксированного диаметра // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 2. С. 61–73.
4. **Талецкий Д. С.** Деревья диаметра 6 и 7 с минимальным количеством независимых множеств // Мат. заметки. 2021. Т. 109, № 2. С. 276–289.
5. **Atkinson G., Frieze A.** On the b-independence number of sparse random graphs // Comb. Probab. Comput. 2004. V. 13, No. 3. P. 295–309.
6. **Abiad A., Cioabă S. M., Tait M.** Spectral bounds for the k-independence number of a graph // Linear Algebra Appl. 2016. V. 510. P. 160–170.
7. **Bouchou A., Blidia M.** On the k-independence number in graphs // Australas. J. Comb. 2014. V. 59, No. 2. P. 311–322.
8. **O S., Shi Y., Taoqiu Z.** Sharp upper bounds on the k-independence number in graphs with given minimum and maximum degree // Graphs Comb. 2020. V. 37. P. 393–408.
9. **Li Z., Wu B.** The k-independence number of t-connected graphs // Appl. Math. Comput. 2021. V. 409. Article 126412.
10. **Jou M. J., Lin J. J.** Characterization of the distance-k independent dominating sets of the n-path // Int. J. Contemp. Math. Sci. 2018. V. 13, No. 6. P. 231–238.

Талецкий Дмитрий Сергеевич

Статья поступила
20 октября 2022 г.

После доработки —
2 мая 2023 г.

Принята к публикации
11 мая 2023 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
July–September 2023. Vol. 30, No. 3. P. 97–117

UDC 519.17 DOI 10.33048/daio.2023.30.755

ON TREES WITH GIVEN DIAMETER AND EXTREMAL NUMBER OF k-DISTANCE INDEPENDENT SETS

D. S. Taletskii[1,2]

[1] National Research University "Higher School of Economics",
25/12 Bolshaya Pechyorskaya Street, 603155 Nizhny Novgorod, Russia

[2] Lobachevsky Nizhny Novgorod State University,
23 Gagarin Avenue, 603950 Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: `dmitalmail@gmail.com`

Abstract. The set of vertices of a graph is called *k-distance independent* if the distance between any two of its vertices is greater than some integer $k \geqslant 1$. In this paper we describe n-vertex trees with a given diameter d which have maximum and minimum possible number of k-distance independent sets among all such trees. The maximum problem is solved for the case $1 < k < d \leqslant 5$. The minimum problem is significantly more simple and is solved for all $1 < k < d < n$. Illustr. 4, bibliogr. 8.

Keywords: tree, independent set, k-distance independent set, diameter.

REFERENCES

1. **A. S. Pedersen, P. D. Vestergaard,** An upper bound on the number of independent sets in a tree, *Ars Combin.* **84**, 85–96 (2007).
2. **A. Frendrup, A. S. Pedersen, A. A. Sapozhenko, P. D. Vestergaard,** Merrifield-Simmons index and minimum number of independent sets in short trees, *Ars Combin.* **111**, 85–95 (2013).
3. **A. B. Dainiak,** On the number of independent sets in the trees of a fixed diameter, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **16** (2), 61–73 (2009). [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **4**, 163–171 (2010)].
4. **D. S. Taletskii,** Trees of Diameter 6 and 7 with Minimum Number of Independent Sets, *Matem. Zametki.* **109** (2), 276–289 (2021). [Russian] [*Math. Notes.* **109**, 280–291 (2021)].

This research is supported by the Russian Science Foundation (Project 21–11–00194).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **17** (3) (2023).

5. **G. Atkinson, A. Frieze,** On the b-independence number of sparse random graphs, *Comb. Probab. Comput.* **13** (3), 295–309 (2004).
6. **A. Abiad, S. M. Cioabă, M. Tait,** Spectral bounds for the k-independence number of a graph, *Linear Algebra Appl.* **510**, 160–170 (2016).
7. **A. Bouchou, M. Blidia,** On the k-independence number in graphs, *Australas. J. Comb.* **59** (2), 311–322 (2014).
8. **S. O, Y. Shi, Z. Taoqiu,** Sharp upper bounds on the k-independence number in graphs with given minimum and maximum degree, *Graphs Combin.* **37**, 393–408 (2020).
9. **Z. Li, B. Wu,** The k-independence number of t-connected graphs, *Appl. Math. Comput.* **409**, Article 126412 (2021).
10. **M.-J. Jou, J.-J. Lin,** Characterization of the Distance-k Independent Dominating Sets of the n-Path, *Int. J. Contemp. Math. Sci.* **13** (6), 231–238 (2018).

Dmitrii S. Taletskii

Received October 20, 2022
Revised May 2, 2023
Accepted May 11, 2023