БИГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРА В ИЕРАРХИЯХ DR И DZ В ПРИБЛИЖЕНИИ ДО РОДА ОДИН

Оскар Брауэр, Александр Буряк

Аннотация. В недавней работе, по заданной однородной когомологической теории поля (КогТП) Росси, Шадрин и второй автор предложили простую формулу для скобки на пространстве локальных функционалов, которая гипотетически задаёт вторую гамильтонову структуру для DR-иерархии, ассоциированной с КогТП. В данной статье мы доказываем эту гипотезу в приближении до рода 1 и связываем эту скобку со второй пуассоновой скобкой иерархии Дубровина–Жанга явным преобразованием Миуры.

1. Введение

Появление интегрируемых систем уравнений в частных производных в теории пересечений на пространствах модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ стабильных алгебраических кривых рода g с n отмеченными точками было впервые описано теоремой Виттена–Концевича [22, 18], которая утверждает, что производящий ряд интегралов по пространству $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ от мономов из пси-классов (первых классов Черна тавтологических линейных расслоений) контролируется специальным решением иерархии Кортевега–де Фриза. Были предложены различные версии гипотезы Виттена (две наиболее известные касаются теории Громова–Виттена пространства $\mathbb{CP}^1$ [15, 21] и r-спинорной теории [23, 16]), прежде чем было понято, что интегрируемые системы появляются в гораздо более общем контексте, где центральную роль роль играет понятие *когомологической теории поля* (КогТП). Когомологическими теориями поля называются системы когомологических классов на пространствах модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, которые согласованы с естественными морфизмами между пространствами модулей. Они были введены Концевичем и Маниным в работе [19] для того, чтобы аксиоматизировать свойства классов Громова–Виттена заданного целевого многообразия. *Коррелятором* когомологической теории поля называется интеграл по пространству $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ от монома из пси-классов, умноженного на класс когомологий, содержащийся в КогТП.

В работе [13] Дубровин и Жанг построили гамильтонову иерархию, контролирующую корреляторы произвольной КогТП в приближении до рода 1 и доказали полиномиальность гамильтонианов и скобки Пуассона. Более того, в случае однородной КогТП они наделили иерархию полиномиальной бигамильтоновой структурой (также в приближении до рода 1). В последующей статье [14] Дубровин и Жанг предложили конструкцию бигамильтоновой иерархии, называемой теперь *иерархией Дубровина–Жанга* (DZ-иерархией) или *иерархией топологического типа*, контролирующей корреляторы (во всех родах) произвольной полупростой однородной КогТП. Однако, полиномиальность гамильтонианов и двух скобок Пуассона была оставлена в качестве открытой проблемы.

В статье [7] авторы обобщили конструкцию DZ-иерархии на произвольную, не обязательно полупростую, КогТП и доказали полиномиальность гамильтонианов и скобки Пуассона в полупростом случае (более простое доказательство было получено в работе [6]). В случае однородной КогТП иерархия наделена второй гамильтоновой структурой, полиномиальность которой в полупростом случае была недавно доказана в работе [20]. В общем, не обязательно полупростом, случае полиномиальность гамильтонианов и обеих пуассоновых скобок остаётся открытой проблемой.

В работе [1] была предложена новая конструкция гамильтоновой иерархии, ассоциированной с произвольной, не обязательно полупростой, КогТП. Эта конструкция также основана на теории пересечений на пространстве $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, но использует другие тавтологические классы, в особенности, *цикл двойных ветвлений* (DR-цикл) (подходящую компактификацию множества гладких кривых, множество помеченных точек которых является носителем главного дивизора), что объясняет, почему эта иерархия была названа *DR-иерархией*. По конструкции, гамильтонианы DR-иерархии полиномиальны, а скобка Пуассона очень проста, более того, в противоположность скобке Пуассона DZ-иерархии, она не зависит существенным образом от КогТП, с которой мы стартовали. Две иерархии совпадают в бездисперсионном (в роде 0) пределе, и по гипотезе из статьи [1], названной *гипотезой о DR/DZ эквивалентности*, они связаны преобразованием Миуры, которое было полностью описано в работе [2]. Несмотря на недоказанность, гипотеза о DR/DZ эквивалентности имеет большое количество подтверждений и проверок (см., например, [8, 4, 2, 3, 5, 11]). В частности, гипотеза о DR/DZ эквивалентности доказана в приближении до рода 1 [2].

Замечание 1.1. Формально говоря, условие полупростоты присутствует в формулировке теоремы 8.4 в статье [2], утверждающей, что гипотеза о DR/DZ эквивалентности верна в приближении до рода 1. Однако, это условие нигде не используется в доказательстве. Таким образом, гипотеза о DR/DZ эквивалентности верна для произвольной КогТП в приближении до рода 1.

В статье [9], стартуя с произвольной однородной КогТП, авторы предложили простую формулу для скобки на пространстве локальных функционалов и выдвинули гипотезу, что она пуассонова и задаёт вторую гамильтонову структуру для DR-иерархии. Эти (гипотетически) пуассоновы скобки зависят от заданной однородной КогТП замечательно явным образом. В данной статье мы доказываем гипотезу из работы [9] в приближении до рода 1. Более того, мы изучаем связь со второй пуассоновой скобкой DZ-иерархии. Тот факт, что гамильтонианы и первые скобки Пуассона DR- и DZ-иерархий связаны преобразованием Миуры, описанным в статье [2], был доказан в работе [2] в приближении до рода 1. Здесь же мы проверяем, что это преобразование Миуры также связывает вторые скобки Пуассона (в приближении до рода 1).

Обозначения и соглашения.

- Мы будем следовать соглашению Эйнштейна о суммировании по повторяющимся верхним и нижним греческим индексам.
- Тогда, когда это не приводит к путанице, мы будем использовать символ $*$ для обозначения любого значения верхнего или нижнего индекса в подходящем диапазоне.
- Для топологического пространства X обозначим через $H^*(X)$ кольцо когомологий пространства X с коэффициентами в поле $\mathbb{C}$.
- Для целого числа $n \geq 1$ обозначим $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$.

Благодарности. Работа О. Б. была поддержана грантом “Becas CONACYT para estudios de Doctoradoen el extranjero” (номер 2020-000000-01EXTF-00096), предоставленным мексиканским правительством. Работа А. Б. финансировалась в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

2. Когомологические теории поля

Обозначим через $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ пространство модулей Делиня–Мамфорда стабильных алгебраических кривых рода g с n отмеченными точками, $g \geq 0$, $n \geq 0$, $2g - 2 + n > 0$. Отметим, что $\overline{\mathcal{M}}_{0,3} = \mathrm{pt}$, и поэтому мы будет отождествлять $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0,3}) = \mathbb{C}$. Напомним следующую систему стандартных отображений между этими пространствами:

- $\pi\colon \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ – это отображение, забывающее последнюю отмеченную точку.

- $\mathrm{gl}_{g_1,I_1;g_2,I_2}\colon \overline{\mathcal{M}}_{g_1,n_1+1}\times\overline{\mathcal{M}}_{g_2,n_2+1}\to\overline{\mathcal{M}}_{g_1+g_2,n_1+n_2}$ – это склеивающее отображение, которое отождествляет последние отмеченные точки на кривых родов g_1 и g_2 и превращает их в точку простого самопересечения. Множества I_1 и I_2 мощностей n_1 и n_2, $I_1\sqcup I_2=[n_1+n_2]$, отслеживают перенумерацию оставшихся отмеченных точек.
- $\mathrm{gl}^{\mathrm{irr}}_{g,n+2}\colon \overline{\mathcal{M}}_{g,n+2}\to\overline{\mathcal{M}}_{g+1,n}$ – это склеивающее отображение, которое отождествляет последние две отмеченные точки и превращает их в точку простого самопересечения.

Пусть V – конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ размерности N с выделенным вектором $e\in V$, называемым *единицей*, и симметричной невырожденной билинейной формой $(\cdot,\cdot)$ на V, называемой *метрикой*. Мы фиксируем базис $e_1,\ldots,e_N$ в V и обозначаем через $\eta=(\eta_{\alpha\beta})$ матрицу метрики в этом базисе, $\eta_{\alpha\beta}:=(e_\alpha,e_\beta)$, а также обозначаем через A_α координаты вектора e в этом базисе, $e=A^\alpha e_\alpha$. Как обычно, через $\eta^{\alpha\beta}$ мы обозначаем элементы обратной матрицы, $(\eta^{\alpha\beta}):=(\eta_{\alpha\beta})^{-1}$.

Определение 2.1 ([19])**.** *Когомологической теорией поля* (КогТП) называется система линейных отображений $c_{g,n}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$, $2g-2+n>0$, такая, что выполняются следующие аксиомы:

1. Отображения $c_{g,n}$ являются эквивариантными по отношению к S_n-действию, переставляющему n копий пространства V в $V^{\otimes n}$ и n отмеченных точек на кривых из пространства $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, соответственно;
2. $\pi^*c_{g,n}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i})=c_{g,n+1}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}\otimes e)$ и $c_{0,3}(e_{\alpha_1}\otimes e_{\alpha_2}\otimes e)=\eta_{\alpha_1\alpha_2}$;
3. $\mathrm{gl}^*_{g_1,I_1;g_2,I_2}c_{g_1+g_2,n_1+n_2}(\otimes_{i=1}^{n_1+n_2}e_{\alpha_i})=c_{g_1,n_1+1}(\otimes_{i\in I_1}e_{\alpha_i}\otimes e_\mu)\otimes c_{g_2,n_2+1}(\otimes_{i\in I_2}e_{\alpha_i}\otimes e_\nu)\eta^{\mu\nu}$;
4. $(\mathrm{gl}^{\mathrm{irr}}_{g,n+2})^*c_{g+1,n}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i})=c_{g,n+2}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}\otimes e_\mu\otimes e_\nu)\eta^{\mu\nu}$.

Предположим теперь, что пространство V – градуированное, и что базис $e_1,\ldots,e_N$ является однородным, $\deg e_\alpha=q_\alpha$, $\alpha=1,\ldots,N$. Предположим также, что $\deg e=0$. Обозначим через $\mathrm{Deg}\colon H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\to H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ оператор, действующий на пространстве $H^i(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ умножением на $\frac{i}{2}$.

Определение 2.2. Когомологическая теория поля $\{c_{g,n}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ называется *однородной*, или *конформной*, если существуют константы r^α, $\alpha=1,\ldots,N$, и δ такие, что

$$\mathrm{Deg}\,c_{g,n}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i})+\pi_*c_{g,n+1}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}\otimes r^\gamma e_\gamma)=\left(\sum_{i=1}^n q_{\alpha_i}+\delta(g-1)\right)c_{g,n}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}). \tag{2.1}$$

Константа δ называется *конформной размерностью* нашей КогТП.

Для произвольной однородной КогТП введём формальный степенной ряд

$$F=F(t^1,\ldots,t^N):=\sum_{n\geq 3}\frac{1}{n!}\sum_{1\leq\alpha_1,\ldots,\alpha_n\leq N}\left(\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}}c_{0,n}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i})\right)\prod_{i=1}^n t^{\alpha_i}$$

и определим $C^\alpha_{\beta\gamma}:=\eta^{\alpha\nu}\frac{\partial^3F}{\partial t^\nu\partial t^\beta\partial t^\gamma}$. Структурные константы $C^\alpha_{\beta\gamma}$ задают формальное семейство коммутативных ассоциативных алгебр с единицей $\frac{\partial}{\partial t^{1\!\!1}}:=A^\nu\frac{\partial}{\partial t^\nu}$, и, более того,

$$((1-q_\alpha)t^\alpha+r^\alpha)\frac{\partial F}{\partial t^\alpha}=(3-\delta)F+\frac{1}{2}A_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta,\quad \text{где}\quad A_{\alpha\beta}:=r^\mu c_{0,3}(e_\alpha\otimes e_\beta\otimes e_\mu),$$

что означает, что формальный ряд F определяет структуру однородного многообразия Дубровина–Фробениуса [12] на формальной окрестности точки 0 в V с эйлеровым полем, заданным равенством $E=E^\alpha\frac{\partial}{\partial t^\alpha}:=((1-q_\alpha)t^\alpha+r^\alpha)\frac{\partial}{\partial t^\alpha}$. В частности, мы имеем следующие свойства:

$$C^\alpha_{\beta\gamma}C^\gamma_{\delta\theta}=C^\alpha_{\delta\gamma}C^\gamma_{\beta\theta},\qquad (\mu_\alpha+\mu_\beta)\eta_{\alpha\beta}=0,$$

где $\mu_\alpha:=q_\alpha-\frac{\delta}{2}$.

Соглашение 2.3. Мы будем систематически поднимать и опускать индексы в тензорах, используя метрику η. Например, $C^{\alpha\beta}_{\gamma} := \eta^{\alpha\nu} C^{\beta}_{\nu\gamma}$.

3. DZ- и DR-иерархии

3.1. **Дифференциальные многочлены, операторы Пуассона и гамильтоновы иерархии.** Пусть $u^1, \dots, u^N$ – формальные переменные. Кратко напомним основные понятия и обозначения в формальной теории эволюционных уравнений в частных производных с одной пространственной переменной (и отсылаем читателя, например, к работе [9] за деталями):

- Формальным переменным u^α мы сопоставляем формальные переменные u^α_d, где $d \geq 0$, и вводим кольцо *дифференциальных многочленов* $\mathcal{A}_u := \mathbb{C}[[u^*]][u^*_{\geq 1}]$ (в работе [9] оно обозначается через $\mathcal{A}^0_u$). Мы отождествляем $u^\alpha_0 = u^\alpha$, а также обозначаем $u^\alpha_x := u^\alpha_1$, $u^\alpha_{xx} := u^\alpha_2, \dots$.
- Пространство $\Lambda_u := \mathcal{A}_u / (\mathbb{C} \oplus \operatorname{Im} \partial_x)$ называется пространством *локальных функционалов* (в работе [9] оно обозначается через Λ^0_u).
- $\mathcal{A}_{u;d} \subset \mathcal{A}_u$ и $\Lambda_{u;d} \subset \Lambda_u$ – это однородные компоненты (дифференциальной) степени d, где $\deg u^\alpha_i := i$.
- Расширенные пространства дифференциальных многочленов и локальных функционалов определяются как $\widehat{\mathcal{A}}_u := \mathcal{A}_u[[\varepsilon]]$ и $\widehat{\Lambda}_u := \Lambda_u[[\varepsilon]]$. Обозначим через $\widehat{\mathcal{A}}_{u;k} \subset \widehat{\mathcal{A}}_u$ и $\widehat{\Lambda}_{u;k} \subset \widehat{\Lambda}_u$ подпространства степени k, где $\deg \varepsilon := -1$.
- Произвольному элементу $f \in \widehat{\mathcal{A}}_u$ мы сопоставляем последовательность дифференциальных операторов $L^k_\alpha(f) := \sum_{i \geq k} \binom{i}{k} \frac{\partial f}{\partial u^\alpha_i} \partial^{i-k}_x$, $\alpha = 1, \dots, N$, $k \geq 0$. Мы используем обозначение $L_\alpha(f) := L^0_\alpha(f)$.
- По заданной $N \times N$ матрице $K = (K^{\mu\nu})$ из дифференциальных операторов вида $K^{\mu\nu} = \sum_{j \geq 0} K^{\mu\nu}_j \partial^j_x = \sum_{l,j \geq 0} \varepsilon^l K^{[l],\mu\nu}_j \partial^j_x$, где $K^{[l],\mu\nu}_j \in \mathcal{A}_{u;l-j+1}$, зададим скобку степени 1 на пространстве $\widehat{\Lambda}_u$ равенством $\{\overline{f}, \overline{g}\}_K := \int \left(\frac{\delta \overline{f}}{\delta u^\mu} K^{\mu\nu} \frac{\delta \overline{g}}{\delta u^\nu} \right) dx$.
- Оператор K называется *пуассоновым*, если скобка $\{\cdot,\cdot\}_K$ является кососимметричной и удовлетворяет тождеству Якоби. Обозначим пространство пуассоновых операторов через $\mathcal{PO}_u$.
- Два пуассоновых оператора K_1 и K_2 называются *согласованными*, если линейная комбинация $K_2 - \lambda K_1$ является пуассоновым оператором для любого $\lambda \in \mathbb{C}$.
- *Преобразование Миуры* – это замена переменных $u^\alpha \mapsto \widetilde{u}^\alpha(u^*_*, \varepsilon)$ вида $\widetilde{u}^\alpha(u^*_*, \varepsilon) = u^\alpha + \varepsilon f^\alpha(u^*_*, \varepsilon)$, где $f^\alpha \in \widehat{\mathcal{A}}_{u;1}$. Мы будум обозначать пуассонов оператор K, переписанный в новых переменных $\widetilde{u}^\alpha$, через $K_{\widetilde{u}}$.
- Для скалярного оператора $A = \sum_m A_m \partial^m_x$, $A_m \in \mathcal{A}_u$ (сумма является конечной), обозначим $A^\dagger := \sum_m (-\partial_x)^m \circ A_m$.
- Для матричного оператора $K = (K^{\alpha\beta})$, $K^{\alpha\beta} = \sum_m K^{\alpha\beta}_m \partial^m_x$, $K^{\alpha\beta}_m \in \mathcal{A}_u$ (сумма является конечной), обозначим $K^\dagger = (K^{\dagger;\alpha\beta})$, где $K^{\dagger;\alpha\beta} := \sum_m (-\partial_x)^m \circ K^{\beta\alpha}_m$.

Определение 3.1. *Гамильтоновой иерархией* уравнений в частных производных называется система вида

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial \tau_i} = K^{\alpha\mu} \frac{\delta \overline{h}_i}{\delta u^\mu}, \quad 1 \leq \alpha \leq N, \quad i \geq 1,$$

где $\overline{h}_i \in \widehat{\Lambda}_{u;0}$, $K = (K^{\mu\nu})$ является пуассоновым оператором, и выполняется $\{\overline{h}_i, \overline{h}_j\}_K = 0$, $i, j \geq 1$. Локальные функционалы $\overline{h}_i$ называются *гамильтонианами*.

Определение 3.2. Гамильтонова иерархия вида

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t^\beta_q} = K_1^{\alpha\mu}\frac{\delta\overline{h}_{\beta,q}}{\delta u^\mu}, \quad 1\le\alpha,\beta\le N, \quad q\ge 0, \tag{3.1}$$

оснащённая дополнительно N линейно независимыми элементами Казимира $\overline{h}_{\alpha,-1}$, $1\le\alpha\le N$, пуассоновой скобки $\{\cdot,\cdot\}_{K_1}$, называется *бигамильтоновой*, если она наделена пуассоновым оператором K_2, согласованным с оператором K_1, и таким, что выполняется соотношение

$$\{\cdot,\overline{h}_{\alpha,i-1}\}_{K_2} = \sum_{j=0}^{i} R^{j,\beta}_{i,\alpha}\{\cdot,\overline{h}_{\beta,i-j}\}_{K_1}, \quad 1\le\alpha\le N, \quad i\ge 0, \tag{3.2}$$

где $R^j_i = (R^{j,\beta}_{i,\alpha})$, $0\le j\le i$ – это константные $N\times N$ матрицы. Соотношение (3.2) называется *бигамильтоновой рекурсией.*

3.2. **DR-иерархия.** Обозначим через $\psi_i\in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ первый класс Черна линейного расслоения над пространством $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, образованного кокасательными прямыми к iой отмеченной точке на стабильных кривых. Обозначим через $\mathbb{E}$ расслоение Ходжа ранга g над пространством $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, чьи слои являются пространствами голоморфных 1-форм на стабильных кривых. Введём обозначение $\lambda_j := c_j(\mathbb{E})\in H^{2j}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$.

Для любых $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{Z}$, $\sum_{i=1}^n a_i = 0$, обозначим через $\mathrm{DR}_g(a_1,\ldots,a_n)\in H^{2g}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ *цикл двойных ветвлений* (DR-цикл). Мы отсылаем читателя, например, к работе [10] за определением DR-цикла на пространстве $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, которое основано на понятии стабильного относительного отображения в $\mathbb{CP}^1$. Если не все кратности a_i равны нулю, то можно думать о классе $\mathrm{DR}_g(a_1,\ldots,a_n)$, как о двойственном по Пуанкаре к классу компактификации в $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ множества помеченных гладких кривых $(C;p_1,\ldots,p_n)$, удовлетворяющих свойству $\mathcal{O}_C\left(\sum_{i=1}^n a_ip_i\right)\cong\mathcal{O}_C$.

Ключевым свойством DR-цикла является полиномиальная зависимость интеграла

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}}\lambda_g\mathrm{DR}_g\left(-\sum a_i,a_1,\ldots,a_n\right)\theta$$

от чисел $a_1,\ldots,a_n$ для любого класса когомологий $\theta\in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$, при этом получающий многочлен является однородным степени $2g$ (см., например, [1]). Таким образом, для любой заданной КогТП $\left\{c_{g,n}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\right\}$ мы можем определить дифференциальные многочлены $g_{\alpha,d}\in\widehat{\mathcal{A}}_{u;0}$, $1\le\alpha\le N$, $d\ge 0$, равенством:

$$\begin{aligned} g_{\alpha,d} := \sum_{\substack{g,n\ge 0\\ 2g-1+n>0}}\frac{\varepsilon^{2g}}{n!}\sum_{\substack{b_1,\ldots,b_n\ge 0\\ b_1+\ldots+b_n=2g}} u^{\alpha_1}_{b_1}\ldots u^{\alpha_n}_{b_n}\times\\ \times\operatorname{Coef}_{a_1^{b_1}\ldots a_n^{b_n}}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}}\mathrm{DR}_g\left(-\sum a_i,a_1,\ldots,a_n\right)\lambda_g\psi_1^d c_{g,n+1}(e_\alpha\otimes\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}). \end{aligned}$$

В работе [1] доказано, что локальные функционалы $\overline{g}_{\alpha,d} := \int g_{\alpha,d}dx$ попарно коммутируют по отношению к скобке Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_{\eta^{-1}\partial_x}$.

Определение 3.3. Гамильтонова иерархия

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t^\beta_q} = \eta^{\alpha\mu}\partial_x\frac{\delta\overline{g}_{\beta,q}}{\delta u^\mu}, \quad 1\le\alpha,\beta\le N, \quad q\ge 0,$$

называется *DR-иерархией.*

Оснастим DR-иерархию следующими N линейно независимыми элементами Казимира скобки Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_{\eta^{-1}\partial_x}$: $\overline{g}_{\alpha,-1} := \int \eta_{\alpha\beta}u^\beta dx$, $1 \le \alpha \le N$. Другим важным объектом, связанным с DR-иерархией, является локальный функционал $\overline{g} \in \widehat{\Lambda}_{u;0}$, заданный соотношением [1, раздел 4.2.5]

$$\overline{g}_{1\!\!1,1} = (D-2)\overline{g}, \quad \text{где} \quad D := \sum_{n\ge 0}(n+1)u^\alpha_n \frac{\partial}{\partial u^\alpha_n},$$

и $\overline{g}_{1\!\!1,1} := A^\alpha \overline{g}_{\alpha,1}$. Заметим, что $\frac{\delta \overline{g}}{\delta u^\alpha} = g_{\alpha,0}$. Также, локальный функционал $\overline{g}$ имеет следующее явное выражение в приближении до ε^2 [2, лемма 8.1]:

$$\overline{g} = \int f dx - \frac{\varepsilon^2}{48}\int c^\theta_{\theta\xi}c^\xi_{\alpha\beta}u^\alpha_x u^\beta_x dx + O(\varepsilon^4), \tag{3.3}$$

где $f := F|_{t^*=u^*}$ и $c^\alpha_{\beta\gamma} := C^\alpha_{\beta\gamma}\big|_{t^*=u^*}$.

Гипотеза 1 ([9]). *Рассмотрим произвольную однородную КогТП и соответствующую DR-иерархию. Тогда верны следующие утверждения.*

(1) Оператор $K_2^{\mathrm{DR}} = \left(K_2^{\mathrm{DR};\alpha\beta}\right)$, *заданный равенством*

$$K_2^{\mathrm{DR};\alpha\beta} := \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}\bigg(\left(\frac12-\mu_\beta\right)\partial_x\circ L_\nu(g_{\mu,0}) + \left(\frac12-\mu_\alpha\right)L_\nu(g_{\mu,0})\circ\partial_x \\ + A_{\mu\nu}\partial_x + \partial_x\circ L^1_\nu(g_{\mu,0})\circ\partial_x\bigg), \tag{3.4}$$

является пуассоновым и согласован с оператором $K_1^{\mathrm{DR}} := \eta^{-1}\partial_x$.

(2) Скобки Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_{K_2^{\mathrm{DR}}}$ *и* $\{\cdot,\cdot\}_{K_1^{\mathrm{DR}}}$ *задают бигамильтонову структуру DR-иерархии со следующей бигамильтоновой рекурсией:*

$$\left\{\cdot,\overline{g}_{\alpha,d}\right\}_{K_2^{\mathrm{DR}}} = \left(d+\frac32+\mu_\alpha\right)\left\{\cdot,\overline{g}_{\alpha,d+1}\right\}_{K_1^{\mathrm{DR}}} + A^\beta_\alpha\left\{\cdot,\overline{g}_{\beta,d}\right\}_{K_1^{\mathrm{DR}}}, \quad d\ge -1,$$

где $A^\alpha_\beta := \eta^{\alpha\nu}A_{\nu\beta}$.

3.3. **DZ-иерархия.** Рассмотрим произвольную однородную КогТП $\{c_{g,n}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$. Пусть t^α_a, $1\le\alpha\le N$, $a\ge 0$ – формальные переменные, где мы отождествляем $t^\alpha_0 = t^\alpha$. *Потенциал* нашей КогТП определяется как

$$\mathcal{F}(t^*_*,\varepsilon) = \sum_{g\ge 0}\varepsilon^{2g}\mathcal{F}_g(t^*_*) := \sum_{\substack{g,n\ge 0\\ 2g-2+n>0}}\frac{\varepsilon^{2g}}{n!}\sum_{\substack{1\le\alpha_1,\ldots,\alpha_n\le N\\ d_1,\ldots,d_n\ge 0}}\left(\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} c_{g,n}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i})\prod_{i=1}^n\psi_i^{d_i}\right)\prod_{i=1}^n t^{\alpha_i}_{d_i}\in\mathbb{C}[[t^*_*,\varepsilon]],$$

и введём также формальные ряды $w^{\mathrm{top};\alpha} := \eta^{\alpha\mu}\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial t^\mu_0\partial t^{1\!\!1}_0}$ и $w^{\mathrm{top};\alpha}_n := \frac{\partial^n}{(\partial t^{1\!\!1}_0)^n}w^{\mathrm{top};\alpha}$, где $1\le\alpha\le N$ и $n\ge 0$.

Гипотеза 2 ([14]). *Рассмотрим кольцо* $\widehat{\mathcal{A}}_w$ *дифференциальных многочленов от переменных* $w^1,\ldots,w^N$.

(1) Для любых $1\le\alpha,\beta\le N$ *и* $a,b\ge 0$ *существует дифференциальный многочлен* $\Omega_{\alpha,a;\beta,b}\in\widehat{\mathcal{A}}_{w;0}$ *такой, что*

$$\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial t^\alpha_a\partial t^\beta_b} = \Omega_{\alpha,a;\beta,b}\big|_{w^\gamma_n = w^{\mathrm{top};\gamma}_n}. \tag{3.5}$$

(2) *Существует пуассонов оператор* $K_1^{\mathrm{DZ}} = \left(K_1^{\mathrm{DZ};\alpha\beta}\right)$, *для которого локальные функционалы* $\overline{h}_{\alpha,-1} := \int \eta_{\alpha\nu} w^\nu dx$ *являются элементами Казимира, такой, что*

$$\eta^{\alpha\mu}\partial_x\Omega_{\mu,0;\beta,b} = K_1^{\mathrm{DZ};\alpha\nu}\frac{\delta\overline{h}_{\beta,b}}{\delta w^\nu}, \tag{3.6}$$

где $\overline{h}_{\beta,b} := \int \Omega_{1\!\!1,0;\beta,b+1}dx$, $1\le\alpha,\beta\le N$, $b\ge 0$.

(3) *Существует пуассонов оператор* $K_2^{\mathrm{DZ}} = \left(K_2^{\mathrm{DZ};\alpha\beta}\right)$ *такой, что выполняются следующие соотношения:*

(3.7)
$$\left\{\cdot,\overline{h}_{\alpha,d}\right\}_{K_2^{\mathrm{DZ}}} = \left(d+\frac{3}{2}+\mu_\alpha\right)\left\{\cdot,\overline{h}_{\alpha,d+1}\right\}_{K_1^{\mathrm{DZ}}} + A^\beta_\alpha\left\{\cdot,\overline{h}_{\beta,d}\right\}_{K_1^{\mathrm{DZ}}}, \quad 1\le\alpha\le N, \quad d\ge -1.$$

Если дифференциальные многочлены из первой части гипотезы существуют, то они единственны (см., например, [2, раздел 7.1]). Более того, если пуассоновы операторы из второй и третьей частей существуют, то они также единственны (см., например, [7, раздел 6]). Из второй части гипотезы следует, что локальные функционалы $\overline{h}_{\alpha,d}$ попарно коммутируют по отношению к скобке $\{\cdot,\cdot\}_{K_1^{\mathrm{DZ}}}$. Итоговая бигамильтонова иерархия (если гипотеза верна для заданной КогТП)

$$\frac{\partial w^\alpha}{\partial t^\beta_q} = K_1^{\mathrm{DZ};\alpha\mu}\frac{\delta\overline{h}_{\beta,q}}{\delta u^\mu}, \quad 1\le\alpha,\beta\le N, \quad q\ge 0,$$

называется *иерархией Дубровина–Жанга* (DZ-иерархией). Набор из N формальных рядов $w^{\mathrm{top};\alpha}$ является решением иерархии, где мы отождествляем производные ∂_x и $\frac{\partial}{\partial t^{1\!\!1}_0}$. Это решение называется *топологическим решением.*

Гипотеза 2 доказана в приближении до рода 1 [13]. В частности,

$$\begin{aligned}
\Omega_{\alpha,a;\beta,b} &= \left.\frac{\partial^2\mathcal{F}_0}{\partial t^\alpha_a\partial t^\beta_b}\right|_{t^\gamma_c=\delta_{c,0}w^\gamma} + O(\varepsilon^2),\\
K_1^{\mathrm{DZ};\alpha\beta} &= \eta^{\alpha\beta}\partial_x + O(\varepsilon^2),\\
K_2^{\mathrm{DZ};\alpha\beta} &= \left(E^\gamma C^{\alpha\beta}_\gamma\right)\big|_{t^*=w^*}\partial_x + \left(\frac{1}{2}-\mu_\beta\right)\left(C^{\alpha\beta}_\gamma\right)\big|_{t^*=w^*}w^\gamma_x + O(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Части 1 и 2 гипотезы доказаны для произвольной полупростой, не обязательно однородной, КогТП [7] (существенно упрощённое доказательство части 2 представлено в работе [6]). Часть 3 гипотезы доказана в полупростом случае [20].

3.4. **Гипотеза о DR/DZ эквивалентности.** Опять рассмотрим произвольную полупростую КогТП.

Нормальные координаты DR-иерархии определяются как $\widetilde{u}^\alpha(u^*_*,\varepsilon) := \eta^{\alpha\mu}\frac{\delta\overline{g}_{\mu,0}}{\delta u^{1\!\!1}}$.

В работе [2, предложение 7.2] авторы доказали, что существует единственный дифференциальный многочлен $\mathcal{P}\in\widehat{\mathcal{A}}_{w;-2}$ такой, что степенной ряд $\mathcal{F}^{\mathrm{red}}\in\mathbb{C}[[t^*_*,\varepsilon]]$, определённый равенством $\mathcal{F}^{\mathrm{red}} := \mathcal{F} + \mathcal{P}|_{w^\gamma_n = w^{\mathrm{top};\gamma}_n}$, удовлетворяет следующему свойству зануления:

$$\mathrm{Coef}_{\varepsilon^{2g}}\left.\frac{\partial^n\mathcal{F}^{\mathrm{red}}}{\partial t^{\alpha_1}_{d_1}\dots\partial t^{\alpha_n}_{d_n}}\right|_{t^*_*=0} = 0, \quad \text{если} \quad \sum_{i=1}^n d_i \le 2g-2. \tag{3.8}$$

Дифференциальный многочлен $\mathcal{P}$ имеет следующий вид: $\mathcal{P} = -\varepsilon^2 G(w^1,\dots,w^N) + O(\varepsilon^4)$, где $G(t^1,\dots,t^N) := \mathcal{F}_1|_{t^*_{\ge 1}=0}$. Степенной ряд $\mathcal{F}^{\mathrm{red}}$ называется *приведённым потенциалом* нашей КогТП.

Свяжем переменные $\widetilde{u}^\alpha$ с переменными w^α следующим преобразованием Миуры: $\widetilde{u}^\alpha(w^*_*,\varepsilon) := w^\alpha + \eta^{\alpha\nu}\partial_x\{\mathcal{P},\overline{h}_{\nu,0}\}_{K_1^{\rm DZ}}$.

Гипотеза 3 ([2] и [9])**.** *В предположении, что гипотезы 1 и 2 верны, DR- и DZ-иерархии, вместе с бигамильтоновыми структурами, совпадают, если переписать их в координатах $\widetilde{u}^\alpha$.*

Основным нашим результатом является следующая теорема.

Theorem 3.4. *Гипотезы 1 и 3 верны в приближении до рода* 1.

Доказательство будет дано в разделе 5. Вместе с гипотезой 2, которая была доказана в приближении до рода 1 в работе [13], теорема полностью проясняет бигамальтоновы структуры DR- и DZ-иерархий, а также их связь, в приближении до рода 1 для произвольной однородной КогТП.

4. Расширение пространства дифференциальных многочленов допустимыми рациональными функциями

Перед тем, как доказывать теорему 3.4, сформулируем несколько технических лемм.

Гипотеза 2 на данный момент не доказана, но её более слабая версия верна, если мы расширим пространство дифференциальных многочленов. Следуя статье [3, раздел 7.3], рассмотрим формальные переменные $v^1,\ldots,v^N$, и для $d\in\mathbb{Z}$ обозначим через $\mathcal{A}^{\rm rt}_{v;d}$ векторное пространство выражений вида

$$\sum_{i\geq m}\frac{P_i(v^*_*)}{(v^1_x)^i}, \tag{4.1}$$

где $m\in\mathbb{Z}$, $P_i\in\mathcal{A}_{v;d+i}$ и $\frac{\partial P_i}{\partial v^1_x}=0$. Введём обозначение $\mathcal{A}^{\rm rt}_v := \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}}\mathcal{A}^{\rm rt}_{v;d}$. Определим также расширенное пространство $\widehat{\mathcal{A}}^{\rm rt}_v := \mathcal{A}^{\rm rt}_v[[\varepsilon]]$.

Рациональная функция (4.1) называется *допустимой*, если существует неотрицательная константа C такая, что $\frac{\partial P_i}{\partial v^\alpha_k}=0$ для всех $k>C$. Подпространство допустимых фунций в пространстве $\mathcal{A}^{\rm rt}_v$ будет обозначаться через $\mathcal{A}^{\rm rt,t}_v\subset\mathcal{A}^{\rm rt}_v$. Введём также расширенное пространство $\widehat{\mathcal{A}}^{\rm rt,t}_v := \mathcal{A}^{\rm rt,t}_v[[\varepsilon]]$. *Рациональное преобразование Миуры* – это замена переменных $v^\alpha\mapsto\widetilde{v}^\alpha(v^*_*,\varepsilon)$ вида $\widetilde{v}^\alpha(v^*_*,\varepsilon)=v^\alpha+\varepsilon f^\alpha(v^*_*,\varepsilon)$, где $f^\alpha\in\widehat{\mathcal{A}}^{\rm rt,t}_{v;1}$.

Определим формальные степенные ряды $v^{{\rm top};\alpha} := \eta^{\alpha\mu}\frac{\partial^2\mathcal{F}_0}{\partial t^\mu_0\partial t^{1\!\!1}_0}$ и $v^{{\rm top};\alpha}_n := \frac{\partial^n}{(\partial t^{1\!\!1}_0)^n}v^{{\rm top};\alpha}$. Заметим, что отображение $\widehat{\mathcal{A}}^{{\rm rt},t}_v\to\mathbb{C}[[t^*_*,\varepsilon]]$, заданное равнством

$$\widehat{\mathcal{A}}^{{\rm rt},t}_v\ni f\mapsto f|_{v^\gamma_c=v^{{\rm top};\gamma}_c}\in\mathbb{C}[[t^*_*,\varepsilon]],$$

является инъективным [3, раздел 7.3]. Из работы [3, предложение 7.6] следует, что существует единственная допустимая рациональная функция $w^\alpha(v^*_*,\varepsilon)\in\widehat{\mathcal{A}}^{{\rm rt},t}_{v;0}$ такая, что $w^\alpha(v^{{\rm top};*}_*,\varepsilon)=w^{{\rm top};\alpha}$. Мы также имеем $w^\alpha(v^*_*,\varepsilon)-v^\alpha\in{\rm Im}\,\partial_x$ (см., например, [7, доказательство леммы 20]). Заметим, что существует единственная допустимая рациональная функция $\Omega_{\alpha,a;\beta,b}\in\widehat{\mathcal{A}}^{\rm rt,t}_{w;0}$ такая, что выполняется равенство (3.5), что может быть доказано таким же образом, как и предложение 7.6 в статье [3].

Что касается пуассоновых операторов, рассмотрим более общие операторы вида $K^{\mu\nu}=\sum_{j\geq0}K^{\mu\nu}_j\partial^j_x$, где $K^{\mu\nu}_j\in\widehat{\mathcal{A}}^{\rm rt,t}_{w;-j+1}$. Мы будет обозначать пространство таких пуассоновых операторов через $\mathcal{PO}^{\rm rt}_w$. Обозначим через $K^{\rm DZ}_1,K^{\rm DZ}_2\in\mathcal{PO}^{\rm rt}_w$ пуассоновы операторы, полученные из операторов

$$\eta^{\alpha\beta}\partial_x\quad\text{и}\quad\left(E^\gamma C^{\alpha\beta}_\gamma\right)\big|_{t^*=v^*}\partial_x+\left(\frac{1}{2}-\mu_\beta\right)\left(C^{\alpha\beta}_\gamma\right)\big|_{t^*=v^*}v^\gamma_x,$$

соответственно, рациональным преобразованием Миуры $v^\alpha \mapsto w^\alpha(v^*_*, \varepsilon)$. Работая с таким определением, соотношения (3.6) и (3.7) являются верными (см., например, [3, раздел 7.3]).

Таким образом, эквивалентно переформулируя, гипотеза 2 говорит, что $\Omega_{\alpha,a;\beta,b} \in \widehat{\mathcal{A}}_{w;0}$ и $K_1^{\mathrm{DZ}}, K_2^{\mathrm{DZ}} \in \mathcal{PO}_w$.

Лемма 4.1. *Рассмотрим пуассонов оператор $K \in \mathcal{PO}_v^{\mathrm{rt}}$ и рациональное преобразование Миуры $v^\alpha \mapsto \widetilde{v}^\alpha(v^*_*, \varepsilon)$ такие, что $\widetilde{v}^\alpha(v^*_*, \varepsilon) - v^\alpha \in \operatorname{Im}\partial_x$. Тогда мы имеем равенство $K^{\alpha\beta}_{\widetilde{v};0} = \sum_{m\ge 0} \frac{\partial \widetilde{v}^\alpha}{\partial v^\rho_m}\partial_x^m K_0^{\rho\beta}$.*

Доказательство. Проведём вычисление

$$
\begin{aligned}
K^{\alpha\beta}_{\widetilde{v};0} &= \operatorname{Coef}_{\partial_x^0} K^{\alpha\beta}_{\widetilde{v}} = \operatorname{Coef}_{\partial_x^0}\left(\sum_{m,n\ge 0} \frac{\partial \widetilde{v}^\alpha}{\partial v^\rho_m}\partial_x^m \circ K^{\rho\theta} \circ (-\partial_x)^n \circ \frac{\partial \widetilde{v}^\beta}{\partial v^\theta_n}\right) = \\
&= \operatorname{Coef}_{\partial_x^0}\left(\sum_{m\ge 0} \frac{\partial \widetilde{v}^\alpha}{\partial v^\rho_m}\partial_x^m \circ K^{\rho\theta} \circ \underbrace{\sum_{n\ge 0}(-\partial_x)^n \frac{\partial \widetilde{v}^\beta}{\partial v^\theta_n}}_{=\frac{\delta \widetilde{v}^\beta}{\delta v^\theta} = \delta^\beta_\theta}\right) = \operatorname{Coef}_{\partial_x^0}\left(\sum_{m\ge 0} \frac{\partial \widetilde{v}^\alpha}{\partial v^\rho_m}\partial_x^m \circ K^{\rho\beta}\right) = \\
&= \sum_{m\ge 0} \frac{\partial \widetilde{v}^\alpha}{\partial v^\rho_m}\partial_x^m K_0^{\rho\beta}.
\end{aligned}
$$

□

Лемма 4.2. *Мы имеем равенство $K^{\mathrm{DZ};\alpha\beta}_{2;0} = \left(\frac{1}{2} - \mu_\beta\right)\eta^{\alpha\theta}\eta^{\beta\nu}\partial_x\Omega_{\theta,0;\nu,0}$.*

Доказательство. По лемме 4.1, мы имеем $K^{\mathrm{DZ};\alpha\beta}_{2;0} = \left(\frac{1}{2} - \mu_\beta\right)\sum_{m\ge 0} \frac{\partial w^\alpha}{\partial v^\rho_m}\partial_x^m \left(\left(C^{\rho\beta}_\gamma\right)\big|_{t^*=v^*} v^\gamma_x\right)$. Заметим, что $\left(\left(C^{\rho\beta}_\gamma\right)\big|_{t^*=v^*} v^\gamma_x\right)\Big|_{v^*_*=v^{\mathrm{top};*}_*} = \eta^{\beta\nu}\frac{\partial v^{\mathrm{top};\rho}}{\partial t^\nu_0}$. Таким образом,

$$
\sum_{m\ge 0} \frac{\partial w^\alpha}{\partial v^\rho_m}\partial_x^m \left(\left(C^{\rho\beta}_\gamma\right)\big|_{t^*=v^*} v^\gamma_x\right)\Bigg|_{v^*_*=v^{\mathrm{top};*}_*} = \eta^{\beta\nu}\frac{\partial w^{\mathrm{top};\alpha}}{\partial t^\nu_0} = \eta^{\alpha\theta}\eta^{\beta\nu}\partial_x\Omega_{\theta,0;\nu,0}\big|_{v^*_*=v^{\mathrm{top};*}_*},
$$

из чего следует, что $\sum_{m\ge 0} \frac{\partial w^\alpha}{\partial v^\rho_m}\partial_x^m \left(\left(C^{\rho\beta}_\gamma\right)\big|_{t^*=v^*} v^\gamma_x\right) = \eta^{\alpha\theta}\eta^{\beta\nu}\partial_x\Omega_{\theta,0;\nu,0}$, что и требовалось. □

Замечание 4.3. Из леммы, в частности, следует, что константный член оператора K_2^{DZ} является дифференциальным полиномом, если $\Omega_{\theta,0;\nu,0}$ является дифференциальным полиномом, что верно в полупростом случае. Это было также замечено в работе [17, теорема 4.11].

Лемма 4.4. *Мы имеем равенство $K^{\mathrm{DR};\alpha\beta}_{2;0} = \left(\frac{1}{2} - \mu_\beta\right)\eta^{\alpha\theta}\eta^{\beta\nu}\partial_x\frac{\delta \overline{g}_{\nu,0}}{\delta u^\theta}$.*

Доказательство. Утверждение напрямую следует из определения (3.4). □

5. Доказательство теоремы 3.4

Если мы исключим из рассмотрения операторы $K_2^{\rm DZ}$ и $K_2^{\rm DR}$, то тот факт, что DZ-иерархия и DR-иерархия совпадают в координатах $\widetilde{u}^\alpha$ в приближении до рода 1, был уже доказан в статье [2, теорема 8.4] (см. также замечание 1.1). Таким образом, достаточно доказать, что $K_{2;\widetilde{u}}^{\rm DZ}=K_{2;\widetilde{u}}^{\rm DR}+O(\varepsilon^4)$. Так как мы знаем, что $K_{2;\widetilde{u}}^{{\rm DZ};[0]}=K_{2;\widetilde{u}}^{{\rm DR};[0]}$ [9, предложение 2.1], остаётся проверить, что

$$K^{{\rm DZ};[2]}_{2;\widetilde{u};l}=K^{{\rm DR};[2]}_{2;\widetilde{u};l}\quad\text{для}\quad l=0,1,2,3. \tag{5.1}$$

Разобьём доказательство на несколько шагов.

__Шаг 1__. Проверим равенство (5.1) для $l=2$ и $l=3$. Мы это сделаем прямым вычислением.

Мы будем использовать обозначения $\partial_\alpha:=\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ и

$$c^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}:=\partial_\delta c^{\alpha\beta}_\gamma,\qquad c^{\alpha\beta}_{\gamma\delta\theta}:=\partial_\theta c^{\alpha\beta}_{\gamma\delta},\qquad e^\gamma:=E^\gamma|_{t^*=u^*}=(1-q_\gamma)u^\gamma+r^\gamma,\qquad g^{\alpha\beta}=e^\gamma c^{\alpha\beta}_\gamma.$$

В работе [13, теорема 2] авторы получили следующие формулы:

$$\begin{aligned}
K^{{\rm DZ};[2],\alpha\beta}_{2;\widetilde{u};3}&=\left.h^{\alpha\beta}\right|_{u^*=\widetilde{u}^*},\\
K^{{\rm DZ};[2],\alpha\beta}_{2;\widetilde{u};2}&=\left.\left(\frac{3}{2}\partial_\gamma h^{\alpha\beta}+\frac{1}{24}\left(\frac{3}{2}-\mu_\beta\right)c^{\alpha\nu}_\gamma c^{\beta\mu}_{\nu\mu}-\frac{1}{24}\left(\frac{3}{2}-\mu_\alpha\right)c^{\beta\nu}_\gamma c^{\alpha\mu}_{\nu\mu}\right)\right|_{u^*=\widetilde{u}^*}\widetilde{u}^\gamma_x,
\end{aligned}$$

где

$$h^{\alpha\beta}=\frac{1}{12}\left(\partial_\nu\left(g^{\mu\nu}c^{\alpha\beta}_\mu\right)+\frac{1}{2}c^{\mu\nu}_\nu c^{\alpha\beta}_\mu\right).$$

С другой стороны, так как $\widetilde{u}^\alpha=u^\alpha+\frac{\varepsilon^2}{24}\partial_x^2c^{\alpha\mu}_\mu+O(\varepsilon^4)$ [2, доказательство теоремы 8.4], мы имеем

$$\begin{aligned}
K^{{\rm DR};\alpha\beta}_{2;\widetilde{u}}=&L_\nu\left(u^\alpha+\frac{\varepsilon^2}{24}\partial_x^2c^{\alpha\lambda}_\lambda\right)\circ K_2^{{\rm DR};\nu\rho}\circ L_\rho^\dagger\left(u^\beta+\frac{\varepsilon^2}{24}\partial_x^2c^{\beta\theta}_\theta\right)+O(\varepsilon^4)=\\
=&K_2^{{\rm DR};\alpha\beta}+\frac{\varepsilon^2}{24}\left(\partial_x^2\circ L_\nu\left(c^{\alpha\lambda}_\lambda\right)\circ K_2^{{\rm DR};\nu\beta}+K_2^{{\rm DR};\alpha\rho}\circ L^\dagger_\rho\left(c^{\beta\theta}_\theta\right)\circ\partial_x^2\right)+O(\varepsilon^4)=\\
=&K_2^{{\rm DR};\alpha\beta}+\varepsilon^2\underbrace{\frac{1}{24}\left(\partial_x^2\circ c^{\alpha\lambda}_{\nu\lambda}\circ K_2^{{\rm DR};[0],\nu\beta}+K_2^{{\rm DR};[0],\alpha\rho}\circ c^{\beta\theta}_{\rho\theta}\circ\partial_x^2\right)}_{=:\sum_{i=0}^3R^{\alpha\beta}_i\partial_x^i}+O(\varepsilon^4),
\end{aligned}$$

где $R_i^{\alpha\beta}\in\mathcal{A}_{u;3-i}$. Рассматривая разложение $g_{\mu,0}=\sum_{g\ge0}\varepsilon^{2g}g^{[2g]}_{\mu,0}$, $g^{[2g]}_{\mu,0}\in\mathcal{A}_{u;2g}$, из равенства (3.4) мы получаем

$$\begin{aligned}
K^{{\rm DR};[2],\alpha\beta}_{2;3}&=(3-\mu_\alpha-\mu_\beta)\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}\frac{\partial g^{[2]}_{\mu,0}}{\partial u^\nu_{xx}},\\
K^{{\rm DR};[2],\alpha\beta}_{2;2}&=\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}\left[(2-\mu_\alpha-\mu_\beta)\frac{\partial g^{[2]}_{\mu,0}}{\partial u^\nu_x}+\left(\frac{5}{2}-\mu_\beta\right)\partial_x\frac{\partial g^{[2]}_{\mu,0}}{\partial u^\nu_{xx}}\right].
\end{aligned}$$

Используя равенство (3.3), мы затем вычисляем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g^{[2]}_{\mu,0}}{\partial u^\nu_{xx}}&=\frac{1}{24}c^\theta_{\theta\xi}c^\xi_{\mu\nu},\\
\frac{\partial g^{[2]}_{\mu,0}}{\partial u^\nu_x}&=\frac{1}{24}\left[\partial_\nu\left(c^\theta_{\theta\xi}c^\xi_{\mu\gamma}\right)+\partial_\gamma\left(c^\theta_{\theta\xi}c^\xi_{\mu\nu}\right)-\partial_\mu\left(c^\theta_{\theta\xi}c^\xi_{\nu\gamma}\right)\right]u^\gamma_x,
\end{aligned}$$

и в итоге получаем

$$K_{2;3}^{\mathrm{DR};[2],\alpha\beta}=\frac{3-\mu_\alpha-\mu_\beta}{24}c_\gamma^{\gamma\sigma}c_\sigma^{\alpha\beta},$$
$$K_{2;2}^{\mathrm{DR};[2],\alpha\beta}=\left[\frac{2-\mu_\alpha-\mu_\beta}{24}\left(c_{\theta\xi}^{\beta\theta}c_\gamma^{\alpha\xi}-c_{\theta\xi}^{\alpha\theta}c_\gamma^{\beta\xi}\right)+\frac{\frac{9}{2}-\mu_\alpha-2\mu_\beta}{24}\partial_\gamma\left(c_\theta^{\theta\xi}c_\xi^{\alpha\beta}\right)\right]u_x^\gamma.$$

Используя, что $K_2^{\mathrm{DR};[0],\alpha\beta}=g^{\alpha\beta}\partial_x+\left(\frac{1}{2}-\mu_\beta\right)c_\gamma^{\alpha\beta}u_x^\gamma$, мы также вычисляем

$$R_3^{\alpha\beta}=\frac{1}{24}\left(c_{\nu\lambda}^{\alpha\lambda}g^{\nu\beta}+g^{\alpha\nu}c_{\nu\lambda}^{\beta\lambda}\right),$$
$$R_2^{\alpha\beta}=\frac{1}{24}\left[2\partial_\gamma\left(c_{\nu\lambda}^{\alpha\lambda}g^{\nu\beta}\right)+c_{\nu\lambda}^{\alpha\lambda}c_\gamma^{\nu\beta}\left(\frac{1}{2}-\mu_\beta\right)+g^{\alpha\nu}c_{\gamma\nu\lambda}^{\beta\lambda}+c_\gamma^{\alpha\nu}\left(\frac{1}{2}-\mu_\nu\right)c_{\nu\lambda}^{\beta\lambda}\right]u_x^\gamma.$$

Итак, для того, чтобы доказать равенство (5.1) для $l=2$ и $l=3$, нам нужно проверить следующие два равенства:

$$\frac{1}{12}\left(\partial_\nu\left(g^{\nu\mu}c_\mu^{\alpha\beta}\right)+\frac{1}{2}\underline{c_\nu^{\mu\nu}c_\mu^{\alpha\beta}}\right)=\frac{3-\mu_\alpha-\mu_\beta}{24}\underline{c_\gamma^{\gamma\sigma}c_\sigma^{\alpha\beta}}+\frac{1}{24}\left(c_{\nu\lambda}^{\alpha\lambda}g^{\nu\beta}+g^{\alpha\nu}c_{\nu\lambda}^{\beta\lambda}\right),\tag{5.2}$$

$$\frac{1}{8}\partial_\gamma\left(\partial_\nu\left(g^{\mu\nu}c_\mu^{\alpha\beta}\right)+\frac{1}{2}\underbrace{c_\nu^{\mu\nu}c_\mu^{\alpha\beta}}_{*}\right)+\frac{1}{24}\left(\frac{3}{2}-\mu_\beta\right)\underbrace{c_\gamma^{\alpha\nu}c_{\nu\mu}^{\beta\mu}}_{**}-\frac{1}{24}\left(\frac{3}{2}-\mu_\alpha\right)\underbrace{c_\gamma^{\beta\nu}c_{\nu\mu}^{\alpha\mu}}_{***}=\tag{5.3}$$
$$=\left[\frac{2-\mu_\alpha-\mu_\beta}{24}\left(\underbrace{c_{\theta\xi}^{\beta\theta}c_\gamma^{\alpha\xi}}_{**}-\underbrace{c_{\theta\xi}^{\alpha\theta}c_\gamma^{\beta\xi}}_{***}\right)+\frac{\frac{9}{2}-\mu_\alpha-2\mu_\beta}{24}\partial_\gamma\left(\underbrace{c_\theta^{\theta\xi}c_\xi^{\alpha\beta}}_{*}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{24}\left[2\partial_\gamma\left(c_{\nu\lambda}^{\alpha\lambda}g^{\nu\beta}\right)+\left(\frac{1}{2}-\mu_\beta\right)\underbrace{c_{\nu\lambda}^{\alpha\lambda}c_\gamma^{\nu\beta}}_{***}+g^{\alpha\nu}c_{\gamma\nu\lambda}^{\beta\lambda}+\left(\frac{1}{2}-\mu_\nu\right)\underbrace{c_\gamma^{\alpha\nu}c_{\nu\lambda}^{\beta\lambda}}_{**}\right].$$

Докажем равенство (5.2). Собирая вместе подчёркнутые члены, используя, что $g^{\alpha\beta}=e^\gamma c_\gamma^{\alpha\beta}$, и умножая обе части равенства на 12, мы видим, что равенство (5.2) эквивалентно следующему равенству:

$$(1-q_\nu)\underline{c_\nu^{\nu\mu}c_\mu^{\alpha\beta}}+\boxed{e^\gamma\partial_\nu\left(c_\gamma^{\nu\mu}c_\mu^{\alpha\beta}\right)}=\frac{2-\mu_\alpha-\mu_\beta}{2}\underline{c_\gamma^{\gamma\sigma}c_\sigma^{\alpha\beta}}+\frac{1}{2}e^\gamma\left(c_{\nu\lambda}^{\alpha\lambda}c_\gamma^{\nu\beta}+c_\gamma^{\alpha\nu}c_{\nu\lambda}^{\beta\lambda}\right).$$

Собирая вместе подчёркнутые члены, преобразуя выражение в рамке как $e^\gamma\partial_\nu\left(c_\gamma^{\nu\mu}c_\mu^{\alpha\beta}\right)=e^\gamma\partial_\nu\left(c_\gamma^{\beta\mu}c_\mu^{\alpha\nu}\right)=e^\gamma\left(c_{\nu\gamma}^{\beta\mu}c_\mu^{\alpha\nu}+c_\gamma^{\beta\mu}c_{\nu\mu}^{\alpha\nu}\right)$, и перенося все члены в левую часть, мы приходим к выражению

$$\frac{\mu_\alpha+\mu_\beta-2q_\nu}{2}c_\nu^{\nu\mu}c_\mu^{\alpha\beta}+e^\gamma\left(c_{\nu\gamma}^{\beta\mu}c_\mu^{\alpha\nu}+\underline{c_\gamma^{\beta\mu}c_{\nu\mu}^{\alpha\nu}}-\frac{1}{2}\underline{c_{\nu\lambda}^{\alpha\lambda}c_\gamma^{\nu\beta}}-\frac{1}{2}c_\gamma^{\alpha\nu}c_{\nu\lambda}^{\beta\lambda}\right)=$$
$$=\frac{\mu_\alpha+\mu_\beta-2q_\nu}{2}c_\nu^{\nu\mu}c_\mu^{\alpha\beta}+\boxed{e^\gamma c_{\nu\gamma}^{\beta\mu}c_\mu^{\alpha\nu}}+e^\gamma\left(\frac{1}{2}c_\gamma^{\beta\mu}c_{\nu\mu}^{\alpha\nu}-\frac{1}{2}c_\gamma^{\alpha\nu}c_{\nu\lambda}^{\beta\lambda}\right),\tag{5.4}$$

равенство нулю которого нам нужно доказать. Из теории многообразий Дубровина–Фробениуса [12] мы знаем, что $\mathcal{L}_E C_{\beta\gamma}^\alpha=C_{\beta\gamma}^\alpha$, где через $\mathcal{L}_E$ мы обозначаем производную Ли, из чего вытекает

$$e^\lambda c_{\lambda\gamma}^{\alpha\beta}=\left(\delta-q_\alpha-q_\beta+q_\gamma\right)c_\gamma^{\alpha\beta}.$$

Применяя эту формулу к выражению в рамке, мы видим, что выражение (5.4) равно

$$\frac{q_\alpha+q_\beta-2q_\nu-\delta}{2}\underline{c_\nu^{\nu\mu}c_\mu^{\alpha\beta}}+(\delta-q_\beta-q_\mu+q_\nu)\underline{c_\nu^{\beta\mu}c_\mu^{\alpha\nu}}+e^\gamma\left(\frac{1}{2}c_\gamma^{\beta\mu}c_{\nu\mu}^{\alpha\nu}-\frac{1}{2}c_\gamma^{\alpha\nu}c_{\nu\lambda}^{\beta\lambda}\right)=$$
$$=\frac{q_\alpha-q_\beta+\delta-2q_\mu}{2}c_\nu^{\beta\mu}c_\mu^{\alpha\nu}+\frac{1}{2}e^\gamma\left(\underline{c_\gamma^{\beta\mu}c_{\nu\mu}^{\alpha\nu}-c_\gamma^{\alpha\nu}c_{\nu\lambda}^{\beta\lambda}}\right).\tag{5.5}$$

Мы преобразовываем подчёркнутые члены в последнем выражении следующим образом:

$$c^{\beta\mu}_{\gamma}c^{\alpha\nu}_{\nu\mu}-c^{\alpha\nu}_{\gamma}c^{\beta\lambda}_{\nu\lambda}=\left(\underline{\partial_\nu(c^{\beta\mu}_{\gamma}c^{\alpha\nu}_{\mu})}-c^{\beta\mu}_{\nu\gamma}c^{\alpha\nu}_{\mu}\right)-\left(\underline{\partial_\lambda(c^{\alpha\nu}_{\gamma}c^{\beta\lambda}_{\nu})}-c^{\alpha\nu}_{\lambda\gamma}c^{\beta\lambda}_{\nu}\right)=c^{\alpha\nu}_{\mu\gamma}c^{\beta\mu}_{\nu}-c^{\beta\mu}_{\nu\gamma}c^{\alpha\nu}_{\mu},$$

и, значит, выражение (5.5) равно

$$\begin{aligned}&\frac{q_\alpha-q_\beta+\delta-2q_\mu}{2}c^{\beta\mu}_{\nu}c^{\alpha\nu}_{\mu}+\frac12 e^\gamma\left(c^{\alpha\nu}_{\mu\gamma}c^{\beta\mu}_{\nu}-c^{\beta\mu}_{\nu\gamma}c^{\alpha\nu}_{\mu}\right)=\\ =&\frac{q_\alpha-q_\beta+\delta-2q_\mu}{2}c^{\beta\mu}_{\nu}c^{\alpha\nu}_{\mu}+\frac{\delta-q_\alpha-q_\nu+q_\mu}{2}c^{\alpha\nu}_{\mu}c^{\beta\mu}_{\nu}-\frac{\delta-q_\beta-q_\mu+q_\nu}{2}c^{\beta\mu}_{\nu}c^{\alpha\nu}_{\mu}=\\ =&-\mu_\nu c^{\beta\mu}_{\nu}c^{\alpha\nu}_{\mu}=-\mu_\nu c^{\nu\mu}_{\nu}c^{\alpha\beta}_{\mu}.\end{aligned}$$

Достаточно доказать, что $\mu_\nu c^{\nu}_{\alpha\nu}=0$ для любого α. Действительно, мы имеем $X:=\mu_\nu c^{\nu}_{\alpha\nu}=\mu_\nu\eta^{\nu\lambda}\eta_{\nu\theta}c^{\theta}_{\alpha\lambda}=-\mu_\lambda\eta^{\nu\lambda}\eta_{\nu\theta}c^{\theta}_{\alpha\lambda}=-\mu_\lambda c^{\lambda}_{\alpha\lambda}=-X$, из чего вытекает требуемое равенство $X=0$.

Докажем теперь равенство (5.3). Собирая вместе подобные члены, мы приходим к эквивалентному равенству

$$\frac18\partial_\gamma\partial_\nu\left(g^{\mu\nu}c^{\alpha\beta}_{\mu}\right)+\frac{\mu_\alpha+\mu_\nu-1}{24}c^{\alpha\nu}_{\gamma}c^{\beta\mu}_{\nu\mu}=\frac{3-\mu_\alpha-2\mu_\beta}{24}\partial_\gamma\left(c^{\nu\mu}_{\nu}c^{\alpha\beta}_{\mu}\right)+\frac1{24}\left[2\partial_\gamma\left(c^{\alpha\lambda}_{\nu\lambda}g^{\nu\beta}\right)+g^{\alpha\nu}c^{\beta\lambda}_{\gamma\nu\lambda}\right],$$

которое в свою очередь эквивалентно равенству

$$\begin{aligned}&\frac{1-\frac{\delta}{2}-\mu_\nu}{8}\underbrace{\partial_\gamma\left(c^{\nu\mu}_{\nu}c^{\alpha\beta}_{\mu}\right)}_{*}+\frac18\partial_\gamma\left(e^\theta\partial_\nu\left(c^{\mu\nu}_{\theta}c^{\alpha\beta}_{\mu}\right)\right)+\frac{\mu_\alpha+\mu_\nu-1}{24}c^{\alpha\nu}_{\gamma}c^{\beta\mu}_{\nu\mu}+\frac{\mu_\alpha+2\mu_\beta-3}{24}\underbrace{\partial_\gamma\left(c^{\nu\mu}_{\nu}c^{\alpha\beta}_{\mu}\right)}_{*}\\ &-\frac1{24}\left[2\partial_\gamma\left(c^{\alpha\lambda}_{\nu\lambda}g^{\nu\beta}\right)+g^{\alpha\nu}c^{\beta\lambda}_{\gamma\nu\lambda}\right]=0.\end{aligned}$$

Используя, что $\mu_\nu c^{\nu\mu}_{\nu}=0$, мы видим, что левая часть равна

$$\frac18\partial_\gamma\left(e^\theta\partial_\nu\left(c^{\mu\nu}_{\theta}c^{\alpha\beta}_{\mu}\right)\right)+\frac{\mu_\alpha+\mu_\nu-1}{24}c^{\alpha\nu}_{\gamma}c^{\beta\mu}_{\nu\mu}+\frac{q_\alpha+2q_\beta-3\delta}{24}\partial_\gamma\left(c^{\nu\mu}_{\nu}c^{\alpha\beta}_{\mu}\right)-\frac1{24}\left[2\partial_\gamma\left(c^{\alpha\lambda}_{\nu\lambda}g^{\nu\beta}\right)+g^{\alpha\nu}c^{\beta\lambda}_{\gamma\nu\lambda}\right].$$

Преобразуя первый член в этом выражении как

$$\begin{aligned}&\partial_\gamma\left(e^\theta\partial_\nu\left(c^{\mu\nu}_{\theta}c^{\alpha\beta}_{\mu}\right)\right)=\partial_\gamma\left(e^\theta\partial_\nu\left(c^{\mu\beta}_{\theta}c^{\alpha\nu}_{\mu}\right)\right)=\partial_\gamma\left(e^\theta c^{\mu\beta}_{\theta\nu}c^{\alpha\nu}_{\mu}\right)+\partial_\gamma\left(e^\theta c^{\mu\beta}_{\theta}c^{\alpha\nu}_{\mu\nu}\right)=\\ =&(\delta-q_\mu-q_\beta+q_\nu)\partial_\gamma\left(c^{\mu\beta}_{\nu}c^{\alpha\nu}_{\mu}\right)+\partial_\gamma\left(g^{\mu\beta}c^{\alpha\nu}_{\mu\nu}\right)=\\ =&(\delta-q_\beta)\partial_\gamma\left(c^{\mu\beta}_{\nu}c^{\alpha\nu}_{\mu}\right)+\underbrace{(-q_\mu+q_\nu)\partial_\gamma\left(c^{\mu\beta}_{\nu}c^{\alpha\nu}_{\mu}\right)}_{=0}+\partial_\gamma\left(g^{\mu\beta}c^{\alpha\nu}_{\mu\nu}\right)=\\ =&(\delta-q_\beta)\partial_\gamma\left(c^{\mu\beta}_{\nu}c^{\alpha\nu}_{\mu}\right)+\partial_\gamma\left(g^{\mu\beta}c^{\alpha\nu}_{\mu\nu}\right),\end{aligned}$$

мы приходим к выражению

$$\begin{aligned}&\frac{\delta-q_\beta}{8}\underline{\partial_\gamma\left(c^{\mu\beta}_{\nu}c^{\alpha\nu}_{\mu}\right)}+\frac18\boxed{\partial_\gamma\left(g^{\mu\beta}c^{\alpha\nu}_{\mu\nu}\right)}+\frac{\mu_\alpha+\mu_\nu-1}{24}c^{\alpha\nu}_{\gamma}c^{\beta\mu}_{\nu\mu}+\frac{q_\alpha+2q_\beta-3\delta}{24}\underline{\partial_\gamma\left(c^{\nu\mu}_{\nu}c^{\alpha\beta}_{\mu}\right)}\\ &-\frac1{24}\left[2\boxed{\partial_\gamma\left(c^{\alpha\lambda}_{\nu\lambda}g^{\nu\beta}\right)}+g^{\alpha\nu}c^{\beta\lambda}_{\gamma\nu\lambda}\right]=\\ =&\frac{\mu_\alpha-\mu_\beta}{24}\partial_\gamma\left(c^{\mu\beta}_{\nu}c^{\alpha\nu}_{\mu}\right)+\frac{\mu_\alpha+\mu_\nu-1}{24}c^{\alpha\nu}_{\gamma}c^{\beta\mu}_{\nu\mu}+\frac1{24}\left[\underline{\partial_\gamma\left(c^{\alpha\lambda}_{\nu\lambda}g^{\nu\beta}\right)}-g^{\alpha\nu}c^{\beta\lambda}_{\gamma\nu\lambda}\right].\end{aligned}$$

Применяя к подчёркнутому члену формулу

$$\partial_\gamma g^{\nu\beta}=(1-q_\gamma)\,c^{\nu\beta}_{\gamma}+e^\theta c^{\nu\beta}_{\theta\gamma}=(1-\mu_\nu-\mu_\beta)\,c^{\nu\beta}_{\gamma},$$

мы получаем

$$\begin{aligned}&\frac{\mu_\alpha-\mu_\beta}{24}\partial_\gamma\left(c^{\mu\beta}_{\nu}c^{\alpha\nu}_{\mu}\right)+\frac{\mu_\alpha+\mu_\nu-1}{24}c^{\alpha\nu}_{\gamma}c^{\beta\mu}_{\nu\mu}+\frac1{24}\left[c^{\alpha\lambda}_{\nu\lambda\gamma}g^{\nu\beta}+(1-\mu_\nu-\mu_\beta)\,c^{\alpha\lambda}_{\nu\lambda}c^{\nu\beta}_{\gamma}-g^{\alpha\nu}c^{\beta\lambda}_{\gamma\nu\lambda}\right]=\\ =&\frac{\mu_\alpha-\mu_\beta}{24}\partial_\gamma\left(c^{\mu\beta}_{\nu}c^{\alpha\nu}_{\mu}\right)+\frac{\mu_\alpha+\mu_\nu-1}{24}c^{\alpha\nu}_{\gamma}c^{\beta\mu}_{\nu\mu}+\frac{1-\mu_\nu-\mu_\beta}{24}c^{\alpha\lambda}_{\nu\lambda}c^{\nu\beta}_{\gamma}+\frac1{24}\left[\underline{c^{\alpha\lambda}_{\nu\lambda\gamma}g^{\nu\beta}-g^{\alpha\nu}c^{\beta\lambda}_{\gamma\nu\lambda}}\right].\end{aligned}$$

Выражая подчёркнутые члены следующим образом:

$$\partial_\lambda\partial_\gamma \underbrace{\left(c^{\alpha\lambda}_{\nu} g^{\nu\beta} - g^{\alpha\nu} c^{\beta\lambda}_{\nu}\right)}_{=0} - c^{\alpha\lambda}_{\nu\lambda}\partial_\gamma g^{\nu\beta} - c^{\alpha\lambda}_{\nu\gamma}\partial_\lambda g^{\nu\beta} - c^{\alpha\lambda}_{\nu}\partial_\lambda\partial_\gamma g^{\nu\beta} + \partial_\gamma g^{\alpha\nu} c^{\beta\lambda}_{\nu\lambda} + \partial_\lambda g^{\alpha\nu} c^{\beta\lambda}_{\nu\gamma} + \partial_\lambda\partial_\gamma g^{\alpha\nu} c^{\beta\lambda}_{\nu} =$$

$$= (\mu_\beta + \mu_\nu - \mu_\lambda - \mu_\alpha)\,\partial_\gamma\left(c^{\alpha\lambda}_{\nu} c^{\beta\nu}_{\lambda}\right) + (\mu_\beta + \mu_\nu - 1)\, c^{\alpha\lambda}_{\nu\lambda} c^{\beta\nu}_{\gamma} + (1 - \mu_\alpha - \mu_\nu)\, c^{\alpha\nu}_{\gamma} c^{\beta\lambda}_{\nu\lambda},$$

мы получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu_\alpha - \mu_\beta}{24}\underbrace{\partial_\gamma\left(c^{\mu\beta}_{\nu} c^{\alpha\nu}_{\mu}\right)}_{*} + \frac{\mu_\alpha + \mu_\nu - 1}{24}\underbrace{c^{\alpha\nu}_{\gamma} c^{\beta\mu}_{\nu\mu}}_{**} + \frac{1 - \mu_\nu - \mu_\beta}{24}\underbrace{c^{\alpha\lambda}_{\nu\lambda} c^{\nu\beta}_{\gamma}}_{***} \\
&+ \frac{\mu_\beta + \mu_\nu - \mu_\lambda - \mu_\alpha}{24}\underbrace{\partial_\gamma\left(c^{\alpha\lambda}_{\nu} c^{\beta\nu}_{\lambda}\right)}_{*} + \frac{\mu_\beta + \mu_\nu - 1}{24}\underbrace{c^{\alpha\lambda}_{\nu\lambda} c^{\beta\nu}_{\gamma}}_{***} + \frac{1 - \mu_\alpha - \mu_\nu}{24}\underbrace{c^{\alpha\nu}_{\gamma} c^{\beta\lambda}_{\nu\lambda}}_{**} = \\
&= \frac{\mu_\nu - \mu_\lambda}{24}\partial_\gamma\left(c^{\alpha\lambda}_{\nu} c^{\beta\nu}_{\lambda}\right) = 0,
\end{aligned}$$

что и требовалось.

<u>*Шаг 2*</u>. Докажем равенство (5.1) для $l = 0$. Заметим, что по определению мы имеем $\widetilde{u}^\alpha(w^*_*, \varepsilon) - w^\alpha \in \operatorname{Im}\partial_x$. Таким образом, из лемм 4.1 и 4.2 вытекает, что

$$K^{\mathrm{DZ};\alpha\beta}_{2;\widetilde{u};0} = \left(\frac{1}{2} - \mu_\beta\right)\eta^{\beta\nu}\sum_{m\ge 0}\frac{\partial \widetilde{u}^\alpha}{\partial w^\rho_m}\eta^{\rho\theta}\partial_x^{m+1}\Omega_{\theta,0;\nu,0} = \left(\frac{1}{2} - \mu_\beta\right)\eta^{\beta\nu}\sum_{m\ge 0}\left\{\widetilde{u}^\alpha, \overline{h}_{\nu,0}\right\}_{K^{\mathrm{DZ}}_1}.$$

Леммы 4.1 и 4.4, вместе с тем фактом, что $\widetilde{u}^\alpha(u^*_*, \varepsilon) - u^\alpha \in \operatorname{Im}\partial_x$ [2, лемма 7.1], дают нам, что

$$K^{\mathrm{DR};\alpha\beta}_{2;\widetilde{u};0} = \left(\frac{1}{2} - \mu_\beta\right)\eta^{\beta\nu}\sum_{m\ge 0}\frac{\partial \widetilde{u}^\alpha}{\partial u^\rho_m}\eta^{\rho\theta}\partial_x^{m+1}\frac{\delta \overline{g}_{\nu,0}}{\delta u^\theta} = \left(\frac{1}{2} - \mu_\beta\right)\eta^{\beta\nu}\sum_{m\ge 0}\left\{\widetilde{u}^\alpha, \overline{g}_{\nu,0}\right\}_{K^{\mathrm{DR}}_1}.$$

Так как в координатах $\widetilde{u}^\alpha$ и в приближении до ε^2 локальные функционалы $\overline{h}_{\alpha,a}$ совпадают с локальными функционалами $\overline{g}_{\alpha,a}$, а пуассонов оператор K^{DZ}_1 совпадает с пуассоновым оператором K^{DR}_1, мы получаем $K^{\mathrm{DZ};\alpha\beta}_{2;\widetilde{u};0} = K^{\mathrm{DR};\alpha\beta}_{2;\widetilde{u};0} + O(\varepsilon^4)$, что и требовалось.

<u>*Шаг 3*</u>. Докажем в итоге, что $K^{\mathrm{DZ};[2]}_{2;\widetilde{u}} = K^{\mathrm{DR};[2]}_{2;\widetilde{u}}$. Так как мы уже доказали равенство (5.1) для $l = 0, 2, 3$, разность $K^{\mathrm{DZ};[2]}_{2;\widetilde{u}} - K^{\mathrm{DR};[2]}_{2;\widetilde{u}}$ имеет вид $R\partial_x$, $R = (R^{\alpha\beta})$, где $R^{\alpha\beta} \in \mathcal{A}_{\widetilde{u};2}$. Так как операторы $K^{\mathrm{DZ};[2]}_{2;\widetilde{u}}$ и $K^{\mathrm{DR};[2]}_{2;\widetilde{u}}$ кососимметричны, мы имеем

$$(R\partial_x)^\dagger = -R\partial_x \quad \Leftrightarrow \quad R^T = R \text{ и } \partial_x R = 0.$$

Из свойства $\partial_x R = 0$ мгновенно вытекает, что $R = 0$, завершая докательство теоремы.

Список литературы

[1] A. Buryak. *Double ramification cycles and integrable hierarchies.* Communications in Mathematical Physics 336 (2015), no. 3, 1085–1107.

[2] A. Buryak, B. Dubrovin, J. Guéré, P. Rossi. *Tau-structure for the double ramification hierarchies.* Communications in Mathematical Physics 363 (2018), no. 1, 191–260.

[3] A. Buryak, B. Dubrovin, J. Guéré, P. Rossi. *Integrable systems of double ramification type.* International Mathematics Research Notices 2020 (2020), no. 24, 10381–10446.

[4] A. Buryak, J. Guere. *Towards a description of the double ramification hierarchy for Witten's r-spin class.* Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 106 (2016), no. 5, 837–865.

[5] A. Buryak, J. Guéré, P. Rossi. *DR/DZ equivalence conjecture and tautological relations.* Geometry & Topology 23 (2019), no. 7, 3537–3600.

[6] A. Buryak, H. Posthuma, S. Shadrin. *On deformations of quasi-Miura transformations and the Dubrovin–Zhang bracket.* Journal of Geometry and Physics 62 (2012), no. 7, 1639–1651.

[7] A. Buryak, H. Posthuma, S. Shadrin. *A polynomial bracket for the Dubrovin–Zhang hierarchies.* Journal of Differential Geometry 92 (2012), no. 1, 153–185.

[8] A. Buryak, P. Rossi. *Recursion relations for double ramification hierarchies.* Communications in Mathematical Physics 342 (2016), no. 2, 533–568.

[9] A. Buryak, P. Rossi, S. Shadrin. *Towards a bihamiltonian structure for the double ramification hierarchy.* Letters in Mathematical Physics 111 (2021), article number 13.

[10] A. Buryak, S. Shadrin, L. Spitz, D. Zvonkine. *Integrals of ψ-classes over double ramification cycles.* American Journal of Mathematics 137 (2015), no. 3, 699–737.

[11] A. du Crest de Villeneuve, P. Rossi. *Quantum D_4 Drinfeld–Sokolov hierarchy and quantum singularity theory.* Journal of Geometry and Physics 141 (2019), 29–44.

[12] B. Dubrovin. *Geometry of 2D topological field theories.* Integrable systems and quantum groups (Montecatini Terme, 1993), 120–348, Lecture Notes in Math., 1620, Fond. CIME/CIME Found. Subser., Springer, Berlin, 1996.

[13] B. Dubrovin, Y. Zhang. *Bihamiltonian hierarchies in 2D topological field theory at one-loop approximation.* Communications in Mathematical Physics 198 (1998), no. 2, 311–361.

[14] B. Dubrovin, Y. Zhang. *Normal forms of hierarchies of integrable PDEs, Frobenius manifolds and Gromov–Witten invariants.* arXiv:math/0108160.

[15] B. Dubrovin, Y. Zhang, *Virasoro symmetries of the extended Toda hierarchy*, Communications in Mathematical Physics 250 (2004), no. 1, 161–193.

[16] C. Faber, S. Shadrin, D. Zvonkine. *Tautological relations and the r-spin Witten conjecture.* Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (4) 43 (2010), no. 4, 621–658.

[17] F. Hernández Iglesias, S. Shadrin. *Bi-Hamiltonian recursion, Liu–Pandharipande relations, and vanishing terms of the second Dubrovin–Zhang bracket.* arXiv:2105.15138.

[18] M. Kontsevich. *Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function.* Communications in Mathematical Physics 147 (1992), 1–23.

[19] M. Kontsevich, Yu. Manin. *Gromov–Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry.* Communications in Mathematical Physics 164 (1994), no. 3, 525–562.

[20] S.-Q. Liu, Z. Wang, Y. Zhang. *Linearization of Virasoro symmetries associated with semisimple Frobenius manifolds.* arXiv:2109.01846.

[21] A. Okounkov, R. Pandharipande. *The equivariant Gromov-Witten theory of* $\mathbb{P}^1$. Annals of Mathematics 163 (2006), no. 2, 561–605.

[22] E. Witten. *Two dimensional gravity and intersection theory on moduli space.* Surveys in Differential Geometry 1 (1991), 243–310.

[23] E. Witten. *Algebraic geometry associated with matrix models of two-dimensional gravity.* Topological methods in modern mathematics (Stony Brook, NY, 1991), 235–269, Publish or Perish, Houston, TX, 1993.

О. Брауэр:

факультет математики, университет Лидса, Лидс, LS2 9JT, Великобритания

Email address: mmobg@leeds.ac.uk

А. Буряк:

факультет математики, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", ул. Усачева, 6, Москва, 119048, Российская Федерация;

Центр перспективных исследований, Сколковский институт науки и технологий, ул. Нобеля, 1, Москва, 143026, Российская Федерация

Email address: aburyak@hse.ru