**Глава 2.**

**БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ**

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Балансовые модели широко применяются при математическом моделировании экономических процессов и систем. При их построении сопоставляется наличие материальных, трудовых, финансовых ресурсов и потребность в них. Под *экономико-математической балансовой моделью* понимается система уравнений, выражающих требования баланса, например, между производимым отдельными экономическими объектами количеством продукции и совокупной потребностью в этой продукции.

Важнейшей балансовой экономико-математической моделью является модель межотраслевого баланса (далее — МОБ). Балансовый метод для исследования и анализа межотраслевых связей был впервые использован советскими экономистами-статистиками при составлении баланса народного хозяйства за 1923–1924 хозяйственный год. Позднее В.В. Леонтьев применил метод анализа межотраслевых связей с привлечением аппарата линейной алгебры для исследования экономики США. Метод стал известен под названием «затраты – выпуск». На основе разработанных для США и некоторых других стран межотраслевых балансов В.В. Леонтьев проанализировал состояние и структуру экономики, оценил возможные последствия структурной перестройки, разработал программу реструктуризации отраслей, рационализации транспортных сообщений и проч. За разработку методологии анализа методом «затраты – выпуск» и практическое его использование в 1973 году В.В. Леонтьев был удостоен **Нобелевской премии** за достижения в области экономики.

Другим примером балансовой модели является линейная модель обмена (модель международной торговли).

Эти модели будут рассмотрены в данной главе.

## 2.1. Модель межотраслевого баланса В.В. Леонтьева

Многоотраслевое хозяйство, в котором каждая отрасль производит продукцию для других отраслей, потребляет продукцию других отраслей, необходимую для собственного производства,  
а также производит продукцию для непроизводственного потребления (на экспорт, в запасы, для личного потребления граждан  
и т.п.), должно быть сбалансировано. Таким образом, возникает задача: согласовать объемы производства отраслей, чтобы удовлетворить все их потребности.

Решение задачи межотраслевого баланса осуществляется с помощью экономико-математической модели В.В. Леонтьева. Модель представлена системой уравнений вида:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.1) |

Уравнения системы (2.1) называются балансовыми соотношениями (или соотношениями баланса) модели межотраслевого баланса, где  — объем валового выпуска *i*-й отрасли (валовой объем, валовой продукт);  — объем продукции *i*-й отрасли для непроизводственного потребления (объем конечного потребления, конечный продукт);  — объем продукции *i*-й отрасли, потребляемой *j*-й отраслью в процессе производства (межотраслевые поставки), *i* = 1, 2, …, *n*, *j* = 1, 2, …, *n* (*n* — число отраслей).

Пусть принята гипотеза линейности, тогда  Величины  показывающие затраты продукции *i*-й отрасли на производство единицы продукции *j*-й отрасли, называют *коэффициентами прямых затрат*.

Балансовые соотношения (2.1) могут быть записаны в виде:

 или  

Балансовые соотношения также могут быть записаны в виде матричного уравнения межотраслевого баланса:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2) |

где  — вектор валового выпуска;

 — вектор конечного продукта;

 — матрица прямых затрат.

Отметим основные свойства используемых матриц:

* коэффициенты прямых затрат по определению являются неотрицательными, следовательно, матрица *А* в целом может быть названа неотрицательной;
* поскольку процесс воспроизводства нельзя осуществлять, если для собственного воспроизводства в отрасли затрачивается большее количество продукта, чем создавалось, то очевидно, что диагональные элементы матрицы *А* меньше единицы;
* система уравнений межотраслевого баланса — отражение реальных экономических процессов, в которых содержательный смысл могут иметь лишь неотрицательные значения валового выпуска и конечного продукта; таким образом, векторы валового выпуска и конечного продуктасостоят из неотрицательных компонентов и называются неотрицательными.

Итак, для нахождения объема конечного продукта по заданным объемам валового выпуска и матрице прямых затрат необходимо решить уравнение межотраслевого баланса (2.2):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.3) |

Для нахождения объема валового продукта, который при известной матрице прямых затрат обеспечивает заданный вектор конечного потребления (основная задача межотраслевого баланса), надо решить уравнение межотраслевого баланса (2.2):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4) |

Матрица (*E* – *A*)–1 называется *матрицей полных затрат*, каждый ее элемент есть величина валового выпуска продукции *i*-й отрасли, необходимого для обеспечения единицы конечного выпуска продукта *j*-й отрасли (*yj* = 1, *j* = 1, 2, …, *n*).

Межотраслевой баланс представляется в виде таблицы, состоящей из четырех квадрантов (табл. 2.1).

**Таблица 2.1**

Общий вид таблицы межотраслевого баланса

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Произвoдящие отрасли | Потребляющие отрасли | | | Конечный продукт | Валовой продукт |
| 1 | … | *n* |
| 1 | *x*11 | … | *xn*1 | *y*1 | *x*1 |
| **…** | … | **I** | … | **II** | … |
| *n* | *xn*1 | … | *xnn* | *yn* | *xn* |
| Условно чистая продукция | *z*1 | **III** | *zn* | **IV** |  |
| Валовой продукт | *x*1 | … | *xn* |  |  |

Первый квадрант представляет межотраслевые потоки продукции (межотраслевые поставки). Его элементы определяются  
в соответствии с формулой: *xij* = *aij* ∙ *xj*.

Второй — характеризует отраслевую материальную структуру, состоящую из двух сфер, производственной и непроизводственной.

Третий — отражает доход как стоимость условно чистой продукции (*Zj*), равной сумме амортизации, оплаты труда и чистого дохода *j*-й отрасли. Величина условно чистой продукции *Zi* равна сумме амортизации, оплаты труда и чистого дохода отрасли *j*. Составляющие третьего квадранта (условно чистая продукция) находятся как разность между объемами валовой продукции и суммами элементов соответствующих столбцов найденного первого квадранта: *Zj = Xj – ∑xij*.

Четвертый — показывает конечное распределение и использование дохода. Показатели четвертого квадранта служат для контроля правильности расчета: сумма элементов второго квадранта должна совпадать с суммой элементов третьего квадранта.

Закономерно возникает вопрос, при каких условиях экономическая система способна обеспечить положительный конечный выпуск по всем отраслям. Ответ на этот вопрос связан с понятием продуктивности матрицы коэффициентов прямых материальных затрат. Неотрицательная матрица *A* (т.е. все ее элементы неотрицательны) называется *продуктивной*, если для любого неотрицательного вектора *Y* существует неотрицательный вектор *X*, являющийся решением уравнения (2.2).

Используются следующие *критерии продуктивности*:

1. матрица прямых затрат *A* является продуктивной, если все ее элементы неотрицательны  для любого   а также максимальная сумма элементов столбцов матрицы не превосходит единицы  и существует столбец, сумма элементов которого строго меньше единицы, т.е. существует такой номер *j*, что ;
2. матрица прямых затрат *A* является продуктивной, если матрица  существует и является неотрицательной.

Наряду с прямыми затратами рассматриваются косвенные, которые не могут быть напрямую отнесены на себестоимость продукции.

Так, матрица  называется *матрицей косвенных затрат первого порядка*:  Матрица  называется *матрицей косвенных затрат второго порядка*: 

Если матрица прямых затрат продуктивна, то выполняется равенство:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.5) |

где 

*C* — матрица, элементы которой *cij* представляют собой сумму прямых и косвенных затрат продукции *i*-й отрасли для производства единицы продукции *j*-й отрасли через все промежуточные продукты на всех предшествующих стадиях производства.

**Пример 2.1.** Имеются две взаимосвязанные отрасли, потребление и валовой выпуск которых представлены в табл. 2.2.

**Таблица 2.2**

Потребление и валовый выпуск отраслей

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Отрасль | Потребление, ед. | | Валовой выпуск |
| 1-я отрасль | 2-я отрасль |
| 1-я | 26 | 82 | 130 |
| 2-я | 52 | 41 | 205 |

1. Определите матрицу коэффициентов прямых затрат и проверьте, является ли она продуктивной.
2. Определите объем конечной продукции.
3. Определите матрицу полных затрат.
4. Найдите объем валового выпуска каждой отрасли, если в плановом периоде выпуск конечной продукции должен повыситься в 1-й отрасли на 50 %, во 2-й — на 20 %.
5. Найдите межотраслевые поставки в плановом периоде.
6. Составьте межотраслевой баланс в плановом периоде.
7. Определите матрицу косвенных затрат 1-го порядка.

**Решение**

1. Для нахождения матрицы прямых затрат воспользуемся гипотезой линейности, тогда





Матрица прямых затрат имеет вид: 

Проверим продуктивность матрицы.

По первому критерию матрица *A* продуктивна, так как, во-первых, элементы матрицы прямых затрат неотрицательны, во-вторых, сумма элементов по любому ее столбцу не превосходит единицы, в-третьих, хотя бы для одного столбца эта сумма строго меньше единицы.

1. Чтобы рассчитать объем конечного потребления по известному объему валового выпуска, необходимо вычислить:



Следовательно, конечный продукт 1-й отрасли составит 22 ед., 2-й отрасли — 112 ед.

1. Для определения матрицы полных затрат  воспользуемся алгоритмом нахождения обратной матрицы к матрице :



алгебраические дополнения составляют матрицу:





По второму критерию подтверждается, что матрица прямых затрат продуктивна, так как матрица полных затрат  существует и все ее элементы неотрицательны.

Для нахождения объема валового выпуска каждой отрасли в плановом периоде необходимо найти выпуск конечной продукции  
в плановом периоде, который по условию должен повыситься в 1-й отрасли на 50 %, во 2-й — на 20 %:

.

1. Для нахождения объема валового выпуска по известному объему конечного потребления необходимо вычислить:



Следовательно, в плановом периоде объем валового выпуска 1-й отрасли составит 167 ед., 2-й — 251,5 ед.

1. Для нахождения межотраслевых поставок воспользуемся гипотезой линейности, тогда



1. Составим межотраслевой баланс в плановом периоде и отразим его в таблице (табл. 2.3).

**Таблица 2.3**

Межотраслевой баланс в плановом периоде

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Отрасль | Потребление, ед. | | Конечный  продукт | Валовой  выпуск |
| 1-я отрасль | 2-я отрасль |
| 1-я | 33,4 | 100,6 | 33,0 | 167,0 |
| 2-я | 66,8 | 50,3 | 134,4 | 251,5 |

1. Матрица косвенных затрат первого порядка равна:



**Пример 2.2.** Даны: матрица *A* прямых затрат (межотраслевого баланса), матрица *Y* объемов конечного продукта (непроизводственного потребления), матрица *V* удельной прибавленной стоимости:



Найдите матрицы косвенных затрат первого и второго порядков, матрицу полных затрат (приближенно и точно), объемы производства (валового выпуска).

**Решение.** В соответствии с определением матрица косвенных затрат первого порядка равна:



матрица косвенных затрат второго порядка равна:



Вычислим по формуле (2.5) приближенно матрицу коэффициентов полных затрат:



Вычислим точное значение матрицы полных затрат *B* = (*E* – *A*)-1.

Для этого найдем матрицу *E* – *A*:



Определитель матрицы *E* – *A* равен:



Обозначим для упрощения записи *E* – *A = D* и вычислим алгебраические дополнения матрицы *D*:



Получаем матрицу полных затрат:



Элементы матрицы полных затрат, рассчитанной приближенно, меньше соответствующих элементов матрицы полных затрат, определенной как обратная матрица (*E* – *A*)–1, поскольку не учитывают косвенные затраты выше второго порядка.

Вычислим объемы производства по формуле (2.4):



Для объема производства отраслей выполняются следующие уравнения баланса:



Подставив полученные значения в систему, найдем распределение продукции каждой отрасли по другим отраслям, а также проверим наличие баланса. Результаты расчета представим в виде таблицы межотраслевого баланса (см. табл. 2.1).

Определим условно чистую продукцию:



Результаты заносим в третий квадрант таблицы (табл. 2.4).

**Таблица 2.4**

Итоговый межотраслевой баланс

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Производящая отрасль | Потребляющая отрасль | | | Конечный продукт | Валовой продукт |
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | 48 | 104 | 42 | 46 | 240 |
| 2 | 24 | 104 | 63 | 69 | 260 |
| 3 | 96 | 26 | 42 | 46 | 210 |
| Условно чистая продукция | 72 | 26 | 63 | 161 |  |
| Валовой продукт | 240 | 260 | 210 |  | 710 |

## 2.2. Межотраслевой баланс в анализе экономических показателей

Модификации модели межотраслевого баланса производства и распределения продукции в народном хозяйстве позволяют расширить круг показателей, охватываемых моделью. Рассмотрим применение межотраслевого балансового метода для анализа таких важных экономических показателей, как равновесные цены, труд и фонды.

**Равновесные цены.** С задачей межотраслевого баланса связана двойственная задача о равновесных ценах, при которых объем спроса равен объему предложения.

Элементы *j*-го столбца матрицы *A* прямых затрат, т.е. *a*1*j*, *a*2*j*, …, *anj*, показывают количество продукции соответственно первой, второй, …, *j*-й отрасли, идущее на производство единицы продукции *j*-й отрасли. Если обозначить цены продукции отраслей *p*1, *p*2, …, *pj*, то расходы *j*-й отрасли на приобретение продукции указанных отраслей будут равны соответственно *a*1*j* ∙ *xj* ∙ *p*1, *a*2*j* ∙ *xj* ∙ *p*2, …, *anj* ∙ *xj* ∙ *pn*.

Кроме этих затрат, *j*-я отрасль несет расходы на рабочую силу, приобретение продуктов производства вне рассматриваемой системы отраслей и проч., что составляет некоторую прибавленную стоимость. Обозначим *vj* — величину прибавленной стоимости, приходящейся на единицу продукции *j*-й отрасли (удельная прибавленная стоимость), тогда общая стоимость продукции отрасли равна:



или



Итак, для цен всех отраслей получаем систему уравнений:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.6) |

В матричной форме система (2.6) имеет вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.7) |

где *AT* — транспонированная матрица прямых затрат;

*P* — матрица-столбец равновесных цен;

*V* — матрица-столбец удельных прибавленных стоимостей.

Из уравнения (2.7) получаем, что равновесные цены определяются из решения уравнения:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.8) |

Для равновесных цен выполняется равенство:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.9) |

т.е. суммарная прибавленная стоимость всех отраслей равна суммарной стоимости их конечных продуктов, вычисленной по равновесным ценам.

**Межотраслевой баланс труда.**К числу важнейших аналитических возможностей данного метода относится определение прямых и полных затрат труда на единицу продукции и разработка на этой основе балансовых продуктово-трудовых моделей; исходной моделью при этом служит отчетный межпродуктовый баланс в натуральном выражении. В этом балансе по строкам представлено распределение каждого отдельного продукта на производство других продуктов и конечное потребление (первый и второй квадранты схемы межотраслевого баланса). Отдельной строкой дается распределение затрат живого труда в производстве всех видов продукции; предполагается, что трудовые затраты выражены в единицах труда одинаковой степени сложности.

Обозначим затраты живого труда в производстве *j*-го продукта через *Lj*, а объем производства этого продукта (валовой выпуск), как и раньше, через *xj*. Тогда прямые затраты труда на единицу  
*j*-го вида продукции (*коэффициент прямой трудоемкости*) можно задать следующей формулой:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.10) |

Введем понятие полных затрат труда как суммы прямых затрат живого труда и затрат овеществленного труда, перенесенных на продукт через израсходованные средства производства. Если обозначить величину полных затрат труда на единицу продукции *j*-го вида через *Tj*, то произведения вида *aij* ∙ *Tj* отражают затраты овеществленного труда, перенесенного на единицу *j*-го продукта через *i*-e средство производства; при этом предполагается, что коэффициенты прямых материальных затрат *aij* выражены в натуральных единицах. Тогда полные трудовые затраты на единицу *j*-го вида продукции (*коэффициент полной трудоемкости*) будут равны:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.11) |

Введем в рассмотрение вектор-строку коэффициентов прямой трудоемкости *t* = (*t*1, *t*2, …, *tn*) и вектор-строку коэффициентов полной трудоемкости *T* = (*T*1, *T*2, …, *Tn*). Тогда с использованием уже рассматриваемой ранее матрицы коэффициентов прямых материальных затрат *A* (в натуральном выражении) систему уравнений (2.11) можно переписать в матричном виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.12) |

Произведя очевидные матричные преобразования равенства (2.12) с использованием единичной матрицы *Е*, получим следующее соотношение для вектора коэффициентов полной трудоемкости:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.13) |

Матрица (*E* – *A*)–1 — это матрица *В*-коэффициентов полных материальных затрат, поэтому равенство (2.13) можно переписать:



Обозначим через *L* величину совокупных затрат живого труда по всем видам продукции, которая с учетом формулы (2.10) будет равна:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.14) |

Так как *X* = (*E* – *A*)–1 ∙ *Y*, то, в соответствии с формулами (2.13) и (2.14), приходим к следующему равенству:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.15) |

где *t* и *Т* — вектор-строки коэффициентов прямой и полной трудоемкости, а *X* и *Y* — вектор-столбцы валовой и конечной продукции соответственно.

Соотношение (2.15) представляет собой основное балансовое равенство в теории межотраслевого баланса труда. В данном случае его конкретное экономическое содержание заключается в том, что стоимость конечной продукции, оцененной по полным затратам труда, равна совокупным затратам живого труда. Сопоставляя потребительский эффект различных взаимозаменяемых продуктов с полными трудовыми затратами на их выпуск, можно судить о сравнительной эффективности их производства. С помощью показателей полной трудоемкости более полно и точно, чем при использовании существующих стоимостных показателей, выявляется структура затрат на выпуск различных видов продукции, прежде всего соотношение между затратами живого и овеществленного труда.

На основе коэффициентов прямой и полной трудоемкости могут быть разработаны межотраслевые и межпродуктовые балансы затрат труда и использования трудовых ресурсов. Схематически они строятся по общему типу матричных моделей, но все показатели в них (межотраслевые связи, конечный продукт, условно чистая продукция и др.) выражены в трудовых измерителях.

**Оценка показателей фондоемкости.** Развитие основной модели межотраслевого баланса достигается также путем включения в нее показателей фондоемкости продукции. В простейшем случае модель дополняется отдельной строкой, в которой указаны  
в стоимостном выражении объемы производственных фондов Φ*j*, занятые в каждой *j*-й отрасли. На основании этих данных и объемов валовой продукции всех отраслей определяются *коэффициенты прямой фондоемкости продукции* *j*-й отрасли:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.16) |

Коэффициент прямой фондоемкости показывает величину производственных фондов, непосредственно занятых в производстве данной отрасли, в расчете на единицу ее валовой продукции. В отличие от этого показателя *коэффициент полной фондоемкости* *Fj* отражает объем фондов, необходимых во всех отраслях для выпуска единицы конечной продукции *j***-**й отрасли. Если *aij* — коэффициент прямых материальных затрат, то для коэффициента полной фондоемкости справедливо равенство, аналогичное равенству (2.11) для коэффициента полной трудоемкости:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.17) |

Введем в рассмотрение вектор-строку коэффициентов прямой фондоемкости *f* = (*f*1, *f*2, …, *fn*) и вектор-строку коэффициентов полной фондоемкости *F* = (*F*1, *F*2, …, *Fn*), тогда систему уравнений (2.17) можно переписать в матричной форме:



откуда с помощью преобразований, аналогичных применяемым для коэффициентов трудоемкости, можно получить матричное соотношение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.18) |

где *B* = (*E* – *A*)–1 — матрица коэффициентов полных материальных затрат.

Для более глубокого анализа надо дифференцировать фонды на основные и оборотные, а в пределах основных — на здания, сооружения, производственное оборудование, транспортные средства и т.д. Пусть в целом все производственные фонды разделены на *m* групп. Тогда характеристика занятых в народном хозяйстве фондов задается матрицей показателей Φ*kj*, отражающих объем фондов *k*-й группы, занятых в *j*-й отрасли:



Коэффициенты прямой фондоемкости также образуют матрицу размерности *m* × *n*, элементы которой определяют величину производственных фондов *k*-й группы, *непосредственно используемых при производстве единицы продукции**j*-й отрасли:



Для каждой *j*-й отрасли могут быть вычислены коэффициенты полной фондоемкости *Fkj*, которые отражают полную потребность в фондах *k***-**й группы для выпуска единицы конечной продукции отрасли:



Решение системы данных уравнений дает возможность представить коэффициенты полной фондоемкости по каждой из *m* групп фондов в качестве функции коэффициентов прямой фондоемкости:



В этих формулах величины *aij* и *bij* — уже известные коэффициенты прямых и полных материальных затрат.

Коэффициенты фондоемкости в межотраслевом балансе позволяют cвязать планируемый выпуск продукции с имеющимися производственными мощностями. К примеру, потребность в функционирующих фондах *k***-**й группы для достижения заданного объема материального производства *xj* по всем отраслям задается формулой:



**Пример 2.3.** В дополнение к условию примера 2.2 даны:

* матрица *V* удельной прибавленной стоимости: 
* матрица *L* затрат живого труда: 
* матрица Ф среднегодовых фондов: 

1. Определите равновесные цены.
2. Вычислите коэффициенты прямой и полной трудоемкости, составьте межотраслевой баланс затрат труда.
3. Рассчитайте коэффициенты прямой и полной фондоемкости.

**Решение**

**Равновесные цены**

Из решения задачи о нахождении объема валового выпуска (см. пример 2.2) имеемматрицу полных затрат:



Вычислим равновесные цены для продукции отраслей.

По формуле (2.8) имеем:



Умножив строки табл. 2.4 на соответствующие цены, получим стоимостной вариант межотраслевого баланса (табл. 2.5).

**Таблица 2.5**

Стоимостной межотраслевой баланс

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Производящая отрасль | Потребляющая отрасль | | | Конечный продукт | Валовой продукт |
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | 120 | 260 | 105 | 115 | 600 |
| 2 | 72 | 312 | 189 | 207 | 780 |
| 3 | 336 | 91 | 147 | 161 | 735 |
| Чистый доход | 72 | 117 | 294 | 483 |  |
| Валовой продукт | 600 | 780 | 735 |  | 2 115 |

Проверим наличие баланса (2.9):



**Межотраслевой баланс труда**

Даны затраты живого труда (трудовые ресурсы) в отраслях:  
*L*1 = 264, *L*2 = 234, *L*3 = 252.

*Коэффициенты прямой трудоемкости* представляют собой прямые затраты труда на единицу *j*-го вида продукции. Определить их можно как отношение затрат живого труда в производстве *j-*го продукта (*Lj*) к объему производства этого продукта, т.е. к валовому выпуску (*Xj*). Воспользовавшись формулой (2.10), получим:



*Коэффициенты полных затрат труда* определяются как произведение коэффициентов прямой трудоемкости и матрицы коэффициентов полных материальных затрат, формула (2.13):



Умножая первую, вторую и третью строки первого и второго квадрантов межотраслевого материального баланса на соответствующие коэффициенты прямой трудоемкости, получим схему межотраслевого баланса труда (в трудовых измерителях).

Межотраслевой баланс затрат труда представлен в табл. 2.6.

**Таблица 2.6**

Межотраслевой баланс затрат труда

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Производящая отрасль | Потребляющая отрасль | | | Затраты труда на конечную продукцию | Затраты труда в отраслях (трудовые ресурсы) |
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | 52,8 | 114,4 | 46,2 | 50,6 | 264 |
| 2 | 21,6 | 93,6 | 56,7 | 62,1 | 234 |
| 3 | 115,2 | 31,2 | 50,4 | 55,2 | 252 |

**Оценка показателей фондоемкости**

Дана стоимость среднегодовых фондов в отраслях: Ф1 = 216, Ф2 = 208, Ф3 = 231.

*Коэффициенты прямой фондоемкости*представляют собой величину среднегодовых фондов на единицу *j*-го вида продукции. Воспользовавшись формулой (2.16), получим:



*Коэффициенты полных затрат фондов* определяются как произведение коэффициентов прямой фондоемкости и матрицы коэффициентов полных материальных затрат, формула (2.18):



## 2.3. Линейная модель обмена

Пусть страны  торгуют между собой.

Обозначим  — национальные доходы стран, а долю дохода, которую страна  тратит на покупку товаров страны обозначим 

Введем в рассмотрение матрицы:

 — структурная матрица международной торговли;

 — равновесный вектор национальных доходов стран.

Будем предполагать, что весь национальный доход страны расходуется только на внутренние закупки и импорт, тогда сумма долей расходов каждой страны должна быть равна единице:

|  |  |
| --- | --- |
| где | (2.19) |

Произведение  представляет собой затраты страны  на закупку товаров страны  поэтому выручка страны  от внешней и внутренней торговли определяется суммой:

 где 

Для сбалансированной (бездефицитной) торговли бюджет любой страны не может быть больше выручки от торговли, т.е.

|  |  |
| --- | --- |
| где | (2.20) |

Суммируем неравенства (2.20), сгруппируем слагаемые с одинаковыми национальными доходами  и получим неравенство:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.21) |

Выражения в скобках представляют собой суммы элементов столбцов матрицы *А*, которые в силу условия (2.19) равны единице. Следовательно, выполнение неравенства (2.21) возможно только при условии равенства.

Таким образом, имеем систему балансовых уравнений:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.22) |

Решение системы (2.22) можно представить в матричной форме:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.23) |

Матричное уравнение (2.23) называется *линейной моделью обмена*, или *моделью международной торговли*. С математической точки зрения равенство (2.23) означает, что равновесный вектор национальных доходов стран является собственным вектором матрицы *А*, соответствующим ее собственному значению λ = 1.

**Справочные данные.** Число λ называется *собственным (характеристическим) значением (числом)* матрицы *А*, а ненулевой вектор (матрица-столбец) *Х* — соответствующим числу λ собственным вектором этой матрицы, если выполняется равенство:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.24) |

Представим равенство (2.24) в развернутом виде:



После преобразования получим систему однородных линейных уравнений:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.25) |

или в сокращенной матричной форме:



Система (2.25) имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю, т.е.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.26) |

Определитель | *А* – λ*Е* |называется *характеристическим многочленом линейного оператора матрицы А.* Уравнение (2.26) называется *характеристическим уравнением* для матрицы *А*.

Для нахождения собственных значений линейной матрицы *А* необходимо решить характеристическое уравнение (2.26), а для нахождения собственного вектора линейного оператора матрицы *А* по собственному значению λ*i* необходимо решить систему линейных однородных уравнений (2.25).

**Пример 2.4.** Структурная матрица торговли трех стран имеет вид:



Найдите соотношение национальных доходов этих стран, необходимое для сбалансированной торговли. Определите равновесный вектор национальных доходов, если известно, что суммарный доход стран составляет 5 000 ден. ед.

**Решение**

Найдем собственный вектор  отвечающий собственному значению λ = 1. Для этого составим систему уравнений вида (2.25):



Найдем решение системы методом Гаусса. Основная матрица системы имеет вид:



Выполним эквивалентные преобразования матрицы *А*.

Поменяем местами первую и третью строки, после чего прибавим ко второй строке первую, умноженную на –3. К третьей строке прибавим первую, умноженную на 4. Удалим одну из пропорциональных строк. Эквивалентная матрица имеет вид:



Ранг матрицы равен двум. Переменную *х*3 будем считать свободной.

Составим равносильную систему уравнений:



Выразим базисные переменные через свободные, получим:



Если *х*3 = *с*, то собственный вектор 

Таким образом, национальные доходы стран находятся в соотношении 1 : 2 : 1.

Так как суммарный доход стран составляет 5 000 ден. ед., равновесный вектор национальных доходов: = (1 250; 2 500; 1 250).