МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Региональный научно-образовательный математический центр КФУ
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ - 2019

Сборник трудов
Международной научной конференции
Казань, 4 – 7 сентября 2019 г.

Казанский (Приволжский) федеральный университет

2019

УДК 512.54+514.1+514.7+514.8+515.1+517.5+517.9
ББК 22.15
С56

С56 **Международная конференция «Современная геометрия и её приложения - 2019»**: сборник трудов. – Казань: Издательство Казанского университета, 2019. – 170 с.

ISBN 978-5-00130-198-1

В сборнике трудов опубликованы *0* статьи, посвященные современным проблемам геометрии и её приложений.

Материалы сборника предназначены для научных сотрудников, аспирантов, магистрантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области геометрии и ее приложений.

УДК 512.54+514.1+514.7+514.8+515.1+517.5+517.9

ББК 22.15

ISBN 978-5-00130-198-1

THE FIFTH GEOMETRY IN THE PLANE

A. Artykbaev

The thesis provides a definition of Galilean geometry, which is projective dual, where the vector norm is defined as the area of a triangle with marked two vertices.

Keywords: point, line, plane, Erlangen program, Galilean geometry, projective dual geometry, area of a triangle, norm of a vector

УДК 514.7

ХАРАКТЕРИСТИКА ЭЙЛЕРА–САТАКИ КОМПАКТНЫХ АФФИННЫХ ОРБИФОЛДОВ

А.В. Багаев[1], Н.И. Жукова[2]

1 *a.v.bagaev@gmail.com*; Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева

2 *nina.i.zhukova@yandex.ru*; Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"

Согласно гипотезе Черна характеристика Эйлера замкнутого аффинного многообразия должна обращаться в ноль. Нами доказана эквивалентность этой гипотезы Черна следующей гипотезе для орбифолдов: характеристика Эйлера–Сатаки компактного аффинного орбифолда равна нулю. Найдены условия, при выполнении которых компактный аффинный орбифолд имеет нулевую характеристику Эйлера–Сатаки. Построены примеры.

Ключевые слова: аффинный орбифолд, характеристика Эйлера-Сатаки орбифолда

1. Введение

Многообразие, имеющее плоскую линейную связность без кручения, называется аффинным. Аффинные многообразия можно рассматривать как (X, G)-многообразия, где $X = \mathbb{R}^n$, а G — группа аффинных преобразований $\mathbb{R}^n$.

Развитие геометрии аффинных многообразий связано прежде всего с гипотезами Черна, Маркуса и Ауслендера.

В 1955 году Черн высказал гипотезу, согласно которой любое замкнутое аффинное многообразие имеет нулевую характеристику Эйлера. Таким образом, нетривиальность характеристики Эйлера можно рассматривать как топологическое препятствие к существованию аффинной структуры на компактном многообразии.

Поскольку любое нечетномерное компактное многообразие имеет нулевую эйлерову характеристику, гипотеза Черна доказывается только для четномерных аффинных многообразий. Разными авторами получены различные достаточные условия выполнения гипотезы Черна, однако в целом она остается открытой проблемой. Известно выполнение гипотезы Черна для комплексных аффинных многообразий. Б. Костант и Д. Сулливан [1] доказали гипотезу Черна для полных аффинных многообразий. Как показано Ж. П. Бензекри [2], гипотеза Черна верна для замкнутых поверхностей, среди которых только тор и бутылка Клейна допускают аффинную структуру.

Аффинное n-мерное многообразие, группа голономии которого принадлежит специальной линейной группе $SL(n,\mathbb{R})$, называется *специальным*. Аффинное многообразие является специальным тогда и только тогда, когда оно допускает параллельную форму объема. Специальные аффинные многообразия определяют достаточно большой класс аффинных многообразий, включающий в себя плоские псевдоримановы многообразия произвольной сигнатуры, плоские симплектические многообразия.

Значительным продвижением в доказательстве гипотезы Черна является недавняя работа Б. Клинглера [3], в которой доказано, что характеристика Эйлера замкнутого специального аффинного многообразия равна нулю.

Другие достаточные условия, при которых гипотеза Черна верна, найдены М. Хиршем и У. Терстоном [4], У. Гольдманом и М. Хиршем [5] (см. обзор в [3]).

Гладкие орбифолды можно рассматривать как естественное обобщение гладких многообразий: в качестве модельного пространства берется не $\mathbb{R}^n$, а фактор-пространство $\mathbb{R}^n/\Gamma$, где Γ — конечная группа диффеоморфизмов $\mathbb{R}^n$, при этом группа Γ не является фиксированной и может меняться при переходе от одной окрестности орбифолда к другой.

Понятие орбиофолда введено И. Сатаки [6] под названием V-многообразия. Сам термин орбифолд предложен У. Терстоном [7].

Орбифолды естественным образом возникают и используются в различных областях математики и теоретической физики: в теории слоений, в симплектической геометрии, в теории струн, в деформационном квантовании (обзор можно найти, например, в [8]).

Многие понятия и теоремы геометрии гладких многообразий такие, как когомологии Де Рама, характеристические классы, теорема Гаусса–Бонне, теорема Пуанкаре–Хопфа были распространены И. Сатаки [6, 9] на орбифолды. У. Терстон [7] применил классификацию компактных двумерных римановых орбифолдов постоянной кривизны к классификации замкнутых трехмерных многообразий. Группам автоморфизмов геометрических структур на орбифолдах посвящены работы [10, 11, 12].

Сформулируем аналог гипотезы Черна для орбифолдов:

Характеристика Эйлера-Сатаки компактного аффинного орбифолда равна нулю.

Целью данной работы является доказательство и применение эквивалентности гипотезы Черна для аффинных многообразий его аналогу для орбифолдов.

Основная теорема. *Аналог гипотезы Черна для компактных аффинных орбифолдов эквивалентен гипотезе Черна для компактных аффинных многообразий, то есть если верна одна из этих гипотез, то верна и другая.*

Поскольку компактные аффинные орбифолды включают в себя компактные аффинные многообразия, то в одну сторону это утверждение заведомо выполняется.

Ключевым результатом, используемым в доказательстве основной теоремы, является теорема 1, согласно которой любой компактный аффинный орбифолд — очень хороший.

Нами найдены также достаточные условия для выполнения аналога гипотезы Черна (теоремы 2–5). Построен пример (пример 1), показывающий отсутствие прямых аналогов с гипотезой Черна для топологической и орбифолдной эйлеровых характеристик компактных аффинных орбифолдов.

Кроме того, как следует из примера 2, аналог гипотезы Черна, как и сама гипотеза Черна, остается открытым.

2. Орбифолды и их характеристика Эйлера–Сатаки

Гладкие орбифолды Пусть $\mathcal{N}$ — связное паракомпактное хаусдорфово топологическое пространство, n — натуральное число. Пусть $\tilde{U}$ — связное открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, Γ_U — конечная группа диффеоморфизмов $\tilde{U}$, $\varphi_U\colon \tilde{U} \to \mathcal{N}$ — Γ_U-инвариантное отображение, индуцирующее гомеоморфизм q_U из $\tilde{U}/\Gamma_U$ на открытое подмножество $U = \varphi_U(\tilde{U})$ в $\mathcal{N}$. Тройка $(\tilde{U},\Gamma_U,\varphi_U)$ называется картой с координатной окрестностью U.

Пусть $(\tilde{U},\Gamma_U,\varphi_U)$ и $(\tilde{V},\Gamma_V,\varphi_V)$ — две карты с координатными окрестностями U и V, причем $U \subset V$. Вложением карты $(\tilde{U},\Gamma_U,\varphi_U)$ в карту $(\tilde{V},\Gamma_V,\varphi_V)$ называется гладкое вложение $\varphi_{VU}\colon \tilde{U} \to \tilde{V}$, удовлетворяющее равенству $\varphi_V \circ \varphi_{VU} = \varphi_U$.

Атласом на $\mathcal{N}$ называется семейство карт $\mathcal{A} = \{(\tilde{U},\Gamma_U,\varphi_U)\}$, покрывающих $\mathcal{N}$ и локально согласованных в следующем смысле: для любых двух карт $(\tilde{U},\Gamma_U,\varphi_U)$ и $(\tilde{V},\Gamma_V,\varphi_V)$ с координатными окрестностями U и V и любой точки $x \in U \cap V$ существуют открытая окрестность $W \subset U \cap V$ точки x, карта $(\tilde{W},\Gamma_W,\varphi_W)$ с координатной окрестностью W и вложения карт $\varphi_{UW}\colon \tilde{W} \to \tilde{U}$ и $\varphi_{VW}\colon \tilde{W} \to \tilde{V}$.

Связное паракомпактное хаусдорфово топологическое пространство $\mathcal{N}$, снабженное максимальным (по включению) атласом $\mathcal{A}$, называется n-мерным орбифолдом и обозначается через $\mathcal{N}$.

Для карт $(\tilde{U},\Gamma_U,\varphi_U)$ и $(\tilde{V},\Gamma_V,\varphi_V)$ из атласа $\mathcal{A}$ с координатными окрестностями, содержащими $x \in \mathcal{N}$, подгруппы изотропии $(\Gamma_U)_y$ и $(\Gamma_V)_z$ точек $y \in \varphi_U^{-1}(x)$ и $z \in \varphi_V^{-1}(x)$ изоморфны. Таким образом, для каждой точки $x \in \mathcal{N}$ определена единственная с точностью до изоморфизма группа $\Gamma_{(x)}$, называемая орбифолдной группой в x. Точка x орбифолда $\mathcal{N}$ называется регулярной, если ее орбифолдная группа $\Gamma_{(x)}$ тривиальна; в противномм случае, точка x называется сингулярной.

Характеристика Эйлера–Сатаки орбифолда Известно, что гладкий компактный орбифолд $\mathcal{N}$ допускает такую конечную триангуляцию, что орбифолдные группы точек внутренности любого симплекса одинаковы. Пусть $\mathcal{K}$ — такая триангуляция компактного орбифолда $\mathcal{N}$. Характеристика Эйлера–Сатаки компактного орбифолда $\mathcal{N}$ задается формулой [7, 9]:

$$\chi^{ES}(\mathcal{N}) = \sum_{\sigma\in\mathcal{K}} (-1)^{\dim\sigma}\frac{1}{|\Gamma_\sigma|},$$

где Γ_σ — орбифолдная группа произвольно фиксированной точки внутренности симплекса σ, а $|\Gamma_\sigma|$ — ее порядок.

И. Сатаки [9] ввел понятие индекса векторного поля на компактном орбифолде $\mathcal{N}$ и доказал аналог теоремы Пуанкаре–Хопфа, согласно которому для любого векторного поля X с особенностями в точках $x_1, \ldots, x_k$ на компактном орбифолде $\mathcal{N}$ имеет место формула

$$\chi^{ES}(\mathcal{N}) = \sum_{i=1}^{k} I_{x_i}(X),$$

где $I_{x_i}(X)$ — индекс векторного поля X в x_i, $i = 1, \ldots, k$. Таким образом, последнюю формулу можно рассматривать как определение характеристики Эйлера–Сатаки для гладкого компактного орбифолда $\mathcal{N}$.

Отметим, что характеристика Эйлера–Сатаки $\chi^{ES}(\mathcal{N})$ не является, вообще говоря, целым числом и совпадает с общепринятой характеристикой Эйлера для $\mathcal{N}$ в случае, когда $\mathcal{N}$ является многообразием.

Напомним, что орбифолд $\mathcal{N}$ называется *очень хорошим* [7], если существуют такие многообразие M и конечная группа G диффеоморфизмов M, что $\mathcal{N} = M/G$.

Пусть G — конечная группа диффеоморфизмов компактного многообразия M, тогда $\mathcal{N} = M/G$ — очень хороший орбифолд. В этом случае для орбифолда $\mathcal{N} = M/G$ имеет место равенство

$$\chi^{ES}(\mathcal{N}) = \frac{1}{|G|}\chi(M), \tag{1}$$

где $\chi(M)$ — характеристика Эйлера многообразия M [13].

3. Компактные аффинные орбифолды

Пусть n-мерный орбифолд $\mathcal{N}$ задан атласом $\mathcal{A} = \{(\tilde{U}, \Gamma_U, \varphi_U)\}$, где $\tilde{U}$ — открытое подмножество аффинного пространства A^n, причем диффеоморфизмы группы Γ_U являются ограничениями на $\tilde{U}$ аффинных преобразований из аффинной группы $Aff(A^n)$. Если каждое вложение карт $\varphi_{VU} : \tilde{U} \to \tilde{V}$, удовлетворяющее равенству $\varphi_V \circ \varphi_{VU} = \varphi_U$, является ограничением аффинного преобразования A^n, то $\mathcal{N}$ называется *аффинным орбифолдом*.

Следующие утверждения доказаны нами в [13].

Теорема 1. *Любой компактный аффинный орбифолд является очень хорошим.*

Из теоремы 1 и формулы (1) вытекает основная теорема.

Основная теорема. *Аналог гипотезы Черна для компактных аффинных орбифолдов эквивалентен гипотезе Черна для компактных аффинных многообразий.*

Используя расслоение линейных реперов над n-мерным аффинным орбифолдом $\mathcal{N}$, в [13] нами введено понятие группы голономии орбифолда $\mathcal{N}$ как подгруппы общей линейной группы $GL(n, \mathbb{R})$. Оно является естественным обобщением понятия группы голономии n-мерного аффинного многообразия. Так как группа голономии аффинного орбифолда определена однозначно с точностью до сопряженности в группе $GL(n, \mathbb{R})$, а сопряженные матрицы имеют один и тот же определитель, то корректно следующее определение.

Определение 1. *Если группа голономии аффинного орбифолда $\mathcal{N}$ является подгруппой специальной линейной группы $SL(n,\mathbb{R})$, то $\mathcal{N}$ называется специальным аффинным орбифолдом.*

С применением основной теоремы нами доказана следующая теорема, распространяющая результат Б. Клинглера [3] на орбифолды.

Теорема 2. *Характеристика Эйлера–Сатаки компактного специального аффинного орбифолда равна нулю.*

Псевдориманов орбифолд $(\mathcal{N},g)$ называется плоским, если кривизна его связности Леви–Чивита равна нулю. Симплектический орбифолд $(\mathcal{N},\omega)$ называется плоским, если он допускает плоскую симплектическую связность.

Поскольку плоские псевдоримановы и плоские симплектические орбифолды являются специальными аффинными орбифолдами, то, применяя теорему 2, нами получены следующие два утверждения.

Теорема 3. *Если $(\mathcal{N},g)$ — компактный плоский псевдориманов орбифолд произвольной сигнатуры, то его характеристика Эйлера–Сатаки равна нулю.*

Теорема 4. *Пусть компактный симплектический орбифолд $(\mathcal{N},\omega)$ является плоским. Тогда $\mathcal{N}$ имеет нулевую характеристику Эйлера–Сатаки.*

Следующая теорема распространяет результат Б. Костанта и Д. Сулливана [1] на орбифолды.

Теорема 5. *Компактный полный аффинный орбифолд имеет нулевую характеристику Эйлера–Сатаки.*

С использованием основной теоремы мы также получаем, что характеристика Эйлера–Сатаки компактных комплексных аффинных орбифолдов и двумерных компактных аффинных орбифолдов равна нулю.

4. Замечания и примеры

Заметим, что существуют различные (не эквивалентные) подходы к понятию характеристики Эйлера для орбифолдов.

Пусть $\mathcal{N}$ — компактный орбифолд. Характеристика Эйлера подлежащего топологического пространства орбифолда $\mathcal{N}$ называется топологической характеристикой Эйлера и обозначается через $\chi(\mathcal{N})$.

В [14] для очень хорошего орбифолда $\mathcal{N} = M/G$ определена орбифолдная характеристика Эйлера $\chi^{orb}(\mathcal{N})$. Пусть $[g]$ — класс сопряженности элемента $g \in G$, т.е. $[g] = \{hgh^{-1} \mid h \in G\}$, $C(g)$ — централизатор элемента g в G, M^g — множество точек в M, неподвижных относительно g. Согласно [15], орбифолдная характеристика Эйлера $\chi^{orb}(\mathcal{N})$ может быть определена равенством

$$\chi^{orb}(\mathcal{N}) = \sum_{[g]} \chi(M^g/C(g)),$$

где $\chi(M^g/C(g))$ — топологическая характеристика Эйлера фактор-многообразия $M^g/C(g)$.

Отметим, что в случае, когда орбифолд $\mathcal{N}$ — многообразие, все три характеристики совпадают: $\chi(\mathcal{N}) = \chi^{orb}(\mathcal{N}) = \chi^{ES}(\mathcal{N})$. В отличие от характеристики

Эйлера–Сатаки, топологическая и орбифолдная характеристики Эйлера всегда являются целыми числами.

Обобщенные характеристики Эйлера для орбифолдов определены в [16, 17].

Пример 1 («Биллиардный стол»). Пусть группа G порождена отражениями аффинной плоскости A^2 относительно прямых $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. Группа G сохраняет аффинную структуру плоскости A^2 и изоморфна произведению бесконечных диэдральных групп $D_\infty \times D_\infty$, где $D_\infty = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. Фактор-пространство $\mathcal{N} = A^2/G$ является компактным полным аффинным орбифолдом, который можно рассматривать как квадрат на плоскости, при этом его вершины — сингулярные точки с группой орбифолдности, изоморфной $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, его стороны (не включая вершины) состоят из сингулярных точек с групппой орбифолдности, изоморфной $\mathbb{Z}_2$, а его внутренность составляют регулярные точки. Такой орбифолд называется биллиардным столом. Непосредственные вычисления показывают, что $\chi(\mathcal{N}) = 1$, $\chi^{orb}(\mathcal{N}) = 9$. Согласно теореме 5 выполняется равенство $\chi^{ES}(\mathcal{N}) = 0$. Таким образом, все три характеристики $\chi^{ES}(\mathcal{N})$, $\chi(\mathcal{N})$ и $\chi^{orb}(\mathcal{N})$ компактного аффинного орбифолда $\mathcal{N}$ попарно различны.

Этот пример показывает, что не существует прямых аналогов гипотезы Черна для топологической характеристики Эйлера $\chi(\mathcal{N})$ и орбифолдной характеристики Эйлера $\chi^{orb}(\mathcal{N})$ компактного аффинного орбифолда $\mathcal{N}$.

Пример 2. Зафиксируем $\lambda \in (0,1)$ и зададим гомотетию $\varphi\colon A^4\setminus\{0\} \to A^4\setminus\{0\}$ равенством $\varphi(x) = \lambda x$, $x \in A^4\setminus\{0\}$. Группа Φ, порожденная гомотетией φ, действует на $A^4\setminus\{0\}$ свободно и собственно разрывно. Следовательно, фактор-отображение $\nu\colon A^4\setminus\{0\} \to A^4\setminus\{0\}/\Phi$ является регулярным накрытием, а фактор-пространство $M = A^4\setminus\{0\}/\Phi$ имеет структуру компактного 4-мерного аффинного многообразия, диффеоморфного $S^3 \times S^1$. Используя мультипликативность характеристики Эйлера и равенство $\chi(S^1) = 0$, будем иметь $\chi(M) = \chi(S^3 \times S^1) = \chi(S^3)\chi(S^1) = 0$.

Так как $A^4\setminus\{0\}$ не является полным аффинным многообразием, то аффинное фактор-многообразие M также не полное. Поскольку гомотетия φ не сохраняет форму объема, то M не является специальным аффинным многообразием.

Пусть аффинное преобразование $\tilde{\gamma}\colon A^4\setminus\{0\} \to A^4\setminus\{0\}$ задано формулой $\tilde{\gamma}(x_1,x_2,x_3,x_4) = (-x_1,-x_2,x_3,x_4)$, где $x = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in A^4\setminus\{0\}$. Поскольку $\tilde{\gamma}\circ\varphi = \varphi\circ\tilde{\gamma}$, то $\tilde{\gamma}$ определяет такой автоморфизм γ аффинного многообразия M, что $\gamma\circ\nu = \nu\circ\tilde{\gamma}$. Пусть Γ — группа, порожденная γ, при этом $\Gamma \cong \mathbb{Z}_2$. Так как Γ — группа автоморфизмов аффинного многообразия M, то фактор-пространство $\mathcal{N} = M/\Gamma$ допускает структуру компактного 4-мерного аффинного орбифолда.

Согласно формуле (1) имеем $\chi^{ES}(\mathcal{N}) = \chi(M)/|\Gamma| = 0$. Таким образом, $\mathcal{N}$ — компактный аффинный орбифолд, не являющийся ни полным, ни специальным и имеющий нулевую характеристику Эйлера–Сатаки.

Этот пример показывает, что для выполнения аналога гипотезы Черна для компактных аффинных орбифолдов условие полноты, как и условие быть специальным, являются достаточными, но не являются необходимыми условиями. Таким образом, аналог гипотезы Черна для орбифолдов является открытой проблемой.

Благодарности. Доказательство основной теоремы, теорем 1-2 и теоремы 5 поддержано грантом № 17-11-01041 Российского Научного Фонда; утверждения теорем 3 и 4 получены в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2019 году.

Литература

1. Kostant B., Sullivan D. *The Euler characteristic of an affine space form is zero* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1975.– V. 81. – № 5. – P. 937–938.

2. Benzécri J.P. *Variétés localement affines*, Thesis, Princeton University, 1955.

3. Klingler B. *Chern's conjecture for special affine manifolds* // Ann. of Math. – 2017. – V. 186. – № 1. – P. 69–95.

4. Hirsch M., Thurston W. *Foliated bundles, invariant measures and at manifolds* // Ann. Math. – 1975. – V. 101. – P. 369–390.

5. Goldman W., Hirsch M.W. *Flat bundles with solvable holonomy* // Proc. Amer.Math. Soc. – 1981. V. 82. – № 3. – P. 491–494.

6. Satake I. *On a generalization of the notion of manifold* // Proc. Nat. Acad. Sci. – 1956. – V. 42. –№ 6. – P. 359–363.

7. Thurston W.P. *The geometry and topology of three-manifolds.* – Princeton Univ. Math. Dept., Lecture Notes, 1979.

8. Adem A., Leida J., and Y. Ruan *Orbifolds and stringy topology.* – Cambridge Tracts in Mathematics, V. 171. – New York: Cambridge University Press, 2007.

9. Satake I. *The Gauss–Bonnet theorem for V-manifolds* // J. Math. Soc. Japan – 1957. – V. 9. – P. 464—492.

10. Багаев А.В., Жукова Н.И. *Группы автоморфизмов G-структур конечного типа на орбиобразиях* // Сиб. Мат. Журнал. – 2003. – Т. 44. – № 2. - С. 263–278.

11. Багаев А.В., Жукова Н.И. *Группы изометрий римановых орбифолдов* // Сиб. Мат. Журнал. – 2007. – Т. 48. – № 4. – С. 723–741.

12. Zhukova N.I. *Automorphism groups of elliptic G-structures on orbifolds* // Journal of Geometry and Physics. – 2018. – V. 132. – P. 146–154.

13. Bagaev A.V., Zhukova N.I. *An analog of Chern's conjecture for the Euler-Satake characteristic of affine orbifolds* // Journal of Geometry and Physics. – 2019. – V. 142. – P. 80–91.

14. Dixon L., Harvey J. A., Vafa C., Witten E. *Strings on orbifolds* // Nuclear Phys. B. – 1985. – V. 261. – P. 678–686.

15. Hirzebruch F., Höfer T. *On the Euler number of an orbifold* // Math. Ann. – 1990. – V. 286. – № 1—3. – P. 255–260.

16. Farsi C., Seaton C. *Generalized orbifold Euler characteristics for general orbifolds and wreath products* // Algebraic & Geometric Topology. – 2011. – V. 11. – P. 523–551.

17. Гусейн-Заде С.М. *Эквивариантные аналоги эйлеровой характеристики и формулы типа Макдональда* // УМН. – 2017. – Т. 72. – № 1. – С. 3–36.

THE EULER–SATAKE CHARACTERISTIC OF COMPACT AFFINE ORBIFOLDS

A.V. Bagaev, N.I. Zhukova

According to Chern's conjecture, the Euler characteristic of a closed affine manifold must be zero. We prove the equivalence of this Chern conjecture to the following conjecture for orbifolds: the Euler–Sataki characteristic of a compact affine orbifold is zero. We found the conditions under which the

Euler–Sataki characteristic of a compact affine orbifold vanishes. Examples are constructed.
Keywords: Affine orbifold, Euler–Satake characteristic of an orbifold

УДК 514.763.85

СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ БЛЭКА–ШОУЛЗА–МЕРТОНА ДЛЯ ЕВРОПЕЙСКИХ ОПЦИОНОВ

Л.Н. Бакирова[1], В.В. Шурыгин (мл.)[2]

1 *lbakir@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *vshjr@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В работе полностью найдена алгебра Ли симметрий уравнения Блэка–Шоулза–Мертона для европейских опционов со стохастической волатильностью.

Ключевые слова: уравнение Блэка-Шоулза-Мертона, симметрии уравнений в частных производных, финансовая математика

Одной из классических моделей ценообразования европейских опционов является модель Блэка–Шоулза–Мертона [1, 2, 3]. Классическое уравнение Блэка–Шоулза–Мертона имеет вид

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} + rxu_x - ru = 0.$$

В последние годы ряд работ посвящен нахождению алгебры Ли симметрий различных уравнений, являющихся обобщениями этой модели. В работе [4] рассматривается так называемое уравнение Блэка–Шоулза–Мертона для европейских опционов в случае стохастической волатильности. Оно имеет вид

$$\frac{1}{2}f^2(y)x^2u_{xx}+\rho\beta x f(y)u_{xy}+\frac{1}{2}\beta^2u_{yy}+rxu_x+\left(\alpha(m-y)-\beta\rho\frac{\mu-r}{f(y)}\right)u_y-ru+u_t=0. \quad (1)$$

Здесь $f(y)$ — произвольная гладкая функция, а r, ρ, α, β, μ — вещественные параметры, удовлетворяющие условиям $|\rho|<1$, и $\alpha\beta\neq 0$. Авторами была найдена алгебра Ли симметрий этого уравнения для случая $f=\text{const}$. В настоящей работе мы дополняем их результат.

Теорема. *Алгебра Ли симметрий уравнения* (1) *для произвольной функции* $f(y)$ *есть прямая сумма трехмерной подалгебры с базисом*

$$X_1=\frac{\partial}{\partial t},\ X_2=x\frac{\partial}{\partial x},\ X_3=u\frac{\partial}{\partial u},$$

и бесконечномерной подалгебры, состоящей из симметрий вида

$$X_b=b(x,y,t)\frac{\partial}{\partial u},$$

где $b(x,y,t)$ *— произвольное решение уравнения* (1), *во всех случаях, кроме двух нижеприведенных.*