ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 11. № 3 (2019). С. 30-45.

УДК 514.7

ГРАФИКИ НЕКОТОРОГО КЛАССА ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЛОЕНИЙ НА ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Н.И. ЖУКОВА

Аннотация. Исследуются вполне геодезические слоения F произвольной коразмерности на n-мерных псевдоримановых многообразиях, метрика на слоях которых не вырождается, а дополнительное по ортогональности распределение является связностью Эресмана. Общепринятый график $G(F)$ такого слоения, вообще говоря, является нехаусдорфовым многообразием, поэтому мы исследуем график $G_{\mathfrak{M}}(F)$ слоения со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$, введенный ранее автором, который всегда хаусдорфов. Мы доказываем, что на графике $G_{\mathfrak{M}}(F)$ определена псевдориманова метрика, относительно которой индуцированное слоение и простые слоения, образованные слоями канонических проекций, являются вполне геодезическими. Доказано, что слои индуцированного слоения на исследуемом графике являются невырожденно приводимыми псевдоримановыми многообразиями и дано описание их структуры. Рассмотрено приложение к графикам параллельных слоений на невырожденно приводимых псевдоримановых многообразиях. Показано, что любое слоение, полученное надстройкой гомоморфизма фундаментальной группы псевдориманова многообразия, относится к исследуемому классу слоений.

Ключевые слова: вполне геодезическое слоение, псевдориманово многообразие, график слоения, связность Эресмана для слоения.

Mathematics Subject Classification: 53C12, 53C50, 57R30

1. Введение. Основные результаты

Группоид голономии слоения введен Ш. Эресманом, эквивалентную конструкцию предложил Х. Винкельнкемпер [1] под названием графика слоения. График слоения содержит всю информацию о слоении и о его росковых группах голономии, общепринятых в теории слоений [2]. C^*-алгебры комплексно-значных функции для слоений, введенные Конном [3], определяются на группоидах голономии этих слоений.

Пусть (M, F) — гладкое слоение коразмерности q на n-мерном гладком многообразии M. Р.А. Блюменталь и Дж. Хебда ([4] и [5]) определили связность Эресмана для (M, F) как q-мерное распределение $\mathfrak{M}$, трансверсальное слоям, интегральные кривые которого допускают перенос вдоль любой кривой в слое слоения. Для произвольного слоя L_α слоения (M, F) введено понятие группы $\mathfrak{M}$-голономии. Мы приводим точные определения в разделе 2.

Напомним конструкцию графика $G_{\mathfrak{M}}(F)$ слоения F коразмерности q со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$ на n-мерном многообразии M, введенного нами в [6] (см. также [7], [8]). Рассмотрим любые две точки x и y из одного слоя L_α этого слоения. Обозначим через $A(x, y)$ множество кусочно гладких путей в L_α, соединяющих x с y. Пути h и f из $A(x, y)$ называются эквивалентными $h \sim f$, если петля $h \cdot f^{-1}$, равная произведению путей h и f^{-1}, порождает тривиальный элемент группы $\mathfrak{M}$-голономии $H_{\mathfrak{M}}(L_\alpha, x)$ слоя L_α в точке x. Класс эквивалентности, содержащий путь h,

N.I. Zhukova, Graphs of totally geodesic foliations on pseudo-Riemannian manifolds.

Работа поддержана РФФИ (грант № 16-11-00312) и Центром фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2019 г.

Поступила 19 июля 2018 г.

обозначается через $\{h\}$. Множество $G_{\mathfrak{M}}(F)$ троек вида $(x, \{h\}, y)$, где $x \in M$, $y \in L(x)$, $h \in A(x, y)$, называется *графиком слоения* (M, F) *со связностью Эресмана* $\mathfrak{M}$, а отображения $p_1 : G_{\mathfrak{M}}(F) \to M : (x, \{h\}, y) \mapsto x$, $p_2 : G_{\mathfrak{M}}(F) \to M : (x, \{h\}, y) \mapsto y$ называются *каноническими проекциями*. Нами доказано, что график $G_{\mathfrak{M}}(F)$ естественным образом наделяется структурой $(2n-q)$-мерного *хаусдорфова* гладкого многообразия [6] (см. также [7], [8]).

Таким образом, график слоения со связностью Эресмана $G_{\mathfrak{M}}(F)$ определен аналогично классическому графику слоения $G(F)$ [1] заменой ростковой группы голономии $\Gamma(L, x)$ слоя L, $x \in M$, на группу $\mathfrak{M}$-голономии $H_{\mathfrak{M}}(L, x)$. В отличие от $G_{\mathfrak{M}}(F)$, топологическое пространство графика $G(F)$, вообще говоря, не хаусдорфово.

Отображение

$$\beta : G_{\mathfrak{M}}(F) \to G(F), \beta(x, \{h\}, y) = (x, < h >, y),$$

где $(x, < h >, y) \in G(F)$, является локальным диффеоморфизмом. Оба графика $G(F)$ и $G_{\mathfrak{M}}(F)$ наделяются структурой группоидов, причем β — гомоморфизм этих группоидов, то есть отображает произведение элементов одного группоида в произведение соответствующих элементов другого.

Пусть $p : M \to B$ — субмерсия и $\mathfrak{M}$ — распределение на B. Будем использовать обозначение $p^*\mathfrak{M} := \{\mathfrak{N}_x \,|\, x \in M\}$, где $\mathfrak{N}_x = \{Y \in T_xM \,|\, p_{*x}Y \in \mathfrak{M}_{p(x)}\}$

Нами доказаны следующие свойства указанных выше двух графиков произвольного слоения со связностью Эресмана [6], [7].

Теорема 1. *Пусть (M, F) — слоение коразмерности q на n-мерном гладком многообразии M, допускающее связность Эресмана $\mathfrak{M}$. Тогда :*

1. Гомоморфизм группоидов $\beta : G_{\mathfrak{M}}(F) \to G(F)$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда график $G(F)$ хаусдорфов.

2. Канонические проекции $p_i : G_{\mathfrak{M}}(F) \to M$, $i = 1, 2$, являются локально тривиальными расслоениями.

3. Распределение $\mathfrak{N} := p_1^*\mathfrak{M} \cap p_2^*\mathfrak{M}$ — связность Эресмана для индуцированного слоения

$$\mathbb{F} := \{p_1^{-1}(L) \,|\, L \in F\} = \{p_2^{-1}(L) \,|\, L \in F\},$$

на графике $G_{\mathfrak{M}}(F)$, причем группы голономии $H_{\mathfrak{N}}(\mathbb{L}, z)$ и $H_{\mathfrak{M}}(L, x)$, $x = p_1(z)$, слоев $\mathbb{L}$ и $L = p_1(\mathbb{L})$, а также ростковые группы голономии этих слоев канонически изоморфны.

Определение 1. *Псевдогруппа $\mathcal{H}$ локальных голономных диффеоморфизмов многообразия M называется квазианалитической, если из того, что для некоторого открытого связного подмножества V в M выполняется равество $h|_V = id_V$ для какого-либо элемента $h \in \mathcal{H}$, следует, что $h = id_{D(h)}$ на всей связной области определения $D(h)$ элемента h, содержащей V.*

Согласно [9, Предложение 2], критерий Винкелькемпера о хаусдорфовости графика $G(F)$ может быть переформулирован следующим образом:

Предложение 1. *Топологическое пространство графика $G(F)$ слоения (M, F) хаусдорфово тогда и только тогда, когда псевдогруппа голономии этого слоения квазианалитична.*

Согласно Теореме 1 и Предложению 1 для слоений со связностью Эресмана, имеющих квазианалитическую псевдогруппу голономии, мы можем отождествить графики $G_{\mathfrak{M}}(F)$ и $G(F)$ по каноническому изоморфизму β и обозначить это через $G_{\mathfrak{M}}(F) \cong G(F)$. Следовательно, график $G_{\mathfrak{M}}(F)$ можно рассматривать как десингуляризацию нехаусдорфова графика $G(F)$, где под сингулярностью понимается нехаусдорфовость. Такое существенное различие свойств этих графиков объясняется тем, что группа $\mathfrak{M}$-голономии $H(L_\alpha, x)$ имеет глобальный характер, в то время как ростковая группа голономии $\Gamma(L_\alpha, x)$ носит локально-глобальных характер, глобальный по слоям и локальный по трансверсалям.

На графике $G_{\mathfrak{M}}(F)$ индуцируются следующие три слоения

$$F^{(1)} = \{p_1^{-1}(x) \,|\, x \in M\}, \;\; F^{(2)} = \{p_2^{-1}(x) \,|\, x \in M\}, \;\; \mathbb{F} = \{p_1^{-1}(L) \,|\, L \in F\}.$$

Заметим, что $\mathbb{F} = \{p_2^{-1}(L) \,|\, L \in F\}$.

Введем обозначение $\mathfrak{N} = p_1^*\mathfrak{M} \cap p_2^*\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^{(1)} = \mathfrak{N} \oplus TF^{(2)}$. Подчеркнем, что любое гладкое векторное поле X на графике $G_{\mathfrak{M}}(F)$ однозначно представимо в виде $X = X^{(1)} + X^{\mathfrak{N}} + X^{(2)}$, где $X^{(i)} \in \mathfrak{X}_{F^{(i)}}(G_{\mathfrak{M}}(F))$, $i = 1, 2$, $X^{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{N}}(G_{\mathfrak{M}}(F))$, а также в виде

$$X = X^{(1)} + X^{\mathfrak{M}^{(1)}}, \tag{1}$$

где $X^{\mathfrak{M}^{(1)}} \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}^{(1)}}(G_{\mathfrak{M}}(F))$.

Определение 2. *Пусть (M, F) — слоение коразмерности q на n-мерном псевдоримановом многообразии (M, g), $0 < q < n$, причем на слоях индуцируется псевдориманова метрика. Тогда для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(G_{\mathfrak{M}}(F))$, представленных в виде (1), равенство*

$$d(X, Y) := (p_1^*g)(X^{\mathfrak{M}^{(1)}}, Y^{\mathfrak{M}^{(1)}}) + (p_2^*g)(X^{(1)}, Y^{(1)}) \tag{2}$$

определяет псевдориманову метрику d на графике $G_{\mathfrak{M}}(F)$, которая называется индуцированной метрикой.

В случае когда (M, F) — трансверсально аналитическое риманово слоение, а $\mathfrak{M}$ — ортогональное распределение на полном римановом многообразии, график $G(F)$ отождествляется с графиком $G_{\mathfrak{M}}(F)$, индуцированная метрика d на $G(F)$ рассматривалась Р. Волаком в [10].

Определение 3. *Распределение $\mathfrak{M}$ на псевдоримановом многообразии (M, g) называется геодезически инвариантным, если любая гладкая геодезическая связности Леви-Чивита метрики g, касающаяся распределения $\mathfrak{M}$ в одной точке, является интегральной кривой этого распределения.*

Слоения с геодезически инвариантным касательным распределением называются вполне геодезическими слоениями.

Следующая теорема является одним из основных результатов данной работы.

Теорема 2. *Пусть (M, F) — вполне геодезическое слоение произвольной коразмерности q на n-мерном псевдоримановом многообразии (M, g), причем на слоях индуцируется псевдориманова метрика. Предположим, что q-мерное распределение $\mathfrak{M}$, ортогональное слоению (M, F), является связностью Эресмана для (M, F). Тогда определенные выше слоения $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ и $\mathbb{F}$ на графике $G_{\mathfrak{M}}(F)$ с индуцированной метрикой d являются вполне геодезическими, а q-мерное распределение $\mathfrak{N}$, ортогональное $\mathbb{F}$, геодезически инвариантно.*

В силу первого утверждения Теоремы 1 и Предложения 1 из Теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Предположим, что слоение (M, F) удовлетворяет условиям Теоремы 2, и псевдогруппа голономии этого слоения квазианалитическая. Тогда график $G(F)$ отождествляется с графиком $G_{\mathfrak{M}}(F)$, наделенным индуцированной метрикой, индуцированное слоение $(G(F), \mathbb{F})$ и слоения, образованные слоями канонических проекций $p_i : G(F) \to M$, $i = 1, 2$, являются вполне геодезическими.*

Поскольку псевдогруппа голономии трансверсально аналитического слоения (M, F) является квазианалитической, графики $G(F)$ и $G_{\mathfrak{M}}(F)$ отождествляются. Так как полнота риманова многообразия влечет полноту любого вполне геодезического слоения на этом многообразии, то, согласно Предложению 4, дополнительное по ортогональности к TF распределение $\mathfrak{M}$ — связность Эресмана для (M, F). Поэтому из Теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Если (M, F) — трансверсально аналитическое слоение на полном римановом многообразии (M, g) и $G(F)$ — график этого слоения, наделенный индуцированной метрикой, то индуцированное слоение $(G(F), \mathbb{F})$ и слоения $(G(F), F^{(i)})$, $i = 1, 2$, образованные слоями канонических проекций $p_i : G(F) \to M$, являются вполне геодезическими слоениями.*

Замечание 1. *При выполнении условий Следствия 2 Р. Волаком доказана вполне геодезичность слоения, образованного слоями только одной канонической проекции $p_1 : G(F) \to M$* [10, Теорема 2].

Замечание 2. *Графики псевдоримановых слоений на псевдоримановых многообразиях с невырожденной метрикой на слоях исследовались А. Ю. Долгоносовой и автором в* [11].

Применяя Теорему 2, мы доказываем следующие свойства графиков исследуемого класса вполне геодезических слоений.

Теорема 3. *Пусть (M, F) — слоение, удовлетворяющее условиям Теоремы 2, $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $\mathbb{F}$ — указанные выше слоения на графике $G_{\mathfrak{M}}(F)$ и $L_0 = p_1^{-1}(x)$, $x \in M$, — произвольный слой канонического расслоения, причем график и слои соответствующих слоений рассматриваются с индуцированной метрикой d. Тогда:*

1. Каждый слой $\mathbb{L} = p_1^{-1}(L)$ индуцированного слоения $(G_{\mathfrak{M}}(F), \mathbb{F})$ является невырожденно приводимым псевдоримановым многообразием с парой параллельных, дополнительных по ортогональности слоений $F^{(1)}|_{\mathbb{L}}$ и $F^{(2)}|_{\mathbb{L}}$.

2. Для любого слоя L слоения (M, F) существует регулярное псевдориманово накрытие $f_L : L_0 \to L$ с группой накрывающих преобразований, изоморфной группе $\mathfrak{M}$-голономии $H_{\mathfrak{M}}(L)$.

3. Группа $H_{\mathfrak{M}}(L)$ диагонально свободно и собственно разрывно действует на псевдоримановом произведении $L_0 \times L_0$ посредством группы изометрий Ψ так, что существует изометрия

$$\eta : \mathbb{L} \to (L_0 \times L_0)/\Psi$$

слоя $\mathbb{L} = p_1^{-1}(L)$ на фактор-многообразие $(L_0 \times L_0)/\Psi$, переводящая слои параллельных слоений $F^{(1)}|_{\mathbb{L}}$ и $F^{(2)}|_{\mathbb{L}}$ в слоения, накрытые произведением $L_0 \times L_0$.

Согласно второму утверждению Теоремы 3 каждый слой (L_α, g) слоения (M, F) локально изометричен (L_0, d), откуда вытекает сдедующее следствие.

Следствие 3. *Если существует слой L вполне геодезического слоения (M, F), имеющий постоянную кривизну, то каждый слой L_α этого слоения имеет ту же самую постоянную кривизну.*

Пусть (M, g) — невырожденно приводимое псевдориманово многообразие, рассматриваемое со связностью Леви-Чивита. Это означает, что существует подпространство $\mathfrak{M}_x$ касательного векторного пространства $T_x M$ в некоторой точке $x \in M$, на котором сужение метрики g не вырождается, причем $\mathfrak{M}_x$ инвариантно относительно параллельных переносов вдоль кусочно гладких петель в точке x. Параллельный перенос подпространства $\mathfrak{M}_x$ в любую другую точку многообразия M определяет распределение $\mathfrak{M}$ на M, которое называется *параллельным.* Так как параллельный перенос сохраняет метрический тензор, то дополнительное по ортогональности подпространство $\mathfrak{M}_x^{\perp}$ инвариантно относительно параллельных переносов вдоль петель в точке x и, следовательно, также определяет параллельное распределение $\mathfrak{M}^{\perp}$ на M. Как известно, любое параллельное распределение интегрируемо и является касательным к некоторому слоению, которое называется *параллельным.*

Таким образом, на каждом невырожденно приводимом псевдоримановом многообразии существует пара $(F, F^{\perp})$ дополнительных по ортогональности параллельных слоений.

Теорема 4. *Пусть (M, g) — невырожденно приводимое псевдоримново многообразие, F и $F^{\perp}$ — его параллельные слоения дополнительной размерности, причем $\mathfrak{M} = TF^{\perp}$ — связность Эресмана для слоения (M, F). Тогда во введенных выше обозначениях:*

1. Графики $G(F)$ и $G_{\mathfrak{M}}(F)$ канонически изоморфны и отождествляются; $G(F)$ наделяется псевдоримановой мерикой d.

2. Почти для всех точек $z \in G(F)$ и $x = p_1(z) \in M$ слои $\mathbb{L} = \mathbb{L}(z)$ и $L = L(x)$ имеют тривиальные группы голономии и изометричны $L_0 \times L_0$ и L_0, соответственно, где L_0 — произвольный фиксированный слой канонической проекции $p_1 : G(F) \to M$ с индуцированной метрикой.

3. Определены слоения $F^{\mathfrak{N}}$, $\mathcal{F}^{(i)}$, $i = 1, 2$, такие, что $TF^{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}$ и $T\mathcal{F}^{(i)} = \mathfrak{M}^{(i)}$ на графике $G(F)$.

4. График $G(F)$ с индуцированной метрикой d — невырожденно приводимое псевдориманово многообразие с тремя парами дополнительных по ортогональности параллельных слоений $(F^{(1)}, \mathcal{F}^{(1)})$; $(F^{(2)}, \mathcal{F}^{(2)})$ и $(F^{\mathfrak{N}}, \mathbb{F})$.

5. Каждое из указанных выше шести слоений обладает интегрируемой связностью Эресмана, а его график удовлетворяет Теоремам 2 и 3, а также утверждениям 1–4 данной теоремы.

Теорема 4 и следующие два утверждения показывают, что класс исследуемых здесь слоений достаточно широк.

Предложение 2. *Пусть (M, F) вполне геодезическое слоение коразмерности q на n-мерном псевдоримановом многообразии (M, g), где $0 < q < n$. Если на слоях этого слоения индуцируется полная псевдориманова метрика, то q-мерное распределение $\mathfrak{M}$, ортогональное слоям, является связностью Эресмана для слоения (M, F).*

Предложение 3. *Пусть (B, g^B) — произвольное псевдориманово многообразие. Если (M, F) — слоение, полученное надстройкой гомоморфизма*

$$\rho : \pi_1(B, b) \to Diff(T),$$

то на M существует псевдориманова метрика такая, что:

1) (M, F) — вполне геодезическое слоение с индуцированной псевдоримановой метрикой на слоях, причем слои слоения (M, F) — полные псевдоримановы подмногообразия тогда и только тогда, когда полным является (B, g^B);

2) ассоциированное локально тривиальное расслоение образовано слоями псевдоримановой субмерсии $p : M \to B$;

3) распределение, образованное касательными пространствами к слоям субмерсии $p : M \to B$ является интегрируемой связностью Эресмана для (M, F);

4) график $G(F)$ хаусдорфов тогда и только тогда, когда группа $\Psi := \rho(\pi_1(B, b))$ квазианалитически действует на T.

Обозначения Следуя [15], мы обозначаем $P(N, H)$ главное H-расслоения над многообразием N. Через $\mathfrak{X}(M)$ обозначается модуль гладких векторных полей на многообразии M над алгеброй $\mathfrak{F}(M)$ гладких функций. Слоение F на многообразии M обозначается как одной буквой, так и парой (M, F). Пусть $\mathfrak{M}$ — гладкое распределение на многообразии M, тогда $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M) := \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid X_u \in \mathfrak{M}_u \ \ \forall u \in M\}$. Если $\mathfrak{M}$ интегрируемо и $\mathfrak{M} = TF$, то $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ обозначается также $\mathfrak{X}_F(M)$.

Через $\mathfrak{Fol}$ обозначается категория слоений, в которой морфизмы отображают слои одного слоения в слои другого слоения.

Сужение слоения (или метрики) на подмногообразие обозначается той же буквой, что и исходное слоение (или метрика).

Через $\cong$ обозначается изоморфизм в соответствующей категории, а $\oplus$ — символ прямой суммы векторных подпространств и распределений.

2. Слоения со связностью Эресмана

2.1. Связность Эресмана для слоений. Пусть на гладком n-мерном многообразии M задано слоение F произвольной коразмерности $q \geq 1$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ q-мерное трансверсальное к F распределение, тогда касательное пространство T_xM к многообразию M в каждой своей точке $x \in M$ представимо в виде $T_xM = T_xF \oplus \mathfrak{M}_x$. Распределение $\mathfrak{M}$ и кусочно гладкие интегральные кривые этого распределения называются $\mathfrak{M}$-горизонтальными или просто горизонтальными. Касательное распределение TF к слоям слоения F и каждый вектор X из T_xF, $x \in M$, называются вертикальными. Кривая в многообразии M, принадлежащая одному слою слоения F, называется вертикальной.

Кусочно гладкое отображение $H : I \times I \to M$, где $I = [0, 1]$, называют *вертикально-горизонтальной гомотопией* (далее, для краткости, *вгг*), если для любых $(s, t) \in I \times I$ кривая $H|_{I \times \{t\}}$ является горизонтальной, а $H|_{\{s\} \times I}$ является вертикальной кривой. Пара $(H|_{I \times \{0\}}, H|_{\{0\} \times I})$ называется *базой вгг* H. Две кривые (δ, τ) на M называются *допустимой парой путей*, если $\delta(0) = \tau(0)$, причем путь δ является горизонтальным, а τ — вертикальным.

Если для любой допустимой пары путей (δ, τ) существует *вгг* с базой (δ, τ), то распределение $\mathfrak{M}$ называется *связностью Эресмана для* F. Если при этом распределение $\mathfrak{M}$ интегрируемо, то связность Эресмана $\mathfrak{M}$ называется *интегрируемой*.

Говорят, что кривая $\widetilde{\delta}$ получена *переносом кривой δ вдоль τ относительно связности Эресмана* $\mathfrak{M}$, если $\widetilde{\delta} := H|_{I \times \{1\}}$. Обозначим этот перенос через $\delta \xrightarrow{\tau} > \widetilde{\delta}$.

2.2. Группы $\mathfrak{M}$-голономии. Пусть (M, F) — слоение со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$. Обозначим через Ω_x, $x \in M$, множество горизонтальных кривых с началом в точке x. Действие фундаментальной группы $\pi_1(L, x)$ слоя $L = L(x)$ на множестве Ω_x определяется следующим образом: $\Phi_x : \pi_1(L, x) \times \Omega_x \to \Omega_x : ([h], \sigma) \mapsto \tilde{\sigma}$, где $[h] \in \pi_1(L, x)$, и $\tilde{\sigma}$ — результат переноса кривой $\sigma \in \Omega_x$ вдоль h относительно $\mathfrak{M}$. Пусть $K_{\mathfrak{M}}(L, x)$ — ядро действия Φ_x, т.е. $K_{\mathfrak{M}}(L, x) = \{\alpha \in \pi_1(L, x) \,|\, \alpha(\sigma) = \sigma \ \forall \sigma \in \Omega_x\}$. Фактор-группа $H_{\mathfrak{M}}(L, x) = \pi_1(L, x)/K_{\mathfrak{M}}(L, x)$ называется *группой $\mathfrak{M}$-голономии* слоя L [4]. Благодаря линейной связности слоев, группы $\mathfrak{M}$-голономии в различных точках одного и того же слоя изоморфны. Пусть $\Gamma(L, x)$ — ростковая группа голономии слоя L. Определен эпиморфизм групп $\chi : H_{\mathfrak{M}}(L, x) \to \Gamma(L, x)$, удовлетворяющий равенству

$$\chi \circ \mu = \nu, \tag{3}$$

где $\mu : \pi_1(L, x) \to H_{\mathfrak{M}}(L, x)$ — фактор-отображение и $\nu([h]) :=< h >$ — росток локального голономного диффеоморфизма трансверсального q-мерного диска вдоль петли h в точке x.

2.3. Локальные горизонтальные голономные диффеоморфизмы. Рассмотрим произвольное гладкое слоение (M, F) коразмерности q на n-мерном многообразии M. Пусть $\mathfrak{M}$ — гладкое q-мерное распределение на M, трансверсальное этому слоению, т.е. $T_xM = T_xF \oplus \mathfrak{M}_x$ $\forall x \in M$. Далее будем рассматривать вертикально-горизонтальные гомотопии относительно распределений TM и $\mathfrak{M}$. В любой точке $x \in M$ существует такая окрестность V_x, что для любой допустимой пары путей (σ, h) в V_x с общим началом в x существует *вгг* в V_x с базой (σ, h). Пусть $\sigma : [0, 1] \to M$ — любая гладкая интегральная кривая распределения $\mathfrak{M}$ с началом $x_0 := \sigma(0)$ и концом $x_1 := \sigma(1)$. Нетрудно убедиться в том, что найдутся такие стягиваемые окрестности U_0 точки x_0 в слое $L_0 \ni x_0$ и U_1 точки x_1 в слое $L_1 \ni x_1$, что для любой точки $x \in U_0$ и любого кусочно гладкого пути $h_x : [0, 1] \to U_0$ соединяющего $h(0) = x_0$ с $h(1) = x$, существует *вгг* H_x с базой (σ, h_x). При этом $\mathfrak{M}$-горизонтальная кривая $\sigma_x(s) := H_x(s, 1)$, $s \in [0, 1]$, является гладкой и, в силу стягиваемости U_0, не зависит от выбора пути h_x, соединяющего x_0 с x в U_0. Далее будем называть σ_x *переносом пути σ в точку* $x \in U_0$. При этом определен диффеоморфизм

$$\Phi_\sigma : U_0 \to U_1 : x \mapsto \sigma_x(1), \quad x \in U_0,$$

который называется *локальным горизонтальным голономным диффеоморфизмом* вдоль $\mathfrak{M}$-кривой σ [5].

Из определения производной Ли $L_X g$ от 2-формы g вдоль векторного поля X вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. *Предположим, что (M, F) — слоение коразмерности q на n-мерном псевдоримановом многообразии (M, g), причем индуцированная метрика на слоях не вырождается, и $\mathfrak{M}$ — q-мерное ортогональное к TF распределение. Пусть $\sigma : [0, 1] \to M$ — произвольная гладкая $\mathfrak{M}$-горизонтальная кривая в M, $\Phi_\sigma : U_0 \to U_1$ – локальный горизонтальный голономный диффеоморфизм вдоль σ и $W := \{\sigma_x(s) \,|\, x \in U_0, s \in (0, 1)\}$, где σ_x — перенос σ в точку $x \in U_0$. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

1. *Диффеоморфизм Φ_σ является изометрией (U_0, g) и (U_1, g);*
2. *Для векторного поля $X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(W)$ такого, что $X|_{\sigma_x(s)} = \dot{\sigma}_x(s)$, где $x \in U_0$, $s \in [0, 1]$, выполняется равенство $(L_X g)(Y, Z) = 0$ для всех $Y, Z \in \mathfrak{X}_F(W)$.*

3. Псевдоримановы субмерсии

Изучение псевдоримановых субмерсий было инициировано В. О'Нейлом [12] и А. Грэйем [13]. Гладкая сюръективная субмерсия $p : M \to B$ между двумя псевдоримановыми многообразиями (M, g) и (B, g^B) называется *псевдоримановой субмерсией*, если метрика, индуцированная на каждом слое субмерсии $p^{-1}(b)$, где $b \in B$, не вырождается, и p сохраняет скалярное произведение векторов, ортогональных слоям субмерсии.

Исследованию псевдоримановых субмерсий посвящены многочисленные работы различных авторов. Особый интерес представляют псевдоримановы субмерсии с вполне геодезическими слоями, для некоторых классов которых доказаны классификационные теоремы (см. [14] и ссылки там).

Следующие свойства псевдоримановых субмерсий с вполне геодезическими слоями существенно используются далее в данной работе.

Предложение 4. *Если (M,g) и (B,g^B) — псевдоримановы многообразия размерности n и q, соответственно, где $0<q<n$, а $p:M\to B$ — псевдориманова субмерсия, слои которой — вполне геодезические подмногообразия в (M,g), то:*

(i) проекция $\sigma=p\circ\gamma$ любой геодезической γ из (M,g) является геодезической в (B,g^B);

(ii) прообраз $p^{-1}(L)$ любого вполне геодезического подмногообразия L из базы (B,g^B) является вполне геодезическим подмногообразием в (M,g), несвязным, если слои субмерсии p не связны.

Доказательство. Предположим, что $p:M\to B$ — псевдориманова субмерсия с вполне геодезическими слоями.

(i). Свойство кривой псевдориманова многообразия (M,g) быть геодезической является локальным, поэтому достаточно доказать, что для любой геодезической γ в произвольной координатной окрестности U, адаптированной к (M,F), ее проекция $p\circ\gamma$ — геодезическая в окрестности $V:=p(U)$ многообразия (B,g^B). Заметим, что $p|_U:U\to V$ — превдориманова субмерсия на стягиваемом многообразии со стягиваемыми слоями. Поэтому, не нарушая общности, в данном доказательстве положим $M=U$, $B=V$, $p:M\to B$ — псевдориманова субмерсия с вполне геодезическими слоями, а $F=\{p^{-1}(b)\,|\,b\in B\}$.

Предположим, что псевдоримановы метрики g и g^B имеют сигнатуры (k,s) и (k_1,s_1), соответственно, где $k+s=n$, $k_1+s_1=q$. Пусть $H_1=O(k_1,s_1)$, $H=O(k,s)$. Обозначим через $\mathcal{L}(M,H)=M\times H$ и $P_1(B,H_1)=B\times H_1$ расслоения псевдо-ортогональных реперов на M и B, определенные метриками g и g^B, соответственно, они являются тривиальными главными расслоениями с проекциями $\pi:\mathcal{L}\to M$ и $f_1:P_1\to B$. Пусть $\mathfrak{M}$ — q-мерное распределение, ортогональное слоям субмерсии p. Обозначим через $P=M\times H_1$ расслоение $\mathfrak{M}$-трансверсальных реперов, являющееся прообразом расслоения $P_1(B,H_1)$ относительно субмерсии p, то есть $P=\{(y,v)\in M\times P_1|\,p(y)=f_1(v)\}$. При этом определены проекции $f:P\to M$, $f(y,v):=y$, и $h:P\to P_1$, $h(y,v)=v\ \ \forall(y,v)\in P$, удовлетворяющие равенству $f_1\circ h=p\circ f$. Слои субмерсии $h:P\to P_1$ образуют слоение (P,F_P).

Так как $M=U$ — координатная окрестность, адаптированная к слоению (M,F), то в каждой точке $y\in M$ определен координатный репер $(\frac{\partial}{\partial x^a}|_y,\frac{\partial}{\partial x^\alpha}|_y)$, $a=1,...,n-q$, $\alpha=n-q+1,...,n$, причем $\{\frac{\partial}{\partial x^a}|_y\}$ — базис T_yF, касательного пространства к слою слоения (M,F) в точке y. Любая точка $(y,v)\in P$ представляет собой трансверсальный репер, то есть базис $\{Z_\alpha|_y\}$ векторного пространства $\mathfrak{M}_y$ в точке $y\in M$, определенный равенством $p_{*y}(Z_\alpha|_y)=X_\alpha|_x$, где $\{X_\alpha|_x\}=v$ — базис касательного векторного пространства T_xB в точке $x=f_1(v)=p(y)$. Следовательно, определено отображение $J:P\to\mathcal{L}$, $J(y,v)=\{\frac{\partial}{\partial x^a}|_y,Z_\alpha|_y\}$, являющееся вложением многообразия P в $\mathcal{L}$ и удовлетворяющее равенству $\pi\circ J=f$.

Пусть E_{n-q} — единичная $(n-q)$-мерная матрица. Обозначим через $j:H_1\to H:A\mapsto\left(\begin{smallmatrix}E_{n-q}&0\\0&A\end{smallmatrix}\right)$ вложение группы H_1 в группу H. При этом пара (J,j) определяет редукцию $\mathcal{R}$ H-расслоения $\mathcal{L}$ к замкнутой подгруппе $j(H_1)$ [15, Глава 1, §5]. Поскольку отображение $J:P\to\mathcal{R}=J(P)$ — изоморфизм главных расслоенных пространств можно отождестить P с $\mathcal{R}$ посредством J. При этом коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{L}\supset\mathcal{R}\cong P & \xrightarrow{\ h\ } & P_1\\ {\scriptstyle\pi_{\mathcal{R}}=f}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_1}\\ M & \xrightarrow{\ p\ } & B,\end{array}\tag{4}$$

где $\pi_{\mathcal{R}}:=\pi|_{\mathcal{R}}$. Таким образом, на $\mathcal{R}$ определено слоение $\mathcal{F}$ как образ слоения (P,F_P) при указанном отождествлении, причем сужение отображения $\pi_{\mathcal{R}}$ на любой слой слоения $(\mathcal{R},\mathcal{F})$ является диффеоморфизмом на соответствующий слой (M,F).

Связность Леви-Чивита ∇ псевдориманова многообразия (M,g) определяет H-связность Q на $\mathcal{L}$. Пусть $Q^{(1)}$ — H_1-связность на P_1, определенная связностью Леви-Чивита ∇^B псевдориманова многообразия (B,g^B). Обозначим через ω $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$-значную 1-форму связности Q, а через θ — каноническую 1-форму этой связности на $\mathcal{L}$ со значениями в $\mathbb{R}^n$. Напомним, что $B_\xi\in\mathfrak{X}(\mathcal{L})$ называется *стандартным горизонтальным векторным полем,* если $\omega(B_\xi)=0$, то есть $B_\xi\in\mathfrak{X}_Q(\mathcal{L})$, и $\theta(B_\xi) = \xi = const \in \mathbb{R}^n$. Как известно [15, Глава III, Предложение 6.3], кривая γ — геодезическая в (M, ∇) тогда и только тогда, когда γ является проекцией интегральной кривой некоторого стандартного горизонтального векторного поля.

Поскольку лифт в $\mathcal{L}$ любой геодезической из (M, ∇) является интегральной кривой распрелеления Q, то вполне геодезичность (M, F) влечет включение $T\mathcal{F} \subset Q|_{\mathcal{R}}$. Следовательно, $Q|_{\mathcal{R}} = T\mathcal{F} \oplus \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N} = \pi^*\mathfrak{M} \cap Q|_{\mathcal{R}}$.

Так как $p : M \to B$ — псевдориманова субмерсия, согласно [11, Теорема 1], распределение $\mathfrak{M}$ геодезически инвариантно, поэтому Q-лифт $\widetilde{\gamma}$ в точку $u \in \pi^{-1}(\gamma_0) \cap \mathcal{R}$ любой $\mathfrak{M}$-горизонтальной геодезической $\gamma : [0,1] \to M$ является интегральной кривой распределения $\mathfrak{N}$. Более того, для любого вектора $Y \in \mathfrak{N}_u$, $u \in \mathcal{R}$, такого, что $\theta(Y) = \xi \in \{0_{n-q}\} \times \mathbb{R}^q$, где 0_{n-q} – ноль в $\mathbb{R}^{n-q}$, существует единственная $\mathfrak{M}$-горизонтальная геодезическая γ на M, Q-лифт которой в точку u есть интегральная кривая стандартного горизонтального векторного поля B_ξ, причем $B_\xi|_u = Y$.

По свойству псевдоримановой субмерсии, любая $\mathfrak{M}$-горизонтальная геодезическая посредством $p : M \to B$ проектируется в геодезическую базы (B, ∇^B) [12]. Отсюда, учитывая равенство $f_1 \circ h = p \circ \pi_{\mathcal{R}}$, мы получаем $h_{*u}(\mathfrak{N}_u) = h_{*u}(Q_u) = Q^{(1)}_{h(u)}$ для любой точки $u \in \mathcal{R}$.

Пусть γ — любая геодезическая в (M, g), проходящая через точку $x = \gamma(0)$ в направлении вектора $X = \dot\gamma(0) \in T_xM$. Возьмем такую точку $u_0 \in \mathcal{R}$, что $\pi(u_0) = x$. Рассматрим репер u_0 как отображение $u_0 : \mathbb{R}^n \to T_xM$, которое ставит в соответствие вектору из $\mathbb{R}^n$ с координатами $\lambda_1, ..., \lambda_n$ в стандартном базисе в $\mathbb{R}^n$ вектор в T_xM с теми же координатами в базисе u_0. Предположим, что $\eta := u_0^{-1}(X) \in \mathbb{R}^n$. Пусть $pr : \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ — каноническая проекция на сомножитель и $\xi := pr(\eta) \in \mathbb{R}^q$. Так как γ — геодезическая, существует интегральная кривая $\widehat{\gamma}$ стандартного векторного поля B_η на $\mathcal{R}$ с началом в точке $\widehat{\gamma}(0) = u_0$. При этом $\gamma = \pi \circ \widehat{\gamma}$ и $\widehat{\sigma} := h \circ \widehat{\gamma}$ — интегральная кривая стандартного векторного поля B_ξ на P_1, проходящего через точку $v_0 = h(u_0) = \widehat{\sigma}(0)$. Поскольку $p \circ \pi_{\mathcal{R}} = f_1 \circ h$, мы имеем цепочку равенств $\sigma = p \circ \gamma = p \circ (\pi \circ \widehat{\gamma}) = (p \circ \pi) \circ \widehat{\gamma} = (f_1 \circ h) \circ \widehat{\gamma} = f_1 \circ (h \circ \widehat{\gamma}) = f_1 \circ \widehat{\sigma}$.

Таким образом, кривая $\sigma := f_1 \circ \widehat{\sigma}$ — геодезическая на (B, g^B), являющаяся проекцией геодезической γ многообразия (M, g), т.е. $p \circ \gamma = \sigma$, и утверждение (i) доказано.

(ii). Пусть L — вполне геодезическое подмногообразие в (B, g^B) и $N := p^{-1}(L)$ — гладкое вложенное подмногообразие в M, несвязное, если слои субмерсии $p : M \to B$ не связны. Возьмем любую точку $y \in N$ и вектор $Y \in T_yN$. Пусть $\gamma = \gamma_Y(s), s \in [0,1]$, — геодезическая в (M, g), проходящая через точку $y = \gamma_Y(0)$ в направлении вектора Y, то есть $Y = \dot\gamma_Y(0)$. Согласно доказанному утверждению (i) $\sigma := p \circ \gamma$ — геодезическая в (B, g^B), проходящая через точку $b = p(y) = \sigma(0)$ в направлении вектора $X = p_{*y}Y \in T_bL$. Так как L — вполне геодезическое подмногообразие, то $\sigma(s) \in L \ \forall s \in [0,1]$, следовательно, $\gamma(s) \in N \ \forall s \in [0,1]$. Это означает вполне геодезичность подмногообразия N в (M, g). □

4. Доказательство Теоремы 2

4.1. Критерий вполне геодезичности слоения.

Определение 4. *Векторное поле X на многообразии M называется слоеным относительно слоения (M, F), если $[X, Y] \in \mathfrak{X}_F(M)$ для любого $Y \in \mathfrak{X}_F(M)$.*

Предложение 5. *Пусть (M, F) — слоение на псевдоримановом многообразии (M, g) со связностью Леви-Чивита ∇, причем на слоях слоения индуцируется псевдориманова метрика, и $\mathfrak{M}$ — распределение, дополнительное по ортогональности к TF. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *слоение (M, F) вполне геодезическое;*

(2) *$L_Xg(Y, Z) = 0$ для любых векторных полей $X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ и $Y, Z \in \mathfrak{X}_F(M)$;*

(3) *$L_Xg(Y, Z) = 0$ для любого слоеного векторного поля $X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ и любых векторных полей $Y, Z \in \mathfrak{X}_F(M)$;*

(4) *для любой $\mathfrak{M}$-горизонтальной кривой $\sigma : [0,1] \to M$ локальный горизонтальный голономный диффеоморфизм $\Phi_\sigma : U_0 \to U_1$ является изометрией (U_0, g) и (U_1, g).*

Доказательство. Обозначим через $\alpha_{\mathfrak{M}}(Y,Z)$ ортогональную проекцию $\nabla_Y Z$ в $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ относительно разложения $TM = TF \oplus \mathfrak{M}$. Вполне геодезичность слоения (M,F) эквивалентна $\alpha_{\mathfrak{M}}(Y,Z) = 0 \ \forall Y, Z \in \mathfrak{X}_F(M)$.

Эквивалентность (1) и (2) доказана в [16, Предложение 2.7] следующим образом. Используя свойства связности Леви-Чивита ∇ псевдориманова многообразия (M,g), получено равенство

$$L_X g(Y,Z) = g(X, \alpha_{\mathfrak{M}}(Y,Z)) \ \ \forall X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M), \ \forall Y,Z \in \mathfrak{X}_F(M), \tag{5}$$

откуда, в силу невырожденности индуцированной метрики на слоях, вытекает эквивалентность $L_X g(Y,Z) = 0 \ \forall X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M) \ \Leftrightarrow \ \alpha_{\mathfrak{M}}(Y,Z) = 0$, то есть (1) $\Leftrightarrow$ (2).

Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) очевидна. Пусть имеет место (3). Заметим, что произвольное векторное поле $X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ является линейной комбинацией слоеных векторных полей из $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$, то есть $X = \beta^k X_k$, где $X_k \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ — слоеные векторные поля, $\beta^k \in \mathfrak{F}(M)$. Применяя (5), благодаря билинейности g, мы получаем $L_X g(Y,Z) = g(X, \alpha_{\mathfrak{M}}(Y,Z)) = g(\beta^k X_k, \alpha_{\mathfrak{M}}(Y,Z)) = \beta^k g(X_k, \alpha_{\mathfrak{M}}(Y,Z)) = \beta^k L_{X_k} g(Y,Z)$. Согласно предположению $L_{X_k} g(Y,Z) = 0$, поэтому $L_X g(Y,Z) = 0$. Следовательно, (3) $\Rightarrow$ (2) и (2) $\Leftrightarrow$ (3)

Если σ — кусочно гладкая $\mathfrak{M}$-горизонтальная кривая, то Φ_σ — композиция локальных горизонтальных голономных диффеоморфизмов, соответствующих гладким кускам кривой σ. Поэтому, не нарушая общности, в (4) можно считать, что $\sigma : [0,1] \to M$ — гладкая $\mathfrak{M}$-горизонтальная кривая.

Предположим, что выполняется (3). Пусть $\sigma : [0,1] \to M$ — гладкая $\mathfrak{M}$-горизонтальная кривая, $\Phi_\sigma : U_0 \to U_1$ — локальный горизонтальный голономный диффеоморфизм вдоль σ и X — векторное поле, индуцированное Φ_σ указанным в Лемме 1 способом. Так как X является слоеным векторным полем, ортогональным слоению (M,F), то из (3) следует $L_X g(Y,Z) = 0 \ \forall Y,Z \in \mathfrak{X}_F(M)$. Следовательно, по Лемме 1 Φ_σ — изометрия (U_0, g) и (U_1, g). Таким образом, (3) $\Rightarrow$ (4).

Теперь достаточно показать, что (4) $\Rightarrow$ (3). Пусть $X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ — любое слоеное векторное поле и $\sigma : [0,1] \to M$ — любая его интегральная кривая. Так как σ — $\mathfrak{M}$-горизонтальная кривая, то определен локальный горизонтальный голономный диффеоморфизм $\Phi_\sigma : U_0 \to U_1$ вдоль σ. Поскольку X — слоеное векторное поле, то перенос σ_x кривой σ в точку $x \in U_0$ также является интегральной кривой поля X. Согласно Лемме 1 отсюда следует, что $L_X g(Y,Z) = 0 \ \forall Y,Z \in \mathfrak{X}_F(M)$. Таким образом, (4) $\Rightarrow$ (3). □

Замечание 3. *Предложение 5 доказано без предположения существования связности Эресмана для слоения* (M,F).

4.2. Вполне геодезичность слоения $F^{(1)}$. Докажем, что $F^{(1)}$ — вполне геодезическое слоение на графике $(G_{\mathfrak{M}}(F), d)$.

Пусть $\gamma : [0,1] \to G_{\mathfrak{M}}(F)$ — гладкая $\mathfrak{N}$-кривая в $G_{\mathfrak{M}}(F)$ с началом в точке $\gamma(0) = z_0 = (x_0, \{h\}, y_0) \in G_{\mathfrak{M}}(F)$. Тогда $\sigma := p_1 \circ \gamma$ — $\mathfrak{M}$-кривая в M с началом в точке $x_0 = \sigma(0) = p_1(z_0)$. Так как (σ, h) — допустимая пара, то существует *вгг* H с базой (σ, h). Пусть $\sigma \overset{h}{\to}> \tilde{\sigma}$, при этом $\tilde{\sigma} = p_2 \circ \gamma$. Не нарушая общности, предположим, что V_0 такая окрестность точки z_0 в слое $p_1^{-1}(x_0)$, что окрестность $U_0 = p_2(V_0)$, принадлежащая слою $L = L(x_0)$, правильно накрыта отображением $p_2|_{L^{(1)}} : L^{(1)} \to L$, где $L^{(1)} = L^{(1)}(z_0) = p_1^{-1}(x_0)$. Если $\Phi_\gamma : V_0 \to V_1 : z \mapsto \Phi_\gamma(z)$ — горизонтальный голономный диффеоморфизм вдоль γ в $G_{\mathfrak{M}}(F)$, где V_1 — окрестность точки $\gamma(1)$ в слое $p_1^{-1}(\sigma(1))$, то для любой точки $z \in V_0$ и $\mathfrak{N}$-лифта γ_z кривой σ в точку z, по определению, $\Phi_\gamma(z) = \gamma_z(1)$. При этом $z = (x_0, \{h_y\}, y)$, где $y = p_2(z)$, $h_y = h \cdot t_y$, t_y — путь в U_0, соединяющий y_0 с y в U_0. Заметим, что $\sigma_y = p_2 \circ \gamma_z$ — $\mathfrak{M}$-кривая в M, которая получена переносом σ вдоль пути h_y, а $\Phi_{\tilde{\sigma}} := p_2 \circ \Phi_\gamma : U_0 = p_2(V_0) \to U_1 = p_2(V_1)$ — локальный $\mathfrak{M}$-горизонтальный голономный диффеоморфизм вдоль $\tilde{\sigma}$, удовлетворяющий коммутативной диаграмме:

$$\begin{array}{ccc} V_0 & \xrightarrow{\Phi_\gamma} & V_1 \\ {\scriptstyle p_2|_{V_0}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_2|_{V_1}} \\ U_0 & \xrightarrow[\Phi_{\tilde{\sigma}}]{} & U_1. \end{array} \tag{6}$$

Согласно Предложению 5 из вполне геодезичности слоения F вытекает, что $\Phi_{\tilde{\sigma}} : U_0 \to U_1$ — изометрия псевдоримановых многообразий (U_0, g) и (U_1, g). Отсюда, учитывая, что $p_1|_{V_0} : V_0 \to U_0$, $p_2|_{V_1} : V_1 \to U_1$ — изометрии, в силу коммутативности диаграммы (6) мы получаем, что $\varPhi_\gamma : V_0 \to V_1$ изометрия (V_1, d) и (V_2, d). Отсюда, аналогично Предложению 5 мы получаем

$$(L_X d)(Y, Z) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{N}}(G_{\mathfrak{M}}(F)), \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}_{F^{(1)}}(G_{\mathfrak{M}}(F)). \tag{7}$$

Покажем теперь, что $(L_X d)(Y, Z) = 0 \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}_{F^{(1)}}(G_{\mathfrak{M}}(F))$ и для каждого $X \in \mathfrak{X}_{F^{(2)}}(G_{\mathfrak{M}}(F))$. Обозначим через $L^{(i)} = L^{(i)}(z_0)$, $i = 1, 2$, и $\mathbb{L} = \mathbb{L}(z_0)$ слои слоений $F^{(i)}$ и $\mathbb{F}$, соответственно, проходящие через z_0. Пусть γ — произвольная $TF^{(2)}$-кривая с началом $z_0 = \gamma(0)$, то есть $\gamma(s) \in L^{(2)}$, $s \in [0, 1]$. Определен локальный горизонтальный диффеоморфизм $\Phi_\gamma : W_0 \to W_1$ вдоль γ, где W_0 — окрестность точки z_0 в слое $L^{(1)}$, а W_1 — окрестность точки $z_1 = \gamma(1)$ в слое $L^{(1)}(z_1)$ слоения $F^{(1)}$, проходящем через z_1.

Напомним, что подмножество слоеного многообразия (N, F_N) называется F_N-насыщенным, если его можно представить в виде объединения некоторых слоев слоения (N, F_N).

Любой слой $\mathbb{L}$ индуцированного слоения $(G_{\mathfrak{M}}(F), \mathbb{F})$ является как $F^{(1)}$-насыщенным, так и $F^{(2)}$-насыщенным подмногообразием графика $G_{\mathfrak{M}}(F)$, причем, согласно определению метрики d, слой $\mathbb{L}$ с индуцированной псевдоримановой метрикой $(\mathbb{L}, d)$ локально является псевдоримановым произведением псевдоримановых многообразий $(L^{(1)}, d)$ и $(L^{(2)}, d)$. Отсюда следует, что $F^{(1)}|_{\mathbb{L}}$ и $F^{(2)}|_{\mathbb{L}}$ — параллельные слоения на невырожденно приводимом псевдоримановом многообразии $(\mathbb{L}, d)$ (см., например, [19]). Следовательно, $F^{(1)}|_{\mathbb{L}}$ и $F^{(2)}|_{\mathbb{L}}$ — вполне геодезические слоения на $(\mathbb{L}, d)$, поэтому, согласно Предложению 5 $\Phi_\gamma : W_0 \to W_1$ — изометрия и выполняется равенство

$$(L_X d)(Y, Z) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}_{F^{(2)}}(G_{\mathfrak{M}}(F)), \ \ \forall Y, Z \in \mathfrak{X}_{F^{(1)}}(G_{\mathfrak{M}}(F)). \tag{8}$$

Заметим, что в любой точке графика $G_{\mathfrak{M}}(F)$ существует окрестность $\mathcal{W}$, адаптированная к слоениям $\mathbb{F}$, $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ одновременно, в которой выполняются оба равенства (7) и (8). Так как $\mathfrak{M}^{(1)} = \mathfrak{N} \oplus TF^{(2)}$, то любое векторное поле $X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}^{(1)}}(W)$ в окрестности $\mathcal{W}$ произвольной точки $z \in G_{\mathfrak{M}}(F)$ можно представить в виде $X = \alpha X^{\mathfrak{N}} + \beta X^{(2)}$, где $X^{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{N}}(G_{\mathfrak{M}}(F))$, $X^{(2)} \in \mathfrak{X}_{F^{(2)}}(G_{\mathfrak{M}}(F))$, $\alpha, \beta \in \mathfrak{F}(W)$. Так же как в доказательстве Предложения 5 мы показываем, что $(L_{\alpha X^{\mathfrak{N}} + \beta X^{(2)}} d)(Y, Z) = \alpha (L_{X^{\mathfrak{N}}} d)(Y, Z) + \beta (L_{X^{(2)}} d)(Y, Z)$ для любых $Y, Z \in \mathfrak{X}_{F^{(1)}}(G_{\mathfrak{M}}(F))$. Равенства (7) и (8) влекут $(L_{X^{\mathfrak{N}}} d)(Y, Z) = 0$ и $(L_{X^{(2)}} d)(Y, Z) = 0$. Таким образом мы получаем, что

$$(L_X d)(Y, Z) = 0 \ \forall X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}^{(1)}}(G_{\mathfrak{M}}(F)), \forall Y, Z \in \mathfrak{X}_{F^{(1)}}(G_{\mathfrak{M}}(F)).$$

Согласно Предложению 5 это означает, что $F^{(1)}$ — вполне геодезическое слоение.

4.3. Геодезическая инвариантность распределений $\mathfrak{M}^{(1)}$, $T\mathbb{F}$ и $TF^{(2)}$. Из определения метрики d вытекает, что $p_1 : G_{\mathfrak{M}} \to M$ — псевдориманова субмерсия, а $\mathfrak{M}^{(1)}$ — распределение, дополнительное по ортогональности к слоям этой субмерсии. Поэтому согласно [11, Теорема 1] распределение $\mathfrak{M}^{(1)}$ геодезически инвариантно.

По доказанному выше слоение $F^{(1)}$ вполне геодезическое, следовательно, $p_1 : G_{\mathfrak{M}}(F) \to M$ — псевдориманова субмерсия с вполне геодезическими слоями. Отсюда, применяя утверждение (ii) Предложения 4, мы получаем, что вполне геодезичность слоения (M, F) влечет вполне геодезичность индуцированного слоения $(G_{\mathfrak{M}}(F), \mathbb{F})$, поскольку каждый его слой $\mathbb{L} = p_1^{-1}(L)$ есть прообраз некоторого слоя L слоения (M, F), являющегося вполне геодезическим подмногообразием в (M, g).

Так как $TF^{(2)} = \mathfrak{M}^{(1)} \cap T\mathbb{F}$, то $TF^{(2)}$ — геодезически инвариантное распределение как пересечение геодезически инвариантных распределений $\mathfrak{M}^{(1)}$ и $T\mathbb{F}$. Следовательно, $(G_{\mathfrak{M}}(F), F^{(2)})$ — вполне геодезическое слоение на $(G_{\mathfrak{M}}(F), d)$. $\square$

5. Доказательство Теоремы 3

1. Первое утверждение Теоремы 3 обосновано при доказательстве Теоремы 2 (подраздел 4.2).

2. Пусть x_1 и x_2 — любые две точки псевдориманова многообразия (M, g). Согласно [4, Лемма 1.1], слои $L_1 \ni x_1$ и $L_2 \ni x_2$ можно соединить $\mathfrak{M}$-горизонтальной кривой $\sigma : [0, 1] \to M$, где

$y_1 = \sigma(0) \in L_1$, $y_2 = \sigma(1) \in L_2$. Соединим x_i с y_i кривой σ_i в слое L_i, $i = 1, 2$. Тогда произведение путей $\gamma = \sigma_1 \cdot \sigma \cdot \sigma_2^{-1}$ соединяет точку x_1 с точкой x_2. Как известно [7, Лемма 1], любая $\mathfrak{M}$-горизонтальная кривая из M обладает $\mathfrak{N}$-горизонтальными лифтами в $G_{\mathfrak{M}}(F)$. Кривые σ_1 и σ_2 обладают $TF^{(2)}$-горизонтальными лифтами в $G_{\mathfrak{M}}(F)$, поскольку для любого слоя $\mathbb{L}$ индуцированного слоения $(G_{\mathfrak{M}}(F), \mathbb{F})$ распределение $TF^{(2)}|_{\mathbb{L}}$ — связность Эресмана для субмерсии $p_1|_{\mathbb{L}}$. Следовательно, для любой точки z из $p_1^{-1}(x_1)$ существует $\mathfrak{M}^{(1)}$-горизонтальный лифт $\widehat{\gamma}$ кривой γ с началом $\widehat{\gamma}(0) = z$ и концом $\widehat{\gamma}(1) \in p_1^{-1}(x_1)$. Так как

$$\Phi_{\widehat{\gamma}} : p_1^{-1}(x_0) \to p_1^{-1}(x_1) : z \mapsto \widehat{\gamma}(1)$$

— горизонтальный голономный диффеоморфизм относительно слоения $(G_{\mathfrak{M}}, F^{(1)})$ вдоль $\mathfrak{M}^{(1)}$-горизонтального пути $\widehat{\gamma}$, то в силу вполне геодезичности указанного слоения, из Предложения 5 вытекает, что отображение $\Phi_{\widehat{\gamma}}$ является изометрией. Следовательно, существует псевдориманово многообразие $L_0^{(1)}$, изометричное любому слою субмерсии p_1. Аналогично, существует псевдориманово многообразие $L_0^{(2)}$, изометричное любому слою субмерсии p_2. Зафиксируем точку $z_0 = (x_0, \{1_{x_0}\}, x_0) \in G_{\mathfrak{M}}(F)$, где 1_{x_0} — постоянный путь в точке x_0. Заметим, что сужение инверсии $i : G_{\mathfrak{M}}(F) \to G_{\mathfrak{M}}(F)$, $i(x, \{h\}, y) = (y, \{h^{-1}\}, x)$ на слой $p_1^{-1}(x_0)$ является изометрией $p_1^{-1}(x_0)$ на слой $p_2^{-1}(x_0)$. Отсюда вытекает изометричность $L_0^{(1)}$ и $L_0^{(2)}$. Обозначим через L_0 псевдориманово многообразие, изометричное $L_0^{(i)}$, $i = 1, 2$.

Пусть $L = L(x)$, $x \in M$, — любой слой слоения (M, F). Из определения графика $G_{\mathfrak{M}}(F)$ вытекает, что сужение канонической проекции $p_1|_{p_2^{-1}(x)} : p_2^{-1}(x) \to L$ — регулярное накрывающее отображение с группой накрывающих преобразований, изоморфной группе $\mathfrak{M}$-голономии $H_{\mathfrak{M}}(L, x)$. Согласно определению псевдоримановой метрики d на $G_{\mathfrak{M}}(F)$, это отображение является локальной изометрией и, следовательно, псевдоримановым накрытием. Доказанная выше изометричность $p_2^{-1}(x)$ и L_0 влечет выполнение утверждения (i) доказываемой теоремы.

Рассмотрим произвольный слой $\mathbb{L} = p_1^{-1}(L)$ индуцированного слоения $\mathbb{F}$ на графике $G_{\mathfrak{M}}(F)$ с метрикой $d|_{\mathbb{L}}$. Как показано в подразделе 4.2, псевдориманово многообразие $(\mathbb{L}, d)$ является невырожденно приводимым, причем $F^{(1)}|_{\mathbb{L}}$ и $F^{(2)}|_{\mathbb{L}}$ — его ортогональные параллельные слоения. Подчеркнем, что $TF^{(1)}|_{\mathbb{L}}$ — интегрируемая связность Эресмана для $F^{(2)}|_{\mathbb{L}}$, а $TF^{(2)}|_{\mathbb{L}}$ — интегрируемая связность Эресмана для $F^{(1)}|_{\mathbb{L}}$. Таким образом, $(\mathbb{L}, p_1|_{\mathbb{L}}, p_1|_{\mathbb{L}}, L, L)$ — симметричное простое трансверсальное двурасслоение в смысле [8].

Зафиксируем точку $z = (x, \{1_x\}, x) \in \mathbb{L}$. Согласно (i) группа $\Psi \cong H_{\mathfrak{M}}(L, x)$ действует изометриями на псевдоримановом накрывающем многообразии L_0 как группа накрывающих преобразований, поэтому определено диагональное действие Φ группы Ψ на псевдоримановом произведении $L_0 \times L_0$ по правилу $\psi(z_1, z_2) = (\psi(z_1), \psi(z_2))$, $(z_1, z_2) \in L_0 \times L_0$. Действие Φ свободное, собственно разрывное и сохраняет структуру произведения. Определено фактор-многообразие $(L_0 \times L_0)/\Psi$ с парой слоений F_1, F_2, накрытых произведением $L_0 \times L_0$. Так как Φ сохраняет метрику псевдориманова произведения на $L_0 \times L_0$, то на $(L_0 \times L_0)/\Psi$ индуцируется псевдориманова метрика, относительно которой фактор-отображение $L_0 \times L_0 \to (L_0 \times L_0)/\Psi$ является псевдоримановым накрытием. При этом на $(L_0 \times L_0)/\Psi$ определена пара параллельных слоений (F_1, F_2), слои которых накрыты слоями тривиальных слоений произведения $L_0 \times L_0$.

Как известно [8, Предложения 5 и 6], существует диффеоморфизм

$$\Theta : \mathbb{L} \to (L_0 \times L_0)/\Psi,$$

являющийся изоморфизмом обеих пар слоений $F^{(i)}|_{\mathbb{L}}$ и F_i, $i = 1, 2$ в категории слоений $\mathfrak{Fol}$. Нетрудно видеть, что $L_0 \times L_0$ общее псевдориманово накрывающее пространство для $\mathbb{L}$ и для $(L_0 \times L_0)/\Psi$, следовательно, Θ — диффеоморфизм, являющийся локальной изометрией, т. е., Θ — изометрия, что завершает доказательство утверждения (ii) Теоремы 3. $\square$

6. Графики параллельных слоений

6.1. Критерий существования интегрируемой связности Эресмана.

Определение 5. *Пара трансверсальных слоений дополнительной размерности (F_1, F_2) на многообразии M называется двуслоением.*

Если (F_1, F_2) — двуслоение на M, то в каждой точке $x \in M$ выполняется равенство $T_xM = T_xF_1 \oplus T_xF_2$.

Определение 6. *Пусть (F_1, F_2) — двуслоение на M, а $\kappa : \widehat{M} \to M$ — универсальное накрывающее отображение. Если выполняются условия:*

1) $\widehat{M} = M_1 \times M_2$ — произведение односвязных многообразий M_1 и M_2,

2) $\kappa^* F_1 = \{M_1 \times \{x_2\} \,|\, x_2 \in M_2\}$, $\kappa^* F_2 = \{x_1 \times M_2 \,|\, x_1 \in M_1\}$, то говорят, что двуслоение (F_1, F_2) накрыто произведением.

Используя теорему Ш. Касивабара [17, Теорема 2], нетрудно получить критерий существования интегрируемой связности Эресмана для гладкого слоения. Сформулируем этот критерий в следующем удобном для нас виде.

Теорема 5. *Двуслоение (F_1, F_2) на многообразии M накрыто произведением тогда и тольео тогда, когда распределение TF_2 — интегрируемая связность Эресмана для слоения (M, F_1).*

Пусть (F_1, F_2) — двуслоение на многообразии M. Из определения связности Эресмана вытекает, что TF_2 — связность Эресмана для слоения (M, F_1) тогда и только тогда, когда TF_1 — связность Эресмана для (M, F_2).

6.2. Лемма. Мы будем применять следующее утверждение, которое по существу имеет локальный характер.

Лемма 2. *Пусть $(F, F^{\perp})$ — взаимно ортогональные слоения дополнительной размерности на псевдоримановом многообразии (M, g), причем индуцированная метрика на слоях слоения (M, F) не вырождается. Тогда следующие четыре утверждения эквивалентны:*

(1) *слоение (M, F) является одновременно псевдоримановым и вполне геодезическим;*

(2) *оба слоения (M, F) и $(M, F^{\perp})$ вполне геодезические;*

(3) *оба слоения (M, F) и $(M, F^{\perp})$ псевдоримановы;*

(4) *оба слоения (M, F) и $(M, F^{\perp})$ параллельны.*

Доказательство. Предположим, что выполняются условия Леммы 2, причем $dim(M) = n$, а $dim(F) = q$, где $0 < q < n$, при этом $dim(F^{\perp}) = n - q$.

Пусть слоение (M, F) является одновременно псевдоримановым и вполне геодезическим. Так как (M, F) псевдориманово слоение, то согласно [11, Теорема 1] $(n - q)$-мерное ортогональное ему распределение $\mathfrak{M}^{\perp}$ — вполне геодезическое. Поскольку $\mathfrak{M}^{\perp} = TF^{\perp}$, это означает вполне геодезичность слоения $(M, F^{\perp})$. Таким образом, (1) $\Rightarrow$ (2).

Предположим, что оба слоения (M, F) и $(M, F^{\perp})$ вполне геодезические. Согласно [11, Теорема 1] оба этих слоения являются псевдоримановыми, то есть, (2) $\Rightarrow$ (3).

Пусть оба слоения (M, F) и $(M, F^{\perp})$ — псевдоримановы. Как известно, для любого двуслоения $(F, F^{\perp})$ в каждой точке $x \in M$ существует такая карта (U, φ), что $U = U_1 \times U_2$, где $F|_U = \{U_1 \times \{x_2\} \,|\, x_2 \in U_2\}$ и $F^{\perp}|_U = \{\{x_1\} \times U_2 \,|\, x_1 \in U_1\}$. Псевдоримановость слоений (M, F) и $(M, F^{\perp})$ влечет существование на U_1 и U_2 таких псевдоримановых метрик g_1 и g_2, соответственно, что проекции на сомножители $U_1 \times U_2 \to U_i$, $i = 1, 2$, являются псевдоримановыми субмерсиями $(U_1 \times U_2, g)$ на (U_i, g_i). Это означает, что $(U_1 \times U_2, g)$ представляет собой псевдориманово произведение псевдоримановых многообразий (U_1, g_1) и (U_2, g_2). Поскольку x — произвольная точка многообразия M, отсюда следует, что (M, g) — невырожденно приводимое псевдориманово многообразие с параллельными слоениями (M, F) и $(M, F^{\perp})$ (см., например, [19]). Итак, мы доказали, что (3) $\Rightarrow$ (4).

Предположим теперь, что (M, F) и $(M, F^{\perp})$ — параллельные слоения на (M, g). Так как касательные векторы к геодезической образуют поле параллельного переноса, то из определения параллельных слоений вытекает их вполне геодезичность, поэтому из доказанной импликации

(2) $\Rightarrow$ (3) следует, что оба указанные слоения являются псевдоримановыми. Таким образом, (4) $\Rightarrow$ (1). $\square$

6.3. Группы голономии параллельных слоений.

Предложение 6. *Если F — параллельное слоение на псевдоримановом многообразии (M,g), причем метрика на слоях не вырождается, а дополнительное по ортогональности распределение — связность Эресмана для F, то почти каждый слой слоения F имеет тривиальную группу голономии.*

Доказательство. Из условия вытекает существование дополнительного по ортогональности к F параллельного слоения $F^{\perp}$. Так как $TF^{\perp}$ — связность Эресмана для F, то из Теоремы 5 следует, что двуслоение $(F,F^{\perp})$ накрыто произведением, то есть универсальное накрытие для M имеет вид $\kappa : M_1 \times M_2 \to M$, причем $\kappa^*F = \{M_1 \times \{z\} \,|\, z \in M_2\}$. Зафиксируем $x_0 \in M$ и $(y_0, z_0) \in M_1 \times M_2, .\ p_1(y_0,z_0) = x_0$. Обозначим через L и $L^{\perp}$ слои слоений F и $F^{\perp}$, проходящие через x_0. Положим $M_1 \cong M_1 \times \{z_0\}$ и $M_2 \cong \{y_0\} \times M_2$. Пусть $g_1 = g|_L$ и $g_2 = g|_{L^{\perp}}$. Так как $\kappa|_{M_1} : M_1 \to L$ и $\kappa|_{M_2} : M_2 \to L^{\perp}$ — универсальные накрывающие отображения, то определены псевдоримановы многообразия (M_1, κ^*g_1) и (M_2, κ^*g_2). Поскольку (M,g) локально является произведением псевдоримановых многообразий, индуцированных на локальных слоях слоений F и $F^{\perp}$, то псевдориманово многообразие $(M_1 \times M_2, \kappa^*g)$ является произведением псевдоримановых многообразий (M_1, κ^*g_1) и (M_2, κ^*g_2).

Фундаментальная группа $\pi_1(M,x_0)$ действует на $M_1 \times M_2$ как группа накрывающих преобразований G накрытия κ, сохраняюшая структуру произведения и псевдориманову метрику κ^*g. Поэтому на M_2 индуцируется группа изометрий Ψ и определен эпиморфизм групп $\chi : G \to \Psi$. В силу квазианалитиности действия группы Ψ на M_2, группа голономии $\Gamma(L,x)$ произвольного слоя $L = L(x)$ слоения F изоморфна стационарной подгруппе Ψ_z группы Ψ в точке $z \in pr(\kappa^{-1}(x))$, где $pr : M_1 \times M_2 \to M_2$ — каноническая проекция на второй соиножитель. Следовательно, слой $L = L(x)$ имеет тривиальную группу голономии тогда и только тогда, когда группа Ψ_z тривиальна при $z \in pr(\kappa^{-1}(x))$.

Пусть $fix(\psi)$ — множество фиксированных точек изометрии $\psi \in \Psi$. Докажем, что объединение всех слоев слоения (M,F) с нетривиальными группами голономии имеет меру ноль в M. Это эквивалентно тому, что множество $K = \bigcup_{\psi\in\Psi} fix(\psi)$ имеет меру ноль в M_2.

Напомним, что подмножество N m-мерного многообразия имеет меру ноль, если в каждой точке существует такая карта (U,f) этого многообразия, что подмножество $f(U \cap N) \subset \mathbb{R}^m$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^m$.

Пусть ψ — любой элемент из Ψ и z — произвольная точка из $fix(\psi)$. Так как псевдориманова метрика определяет G-структуру первого порядка, существует изоморфизм $\mu : \Psi_z \to D\Psi_z,\ \ \mu(\{\psi\}_z) = \psi_{*z}$, стационарной подгруппы Ψ_z на линейную группу $D\Psi_z$, ставящий в соответствие любой изометрии $\psi \in \Psi_z$ диференциал ψ_{*z} в точке z.

Существует окрестность нуля W_0 в T_zM_2 такая, что экспоненциальное отображение $Exp|_{W_0} : W_0 \to M_2$ является диффеоморфизмом на открытую окрестность W точки z в M_2. В силу непрерывности ψ_{*z} найдется окрестность W_0' нуля в T_zM_2, для которой $\psi_{*z}(W_0') \subset W_0$. Пусть $W' = Exp(W_0')$. Поскольку ψ — изометрия, она удовлетворяет равенству

$$Exp \circ \psi_{*z}|_{W_0'} = \psi \circ Exp|_{W_0'},$$

следовательно, $Exp^{-1}(fix(\psi) \cap W') = fix(\psi_{*z}) \cap W_0'$. Так как ψ_{*z} — нетривиальное линейное отображение векторного пространства T_zM_2, то $fix(\psi_{*z})$ — собственное подпространство в T_zM_2, поэтому множество $fix(\psi_{*z}) \cap W_0'$ имеет меру ноль в $T_zM_2 \cong \mathbb{R}^q$. Заметим, что $(W', Exp^{-1}|_{W'})$ можно рассматривать как карту в точке z на многообразии M_2. Следовательно, множество $fix(\psi)$ имеет меру ноль в M_2. Так как группа Ψ не более, чем счетная, отсюда вытекает, что множество K также меру ноль в M_2. $\square$

6.4. Доказательство Теоремы 4. Предположим, что (M,g) — невырожденно приводимое псевдориманово многообразие, а F и $F^{\perp}$ — его параллельные слоения дополнительной размерности, причем $\mathfrak{M} = TF^{\perp}$ — связность Эресмана для слоения (M,F). По Лемме 2 слоения F и $F^{\perp}$ являются одновременно вполне геодезическими и псевдоримановыми. Поэтому псевдогруппа голономии слоения (M, F) образована локальными изометриями и является квазианалитической. Отсюда в силу Предложения 1 вытекает хаусдорфовость графика $G(F)$. Согласно Теореме 1 графики $G(F)$ и $G_{\mathfrak{M}}(F)$ канонически изоморфны и отождествляются, и утверждение 1 доказано.

Согласно [11, Теорема 2] индуцированное слоение $(G(F), \mathbb{F})$ также псевдориманово, то утверждение 2 следует из Предложения 6 и утверждений 2 и 3 Теоремы 3.

Покажем, что распределение $\mathfrak{N}$ интегрируемо. Для любого $X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{N}}(G(F))$ по свойству дифференциала $p_{i*}(X) \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ при $i = 1, 2$. Учитывая это, в силу интегрируемости $\mathfrak{M}$, мы имеем $p_{1*}([X,Y]) = [p_{1*}(X), p_{1*}(Y)] \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ и $p_{2*}([X,Y]) = [p_{1*}(X), p_{2*}(Y)] \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$. Отсюда, принимая во внимание, что $\mathfrak{N} = p_1^*\mathfrak{M} \cap p_2^*\mathfrak{M}$, мы получаем $[X,Y] \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{N}}(G(F))$. По теореме Фробениуса распределение $\mathfrak{N}$ интегрируемо и определяет слоение, которое обозначим через $F^{\mathfrak{N}}$. Из Теоремы 2 вытекает, что слоения $F^{\mathfrak{N}}$ и $\mathbb{F}$ — вполне геодезические. Согласно Лемме 2 это эквивалентно тому, что $(F^{\mathfrak{N}}, \mathbb{F})$ — пара дополнительных по ортогональности параллельных слоений.

Покажем, что распределение $\mathfrak{M}^{(2)}$ интегрируемо. Возьмем любые векторные поля X, Y, касательные к $\mathfrak{M}^{(2)}$. Пусть $Z := [X,Y]$. Так как $\mathfrak{M}^{(2)} = TF^{(1)} \oplus \mathfrak{N} = p_1^*\mathfrak{M}$, то благодаря интегрируемости распределения $\mathfrak{M} = TF^{\perp}$ выполняется цепочка равенств $p_{1*}(Z) = p_{1*}([X,Y]) = [p_{1*}(X), p_{1*}(Y)] \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$, поэтому необходимо, чтобы $Z \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}^{(2)}}(G(M))$. Согласно теореме Фробениуса распределение $\mathfrak{M}^{(2)}$ интегрируемо. Обозначим через $\mathcal{F}^{(2)}$ слоение, для которого $\mathfrak{M}^{(2)} = T\mathcal{F}^{(2)}$. По условию слоения (M, F) и $(M, F^{\perp})$ параллельны, поэтому из Леммы 2 следует вполне геодезичность слоения (M, F). По Теореме 2 вполне геодезичность слоения (M, F) влечет вполне геодезичность слоения $(G(F), F^{(2)})$, а согласно [11, Теорема 2] псевдоримановость (M, F) влечет псевдоримановость слоения $(G(F), F^{(2)})$, поэтому благодаря Лемме 2 дополнительные по ортогональности слоения $F^{(2)}$ и $\mathcal{F}^{(2)}$ на графике $(G(F), d)$ параллельны. Аналогично доказывается параллельность пары дополнительных по ортогональности слоений $(F^{(1)}, \mathcal{F}^{(1)})$. Таким образом, утверждения 2 и 3 доказаны.

Рассмотрим универсальное накрывающее отображение $f : \widetilde{G(F)} \to G(F)$. Так как $\mathfrak{N} = TF^{\mathfrak{N}}$ — интегрируемая связность Эресмана для слоения $(G(M), \mathbb{F})$, то по Теореме 5 $\widetilde{G(F)} = \widetilde{L^{\mathfrak{N}}} \times \widetilde{\mathbb{L}}$ — произведение односвязных многообразий, причем $f^*F^{\mathfrak{N}} = \{\widetilde{L^{\mathfrak{N}}} \times \{v\} \,|\, v \in \widetilde{\mathbb{L}}\}$ и $f^*\mathbb{F} = \{\{u\} \times \widetilde{\mathbb{L}} \,|\, u \in \widetilde{L^{\mathfrak{N}}}\}$. Из Теоремы 2 следует, что $\widetilde{\mathbb{L}} \cong \widetilde{L_0} \times \widetilde{L_0}$, где $f|_{\widetilde{L_0}} : \widetilde{L_0} \to L_0$ — универсальное накрывающее отображение для L_0. Таким образом, $\widetilde{G(F)} \cong \widetilde{L^{\mathfrak{N}}} \times \widetilde{L_0} \times \widetilde{L_0}$. Поскольку двуслоение $(\mathcal{F}^{(2)}, F^{(2)})$ накрыто произведением $(\widetilde{L^{\mathfrak{N}}} \times \widetilde{L_0}) \times \widetilde{L_0}$, то, согласно Теореме 5, $TF^{(2)}$ — интегрируемая связность Эресмана для слоения $(G(F), \mathcal{F}^{(2)})$ и наоборот, $T\mathcal{F}^{(2)}$ — интегрируемая связность Эресмана для $(G(F), F^{(2)})$. Аналогично, $TF^{(1)}$ — интегрируемая связность Эресмана для $(G(F), \mathcal{F}^{(1)})$ и наоборот. Отсюда вытекает утверждение 4 доказываемой теоремы. □

7. Два класса исследуемых слоений

7.1. Доказательство предложения 4. Семейство кусочно гладких геодезических любого псевдориманова многообразия образует систему путей в смысле [18]. Следовательно, на каждом слое (L_α, g) слоения (M, F) определена система путей. В силу полноты индуцированной метрики на слоях, аффинный параметр на каждой геодезической, лежащей в слое, изменяется на всей числовой прямой. Это означает полноту указанной системы путей. Согласно Лемме 1 и [16, Предложение 2.7] благодаря вполне геодезичности слоения (M, F), для любой интегральной кривой σ распределения $\mathfrak{M}$ локальный горизонтальный голономный диффеоморфизм $\Phi_\sigma : U_0 \to U_1$ является изометрией. Следовательно, Φ_σ отображает геодезическую в геодезическую с сохранением параметра. Это означает, что слоение (M, F) $\mathfrak{M}$-согласовано с системами путей на слоях, поэтому из [18, Теорема 6.1] вытекает, что $\mathfrak{M}$ — связность Эресмана для слоения (M, F).

7.2. Надстроечные слоения над псевдоримановыми многообразиями. *Надстроечные слоения.* Пусть (B, g^B) — произвольное m-мерное псевдориманово многообразие и T — любое гладкое q-мерное многообразие. Предположим, что задан гомоморфизм $\rho : G \to Diff(T)$ группы $G = \pi_1(B, b)$ в группу $Diff(T)$ диффеоморфизмов многообразия T. Пусть группа G действует справа как группа накрывающих преобразований на универсальном накрывающем пространстве $\widehat{B}$. Тогда равенство $f(x, t, g) = (x \cdot g,\, \rho(g^{-1})(t))$, где $(x, t, g) \in \widehat{B} \times T \times G$, определяет правое действие группы G на произведении многообразий $\widehat{B}\times T$. Фактор-отображение $f:\widehat{B}\times T\to M$ на фактор-многообразие $M:=(\widehat{B}\times T)/G$ индуцирует гладкое слоение $F=\{f(\widehat{B}\times\{v\})\,|\,v\in T\}$ на M, которое называется *надстроечным* и обозначается через $(M,F)=Sus(T,B,\rho)$. Проекция $p:M=(\widehat{B}\times T)/G\to B=\widehat{B}/G$ образует локально тривиальное расслоение, которое называется *ассоциированным.* Группа $\Psi=\rho(\pi_1(B,b))$ называется *структурной группой* надстроечного слоения (M,F).

7.3. Доказательство предложения 3. Пусть $p:M\to B$ — ассоциированное расслоение, а $\mathfrak{M}$ — распределение, образованное касательными пространствами к его слоям. Любое векторное поле X на M однозначно представимо в виде $X=X^F+X^{\mathfrak{M}}$, где $X^F\in\mathfrak{X}_F(M)$, $X^{\mathfrak{M}}\in\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$. Пусть g^M — псевдориманова метрика M, не вырождающаяся на слоях слоения (M,F). Указанная метрика g^M существует, поскольку в качестве g^M можно взять произвольную риманову метрику. Тогда равенство

$$g(X,Y):=(p^*g^B)(X^F,Y^F)+g^M(X^{\mathfrak{M}},Y^{\mathfrak{M}})\quad\forall X,Y\in\mathfrak{X}(M)$$

определяет псевдориманову метрику g на многообразии M. Из определения метрики g вытекает, что $p:M\to B$ — псевдориманова субмерсия (M,g) на (B,g^B). Следовательно, локальные горизонтальные голономные диффеоморфизмы слоения F являются изометриями, поэтому, согласно Предложению 5, F — вполне геодезическое слоение на псевдоримановом многообразии (M,g). По свойству надстроечного слоения, сужение $p|_{L_\alpha}$ проекции p на произвольный слой L_α слоения F является накрывающим отображением на базу B, следовательно, $p|_{L_\alpha}:L_\alpha\to B$ — псевдориманово накрывающее отображение. Отсюда вытекает, что слои L_α, наделенные индуцированной псевдоримановой метрикой, являются полными псевдоримановыми многообразиями тогда и только тогда, когда (B,g^B) — полное псевдориманово многообразие.

Полнота метрики g^B нами не предполагается. Таким образом, построено вполне геодезическое слоение (M,F) на псевдоримановом многообразии (M,g) с индуцированной псевдоримановой метрикой на слоях, причем ортогональное q-мерное распределение $\mathfrak{M}$ является интегрируемой связностью Эресмана для этого слоения.

Итак, утверждения 1) – 3) доказаны.

Подчеркнем, что график слоения $G(F)$, вообще говоря, не хаусдорфов. Так как псевдогруппа голономии $\mathcal{H}(F)$ слоения F определяется преобразованиями из группы $\Psi:=\rho(\pi_1(B,b))\subset Diff(T)$, то, применяя Предложение 1, мы заключаем, что график $G(F)$ хаусдорфов тогда и только тогда, когда группа Ψ квазианалитически действует на T. Это доказывает утверждение 4).

Таким образом, слоения, полученные надстройкой гомоморфизма фундаментальной группы псевдориманова многообразия, принадлежат к исследуемому классу слоений.

Замечание 4. *Во введенных выше обозначениях, график $G_{\mathfrak{M}}(F)$ надстроечного слоения (M,F) является хаусдорфовым гладким $(2m+q)$-мерным многообразием с псевдоримановой метрикой d. Слои канонических проекций p_1 и p_2 — вполне геодезические m-мерные подмногообразия в $(G_{\mathfrak{M}}(F),d)$, изометричные любому слою (L_0,d) с тривиальной группой $\mathfrak{M}$-голономии слоения (M,F), если таковой существует. q-мерное распределение $\mathfrak{N}$, ортогональное индуцированному вполне геодезическому слоению $\mathbb{F}$, интегрируемо и является касательным к некоторому псевдориманову слоению.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. H.E. Winkelnkemper *The graph of a foliation*// Ann. Global Anal. Geom. V.1, no 3. 1993. P. 51-75.
2. I. Tamura *Topology of foliations: An Introduction.* Translations of Mathematical Monographs. V. 97. AMS. 1992. 193 p.
3. A. Connes *Non-commutative geometry*, Boston: Academic Press. 1994. 654 p.
4. R. Blumenthal, J. Hebda *Ehresmann connections for foliations*// Indiana Univ. Math. J. V.33, no 4. 1984. P. 597-611.

5. R. Blumenthal, J. Hebda *Complementary distributions which preserve the leaf geometry and applications to totally geodesic foliations*// Quarterly J. Math. Oxford Ser. (2), V. 35, 1984. P. 383–392.
6. Жукова Н.И. *График слоения со связностью Эресмана и стабильность слоев*// Изв. вузов. Матем. № 2. 1994. С. 79–81.
7. Жукова Н.И. *Свойства графиков Эресмановых слоений*// Вестник ННГУ. Сер. Мат. Вып. 1. 2004. С. 73-87.
8. N.I. Zhukova *Singular foliations with Ehresmann connections and their holonomy groupoids*, Banach Center Publ. V.76, 2007. P. 471–490.
9. N.I. Zhukova *Local and global stability of compact leaves and foliations*// J. of Math. Phys., Analysis and Geometry. V. 9, no 3. 2013. P. 400–420.
10. R. A. Wolak *The graph of a totally geodesic foliation*// Annales Polonici Mathematici. V. 60, no 3. 1995. P. 241–247.
11. A.Yu. Dolgonosova, N.I. Zhukova *Pseudo-Riemannian foliations and their graphs* // Lobachevskii Journal of Math. V. 39, no 1. 2018. P. 54–64.
12. B. O'Neill *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity.* New York, London: Academic Press. 1983. 483 p.
13. A. Gray *Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions*// J. Math. Mech. V. 16. 1967. P. 715–737.
14. G. Baditoiu *Classification of Pseudo-Riemannian submersions with totally geodesic fibres from pseudo-hyperbolic spaces*// Proceedings of the London Math. Soc. V. 105, no 6. 2012. P. 1315–1338.
15. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии* **Т. 1**, М.: Наука Пресс. 1981.
16. K. Yokumoto *Mutual exclusiveness along spacelike, timelike, and lightlike leaves in totally geodesic foliations of lightlike complete Lorentzian two-dimensional tori*// Hokkaido Math. J. V. 31, no 3. 2002. P. 643–663.
17. S. Kashiwabara *The decomposition of a differentiable manifolds and its applications*// Tohoku Math. J. (2), V. 11, no 1. 1959. P. 43–53.
18. Жукова Н.И. *Слоения, согласованные с системами путей*// Изв. вузов. Матем. № 7. 1989. С. 5–13.
19. H. Wu *On the de Rham decomposition theorem*// Illinois J. Math. V. 8, no 2. 1964. P. 291–311.

Нина Ивановна Жукова,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Большая Печерская ул., 25/12, ,
603155, Нижний Новгород, Россия
E-mail: `nina.i.zhukova@hse.ru`