

Выбор параметров многоадресной передачи в сетях IEEE 802.11aa*

Кузнецов Е.С.
Сколтех, ИППИ РАН
egor.kuznecov@frtk.ru

Иванов А.С.
ИППИ РАН
a.ivanov@iitp.ru

Аннотация

В современных Wi-Fi сетях для обеспечения надежной многоадресной передачи могут быть использованы методы, определенные в дополнении IEEE 802.11aa к стандарту Wi-Fi. Дополнение IEEE 802.11aa предлагает вести многоадресную передачу в предварительно зарезервированных интервалах времени, что позволяет дополнительно уменьшить потери пакетов из-за коллизий и интерференции с соседними станциями сети. Однако дополнение лишь определяет доступный инструментарий, но ничего не говорит о том, как именно следует выбирать параметры используемых методов и резервируемых интервалов. В данной работе разработана математическая модель многоадресной передачи мультимедийного потока в периодических интервалах времени. Для любого из методов, определенных в дополнении IEEE 802.11aa модель позволяет определить такие параметры передачи, которые позволяют выполнить требования к качеству обслуживания потока при минимальном объеме зарезервированного канального времени.

1. Введение

Технология Wi-Fi (стандарт IEEE 802.11) является одной из самых распространенных технологий построения локальных беспроводных сетей. Согласно статистике более половины данных [1], передаваемых по таким сетям, являются мультимедийными данными, которые, в большинстве своем, генерируются приложениями реального времени. В настоящее время широкую популярность набирают сценарии работы беспроводных сетей, при которых одни и те же мультимедийные данные передаются сразу нескольким получателям, т.е. имеет место многоадресная передача. Примерами таких сценариев являются онлайн-трансляции на стадионах и в спортбарах, аудио- и видеоконференции. При этом необхо-

димо учитывать, что на передачу мультимедийных данных зачастую накладываются жесткие требования к качеству обслуживания — QoS-требования (Quality of Service) — представленные, например, ограничениями на задержку при передаче и долю потерянных пакетов.

Возможность выполнения QoS-требований зависит от используемого метода многоадресной передачи. В начальных версиях стандарта Wi-Fi единственный метод многоадресной передачи состоял в использовании широковещательной рассылки, когда отправитель передает каждый многоадресный пакет только один раз, независимо от того, принят пакет всеми получателями или нет. Использование такого метода в современных беспроводных сетях, работающих в условиях жесткой интерференции, приводит к частым потерям пакетов. Как следствие, широковещательная рассылка не может гарантировать выполнение QoS-требований при передаче мультимедийных данных. Поэтому был разработан ряд новых методов многоадресной передачи, позволяющих так или иначе повысить вероятность успешной доставки пакетов. Часть этих методов в конечном счете была включена в дополнение IEEE 802.11aa к стандарту сетей Wi-Fi. К этим методам относятся Directed Multicast Service (DMS), Groupcast with Unsolicited Retries (GCR-U) и Groupcast with Block Ack (GCR-BA). Эти методы основаны, главным образом, на сборе подтверждений и осуществлении повторных попыток передач. Ниже приводится краткое описание этих методов.

Directed Multicast Service (DMS). При использовании DMS отправитель передает пакеты потока каждому получателю в отдельности, превращая, таким образом, одну многоадресную передачу в несколько одноадресных. При успешном приеме пакета получатель отправляет пакет ACK. В противном случае, если ACK не получен, отправитель передает пакет еще раз. Минусом DMS является линейный рост объема используемого канального времени с увеличением числа получателей. Поэтому DMS не может быть использован в случае, когда число по-

*Исследование выполнено в ИППИ РАН при финансовой поддержке РФФ в рамках научного проекта № 14-50-00150.

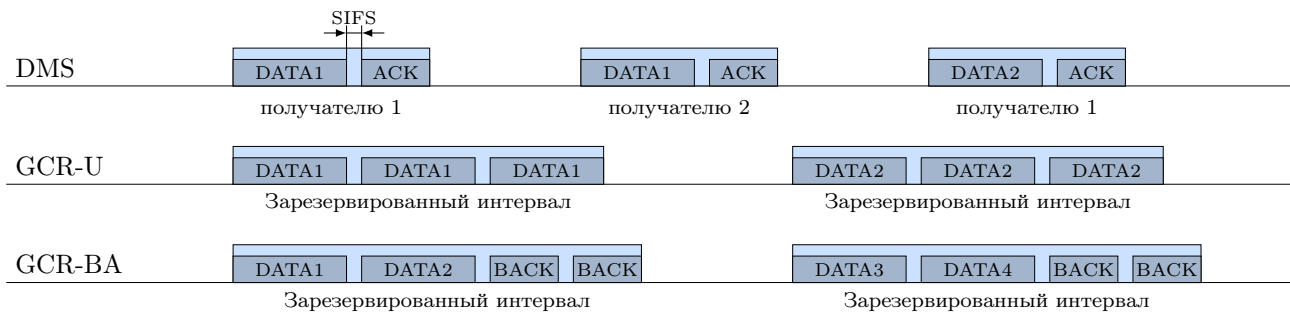


Рис. 1: Методы многоадресной передачи

лучателей велико.

Groupcast with Unsolicited Retires (GCR-U).

При использовании GCR-U каждый многоадресный пакет передается U раз подряд. Количество последовательных передач U определяется требуемой вероятностью доставки пакета. При этом получатели никак не подтверждают получение пакетов, а потому накладные расходы GCR-U связаны не с передачей пакетов подтверждений, а с тем, что каждый пакет передается ровно U раз, даже если он уже был доставлен всем получателям за меньшее число передач.

Groupcast with Block Ack (GCR-BA).

При использовании GCR-BA отправитель использует механизм блочного квитирования пакетов Block Ack. Суть этого механизма состоит в том, что отправитель передает сразу несколько пакетов последовательно друг за другом, т.е. *блоками*. Передачи пакетов отделены друг от друга короткими межкадровыми интервалами SIFS (Short InterFrame Space). После отправки блока отправитель собирает с получателей информацию об успешно принятых ими пакетах. Эту информацию получатели передают в пакетах-подтверждениях BACK (BlockAck), содержащих битовую маску с указанием пакетов, принятых успешно и неуспешно. Один из способов сбора пакетов BACK состоит в отправке отправителем пакетов-запросов BAR (BlockAckRequest) интересующим его получателям. В ответ на предназначенный ему запрос BAR получатель шлет пакет BACK (такой подход используется в дополнении IEEE 802.11aa). Другой способ состоит в том, что отправитель заранее шлет расписание, в котором указано, в каком порядке получатели должны посылать пакеты BACK после получения блока пакетов с данными (этот способ рассматривался при разработке дополнения IEEE 802.11aa). Такой способ более целесообразен с точки зрения уменьшения накладных расходов, так как он не требует отправки пакетов BAR. Поэтому далее в работе рассматрива-

ется именно он.

Как в первом, так и во втором способах отправитель может запрашивать подтверждения не ото всех получателей, а только от некоторых из них, называемых *лидерами*. Таким образом, только часть получателей посылает пакеты BACK, что позволяет дополнительно снизить накладные расходы на передачу служебной информации. Пакет считается успешно доставленным, если он получен всеми лидерами. В противном случае пакет передается в составе следующего блока.

Для того, чтобы дополнительно увеличить вероятность доставки пакетов при использовании упомянутых выше методов многоадресной передачи, дополнение IEEE 802.11aa предлагает осуществлять многоадресную передачу в заранее зарезервированных интервалах времени. В Wi-Fi сетях одним из наиболее распространенных способов резервирования является резервирование последовательности периодических интервалов времени одинаковой длительности. Далее такую последовательность будем называть *периодическим резервированием*. На рис. 1 изображена многоадресная передача с помощью методов DMS, GCR-U и GCR-BA внутри зарезервированных интервалов.

Периодическое резервирование может быть полностью описано с помощью всего трех параметров: начальной позиции первого зарезервированного интервала, длительности интервалов и их периода. Станции сети рассылают эту информацию своим соседям. Таким образом, станции знают о зарезервированных интервалах своих соседей и не передают внутри них, что увеличивает вероятность успешной передачи. В случае многоадресной передачи, отправитель и получатели устанавливают многоадресное резервирование, заранее согласовав его параметры, чтобы избежать перекрытий с уже существующими в их окрестности резервированиями.

Дополнение IEEE 802.11aa определяет методы многоадресной передачи, но не говорит, как именно следует выбирать параметры этих методов в конкретных сценариях. В данной работе рассматривается многоадресная передача мультимедийного потока

в сети IEEE 802.11aa с помощью периодических резервирований, и дается ответ на вопрос: *как выбрать параметры передачи, чтобы выполнить QoS-требования к передаче потока за счет как можно меньшего объема зарезервированного канального времени*. Для ответа на этот вопрос в работе построена математическая модель рассматриваемого процесса передачи, которая может быть использована для настройки параметров любого из методов, определенных в дополнении IEEE 802.11aa.

Дальнейшее изложение построено следующим образом. В разделе 2 представлен обзор предшествующих работ. Формальная постановка задачи дана в разделе 3. В разделе 4 представлена математическая модель многоадресной передачи в сети IEEE 802.11aa. Раздел 5 содержит численные результаты и, в частности, сравнение методов DMS, GCR-U и GCR-BA. Итоги работы и направления дальнейших исследований представлены в разделе 6.

2. Обзор работ

Среди множества работ, посвященных многоадресной передаче данных, наиболее близкими по тематике решаемых задач являются следующие работы [2–8].

В работах [2, 3] представлено имитационное моделирование многоадресной передачи с использованием методов, описанных в дополнении IEEE 802.11aa. Моделирование показало, что методы позволяют достигнуть различного компромисса между вероятностью доставки пакетов, расходом канальных ресурсов и сложностью реализации. Это значит, что необходимо правильно выбирать метод в зависимости от сценария работы. Однако недостатком рассматриваемых работ является то, что в них представлено только имитационное сравнение.

Аналитическое сравнение рассматриваемых методов приведено в [4, 5]. В [4] разработана математическая модель для случая, когда по сети передаются как многоадресные, так и одноадресные данные. Авторы предложили алгоритм выбора метода многоадресной передачи и его параметров, который бы обеспечивал требуемую надежность и максимальную пропускную способность в зависимости от количества станций в сети. Однако эффективность методов рассматривается только с точки зрения пропускной способности, хотя при передаче данных реального времени также накладываются ограничения на задержку и долю потерянных пакетов. Более простая математическая модель предложена в [5], где рассматривается передача только многоадресных данных. Во всех упомянутых выше работах рассматривалось использование случайного доступа к каналу с применением механизма RTS/CTS для защиты от коллизий.

В [6] разработана математическая модель многоадресной передачи внутри зарезервированных интервалов для частного случая метода GCR-BA, когда в каждом зарезервированном интервале передается только один пакет, а не блок пакетов. При этом считалось, что все получатели являются лидерами. Далее в работе [7] модель была расширена на случай переменных лидеров: перед первой попыткой передачи пакета отправитель случайно выбирает подмножество получателей, которые будут лидерами для данного пакета. В [6] и [7] продемонстрировано применение разработанных моделей к выбору параметров методов DMS и GCR-U и представлено сравнение этих методов с точки зрения расхода канальных ресурсов от числа получателей и их вероятностей неуспешной передачи. Однако в работах [6, 7] так и не была построена математическая модель передачи с помощью метода GCR-BA. Модель такой передачи была предложена в работе [8], в которой, однако, рассматривается передача насыщенного потока, и считается, что пакеты отбрасываются по достижению ограничения на допустимое число попыток передач, а не из-за ограничения на время жизни, как это было в работах [6] и [7].

Данная работа призвана заполнить пробел, связанный с отсутствием метода выбора параметров многоадресной передачи мультимедийного потока внутри периодических интервалов времени с помощью метода GCR-BA. С этой целью в работе построена математическая модель такого процесса передачи. Построенная модель позволяет находить такие параметры передачи, при которых QoS-требования выполнены на всех получателях при минимальном объеме зарезервированного канального времени.

3. Постановка задачи

Рассмотрим многоадресную передачу мультимедийного потока от отправителя к N получателям. Пачки потока поступают в очередь отправителя через равные промежутки времени T_m . Количество пакетов в пачке равно j с вероятностью p_j^m , $j = 1, \dots, M$. Далее такой поток будем называть *неординарным периодическим* (такая структура мультимедийного потока соответствует, например, передаче видео с помощью протокола RTP [9]). При передаче потока для всех получателей должны быть выполнены следующие QoS-требования: 1) ограничение на время доставки пакета D_{QoS} и 2) ограничение на долю потерянных пакетов PLR_{QoS} .

Для передачи потока отправитель с получателями устанавливают одно периодическое резервирование с периодом T_{res} . Считается, что внутри каждого зарезервированного интервала используется метод GCR-BA. Длительности каждого интервала достаточно для того, чтобы отправитель передал

блок из не более чем \mathcal{B} пакетов и получил пакеты-подтверждения ВАСК от лидеров. Считаем, что количество лидеров постоянно и равно J , а сами лидеры фиксированы и не меняются в процессе передачи.

Отправитель использует политику FIFO: в каждом зарезервированном интервале отправитель передает самые старые пакеты в очереди. Если число пакетов в очереди больше или равно \mathcal{B} , то в составе блока передаются \mathcal{B} самых старых пакетов в очереди. В противном случае отправитель формирует блок из всех имеющихся в очереди пакетов (при этом часть из \mathcal{B} позиций блока не используются). Каждый пакет передается до тех пор, пока он либо не будет успешно доставлен всем лидерам, либо пока время его нахождения в очереди не достигнет максимально допустимой задержки на передачу D_{QoS} . В последнем случае пакет отбрасывается вместе со всей пачкой, которой он принадлежит.

Несмотря на то, что пакеты передаются внутри защищенных зарезервированных интервалов, ошибки при передаче все еще возможны из-за случайного шума и интерференции с удаленными станциями. В связи с этим обозначим вероятность неуспешной передачи пакета получателю i как q_i , $i = 1, \dots, N$. Далее считается, что в качестве лидеров выбираются J получателей с наибольшей вероятностью неуспешной передачи.

Задача данной работы состоит в разработке метода выбора таких значений параметров T_{res} , \mathcal{B} и J , которые гарантировали бы выполнение QoS-требований на каждом из получателей при минимальном объеме зарезервированного канального времени. Для решения данной задачи в работе построена математическая модель, которая позволяет найти PLR для каждого получателя, как функцию от T_{res} , \mathcal{B} и J . В разделе 4.6 будет показано, что разработанная математическая модель может быть использована для анализа как метода GCR-BA, так и методов DMS и GCR-U.

4. Математическая модель

4.1. Подход к моделированию

В случае системы, описанной выше, на отправителе имеется очередь, в которую помещаются все пакеты передаваемого неординарного потока (см. рис. 2). В начале каждого зарезервированного интервала из этой очереди согласно политике FIFO выбираются не более \mathcal{B} самых старых пакетов, которые далее распределяются по первым \mathcal{B} позициям передаваемого блока. Для математического моделирования данного процесса передачи, можно воспользоваться подходом, использованным в работах [6, 7, 10], где процесс передачи моделируется с помощью цепи Маркова с дискретным временем. Од-

нако прямое применение данного подхода к моделированию блочной передачи приводит к чрезвычайно большой размерности конечной цепи Маркова, так как в описание каждого состояния необходимо включить информацию о временах нахождения в очереди \mathcal{B} самых старых пакетов (более подробно об этом в разделе 4.2). Для уменьшения размерности цепи Маркова и, соответственно, упрощения процесса моделирования, в данной работе рассматривается иное, менее “прямолинейное”, применение вышеупомянутого подхода. Для этого очередь отправителя разделяется на \mathcal{B} независимых очередей — по одной на каждую позицию в блоке на передачу (см. рис. 3). При поступлении пачки, ее пакеты распределяются по \mathcal{B} очередям циклически по алгоритму Round-Robin, т.е. каждый следующий пакет распределяется в следующую очередь. При поступлении очередной пачки первый ее пакет попадает в очередь, на которой закончилось распределение предыдущей пачки. Считается, что в позиции i в блоке на передачу могут передаваться только пакеты из очереди i . Как и ранее, в каждой очереди используется политика FIFO, то есть всегда передается самый старший пакет в очереди. Далее будем рассматривать одну из таких очередей.

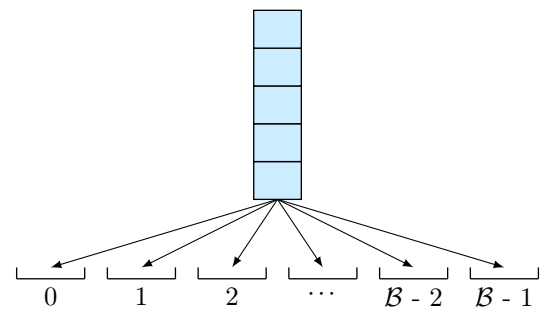


Рис. 2: Распределение пакетов по очередям в исходном процессе

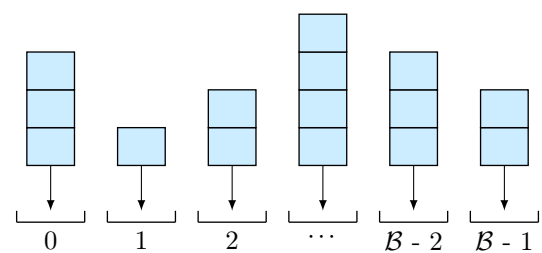


Рис. 3: Распределение пакетов по очередям в альтернативном процессе

Заметим, что для описанного выше альтернативного процесса передачи значение доли потерянных пакетов PLR при фиксированных параметрах передачи T_{res} , \mathcal{B} и J всегда будет выше PLR для исходного процесса. Это связано с тем, что в случае блочной

передачи, если размер очереди больше или равен \mathcal{B} , то все позиции в блоке на передачу будут заняты. В случае же альтернативного процесса возможна ситуация, когда часть позиций не используются из-за отсутствия пакетов в их очередях, хотя число пакетов в других очередях может быть больше одного. В результате часть пакетов ждут обслуживания дольше, чем если бы они ждали его в случае исходного процесса, что и увеличивает вероятность отбрасывания пакетов и, следовательно, PLR. Тем не менее, как будет показано в разделе 5, разница в полученных значениях PLR оказывается незначительной и позволяет применить модель к выбору параметров многоадресной передачи.

4.2. Цепь Маркова

Разделим время на слоты длительности $\tau = \text{gcd}(T_{in}, T_{res})$. Слоты расположим таким образом, чтобы начало каждого зарезервированного интервала совпадало с началом некоторого слота (см. рис. 4). Теперь выразим T_{in} и T_{res} в слотах

$$t_{in} = \frac{T_{in}}{\tau}, \quad t_{res} = \frac{T_{res}}{\tau}, \quad \text{где } t_{in}, t_{res} \in \mathbb{N}.$$

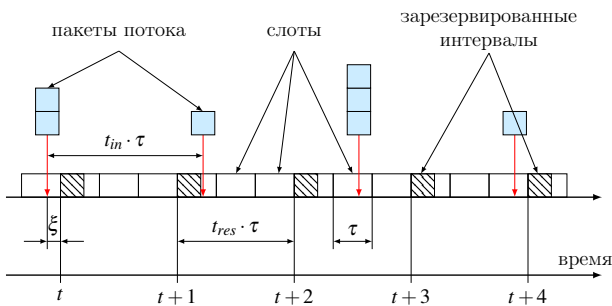


Рис. 4: Слотированное время и входной поток

Далее выберем одну из \mathcal{B} очередей, передачу пакетов в которой и будем рассматривать. Без ограничения общности будем рассматривать очередь под номером 0. Процесс передачи будем описывать с помощью цепи Маркова с дискретным временем. Для этого будем наблюдать процесс в начале каждого зарезервированного интервала и описывать в момент наблюдения t тройкой целых чисел $(h(t), m(t), r(t))$.

Определение параметра $h(t)$. Величина $h(t)$ определяет возраст самого старшего пакета в очереди. Чтобы определить $h(t)$ формально обозначим через ξ время между прибытием пачки и началом следующего слота (см. рис. 4). Далее, виртуально сдвинем все моменты поступления пакетов на время ξ вперед, то есть к началам ближайших слотов, попутно уменьшив величину D_{QoS} на ξ . Заметим, что

поведение процесса передачи при таком преобразовании не меняется, так как фактически каждый поступивший пакет просто простаивал в течение времени ξ после прибытия в очередь. Теперь определим возраст пакета как разницу между текущим временем и временем его прибытия в очередь, выраженную в слотах. При таком формальном подходе пакеты, которые уже находятся в очереди, имеют неотрицательный возраст, а те, поступление которых еще только ожидается — отрицательный. Далее будем называть HoL-пакетом (Head of Line) пакет наибольшего возраста среди всех, которые находятся в очереди на данный момент или еще не поступили. Наконец, величина $h(t)$ в момент наблюдения t определяется как возраст HoL-пакета выраженный в слотах. Благодаря проделанному преобразованию возраст всякого пакета в момент наблюдения процесса равен целому числу слотов, а потому $h(t) \in \mathbb{Z}$. Если очередь не пуста, то $h(t) \geq 0$, в противном случае $h(t) < 0$.

Определение параметра $m(t)$. Чтобы определить параметр $m(t)$, рассмотрим более детально процесс распределения пакетов по очередям. После поступления пачки ее пакеты последовательно распределяются в каждую очередь начиная с очереди, на которой остановилось распределение предыдущей пачки. После заполнения очереди под номером $\mathcal{B} - 1$ следующей пакет попадает в очередь 0 и так далее по кругу.

В работе [6], в которой рассматривалась система с одной очередью, описание состояния системы включало в себя информацию о возрасте самой старшей пачки пакетов в очереди и об оставшемся числе пакетов в этой пачке. Пусть возраст HoL-пакета в очереди равен h . При следовании данному подходу в рассматриваемом случае также следовало бы хранить информацию о числе пакетов n попавших в рассматриваемую очередь из пачки возраста h , а также номер очереди i , на которой остановилось распределение пакетов этой пачки (т.е. номер очереди, в которую попадет первый пакет следующей пачки). Например, на рис. 5 показан случай для $\mathcal{B} = 6$, где объединены пакеты, принадлежащие одной пачке. Рассмотрим, к примеру, очередь под номером 2 и самую старшую пачку, пакеты которой находятся в этой очереди. Количество пакетов этой пачки, попавших в очередь 2, равно $n = 2$, а номер очереди, на которой остановилось распределение пакетов этой пачки, равен $i = 4$.

Заметим, что два параметра n и i можно заменить на один. Чтобы определить этот искомым параметр, вновь рассмотрим одну из \mathcal{B} очередей. Пусть эта очередь имеет номер s , а h — возраст первого (самого старшего) пакета в этой очереди. Посмотрим на выбранную очередь в момент попадания этого пакете-

та. Обозначим через m , оставшееся (нераспределенное) число пакетов в пачке непосредственно перед тем, как рассматриваемый пакет был распределен в очередь. Утверждается, что этим параметром можно заменить пару (n, i) . Обоснованность данной замены следует из того, что между параметром m и парой (n, i) имеется взаимно однозначное соответствие, определяемое равенством

$$m = (n - 1) \cdot \mathcal{B} + (i - c)_{\mathcal{B}}, \quad (1)$$

где $(i - c)_{\mathcal{B}} \equiv (i - c) \bmod \mathcal{B} \in \{0, \dots, \mathcal{B} - 1\}$. Далее будем называть m *остатком старшей пачки при распределении в рассматриваемую очередь с*. Фактически для очереди s параметр m — это число пакетов в пачке, которой принадлежит первый пакет очереди, непосредственно перед моментом попадания этого пакета в очередь s (часть пакетов пачки уже, возможно, была распределена). В случае, изображенном на рис. 5, $m = 8$, в чем нетрудно убедиться как графически, так и с помощью соотношения (1).

Определение параметра $r(t)$. Обозначим за $r(t)$ количество уже сделанных попыток передач HoL-пакета. Очевидно, если возраст пакета равен h , то он не может быть передан более чем $\lceil h/t_{res} \rceil$ раз. Поэтому $0 \leq r \leq \lceil h/t_{res} \rceil$ при $h \geq 0$, и $r = 0$ при $h < 0$.

4.3. Матрица переходных вероятностей

Для того чтобы описать возможные переходы цепи Маркова, определим несколько вспомогательных вероятностей.

Пусть $\varphi(m, k)$ — вероятность того, что в k пачках входного потока, суммарно содержится m пакетов. С учетом того, что $\varphi(0, 0) = 1$, остальные вероятности ($k \geq 1$) могут быть найдены по следующей рекуррентной формуле:

$$\varphi(m, k) = \sum_{i=1}^{\min(\mathcal{M}, m)} p_i^{\text{in}} \varphi(m - i, k - 1).$$

Обозначим через $p(\text{suc}|r)$ вероятность того, что HoL-пакет доставлен успешно всем лидерам при попытке $(r + 1)$ при условии, что он не был доставлен хотя бы одному лидеру за r предшествующих

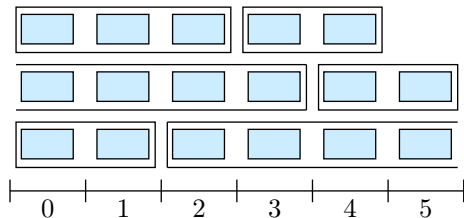


Рис. 5: Распределение пакетов по очередям ($\mathcal{B} = 6$)

попыток. Для нахождения $p(\text{suc}|r)$ введем вероятность $p(r)$ того, что хотя бы один из лидеров не получил пакет успешно за r попыток. Пусть получатели пронумерованы в порядке убывания вероятностей неуспешной передачи пакетов: $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_J \dots \geq q_N$. Тогда вероятность $p(r)$ равна

$$p(r) = 1 - \prod_{j=1}^J (1 - q_j^r),$$

где $(1 - q_j^r)$ — вероятность того, что станция j успешно получила пакет за r попыток передач. Далее, используя определение условной вероятности, получаем, что

$$p(\text{suc}|r) = \frac{p(\text{suc} \cap r)}{p(r)} = \frac{p(r) - p(r + 1)}{p(r)},$$

где $p(\text{suc} \cap r) = p(r) - p(r + 1)$ — это вероятность того, что пакет доставлен всем лидерам *ровно* за $(r + 1)$ попытку.

Пусть процесс в момент t находится в состоянии $(h(t), m(t), r(t))$. Рассмотрим все возможные переходы из этого состояния и найдем их вероятности.

1) Если $h(t) < 0$, то очередь пуста и $r(t) = 0$. $m(t)$ соответствует остатку пачки, текущий возраст которой равен $h(t)$, при (будущем) поступлении ее первого пакета в рассматриваемую очередь. В данном случае возраст HoL-пакета просто увеличивается на t_{res} слотов к началу следующего интервала, т.е. процесс переходит в состояние $(h(t) + t_{res}, m(t), 0)$ с вероятностью 1.

2) Если $0 \leq h(t) \leq d - t_{res}$, то очередь не пуста и отправитель передает HoL-пакет в соответствующей позиции блока.

2.1) Пусть пакет не доставлен всем лидерам за текущую попытку. Так как $h(t) + t_{res} \leq d$, то пакет не устареет и будет передан в следующем зарезервированном интервале. Значит, процесс перейдет в состояние $(h(t) + t_{res}, m(t), r(t) + 1)$ с вероятностью $1 - p(\text{suc}|r)$.

2.2) Пусть с вероятностью $p(\text{suc}|r)$ пакет доставлен всем лидерам после текущей попытки передачи. В данном случае HoL-пакет покидает очередь отправителя. Поэтому необходимо определить, какой пачке принадлежит следующий HoL-пакет, и каков остаток этой пачки при распределении этого пакета в рассматриваемую очередь.

Обозначим через $\psi(m, k, m')$ вероятность того, что следующий пакет в очереди принадлежит пачке, которая поступает спустя время $k \cdot T_{in}$ после пачки, которой принадлежал успешно переданный HoL-пакет, а остаток этой пачки при распределении в рассматриваемую очередь равен m' . Если при этом $m > \mathcal{B}$, то следующий HoL-пакет очереди принадлежит той же самой пачке, т.е. $\psi(m, 0, m - \mathcal{B}) = 1$. Если же $m \leq \mathcal{B}$, то следующий HoL-пакет принадлежит

одной из пачек, поступающих после пачки, которой принадлежал предыдущий HoL-пакет. В общем случае, если следующий HoL-пакет принадлежит k -ой пришедшей пачке, то

$$\psi(m, k, m') = \sum_{i=m'}^{\mathcal{M}} p_i^{in} \varphi(\mathcal{B} - m + m' - i, k - 1).$$

Действительно, чтобы остаток пачки при распределении в рассматриваемую очередь был равен m' , за счет последних k пачек должно поступить $\mathcal{B} - m + m'$ пакетов. Из этих k пачек за счет последней пачки поступает i пакетов, причем это число должно быть не меньше чем m' . Таким образом, с вероятностью $\varphi(\mathcal{B} - m + m' - i, k - 1)$ за счет первых $(k - 1)$ -ой пачек поступает $\mathcal{B} - m + m' - i$ пакетов, и оставшиеся i пакетов поступают за счет k -ой пачки с вероятностью p_i^{in} ($m' \leq i \leq \mathcal{M}$). И, наконец, также возможен случай, что следующей для заполнения является рассматриваемая очередь, т.е. $m = 0$. При этом $\psi(0, 1, m') = p_{m'}^{in}$. Ситуация, при которой $m = 0$ возникает, когда устаревают одна или несколько пачек пакетов. Более подробно этот случай рассматривается далее при нахождении переходов из состояний с $h(t) > d - t_{res}$.

Таким образом, если $m \geq \mathcal{B}$, то процесс с вероятностью $p(suc|r)$ перейдет в состояние $(h(t) + t_{res}, m(t) - \mathcal{B}, 0)$. Если $m < \mathcal{B}$, то процесс перейдет в состояние $(h(t) + t_{res} - k \cdot t_{in}, m', 0)$ с вероятностью $p(suc|r)\psi(m, k, m')$, где $k = 1, \dots, \mathcal{B}$, $m' = 1, \dots, \mathcal{M}$.

3) Если $h(t) > d - t_{res}$, то независимо от того, доставлен пакет успешно всем лидерам или нет, он покинет очередь к следующему моменту наблюдения, так как к этому моменту будет превышено ограничение на его время жизни ($h(t) + t_{res} > d$). При этом вместе с пачкой, которой принадлежал HoL-пакет, устареют еще $l = \lceil (h + t_{res} - t_{in} - d) / t_{in} \rceil$ следующих за ней пачек. Чтобы определить, пакет какой пачки при этом станет HoL-пакетом очереди, необходимо определить, на какой позиции заканчивается распределение пакетов l устаревающих пачек.

Обозначим через $\zeta(m, l, b)$ вероятность того, что распределение l -ой отбрасываемой пачки закончилось на очереди b (т.е. очередь под номером b является следующей для заполнения). Для этого необходимо, чтобы в общую очередь поступило j пакетов так, чтобы $b = (m + j + c)_{\mathcal{B}}$, где c — номер рассматриваемой очереди ($c \in \{0, \dots, \mathcal{B} - 1\}$). Тогда

$$\zeta(m, l, b) = \sum_{\substack{j: j \leq l \cdot \mathcal{M} \\ b = (m + j + c)_{\mathcal{B}}}} \varphi(l, j).$$

В результате, процесс переходит в состояние $(h(t) + t_{res} - (k + l)t_{in}, m', 0)$ с вероятностью $\sum_{b=0}^{\mathcal{B}-1} \zeta(m, l, b)\psi(b, k, m')$, где $k = 1, \dots, \mathcal{B}$, $m' = 1, \dots, \mathcal{M}$.

Описав все возможные переходы цепи Маркова, составим матрицу переходных вероятностей P и найдем стационарное распределение вероятностей со-

стояний процесса $\boldsymbol{\pi}_{(h,m,r)}$, решив систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi}_{(h,m,r)}^T P = \boldsymbol{\pi}_{(h,m,r)}^T, \\ \sum_{h,m,r} \boldsymbol{\pi}_{(h,m,r)} = 1. \end{cases} \quad (2)$$

4.4. Определение PLR

Найдем долю потерянных пакетов PLR для получателя i . Пусть I_i^{dis} — среднее количество пакетов, недоставленных получателю i и покинувших очередь за единицу времени, а I^{in} — среднее количество пакетов, пребывающих в очередь за единицу времени:

$$I^{in} = \frac{\sum_{j=1}^{\mathcal{M}} j p_j^{in}}{\mathcal{B} \cdot T_{in}}. \quad (3)$$

Тогда при заданном значении I_i^{dis} значение PLR_i может быть вычислено как

$$PLR_i = \frac{I_i^{dis}}{I^{in}}. \quad (4)$$

Заметим, что значение PLR для получателя i зависит от того, является он лидером или нет. Рассмотрим с начала случай, когда получатель i — лидер.

Пакет может быть отброшен не будучи доставленным всем лидерам, только если к следующему зарезервированному интервалу время его жизни превысит ограничение D_{QoS} на время нахождения в очереди. Такое возможно только при переходах из состояний (h, m, r) , для которых $h(t) + t_{res} > d$. Вероятность того, что при таком переходе HoL-пакет будет отброшен и не доставлен получателю i , равна $q_i^{r+1}/p(r)$. Однако в очереди могут находиться еще пакеты, которые устареют к следующему зарезервированному интервалу. Это могут быть как пакеты из той же пачки (если $m > \mathcal{B}$), так и из следующих. Количество пачек, устаревающих к началу следующего зарезервированного интервала, равно $l = \lceil (h + t_{res} - t_{in} - d) / t_{in} \rceil$. С вероятностью $\varphi(l, j)$ в этих l пачках содержится j пакетов. Таким образом, кроме HoL-пакета, в рассматриваемой очереди также находятся еще $n_{dis}(m + j) = \left\lceil \frac{m+j}{\mathcal{B}} \right\rceil - 1$ устаревающих пакетов. В итоге, среднее число пакетов, отбрасываемых при переходе из состояния (h, m, r) такого, что $h(t) + t_{res} > d$, равно

$$\frac{q_i^{r+1}}{p(r)} + \sum_{j=0}^{l \cdot \mathcal{M}} \varphi(l, j) n_{dis}(m + j). \quad (5)$$

Теперь I_i^{dis} для случая, когда получатель i — лидер, может быть вычислена следующим образом:

$$I_{i,Ack}^{dis} = \frac{1}{T_{res}} \cdot \sum_{\substack{(h,m,r): \\ h > d - t_{res}}} \boldsymbol{\pi}_{(h,m,r)} \left(\frac{q_i^{r+1}}{p(r)} + \sum_{j=0}^{l \cdot \mathcal{M}} \varphi(l, j) n_{dis}(m + j) \right), \quad (6)$$

где $l = \lceil (h + t_{res} - t_{in} - d) / t_{in} \rceil$.

Если получатель i не является лидером, то кроме случая устаревания пакета, он также может не получить пакет, если все лидеры его получили. Учитывая данный факт, для $I_{i,nAck}^{dis}$ получаем:

$$I_{i,nAck}^{dis} = \frac{1}{T_{res}} \cdot \sum_{\substack{(h,m,r): \\ h > d - t_{res}}} \pi_{(h,m,r)} \left(q_i^{r+1} + \sum_{j=0}^{lM} \varphi(l, j) n_{dis}(m+j) \right) + \sum_{\substack{(h,m,r): \\ 0 \leq h \leq d - t_{res}}} \pi_{(h,m,r)} p(suc|r) q_i^{r+1}, \quad (7)$$

где $l = \lceil (h + t_{res} - t_{in} - d) / t_{in} \rceil$. Собирая вместе (3)–(7), находим PLR для получателя i .

4.5. Разложимость цепи Маркова

Заметим, что система (2) может иметь не одно решение $\pi_{(h,m,r)}$. Это связано с тем, что при определенных условиях цепь Маркова оказывается разложимой, т.е. состоит из нескольких подцепей, каждая из которых имеет свое стационарное распределение со своим набором значений PLR (4). Какой именно из наборов значений PLR реализуется на практике зависит от начального состояния процесса передачи.

Для случая передачи периодического *ординарного* потока, т.е. когда все пакеты потока имеют одинаковый размер M , найдены следующие условия разложимости цепи Маркова:

Лемма 1. *Если в случае передачи периодического ординарного потока $\gcd(M, B) \neq 1$, то описанная цепь Маркова разложима.*

Лемма 2. *Если в случае передачи периодического ординарного потока $\gcd(M, B) = 1$, то при $\gcd(t_{res}, B) \neq 1$ описанная цепь Маркова разложима, а при $\gcd(t_{res}, B) = 1$ неразложима.*

Доказательство этих условий разложимости представлено в дополнении А.

4.6. Общность разработанной модели

Заметим, что разработанная математическая модель может быть использована также и для анализа методов DMS и GCR-U. При использовании DMS передача одному получателю в отдельном периодическом резервировании соответствует параметрам $N = J = 1$, $B = 1$. Использование же метода GCR-U для передачи потока N получателям с вероятностями ошибок равными q_1, \dots, q_N соответствует параметрам $J = 0$, $B = 1$. Причем в модель в качестве вероятностей ошибок нужно подставлять значения q_1^U, \dots, q_N^U , где $U \geq 1$ — число передач каждого пакета.

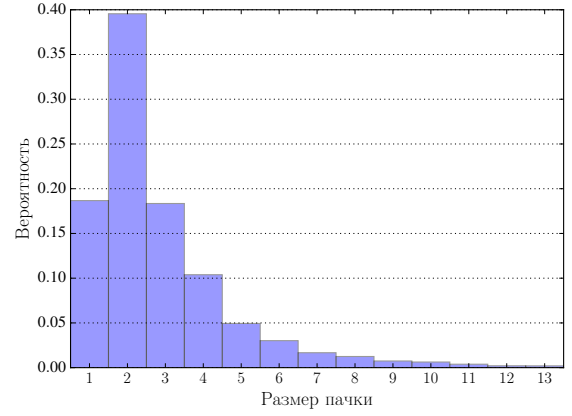


Рис. 6: Распределение вероятностей размера пачек входного потока

Благодаря общности разработанной модели в разделе 5 она используется для сравнения методов DMS, GCR-U и GCR-BA с точки зрения связанных с ними расходов канальных ресурсов. *Расход канальных ресурсов* η определяется как доля зарезервированного канального времени. В случае метода DMS отправитель устанавливает N резервирований с периодами $T_{res}^{(1)}, \dots, T_{res}^{(N)}$. Поэтому для η получаем:

$$\eta_{DMS} = \sum_{i=1}^N \frac{R_{DMS}}{T_{res}^{(i)}}, \text{ где } R_{DMS} = T_{DATA} + T_{SIFS} + T_{ACK}.$$

В случае методов GCR-U и GCR-BA η равна

$$\eta = \frac{R}{T_{res}},$$

где R — длительность зарезервированного интервала, которая для GCR-U и GCR-BA вычисляется следующим образом:

$$R_{GCR-U} = U \cdot T_{DATA} + (U - 1) \cdot T_{SIFS},$$

$$R_{GCR-BA} = B \cdot T_{DATA} + J \cdot T_{BACK} + (B + J - 1) \cdot T_{SIFS}.$$

5. Численные результаты

Продемонстрируем применение разработанной математической модели на примере передачи неординарного периодического потока, распределение вероятностей размера пачек которого показано на рис. 6 [11]. Пачки пакетов поступают с периодом $T_{in} = 40$ мс. Ограничение на время доставки пакетов $D_{QoS} = 150$ мс. Отправитель передает поток $N = 5$ получателям со следующими вероятностями неуспешной передачи: $q_1 = 0,3$, $q_2 = 0,2$, $q_3 = 0,1$, $q_4 = q_5 = 0,05$.

При моделировании предполагается, что используется физический уровень IEEE 802.11a. Пакеты с данными (DATA) передаются на скорости 54

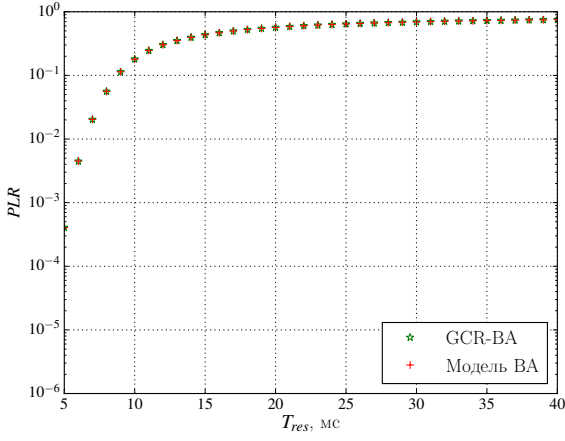


Рис. 7: $PLR^{max}(T_{res})$ при $J = 5$ и $\mathcal{B} = 1$

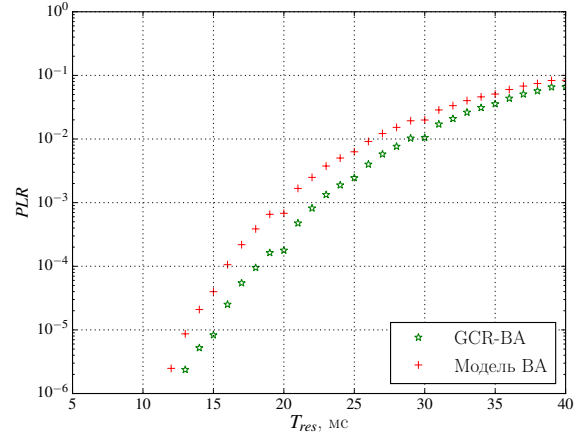


Рис. 9: $PLR^{max}(T_{res})$ при $J = 5$ и $\mathcal{B} = 5$

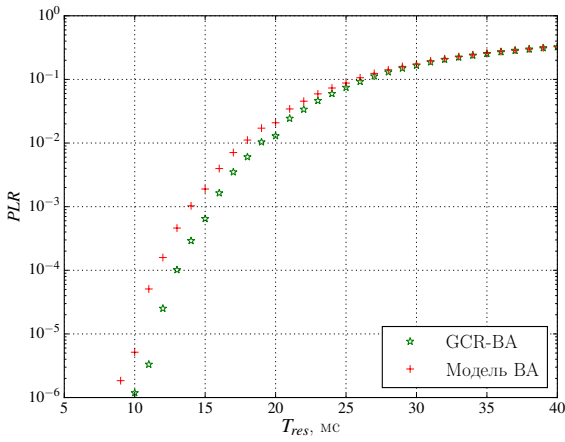


Рис. 8: $PLR^{max}(T_{res})$ при $J = 5$ и $\mathcal{B} = 3$

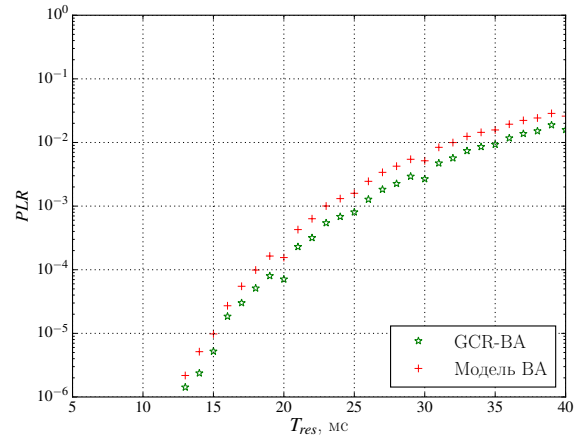


Рис. 10: $PLR^{max}(T_{res})$ при $J = 5$ и $\mathcal{B} = 7$

Мбит/с, а пакеты подтверждения (ACK и BACK) на скорости 24 Мбит/с. Размеры и длительности пакетов DATA, ACK и BACK представлены в таблице 1.

Покажем как применить разработанную модель для нахождения таких параметров передачи, при которых QoS-требования выполнены на всех получателях. Для этого рассмотрим передачу с использованием GCR-BA. С помощью математической модели найдем зависимости $\{PLR_i(T_{res})\}_{i=1}^N$ для различных значений \mathcal{B} и J . Далее, задавшись значением PLR_{QoS} , можем определить такие значения периода T_{res} ,

Пакет	Размер, байт	Длительность, мкс
DATA	1500	244
ACK	14	28
BACK	32	32

Таблица 1: Параметры системы

при которых выполнено ограничение $PLR^{max}(T_{res}) \triangleq \max_i PLR_i(T_{res}) \leq PLR_{QoS}$, т.е. QoS-требования к передаче потока выполнены на всех получателях. На рис. 7, 8, 9, 10, показаны зависимости $PLR^{max}(T_{res})$ (максимальный PLR среди всех получателей) для $J = N = 5$ и $\mathcal{B} = 1, 3, 5$, и 7 , полученные с помощью математической модели (“модель BA”) и имитационного моделирования (“GCR-BA”). Как и ожидалось, во всех случаях кроме $\mathcal{B} = 1$, модель дает завышенное значение PLR. В случае же $\mathcal{B} = 1$ результаты аналитического моделирования совпадают с результатами имитационного, так как в этом случае альтернативный процесс передачи совпадает с исходным. Подобная “консервативность” модели гарантирует, что если при выбранных параметрах \mathcal{B} , J и T_{res} , QoS-требования выполнены на всех получателях в альтернативном процессе передачи, то они будут выполнены также и в исходном процессе. В свою очередь, множество троек параметров $\{(\mathcal{B}, J, T_{res})\}$, удовлетворяющих этому требованию, может быть определено

по зависимостям $PLR^{max}(T_{res})$, полученным для различных пар (\mathcal{B}, J) .

Вспомним, что необходимо не просто выполнить QoS-требования, но и зарезервировать при этом как можно меньше канального времени. Обозначим через $\eta^*(PLR_{QoS})$ минимальный расход канальных ресурсов η , необходимый для выполнения QoS-требования на PLR. Он может быть найден путем вычисления η для каждой из найденных выше троек $\{(\mathcal{B}, J, T_{res})\}$. Пусть для заданного PLR_{QoS} минимум η достигается при параметрах $(\mathcal{B}^*, J^*, T_{res}^*)$, т.е. $\eta^*(PLR_{QoS}) = \eta(\mathcal{B}^*, J^*, T_{res}^*)$.

Стоит заметить, что при каждой фиксированной паре (\mathcal{B}, J) достаточно рассматривать η только для наибольшего значения T_{res} , так как с увеличением периода резервирования расход канальных ресурсов уменьшается.

На рис. 11 представлены зависимости $\eta^*(PLR_{QoS})$ для всех описанных выше методов многоадресной передачи. Как и ранее, для метода GCR-BA представлены две зависимости: одна построена с помощью математической модели (“Модель GCR-BA”), а другая — с помощью имитационного моделирования (“GCR-BA”). Из рис. 11 видно, что метод GCR-BA позволяет выполнить QoS-требования за счет существенно меньшего объема зарезервированного канального времени по сравнению с методами DMS и GCR-U. Стоит отметить, что консервативность модели в определении PLR для метода GCR-BA приводит к тому, что параметры $(\mathcal{B}^*, J^*, T_{res}^*)$, оптимальные для альтернативного процесса передачи, не являются оптимальным для исходного процесса передачи. В результате использование модели к определению параметров передачи с помощью GCR-BA приводит к более высокому расходу канальных ресурсов, что и наблюдается на рис. 11. Однако расход канальных ресурсов для “Модель BA” оказывается лишь незначительно больше чем для “GCR-BA”. Таким образом, разработанная математическая модель может быть использована для выбора параметров многоадресной передачи при использовании любого из методов, описанных в дополнении IEEE 802.11aa.

6. Заключение

В данной работе построена математическая модель процесса многоадресной передачи с помощью метода GCR-BA внутри периодических зарезервированных интервалов времени. Продемонстрировано применение разработанной модели к выбору таких параметров передачи, при которых QoS-требования выполнены на всех получателях, а доля зарезервированного канального времени минимальна. Общность модели также позволяет использовать ее и для нахождения параметров передачи с помощью методов

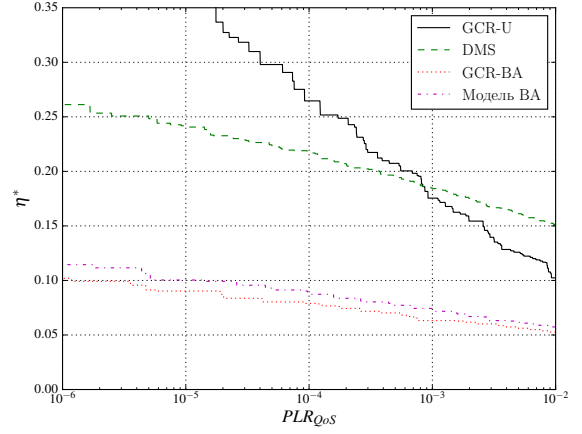


Рис. 11: $\eta^*(PLR_{QoS})$ при передаче периодического неординарного потока

DMS и GCR-U, также определенных в дополнении IEEE 802.11aa. При помощи математической модели проведено сравнение методов DMS, GCR-U и GCR-BA и показано, что GCR-BA позволяет достигнуть существенно меньшего расхода канального времени по сравнению с методами DMS и GCR-U.

А. Леммы

Лемма 1. Если в случае передачи периодического ординарного потока $\gcd(\mathcal{M}, \mathcal{B}) \neq 1$, то цепь Маркова разложима.

Доказательство. Цепь Маркова разложима, если она разбивается на несколько подцепей, т.е. множество состояний $\{(h, m, r)\}$ исходной цепи делится на недостижимые друг из друга подмножества. Покажем, что при $\gcd(\mathcal{M}, \mathcal{B}) \neq 1$ причиной разложимости цепи является разделение множества состояний на подмножества по параметру m , т.е. существуют подцепи с непересекающимися множествами значений параметра m .

Рассмотрим процесс передачи в произвольной очереди. Пусть (h^*, m^*, r^*) — начальное состояние цепи в этой очереди. Обозначим через $\mathfrak{M}(m^*)$ множество возможных значений параметра m рассматриваемой очереди, если начальное состояние было m^* . Эти значения могут быть найдены по следующей формуле:

$$m(k) = (m^* - kB)_{\mathcal{M}}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где

$$(m)_{\mathcal{M}} \triangleq \begin{cases} m \bmod \mathcal{M}, & \text{если } m \bmod \mathcal{M} \neq 0, \\ \mathcal{M}, & \text{если } m \bmod \mathcal{M} = 0. \end{cases}$$

Здесь $m(k)$ есть k -ое значение параметра m после начального, если все попытки передачи пакетов данной

очереди успешны.

Рассмотрим две очереди. Пусть в одной начальное значение m равно m_1^* , а в другой — m_2^* . Выясним, при каком условии множества $\mathfrak{M}(m_1^*)$ и $\mathfrak{M}(m_2^*)$, соответствующие различным начальным состояниям m_1^* и m_2^* , не пересекаются. Предположим обратное, а именно пусть существуют такие k_1 и k_2 , что

$$\begin{aligned} (m_1^* - k_1\mathcal{B})_{\mathcal{M}} &= (m_2^* - k_2\mathcal{B})_{\mathcal{M}}, \\ m_1^* - m_2^* + \mathcal{B}(k_2 - k_1) &= \mathcal{M}t, \quad t \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как $\gcd(\mathcal{M}, \mathcal{B}) = a > 1$, то для того, чтобы уравнение (8) было разрешимо в целых числах, необходимо, чтобы a делило $(m_1^* - m_2^*)$ нацело, что, например, не выполнено в случае $m_1^* - m_2^* \in \{1, \dots, a-1\}$. Таким образом, существуют как минимум a подцепей, в которых множества пробегаемых значений параметра m не пересекаются. \square

Лемма 2. *Если в случае передачи периодического ординарного потока $\gcd(\mathcal{M}, \mathcal{B}) = 1$, то при $\gcd(t_{res}, \mathcal{B}) \neq 1$ описанная цепь Маркова разложима, а при $\gcd(t_{res}, \mathcal{B}) = 1$ — неразложима.*

Доказательство. Доказательство различается для случаев $\mathcal{M} > 1$ и $\mathcal{M} = 1$. Рассмотрим сначала первый случай.

Случай $\mathcal{M} > 1$. Пусть (h^*, m^*, r^*) — состояние процесса передачи в очереди 0 в некоторый момент времени. Пусть $m^* > 1$ (при $\mathcal{M} > 1$ состояния с $m^* > 1$ всегда существуют). Тогда в следующей за ней очереди одним из возможных состояний является $(h^*, m^* - 1, r^*)$. Если эти два состояния будут не общающимися, т.е. нельзя перейти из одного состояния в другое, то цепь будет разложимой, так как множества возможных состояний для двух соседних очередей будут отличаться. Найдем условие, при котором это выполняется.

Множество возможных значений параметра m в первой очереди есть $\mathfrak{M}(m^*) = \{m(n_{packet}), n_{packet} = 1, 2, \dots\}$, где $m(n_{packet}) = (m^* - n_{packet}\mathcal{B})_{\mathcal{M}}$. n_{packet} есть минимальное количество пакетов, которое должно поступить в очередь, чтобы параметр m смог принять значение $m(k)$. Предположим, что существует такое значение n_{packet} , при котором в рассматриваемой очереди реализуется состояние с $m = m^* - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} (m^* - n_{packet}\mathcal{B})_{\mathcal{M}} &= m^* - 1, \\ n_{packet}\mathcal{B} - n_{batch}\mathcal{M} &= 1, \quad n_{batch} \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь n_{batch} может быть интерпретировано как число пачек, которое должно поступить, чтобы в рассматриваемую очередь было распределено n_{packet} пакетов. Если $\gcd(\mathcal{M}, \mathcal{B}) = 1$, то уравнение (9) разрешимо в

целых числах и решение имеет следующий вид [12]:

$$\begin{cases} n_{packet} &= \mathcal{B}^{\varphi(\mathcal{M})-1} + \mathcal{M}l, \\ n_{batch} &= \frac{\mathcal{B}^{\varphi(\mathcal{M})}-1}{\mathcal{M}} + \mathcal{B}l, \quad l = 0, 1, \dots, \end{cases} \quad (10)$$

где $\varphi(\cdot)$ — функция Эйлера.

Таким образом, после n_{packet} поступивших пакетов процесс может перейти в состояние (h', m', r') такое, что $m' = m^* - 1$ и $r' = r^*$. Найдем условие, при котором $h' = h^*$. Возраст n_{packet} -го пакета, поступившего в очередь 0, может быть равен одному из значений, задаваемому формулой $h' = h^* + n_{res}t_{res} - n_{batch}t_{in}$, где n_{res} есть количество зарезервированных интервалов, прошедших между начальным состоянием и состоянием $(h', m^* - 1, r^*)$. Таким образом, $h' = h^*$, если

$$n_{res}t_{res} = n_{batch}t_{in}. \quad (11)$$

Так как $\gcd(t_{res}, t_{in}) = 1$, то решения n_{res} и n_{batch} имеют вид

$$\begin{cases} n_{res} &= u \cdot t_{in}, \\ n_{batch} &= u \cdot t_{res}, \quad u = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (12)$$

Подставляя (10) во второе равенство системы (12), получаем уравнение

$$\frac{\mathcal{B}^{\varphi(\mathcal{M})} - 1}{\mathcal{M}} + \mathcal{B}l = ut_{res} \quad (13)$$

относительно переменных l ($l \geq 0$) и u ($u \geq 1$), решив которое, получим решение (11).

Заметим, что $\frac{\mathcal{B}^{\varphi(\mathcal{M})}-1}{\mathcal{M}} \in \mathbb{Z}$ в силу теоремы Эйлера, которая утверждает, что $\mathcal{B}^{\varphi(\mathcal{M})} \bmod \mathcal{M} = 1$ при $\gcd(\mathcal{M}, \mathcal{B}) = 1$. Обе части уравнения (13) должны делиться на $\gcd(\mathcal{B}, t_{res})$, но это возможно только если $\gcd(\mathcal{B}, t_{res}) = 1$. Действительно, $\mathcal{B}^{\varphi(\mathcal{M})} - 1$ не делится как ни на \mathcal{B} , так ни на один его делитель, отличный от 1. Если же $\gcd(\mathcal{B}, t_{res}) = 1$, то уравнение (13) разрешимо относительно l и u , т.е. в конце концов существуют такие значения n_{res} и n_{batch} , что $(h', m', r') = (h^*, m^* - 1, r^*)$, т.е. состояния второй очереди, достижимы из первой.

Рассуждая аналогично можем доказать, что состояние очереди 2 достижимы из состояний очереди 1 и так далее вплоть до достижимости состояний очереди 0 из состояний очереди $\mathcal{B} - 1$. Таким образом, при $\gcd(\mathcal{B}, t_{res}) = 1$ состояния всех очередей достижимы друг из друга, т.е. цепь Маркова неразложима.

Случай $\mathcal{M} = 1$. Рассмотрим случай, когда $\mathcal{M} = 1$. При этом условии можно провести аналогичные рассуждения, однако с некоторыми изменениями. Теперь, если в рассматриваемой очереди (h^*, m^*, r^*) — начальное состояние цепи ($m^* = 1$), то в следующей за ней очереди одним из возможным состоянием является $(h^* - t_{in}, m^*, r^*)$. Для того чтобы доказать разложимость цепи Маркова, достаточно показать, что

из состояния (h^*, m^*, r^*) невозможно попасть в указанное состояние соседней цепи.

Множество возможных значений параметра h в рассматриваемой очереди задается формулой $h_{nl} = h^* + nt_{res} - l\mathcal{B}t_{in}$. Пусть существуют такие n и l , что $h_{nl} = h^* - t_{in}$, тогда

$$l\mathcal{B}t_{in} - nt_{res} = t_{in}. \quad (14)$$

Получаем, что уравнение (14) разрешимо, только если $\gcd(\mathcal{B}t_{in}, t_{res})$ нацело делит t_{in} . Но это возможно, только если $\gcd(\mathcal{B}, t_{res}) = 1$. Таким образом, при $\gcd(\mathcal{B}, t_{res}) = 1$ цепь неразложима, а при $\gcd(\mathcal{B}, t_{res}) \neq 1$ — разложима. \square

Список литературы

- [1] Cisco. — Cisco Visual Networking Index (VNI) Global Mobile Data Traffic Forecast, 2015-2020, 2016.
- [2] Performance evaluation of the IEEE 802.11aa multicast mechanisms for video streaming / Antonio La Oliva, Pablo Serrano, Paulo Salvador, Albert Banchs // Mobile and Multimedia Networks (WoWMoM), 2013 IEEE 14th International Symposium and Workshops on a World of Wireless / IEEE. — 2013. — P. 1–9.
- [3] Santos M, Villalon Jose, Orozco-Barbosa Luis. Evaluation of the IEEE 802.11aa group addressed service for robust audio-video streaming // 2012 IEEE International Conference on Communications (ICC) / IEEE. — 2012. — P. 6879–6884.
- [4] Performance Analysis and Algorithm Selection for Reliable Multicast in IEEE 802.11aa Wireless LAN / Albert Banchs, Antonio La Oliva, Lucas Eznarriaga et al. // IEEE Transactions on Vehicular Technology. — 2014. — Vol. 63, no. 8. — P. 3875–3891.
- [5] Performance and scalability evaluation of IEEE 802.11v/aa multicast transport / Yousri Daldoul, Djamel-Eddine Meddour, Toufik Ahmed, Raouf Boutaba // Wireless Communications and Mobile Computing. — 2016.
- [6] Mathematical Model of QoS-aware Multicast Transmission via Periodic Reservations / Alexander Ivanov, Egor Kuznetsov, Evgeny Khorov, Andrey Lykhov // Proceedings of Wireless Communications and Networking Conference (WCNC 2016) / IEEE. — Doha, Qatar, 3-6 April, 2016.
- [7] Modeling Leader-based Multicast Transmission via Periodic Reservations in Wi-Fi networks / Alexander Ivanov, Evgeny Khorov, Egor Kuznetsov, Andrey Lykhov // Proceedings of International Symposium on Wireless Communication Systems (ISWCS) 2016 / IEEE. — Poznan, Poland, 20-23 September, 2016.
- [8] Andrey Lykhov, Vishnevsky Vladimir, Yakhimov Mikhail. Multicast QoS Support in IEEE 802.11 WLANs // IEEE International Conference on Mobile Adhoc and Sensor Systems, 2007. MASS 2007. / IEEE. — 2007. — P. 1–3.
- [9] RFC 3550, <http://www.ietf.org/rfc/rfc3550.txt>.

- [10] Ivanov Alexander, Khorov Evgeny, Lyakhov Andrey. Analytical Model of Batch Flow Multihop Transmission in Wireless Networks with Channel Reservations // Automation and Remote Control. — 2015. — Vol. 76.
- [11] The Video Trace Library. <http://trace.eas.asu.edu>.
- [12] Воробьев Николай Николаевич. Признаки делимости (4-е издание, исправленное). — Наука, 1988.