DOI 10.15507/2079-6900.19.2017.01.60-66

УДК 517.9

О существовании эндоморфизма двумерного тора со строго инвариантным сжимающимся репеллером

© Е. Д. Куренков [1]

Аннотация. В настоящей работе строится эндоморфизм f двумерного тора, удовлетворяющий аксиоме A, неблуждающее множество которого обладает одномерным сжимающимся репеллером Λ. Этот репеллер обладает следующими свойствами:
1) $f(\Lambda)=\Lambda$, $f^{-1}(\Lambda)=\Lambda$;
2) Λ локально гомеоморфно произведению канторовского множества на отрезок;
3) $T^2\setminus\Lambda$ состоит из счетного объединения непересекающихся открытых дисков.
Идея построения основана на «хирургической» операции, предложенной С. Смейлом [1], в применении к алгебраическому эндоморфизму Аносова на торе. Приводятся результаты численного эксперимента, подтверждающие, что построенный эндоморфизм имеет указанные свойства. Предложенная конструкция показывает принципиальное различие между структурой одномерных базисных множеств эндомофизмов и соответствующих базисных множеств диффеоморфизмов. В частности, полученный результат контрастирует с фактом конечности множества дисков в множестве $T^2\setminus\Lambda$, в случае, когда диффеоморфизм удовлетворяет аксиоме A и обладает просторно расположенным репеллером Λ [2].

Ключевые слова: эндоморфизм, аксиома A, базисное множество, репеллер.

1. Введение

Под C^r – эндоморфизмом гладкого замкнутого связного многообразия M^n понимается гладкое сюрьективное отображение класса C^r, $r\geqslant 1$. Если эндоморфизм f обладает обратным отображением класса C^r, то он называется C^r-диффеоморфизмом.

Пусть $f\colon M^n\to M^n$ – эндоморфизм класса C^r ($r\geqslant 1$), заданный на замкнутом многообразии M^n, снабженном римановой метрикой. Для любой точки $x\in M^n$ существует, вообще говоря, бесконечное множество последовательностей вида $\bar{x}=\{x_i\in M^n\mid x_0=x, f(x_i)=x_{i+1}, i\in\mathbb{Z}\}$. Каждую из таких последовательностей будем называть частной траекторией точки x.

Пусть $\Lambda\subset M^n$ замкнутое f-инвариантное (инвариантное относительно эндоморфизма f) множество, то есть $f(\Lambda)=\Lambda$.

Следуя Ф. Пшетыцкому [3] дадим определение гиперболического множества, обобщающее определение для диффеоморфизмов, данное С. Смейлом [1]

Определение 1.1. *Множество Λ эндоморфизма $f: M^n\to M^n$ называется гиперболическим, если существуют константы $C>0$, $0<\lambda<1$ такие, что для любой частной траектории $\bar{x}\subset\Lambda$ точки x существует представление касательного подрасслоения $T_{\bar{x}}M^n$ в виде $T_{\bar{x}}M^n=\bigcup\limits_{x_i\in\bar{x}}E^s_{x_i,\bar{x}}\oplus E^u_{x_i,\bar{x}}$ [2] такое, что:*

1. $Df(E^s_{x_i,\bar{x}})=E^s_{x_{i+1},\bar{x}}$, $Df(E^u_{x_i,\bar{x}})=E^u_{x_{i+1},\bar{x}}$, где $E^s_{x_i,\bar{x}}, E^u_{x_i,\bar{x}}\subset T_{x_i}M^n$;

[1] **Куренков Евгений Дмитриевич**, стажер-исследователь лаборатории ТМД, НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3544-1143, ekurenkov@hse.ru

[2] Символ $\oplus$ означает прямую сумму линейный подпространств.

2. $\|Df^k(v)\| \leqslant C\lambda^k\|v\|$, *для любых* $k \geqslant 0, i \in \mathbb{Z}$, $v \in E^s_{x_i,\bar{x}}$;

3. $\|Df^k(v)\| \geqslant (1/C)\lambda^{-k}\|v\|$, *для любых* $k \geqslant 0, i \in \mathbb{Z}$, $v \in E^u_{x_i,\bar{x}}$.

Определение 1.2. *Эндоморфизм $f\colon M^n \to M^n$, называется эндоморфизмом Аносова, если всеобъемлющее многообразие M^n является гиперболическим множеством эндомофизма f.*

В работе [3] для эндоморфизмов было предложено обобщение аксиомы A, введенной С. Смейлом в [1] для диффеоморфизмов.

Определение 1.3. *Говорят, что эндоморфизм $f\colon M^n \to M^n$ удовлетворяет аксиоме A (является A-эндоморфизмом), если выполнены следующие условия:*

1. *неблуждающее множество Ω_f — гиперболично и не содержит критических точек эндоморфизма f;*

2. *множество периодических точек Per_f эндоморфизма f плотно в неблуждающем множестве Ω_f.*

Для A-эндоморфизма, имеет место теорема о спектральном разложении, доказанная в [3], и обобщающая соответствующий результат, полученный С. Смейлом в [1].

Предложение 1.1. *Пусть эндоморфизм $f : M^n \to M^n$ удовлетворяет аксиоме A. Тогда его неблуждающее множество Ω единственным образом представляется в виде объединения конечного числа непересекающихся замкнутых f-инвариантных подмножеств (называемых базисными множествами) $\Omega = \bigcup_{i=1}^{l}\Omega_i$ таких, что ограничение f на каждое базисное множество является топологически транзитивным.*

Определение 1.4. *Базисное множество Ω_i эндоморфизма $f : M^n \to M^n$ называется аттрактором, если существует его замкнутая окрестность U такая, что $f(U) \subset \operatorname{Int} U$ и $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} f^n(U) = \Omega_i$.*

Определение 1.5. *Базисное множество Ω_i эндоморфизма $f : M^n \to M^n$ называется репеллером, если существует его открытая окрестность U такая, что $cl(U) \subset f(U)$ и $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U) = \Omega_i$* [3].

Определение 1.6. *Репеллер (аттрактор) Ω_i A-эндоморфизма $f : M^n \to M^n$ называется сжимающимся (растягивающимся), если его топологическая размерность совпадает с размерностью устойчивых (неустойчивых) инвариантных многообразий точек из Ω_i.*

Настоящая статья является первым шагом в доказательстве гипотезы, справедливость которой на данном этапе подтверждена численным экспериментом.

Теорема 1.1. *Существует C^∞-гладкий A-эндоморфизм $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ такой, что его спектральное разложение содержит одномерный сжимающийся репеллер Λ. Более того, неустойчивое многообразие любой точки $x \in \Lambda$ не зависит от частной траектории точки x, и множество Λ является нетривиальным репеллером, то есть локально гомеоморфно произведению отрезка на канторово множество.*

[3] Под $f^{-1}(A)$ понимается полный прообраз множества A.

2. Конструкция эндоморфизма

Представим $\mathbb{T}^2$ как фактор-пространство $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ и обозначим через $\pi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{T}^2$ естественную проекцию $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{T}^2$. Рассмотрим алгебраический эндоморфизм $g\colon\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$ двумерного тора, индуцированный матрицей $A=\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}$ по формуле $g(x)=Ax \mod 1$, где x принадлежит плоскости $\mathbb{R}^2$.

Непосредственно проверяется, что g является гиперболическим эндоморфизмом Аносова с устойчивым W^s_g и неустойчивым W^u_g одномерными слоениями, которые являются образами в силу проекции π инвариантных слоений матрицы A, состоящими из всех прямых параллельных векторам $\vec{e}_s=\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_u=\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ соответственно. Эти векторы ортогональны, и являются собственными векторами матрицы A с собственными значениями $\lambda_s=2-\sqrt{2}<1$, $\lambda_u=2+\sqrt{2}>1$. Через $W^s_g(x)$ ($W^u_g(x)$) будем обозначать элемент слоения W^s_g (W^u_g), проходящий через точку $x\in\mathbb{T}^2$. Далее, мы будем рассматривать пару $\vec{e}_u/\|\vec{e}_u\|$, $\vec{e}_s/\|\vec{e}_s\|$ в качестве базисных единичных векторов системы координат $(u_1;u_2)$ так, что $(1;0)$ и $(0;1)$ суть координаты векторов $\vec{e}_u/\|\vec{e}_u\|$, $\vec{e}_s/\|\vec{e}_s\|$ соответственно.

Эндоморфизм g имеет одну неподвижную точку, которую мы обозначим через O, $g(O)=O$. Поскольку $\det g=2$, то g является двулистным накрытием, и полный прообраз $g^{-1}(O)$ состоит из двух точек O и $O_1\neq O$. Возьмем $r_0>0$ столь малым, чтобы $\lambda_u r_0$-окрестности точек O и O_1 не пересекались. Пусть $\delta:[0;\infty)\to[0;1]$ – C^∞-функция такая, что $\delta(r)\equiv 1$ при $0\leqslant r\leqslant\frac{r_0}{2}$, и $\delta(r)\equiv 0$ при $r\geqslant r_0$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dot{u}_1 &= -u_1\cdot\delta(\sqrt{u_1^2+u_2^2})\\ \dot{u}_2 &= 0\end{cases}\tag{2.1}$$

и обозначим через φ^t сдвиг на время t вдоль траекторий этой системы. Возьмем число $\tau>0$ такое, что

$$e^{-\tau}\cdot\lambda_u<1.\tag{2.2}$$

Положим

$$f=\varphi^\tau\circ g.\tag{2.3}$$

Ясно, что f является эндоморфизмом тора $\mathbb{T}^2$ на себя. Непосредственно из (2.3) вытекает, что эндоморфизм f является локальным диффеоморфизмом, который также является 2-листным накрытием $\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$, и гомотопен эндоморфизму g. Кроме того, по построению слоение W^u_g инвариантно относительно эндоморфизма f, $f\left(W^u_g(z)\right)=W^u_g\left(f(z)\right)$.

Обозначим через $u_1\left(t,M_0\right)$, $u_2\left(t,M_0\right)$ решение системы (2.1) с начальным условием $(0,M_0)$, то есть такое решение, что $u_i\left(0,M_0\right)=M_0$, $i=1,2$. Если точка M_0 принадлежит r_0-окрестности $U(r_0)$ точки O, и имеет в ней координаты $(u_{10};u_{20})$, то мы также будем записывать решение в виде $u_i\left(t,(u_{10};u_{20})\right)$, $i=1,2$. Из (2.1) следует, что $u_2\left(t,(u_{10};u_{20})\right)=u_{20}$ для $\forall t$. Поэтому якобиан диффеоморфизма

$$\varphi^\tau:(u_{10};u_{20})\to\left(u_1\left(\tau,(u_{10};u_{20})\right);u_2\left(\tau,(u_{10};u_{20})\right)\right)$$

равен

$$D(\varphi^\tau)=\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial u_{10}} & \frac{\partial u_1}{\partial u_{20}}\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

где $\frac{\partial u_1}{\partial u_{10}}$, $\frac{\partial u_1}{\partial u_{20}}$ вычисляются при $t=\tau$. Отсюда и (2.3) вытекает, что якобиан эндоморфизма f равен

$$D(f)=D\varphi^\tau\cdot Dg=\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial u_{10}} & \frac{\partial u_1}{\partial u_{20}}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_u & 0\\ 0 & \lambda_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_u\cdot\frac{\partial u_1}{\partial u_{10}} & \lambda_s\cdot\frac{\partial u_1}{\partial u_{20}}\\ 0 & \lambda_s\end{pmatrix}.\tag{2.4}$$

Равенство (2.4) имеет место на всем торе $\mathbb{T}^2$, поскольку вне окрестности $U(r_0)$, в силу (2.1), $\frac{\partial u_1}{\partial u_{10}} = 1$ и $\frac{\partial u_1}{\partial u_{20}} = 0$.

Покажем, что точка $O = p_0$ является гиперболическим стоком эндоморфизма f. Действительно, в $\frac{r_0}{2}$-окрестности $U(\frac{r_0}{2})$ точки p_0 система (2.1) имеет вид $\dot{u}_1 = -u_1$, $\dot{u}_2 = 0$. Поэтому якобиан диффеоморфизма φ^τ равен $D\varphi^\tau = \begin{pmatrix} e^{-\tau} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Следовательно, якобиан эндоморфизма f в точке O равен

$$Df = \begin{pmatrix} e^{-\tau} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_u & 0 \\ 0 & \lambda_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\tau}\lambda_u & 0 \\ 0 & \lambda_s \end{pmatrix}.$$

Отсюда и (2.2) вытекает требуемое утверждение.

Отметим, что кривая $W^u_g(O)$ инвариантна относительно f, $f\left(W^u_g(O)\right) = W^u_g(O)$. Более того, на $W^u_g(O)$ имеются ровно три неподвижные относительно f точки p_0, p_1, p_2, причем p_1 и p_2 являются гиперболическими седлами, и p_0 на $W^u_g(O)$ находится между точками p_1, p_2. Далее, существует гомеоморфная диску окрестность V точки p_0, не содержащая точек p_1, p_2, и такая, что

1. $cl\ f(V) \subset V$, $\bigcap_{n\geqslant 0} f^n(V) = p_0$.

2. Полный прообраз $f^{-1}(V)$ состоит из двух (попарно непересекающихся) компонент связности, каждая из которых гомеоморфна диску.

3. $\lambda_u \cdot \frac{\partial u_1}{\partial u_{10}}|_V < 1$, $\lambda_u \cdot \frac{\partial u_1}{\partial u_{10}}|_{\mathbb{T}^2\setminus comp_V[f^{-1}(V)]} > 1$, где $comp_V[f^{-1}(V)]$ – компонента связности множества $f^{-1}(V)$, содержащая V.

Пусть V – окрестность точки p_0, удовлетворяющая вышеприведенным условиям, и пусть

$$W^s_f(p_0) = W^s_0 = \bigcup_{i\geqslant 0} f^{-i}(V).$$

Другими словами, W^s_0 есть объединение полных прообразов окрестности V относительно отображений f^i для всех $i \geqslant 0$, где $f^0 = id$ – тождественное отображение. Тогда множество W^s_0 удовлетворяет следующим свойствам:

1. W^s_0 является открытым множеством таким, что $f^j(x) \to p_0$ при $j \to \infty$ для любой точки $x \in W^s_0$.

2. W^s_0 является инвариантным множеством,

$$f\left(W^s_0\right) = W^s_0 = f^{-1}\left(W^s_0\right).$$

   В частности, если $z \notin W^s_0$ – периодическая точка, то любая частная траектория, проходящая через z, не пересекается с W^s_0.

3. p_1, $p_2 \notin W^s_0$.

Действительно, множество W^s_0 открытое, поскольку отображение f непрерывное. Если $x \in W^s_0$, то $f^k(x) \in V$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Отсюда вытекает первое утверждение. Из него и определения множества W^s_0 следует второе утверждение. По конструкции, точки p_1, p_2 не принадлежат V и являются неподвижными относительно эндоморфизма f. Тогда p_1, $p_2 \notin W^s_0$ и, следовательно, $W^s_0 \neq \mathbb{T}^2$. Положим

$$\mathbb{T}^2 \setminus W^s_0 = \Lambda \neq \emptyset.$$

По построению, Λ является замкнутым и инвариантным множеством:

$$f(\Lambda) = \Lambda = f^{-1}(\Lambda).$$

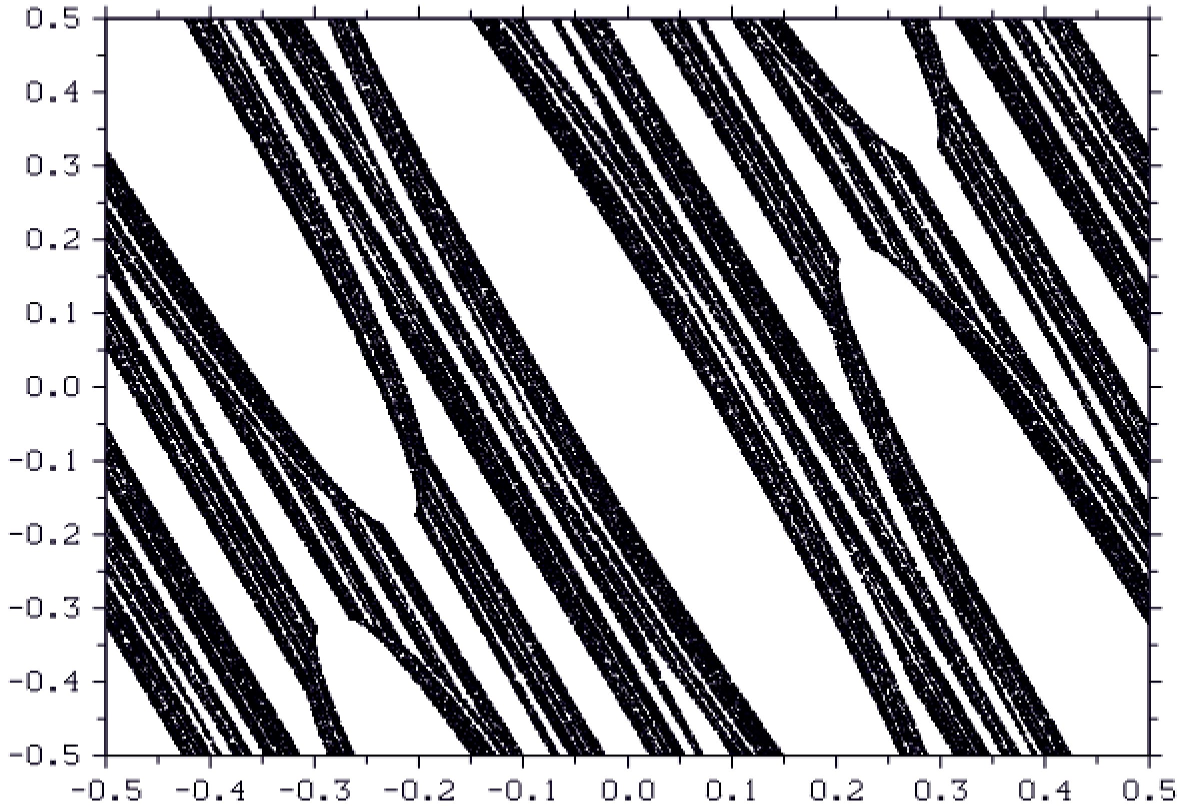

Рисунок **2.1**

Репеллер

Дальнейшее исследование множества Λ проводилось численными методами (см. рис. 2.1), оно показало, что исследуемый эндоморфизм обладает инвариантным гиперболическим множеством. Исходя из этого, получаем, что через каждую точку множества $x \in \Lambda$ проходит устойчивое $W^s_f(x)$ и неустойчивое $W^u_f(x)$ инвариантные многообразия, обладающие следующими свойствами:

1) для любой точки $x \in \Lambda$ устойчивое многообразия $W^s_f(x)$ целиком принадлежат множеству Λ;

2) неустойчивое многообразие $W^u_f(x)$ для каждой точки $x \in \Lambda$ не зависит от частной траектории (лежащей в Λ) этой точки, а зависит только от самой точки x, поэтому обозначение неустойчивого многообразия $W^u_f(x)$ корректно.

Покажем, что для любой точки $x \in \Lambda$ многообразие $W^u_f(x)$ является одномерной кривой всюду плотной в $\mathbb{T}^2$.

Действительно, из построения f вытекает, что $W^u_f(x) = W^u_g(x)$ для любой точки $x \in \Lambda \setminus W^u_g(O)$. Так как $W^u_g(x)$ всюду плотно в $\mathbb{T}^2$, то достаточно доказать утверждение только для $W^u_f(p_1)$ и $W^u_f(p_2)$. Имеем равенство $W^u_f(p_1) \cup W^u_f(p_2) = W^u_g(p_0) \setminus \{p_0\}$. Поскольку каждый из полуслоев множества $W^u_g(p_0) \setminus \{p_0\}$ всюду плотен в $\mathbb{T}^2$, то неустойчивые многообразия $W^u_f(p_1)$, $W^u_f(p_2)$ всюду плотны в $\mathbb{T}^2$. Аналогично показывается, что устойчивое многообразие $W^s_f(p_0)$ открыто и всюду плотно в $\mathbb{T}^2$. Отсюда вытекает, что каждое из устойчивых $W^s_f(p_1)$, $W^s_f(p_2)$ многообразий всюду плотно в Λ.

Покажем, что топологическая размерность множества Λ равна единице,

$$\dim \Lambda = 1.$$

Действительно, дополнение к множеству Λ открыто и всюду плотно. Поэтому Λ нигде не плотно, и следовательно $\dim \Lambda \leqslant 1$. Так как Λ содержит одномерные кривые, то $\dim \Lambda \geqslant 1$. Отсюда получаем требуемое утверждение.

Таким образом, из выше сказанного следует, что множество Λ является нетривиальным репеллером, локально гомеоморфным произведению отрезка на канторово множество.

Благодарности. Автор благодарит В. З. Гринеса и Е. В. Жужому за постановку задачи и полезные обсуждения. Исследования выполнены в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2017 году (проект Т-90) при частичной поддержке РФФИ (грант 16-51-10005-Ко_а).

Список литературы

1. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747-817.

2. В. З. Гринес, “О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах I”, *Труды Московского математического общества*, **32** (1975), 35–60.

3. F. Przytycki, “Anosov endomorphisms”, *Stud. Math.*, **58**:3 (1976), 249–285.

Поступила 26.03.2017

MSC2010 37C70

On existence of an endomorphism of 2-torus with strictly invariant repeller

© **E. D. Kurenkov** [4]

Abstract. In the article we construct endomorphism f of 2-torus. This endomorphism satisfies an axiom A and has non-wondering set that contains one-dimensional contracting repeller satisfying following properties:
1) $f(\Lambda) = \Lambda$, $f^{-1}(\Lambda) = \Lambda$;
2) Λ is locally homeomorphic to the product of the Cantor set and the interval;
3) $T^2 \setminus \Lambda$ consist of a countable family of disjoint open disks.
The key idea of construction consists in applying the surgery introduced by S. Smale [1] to an algebraic Anosov endomorphism of the two-torus. We present the results of computational experiment that demonstrate correctness of our construction. Suggested construction reveals significant difference between one-dimensional basic sets of endomorphismsand one-dimensional basic sets of corresponding diffoemorphisms. In particular, the result contrasts with the fact that wondering set of axiom A-satisfying diffeomorphism consists of a finite number of open disks in case of spaciously situated basic set [2].
Key Words: endomorphism, axiom A, basic set, repeller.

References

1. S. Smale, "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747-817.

2. V. Z. Grines, "[On topological conjugacy of diffeomorphisms of 2-manifold on one-dimensional orientable basic sets I]", *Trudi Moskovskogo matematicheskogo obshestva*, **32** (1975), 35–60 (In Russ.).

3. F. Przytycki, "Anosov endomorphisms", *Stud. Math.*, **58**:3 (1976), 249–285.

Submitted 26.03.2017

[4] **Evgeniy D. Kurenkov**, research assistant of laboratory TMD, National Research University Higher School of Economics (25 Bolshaya Pechyorskaya Str., Nizhnii Novgorod 603155, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3544-1143, ekurenkov@hse.ru