Примеры решёточно-поляризованных $K3$-поверхностей с автоморфным дискриминантом и лоренцевы алгебры Каца — Муди

В. А. Гриценко, В. В. Никулин

Посвящается Э. Б. Винбергу
в связи с его 80-летием

Используя наши результаты про лоренцевы алгебры Каца — Муди и арифметическую зеркальную симметрию, мы находим шесть серий примеров решёточно-поляризованных $K3$-поверхностей с автоморфным дискриминантом.

Библиография: 28 названий. *УДК*: 512.774.3, 512.774.5, 512.818.4, 515.178.1. *MSC2010*: 14J15, 14J28, 14J33, 14J60, 14J81. *Ключевые слова*: $K3$-поверхность, решётка Пикара, поляризация, пространство модулей, вырождение, дискриминант, алгебра Ли, алгебра Каца — Муди, система корней, автоморфная форма.

§ 1. Введение

Используя результаты нашей недавней работы [13] и предыдущих работ, мы строим серии примеров таких чётных гиперболических решёток S, что S-поляризованные комплексные $K3$-поверхности X имеют автоморфный дискриминант.

Напомним, что для S-поляризованной $K3$-поверхности X фиксировано примитивное вложение $S\subset S_X$, где S_X — решётка Пикара поверхности X. Поверхность X называется вырожденной (или она принадлежит дискриминанту), если существует такой элемент $\delta\in(S)^{\perp}_{S_X}$, что $\delta^2=-2$. Из геометрии $K3$-поверхностей следует, что тогда X не имеет поляризации h, принадлежащей S. В силу глобальной теоремы Торелли [25] и эпиморфности отображения периодов для $K3$-поверхностей [17], модули таких $K3$-поверхностей накрываются соответствующими эрмитовыми симметрическими областями, и алгебраические функции на модулях являются автоморфными формами на этих областях. Голоморфная автоморфная форма называется *дискриминантной*, если носитель её дивизора нулей равен прообразу дискриминанта модулей таких $K3$-поверхностей. Если дискриминантная автоморфная форма существует, то дискриминант называется *автоморфным*.

Первый автор поддержан Лабораторией зеркальной симметрии НИУ ВШЭ, грант правительства РФ, Договор № 14.641.31.0001.

Например, для $S=\mathbb{Z}h$ ранга один с $h^2=n$, где $n\geqslant 2$ чётно (т. е. для обычных поляризованных $K3$-поверхностей), хорошо известно, что дискриминантная автоморфная форма существует для $n=2$. Борчердс построил дискриминантную автоморфную форму для $n=2$ явно (см. [2, с. 200–201]). В [24] было показано, что для бесконечного числа чётных $n\geqslant 2$ дискриминантная автоморфная форма не существует (вероятно, это был первый результат в этом направлении). Позднее Лойенга [18] показал, что дискриминантная автоморфная форма не существует и дискриминант не является автоморфным для всех $n>2$.

В настоящей работе мы находим примеры автоморфных дискриминантов для S-поляризованных $K3$-поверхностей с $\operatorname{rk} S\geqslant 2$. См. некоторые результаты конечности в работе Ма [19].

В § 2 даются необходимые определения, связанные с S-поляризованными $K3$-поверхностями, их дискриминантами и автоморфными дискриминантами.

В § 3 доказываются основные теоремы 3.1 и 3.2, которые дают шесть серий таких чётных гиперболических решёток S ранга $\operatorname{rk} S\geqslant 2$, что S-поляризованные $K3$-поверхности имеют автоморфный дискриминант. Они приведены в таблицах 1–6. Все эти примеры связаны с лоренцевыми алгебрами Каца — Муди, построенными в [13], которые являются гиперболическими автоморфными (супералгебрами Ли) Каца — Муди. Соответствующие дискриминантные автоморфные формы построены в [13]. Они определяют такие алгебры Каца — Муди $\mathfrak{g}$ и дают их тождества для знаменателя.

Было бы интересно понять геометрический смысл дискриминатных автоморфных форм и алгебр Каца — Муди для геометрии соответствующих $K3$-поверхностей. Например, мы знаем, что если вес дискриминантной автоморфной формы больше размерности пространства модулей, то пространство модулей по крайней мере унилинейчато (см. теорему 3.4 в § 3).

Предварительный вариант данной работы был опубликован как препринт [14].

§ 2. Решёточно-поляризованные $K3$-поверхности, их модули и дискриминанты

Для решёток мы пользуемся определениями и результатами из [21]. Напомним, что решётка M (эквивалентно, невырожденная целочисленная симметрическая билинейная форма) означает, что M — свободный $\mathbb{Z}$-модуль M конечного ранга с симметричным $\mathbb{Z}$-билинейным спариванием $x\cdot y\in\mathbb{Z}$ для $x, y\in M$. Под сигнатурой M понимается сигнатура соответствующей вещественной формы $M\otimes\mathbb{R}$ над $\mathbb{R}$ (т. е. числа $t_{(+)}$, $t_{(-)}$ положительных и отрицательных квадратов соответственно). Решётка M сигнатуры $(1, \operatorname{rk} M-1)$ называется *гиперболической*. Решётка M называется *чётной*, если $x^2=x\cdot x$ чётно для любого $x\in M$. Через $O(M)$ обозначается группа автоморфизмов решётки M. Каждый элемент $\delta \in M$ с $0 \neq \delta^2$ и $\delta^2 | 2(\delta \cdot M)$ (он называется *корнем*) определяет отражение $s_\delta : x \mapsto x - [(2(x\cdot\delta)/\delta^2]\delta$ для $x \in M$. Легко видеть, что $s_\delta \in O(M)$, $s_\delta(\delta) = -\delta$ и s_δ является тождественным на $\delta_M^\perp$. Через $W^{(2)}(M) \subset O(M)$ обозначается подгруппа, порождённая отражениями во всех элементах $\delta \in M$ с $\delta^2 = -2$ (все они являются корнями).

Пусть S — гиперболическая решётка и

$$V(S) = \{x \in S \otimes \mathbb{R} \mid x^2 > 0\}$$

— *конус решётки* S. Он имеет две компоненты связности: $V^+(S)$ и $V^-(S) = -V^+(S)$. Зафиксируем одну из них, $V^+(S)$, и соответствующее гиперболическое пространство $\mathscr{L}(S) = V^+(S)/\mathbb{R}_{++}$. Здесь $\mathbb{R}_{++}$ обозначает все положительные действительные числа и $\mathbb{R}_+$ — все неотрицательные действительные числа. Пусть $\mathrm{Amp}(S)$, $\mathrm{Amp}(S)/\mathbb{R}_{++}$ — внутренность фундаментальной камеры для группы отражений $W^{(2)}(S)$ в $V^+(S)$ и $\mathscr{L}(S)$ соответственно. Мы фиксируем одну из них. Таким образом, фиксируется пара $(V^+(S), \mathrm{Amp}(S))$, которая определена однозначно с точностью до действия $O(S)$. Она называется *обильным конусом* решётки S и эквивалентна $\mathrm{Amp}(S)$ или $\mathrm{Amp}(S)/\mathbb{R}_{++}$.

Пусть X — кэлерова $K3$-поверхность (о них см., например, [4, 17, 25–27]), т. е. X — неособая компактная комплексная поверхность с нулевым каноническим классом K_X (эквивалентно, $0 \neq \omega_X \in H^{2,0}(X) = \Omega^2[X]$ имеет нулевой дивизор) и иррегулярностью $q(X)$, равной 0 (эквивалентно, X не имеет ненулевых 1-мерных голоморфных дифференциальных форм). Тогда $H^{2,0}(X) = \mathbb{C}\omega_X$ и $H^2(X, \mathbb{Z})$ с формой пересечения является чётной унимодулярной (т. е. с определителем ± 1) решёткой L_{K3} сигнатуры $(3, 19)$. Примитивная подрешётка

$$S_X = H^2(X, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X) = \{x \in H^2(X, \mathbb{Z}) \mid x \cdot \omega_X = 0\} \subset H^2(X, \mathbb{Z})$$

является *решёткой Пикара* поверхности X, порождённой первыми классами Черна всех линейных расслоений на X. Здесь *примитивная* означает, что $H^2(X, \mathbb{Z})/S_X$ не имеет кручения. По определению, S_X может быть либо отрицательно определена, либо полуотрицательно определена, либо гиперболична. В силу результатов Кодаиры, последний случай — это в точности случай, когда X алгебраична и проективна.

Далее предполагается, что $K3$-поверхность X алгебраична. Через $V^+(S_X) = V(X)$ обозначается половина конуса решётки S_X, которая содержит поляризацию поверхности X, и через $\mathrm{Amp}(X) \subset V(X)$ — обильный конус поверхности X. Имеем $\mathrm{Amp}(S_X) = \mathrm{Amp}(X)$, поэтому $\mathrm{Amp}(X)$ даёт обильный конус решётки Пикара S_X, см. [25].

Далее мы фиксируем чётную гиперболическую решётку S и её обильный конус $\mathrm{Amp}(S)$.

Напомним (см., например, [6, 7, 20]), что *$K3$-поверхность X* называется *S-поляризованной*, если фиксировано такое примитивное вложение $S \subset S_X$ решёток, что $\mathrm{Amp}(S) \cap \mathrm{Amp}(X) \neq \varnothing$.

Если вместо последнего условия выполняются только условия $\mathrm{Amp}(S) \cap \cap \overline{\mathrm{Amp}(X)} \neq \varnothing$ и $\mathrm{Amp}(S) \cap \mathrm{Amp}(X) = \varnothing$, то говорят, что X — *вырожденная S-поляризованная $K3$-поверхность*, эквивалентно: *X принадлежит дискриминанту модулей S-поляризованных $K3$-поверхностей*. Из геометрии $K3$-поверхностей (см. [25]) вытекает, что это имеет место тогда и только тогда, когда существует такой $\delta \in (S)^{\perp}_{S_X}$, что $\delta^2 = -2$.

В силу глобальной теоремы Торелли для $K3$-поверхностей [25] и эпиморфности отображения периодов для $K3$-поверхностей [17], для общей S-поляризованной $K3$-поверхности имеем $S_X = S$ и $\mathrm{Amp}(X) = \mathrm{Amp}(S)$, для невырожденной S-поляризованной $K3$-поверхнности X верно, что $(S)^{\perp}_{S_X}$ не имеет элементов δ с $\delta^2 = -2$ и $\mathrm{Amp}(X) \cap \mathrm{Amp}(S) \neq \varnothing$, для вырожденной S-поляризованной $K3$-поверхности решётка $(S)^{\perp}_{S_X}$ имеет элементы δ с $\delta^2 = -2$ и выполнено только, что $\mathrm{Amp}(S) \cap \overline{\mathrm{Amp}(X)} \neq \varnothing$, эквивалентно: *$X$ принадлежит дискриминанту модулей S-поляризованных $K3$-поверхностей*.

Для S-поляризованной $K3$-поверхности X рассмотрим периоды

$$H^{2,0}(X) = \mathbb{C}\omega_X \subset T_X \otimes \mathbb{C} \subset T \otimes \mathbb{C},$$

где $T_X = (S_X)^{\perp}_{H^2(X,\mathbb{Z})}$ — решётка трансцендентных циклов поверхности X и $T = (S)^{\perp}_{H^2(X,\mathbb{Z})}$ — решётка трансцендентных циклов S-поляризации. Периоды дают точку эрмитовой симметрической области типа IV

$$\Omega(T) = \{\mathbb{C}\omega \subset T \otimes \mathbb{C} \mid \omega \cdot \omega = 0 \text{ и } \omega \cdot \overline{\omega} > 0\}^+,$$

где $+$ означает выбор одной из двух компонент связности. Эта точка принадлежит дополнению к дискриминанту

$$\mathrm{Discr}(T) = \bigcup_{\beta \in T^{(2)}} D_\beta, \tag{2.1}$$

где $D_\beta = \{\mathbb{C}\omega \in \Omega(T) \mid \omega \cdot \beta = 0\}$ — рациональный квадратичный дивизор, ортогональный к $\beta \in T$ с $\beta^2 < 0$; напомним, что $\beta^2 = -2$ для $\beta \in T^{(2)}$. Конечно, $D_\beta = D_{-\beta}$, и мы отождествляем $\pm\beta$ в этом определении. Далее

$$O^+(T) = \{g \in O(T) \mid g(\Omega(T)) = \Omega(T)\}$$

— группа автоморфизмов решётки T, которая сохраняет компоненту связности $\Omega(T)$.

Рассмотрим все возможные классы изоморфизма $T_1, \ldots, T_n$ решёток трансцендентных циклов T для всех возможных примитивных вложений $S \subset L_{K3}$, мы сопоставим S-поляризованной $K3$-поверхности X точку в

$$\mathrm{Mod}(S) = \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n} G_k \backslash (\Omega(T_k) - \mathrm{Discr}(T_k)), \tag{2.2}$$

где $G_k \subset O^+(T_k)$ — подходящая подгруппа конечного индекса. В силу глобальной теоремы Торелли [25] и эпиморфности отображения периодов [17] для $K3$-поверхностей, каждая точка в $\mathrm{Mod}(S)$ соответствует некоторой S-поляризованной $K3$-поверхности X.

Напомним, что голоморфная функция Φ на аффинном конусе

$$\Omega(T)^\bullet = \{\omega \in T \otimes \mathbb{C} \mid \omega \cdot \omega = 0 \text{ и } \omega \cdot \overline{\omega} > 0\}^+$$

над $\Omega(T)$ (таким образом, $\Omega(T) = \Omega(T)^\bullet/\mathbb{C}^*$) называется *автоморфной формой на* $\Omega(T)$ *веса* $d \in \mathbb{N}$, если Φ однородна степени $(-d)$ относительно действия $\mathbb{C}^*$ и симметрична относительно подгруппы $H \subset O^+(T)$ конечного индекса.

Теперь мы можем дать определение.

Определение 2.1. Фиксируем чётную гиперболическую решётку S.

По определению, S-поляризованные $K3$-поверхности имеют *автоморфный дискриминант*, если для любого $1 \leqslant k \leqslant n$ в (2.2) существует такая голоморфная автоморфная форма на $\Omega(T_k)$, что носитель её дивизора нулей равен $\mathrm{Discr}(T_k)$ в (2.1). Данная автоморфная форма называется *дискриминантной автоморфной формой*.

Стабильная ортогональная группа

$$\widetilde{O}^+(T) = \{g \in O^+(T) \mid g|_{T^*/T} = \mathrm{id}\}$$

является подгруппой конечного индекса в $O^+(T)$. Для примитивного вложения $S \subset L_{K3}$ и $T = (S)^\perp_{L_{K3}}$ группа $\widetilde{O}^+(T)$ состоит из автоморфизмов из $O^+(T)$, которые продолжаются до элементов $O(L_{K3})$ тождественно на S. Поэтому мы можем предполагать, что $\widetilde{O}^+(T_k) \subset G_k$.

§ 3. Решёточно-поляризованные $K3$-поверхности с автоморфным дискриминантом, связанные с лоренцевыми алгебрами Каца — Муди с группой Вейля 2-отражений

Ниже для решёток используются следующие обозначения. Через $\oplus$ обозначается ортогональная сумма решёток. Через tM обозначается ортогональная сумма t копий решётки M. Через A_k, $k \geqslant 1$, D_m, $m \geqslant 4$, E_l, $l = 6, 7, 8$, обозначаются стандартные решётки корней с диаграммами Дынкина $\mathbb{A}_k$, $\mathbb{D}_m$, $\mathbb{E}_l$ соответственно и корнями с квадратом (-2). Для решётки M через $M(t)$ обозначается решётка, которая получается из M умножением на $0 \neq t \in \mathbb{Q}$ билинейной формы решётки M, если форма $M(t)$ остаётся целочисленной. Через $\langle A \rangle$ обозначается решётка с симметричной матрицей A. Так,

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

даёт чётную унимодулярную решётку сигнатуры $(1, 1)$. Например,

$$L_{K3} \cong 3U \oplus 2E_8.$$

Напомним, что для целочисленной решётки M мы имеем каноническое вложение $M \subset M^* = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})$. Оно определяет (конечную) дискриминантную группу $A_M = M^*/M$ решётки M. Продолжая симметрическую билинейную форму с решётки M на M^*, получаем конечную симметрическую билинейную форму b_M на A_M со значениями в $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ и конечную квадратичную форму q_M на A_M со значениями в $\mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$, если решётка M чётна. Они называются *дискриминантными формами решётки* M.

Если нет других условий, то через $(M)^{\perp}_{L}$ обозначается ортогональное дополнение к решётке M в решётке L для некоторого примитивного вложения $M \subset L$. Для большинства случаев нижеприведённых теорем 3.1 и 3.2 ортогональное дополнение единственно с точностью до изоморфизма. Для других случаев не имеет значения, какой класс изоморфизма берётся.

Имеем следующие шесть серий примеров таких чётных гиперболических решёток S ранга $\operatorname{rk} S \geqslant 2$, что S-поляризованные $K3$-поверхности имеют автоморфный дискриминант.

Теорема 3.1. *Для гиперболических решёток S, приведённых в последних столбцах таблиц* 1–6, *S-поляризованные $K3$-поверхности имеют автоморфный дискриминант. Даётся также дискриминантная квадратичная форма q_S решётки S в обозначениях* [5]. *Чётная гиперболическая решётка S определяется её рангом и q_S однозначно с точностью до изоморфизма* (*см. доказательство*).

Для всех этих случаев решётка трансцендентных циклов $T = (S)^{\perp}_{L_{K3}}$, где $L_{K3} = 3U \oplus 2E_8$, единственна с точностью до изоморфизма и её класс изоморфизма равен $T = U(m) \oplus S^{\mathrm{mir}}$, где гиперболическая решётка S^{mir} дана в первом столбце и m дано во втором столбце таблицы в той же самой строке, что и S.

Теорема 3.2. *Во всех случаях теоремы* 3.1 *дискриминантная автоморфная форма $\Phi(z)$, найденная в* [13], *имеет разложение Фурье с целыми коэффициентами в одномерном каспе, задаваемом ортогональным разложением $T = U(m) \oplus S^{\mathrm{mir}}$* (*см.* [13]), *$z \in S^{\mathrm{mir}} \otimes \mathbb{R} + \sqrt{-1}\, V^+(S^{\mathrm{mir}})$. Данные коэффициенты Фурье определяют лоренцеву* (*гиперболическую и автоморфную*) *супералгебру Ли Каца — Муди $\mathfrak{g}$, которая градуирована гиперболической решёткой S^{mir}. Форма $\Phi(z)$ имеет разложение в бесконечное произведение* (*Борчердса*), *которое даёт кратности корней этой алгебры. См.* [1, 2, 15, 16].

Дивизор формы $\Phi(z)$ является суммой рациональных квадратичных дивизоров D_α, $\alpha \in T^{(2)}$, кратности один.

S^{mir}-поляризованные $K3$-поверхности можно рассматривать как зеркально симметричные к S-поляризованным $K3$-поверхностям зеркальной симметрией, рассмотренной в [6, 7, 11, 12]. *Они имеют замечательное свойство, что существует такой $\rho \in S^{\mathrm{mir}} \otimes \mathbb{Q}$, что $\rho \cdot E = 1$ для каждой неособой рациональной кривой $E \subset X$ с $S_X = S^{\mathrm{mir}}$* (*для $\rho^2 > 0$ и $\operatorname{rk} S^{\mathrm{mir}} = 4$ такие S^{mir} содержатся в списке из* 14 *решёток, найденных Э. Б. Винбергом в* [28]; *о других S^{mir} см.* [22] *и* [23]).

Доказательство. Теоремы 3.1 и 3.2 являются, главным образом, переформулировками результатов [13], с использованием техники дискриминантных форм, развитой в [21].

Пусть S — решётка одной из таблиц 1–6. Из результатов [21] получаем, что $T=(S)^{\perp}_{3U\oplus 2E_8}\cong U(m)\oplus S^{\mathrm{mir}}$, где S^{mir} и m указаны в той же строке таблицы, что и S. Здесь важно, что дискриминантные квадратичные формы q_T и q_S связаны изоморфизмом $q_T\cong -q_S$, так как $T\perp S$ в чётной унимодулярной решётке $3U\oplus 2E_8$. Обратно, $(S)^{\perp}_{3U\oplus 2E_8}=T$ и $(T)^{\perp}_{3U\oplus 2E_8}=S$ для некоторых примитивных вложений $S\subset 3U\oplus 2E_8$ и $T\subset 3U\oplus 2E_8$, если сигнатуры T, S и $3U\oplus 2E_8$ согласованы и $q_T\cong -q_S$; сигнатура $(t_{(+)},t_{(-)})$ и дискриминантная квадратичная форма q определяют род чётной решётки. Теорема [21, теорема 1.13.1] (которая использует результаты Кнезера) даёт условия, при которых чётная неопределённая решётка с инвариантами $(t_{(+)},t_{(-)},q)$ единственна с точностью до изоморфизма.

Для всех S^{mir} и m, указанных в строках таблиц 1–6, автоморфная форма $\Phi(z)$ со свойствами, указанными в теоремах 3.1 и 3.2, построена в [13]. Для решёток таблицы 1 это сделано в [13, теорема 4.2 и предложение 4.1]; таблицы 2 в [13, теорема 4.4]; таблицы 3 в [13, пример 6.1 и теорема 6.1], последний случай $S^{\mathrm{mir}}=U\oplus E_8(2)$ и $m=2$ этой таблицы, связанный с поверхностями Энриквеса, был рассмотрен Борчердсом в [3], а также в [8]; таблицы 4 в [13, теоремы 6.2 и 6.3]; таблицы 5 в [13, лемма 6.4]; таблицы 6 в [13, теорема 6.5].

В силу упомянутых выше результатов из [21] получаем, что с точностью до изоморфизма решётка $S=(T)^{\perp}_{3U\oplus E_8}$ единственна, и S указана в таблицах.

Эти рассуждения дают доказательство. □

Часто существование автоморфного дискриминанта указывает на то, что соответствующие S-поляризованные $K3$-поверхности имеют специальную геометрию. Напомним, что алгебраическое многообразие V называется *унилинейчатым*, если существует доминантное рациональное отображение $Y\times\mathbb{P}^1 \dashrightarrow V$, где Y — алгебраическое многообразие с $\dim Y=\dim V-1$. Имеет место следующий критерий.

Теорема 3.3 (см. [9, теорема 2.1]). *Пусть $\Omega(T)$ — компонента связности области типа IV, определённой решёткой T сигнатуры $(2,n)$, где $n\geqslant 3$, и пусть $\Gamma\subset \mathrm{O}^+(T)$ — арифметическая подгруппа конечного индекса ортогональной группы. Пусть $\widetilde{B}=\sum_r D_r$ в $\Omega(T)$ — дивизориальная часть множества ветвления отображения факторизации $\Omega(T)\to\Gamma\backslash\Omega(T)$. (Это означает, что отражение s_r или $-s_r$ принадлежит Γ.) Предположим, что существует такая модулярная форма F_k относительно Γ веса k с характером (конечного порядка), что $\{F_k=0\}=\sum_r m_rD_r$, где m_r — неотрицательные целые числа. Пусть $m=\max\{m_r\}$ ($m>0$ в силу принципа Кёхера). Если $k>m\cdot n$, то $\Gamma'\backslash\mathcal{D}$ унилинейчато для всякой арифметической группы Γ', содержащей Γ.*

Используя этот критерий, получаем

Теорема 3.4. *Пространство модулей S-поляризованных $K3$-поверхностей является по крайней мере унилинейчатым, если S — одна из решёток таблицы 1 или 2, решётка первых пяти строк таблицы 3 (до решётки $\langle 2\rangle\oplus 5A_1$), первых двух строк таблицы 4 и первых двух строк таблиц 5 и 6.*

Таблица 1

S-поляризованные $K3$-поверхности с автоморфным дискриминантом

S^{mir}	$T=U(m)\oplus S^{\mathrm{mir}}$	вес $\Phi(z)$	$S=(T)^{\perp}_{3U\oplus 2E_8}$	q_S
$U\oplus A_1$	$m=1$	35	$U\oplus E_8\oplus E_7$	2_1^{+1}
$U\oplus 2A_1$	$m=1$	34	$U\oplus E_8\oplus D_6$	2_2^{+2}
$U\oplus A_2$	$m=1$	45	$U\oplus E_8\oplus E_6$	3^{-1}
$U\oplus 3A_1$	$m=1$	33	$U\oplus E_7\oplus D_6$	2_3^{+3}
$U\oplus A_3$	$m=1$	54	$U\oplus E_8\oplus D_5$	4_3^{-1}
$U\oplus 4A_1$	$m=1$	32	$U\oplus D_6\oplus D_6$	2_4^{+4}
$U\oplus 2A_2$	$m=1$	42	$U\oplus E_6\oplus E_6$	3^{+2}
$U\oplus A_4$	$m=1$	62	$U\oplus E_8\oplus A_4$	5^{+1}
$U\oplus D_4$	$m=1$	72	$U\oplus E_8\oplus D_4$	2_{II}^{-2}
$U\oplus D_4$	$m=2$	40	$U(2)\oplus E_8\oplus D_4$	2_{II}^{-4}
$U\oplus A_5$	$m=1$	69	$U\oplus E_8\oplus A_2\oplus A_1$	$2_{-1}^{+1}, 3^{+1}$
$U\oplus D_5$	$m=1$	88	$U\oplus E_8\oplus A_3$	4_5^{-1}
$U\oplus 3A_2$	$m=1$	39	$U\oplus E_6\oplus 2A_2$	3^{-3}
$U\oplus 2A_3$	$m=1$	48	$U\oplus 2D_5$	4_6^{+2}
$U\oplus A_6$	$m=1$	75	$U\oplus E_8\oplus\left\langle\begin{matrix}-2 & 1\\ 1 & -4\end{matrix}\right\rangle$	7^{-1}
$U\oplus D_6$	$m=1$	102	$U\oplus E_8\oplus 2A_1$	2_{-2}^{+2}
$U\oplus E_6$	$m=1$	120	$U\oplus E_8\oplus A_2$	3^{+1}
$U\oplus A_7$	$m=1$	80	$U\oplus E_8\oplus\langle -8\rangle$	8_{-1}^{+1}
$U\oplus D_7$	$m=1$	114	$U\oplus E_8\oplus\langle -4\rangle$	4_{-1}^{+1}
$U\oplus E_7$	$m=1$	165	$U\oplus E_8\oplus A_1$	2_{-1}^{+1}
$U\oplus 2D_4$	$m=1$	60	$U\oplus 2D_4$	2_{II}^{+4}
$U\oplus D_8$	$m=1$	124	$U\oplus D_8$	2_{II}^{+2}
$U\oplus E_8$	$m=1$	252	$U\oplus E_8$	0
$U(2)\oplus 2D_4$	$m=1$	28	$U(2)\oplus 2D_4$	2_{II}^{+6}
$U\oplus 2E_8$	$m=1$	132	U	0

Доказательство. Пространство модулей S-поляризованных $K3$-поверхностей определено в (2.2). Для решёток S таблиц 1–6 имеется только один класс изоморфизма соответствующей решётки T, т. е. в (2.2) имеется только один член. Модулярная группа $G=G_1$ пространства модулей всегда содержит стабильную ортогональную группу $\widetilde{\mathrm{O}}^{+}(T)$, действующую тривиально

Таблица 2

S-поляризованные $K3$-поверхности с автоморфным дискриминантом

S^{mir}	$T=U(m)\oplus S^{mir}$	вес $\Phi(z)$	$S=(T)^{\perp}_{3U\oplus 2E_8}$	q_S
U	$m=1$	12	$U\oplus E_8\oplus E_8$	0
$U\oplus A_1(2)$	$m=1$	12	$U\oplus E_8\oplus D_7$	4_1^{+1}
$U\oplus A_1(3)$	$m=1$	12	$U\oplus E_8\oplus E_6\oplus A_1$	$2_{-1}^{+1}, 3^{-1}$
$U\oplus A_1(4)$	$m=1$	12	$U\oplus E_8\oplus A_7$	8_1^{+1}
$U\oplus 2A_1(2)$	$m=1$	12	$U\oplus D_7\oplus D_7$	4_2^{+2}
$U\oplus A_2(2)$	$m=1$	12	$U\oplus E_8\oplus D_4\oplus A_2$	$2_{II}^{-2}, 3^{+1}$
$U\oplus A_2(3)$	$m=1$	12	$U\oplus E_8\oplus (A_2(3))^{\perp}_{E_8}$	$3^{-1}, 9^{-1}$
$U\oplus A_3(2)$	$m=1$	12	$U\oplus E_8\oplus (A_3(2))^{\perp}_{E_8}$	$2_{II}^{-2}, 8_3^{-1}$
$U\oplus D_4(2)$	$m=1$	12	$U\oplus E_8\oplus D_4(2)$	$2_{II}^{-2}, 4_{II}^{-2}$
$U\oplus E_8(2)$	$m=1$	12	$U\oplus E_8(2)$	2_{II}^{+8}

Таблица 3

S-поляризованные $K3$-поверхности с автоморфным дискриминантом

S^{mir}	$T=U(m)\oplus S^{mir}$	вес $\Phi(z)$	$S=(T)^{\perp}_{3U\oplus 2E_8}$	q_S
$\langle 2\rangle\oplus A_1$	$m=2$	12	$U(2)\oplus E_8\oplus E_7\oplus A_1$	2_0^{+4}
$\langle 2\rangle\oplus 2A_1$	$m=2$	11	$U(2)\oplus E_7\oplus E_7\oplus A_1$	2_1^{+5}
$\langle 2\rangle\oplus 3A_1$	$m=2$	10	$U(2)\oplus E_7\oplus D_6\oplus A_1$	2_2^{+6}
$\langle 2\rangle\oplus 4A_1$	$m=2$	9	$U(2)\oplus D_6\oplus D_6\oplus A_1$	2_3^{+7}
$\langle 2\rangle\oplus 5A_1$	$m=2$	8	$U\oplus D_6\oplus 6A_1$	2_4^{+8}
$\langle 2\rangle\oplus 6A_1$	$m=2$	7	$U(2)\oplus D_6\oplus 5A_1$	2_5^{+9}
$\langle 2\rangle\oplus 7A_1$	$m=2$	6	$U(2)\oplus D_4\oplus 6A_1$	2_6^{+10}
$\langle 2\rangle\oplus 8A_1$	$m=2$	5	$U(2)\oplus E_8(2)\oplus A_1$	2_7^{+11}
$U\oplus E_8(2)$	$m=2$	4	$U(2)\oplus E_8(2)$	2_{II}^{+10}

на дискриминантную квадратичную форму решётки T. Дивизор D_r с $r^2=-2$, $r\in T$, всегда принадлежит дивизору ветвления, так как $s_r\in \widetilde{\mathrm{O}}^+(T)$. Заметим, что $\widetilde{O}^+(T)$ порождена -2-отражениями для большинства решёток таблиц 1 и 2 (см. [10]). По построению (см. [13, §4]), любая дискриминантная автоморфная форма таблиц 1 и 2 является модулярной формой относительно $\widetilde{\mathrm{O}}^+(T)$ с характером det с простейшим возможным дивизором $\mathrm{Discr}(T)$

Таблица 4

S-поляризованные $K3$-поверхности с автоморфным дискриминантом

S^{mir}	$T=U(m)\oplus S^{\mathrm{mir}}$	вес $\Phi(z)$	$S=(T)^{\perp}_{3U\oplus 2E_8}$	q_S
$U(2)\oplus D_4$	$m=1$	40	$U(2)\oplus E_8\oplus D_4$	2_{II}^{-4}
$U(2)\oplus D_4$	$m=2$	24	$U\oplus 3D_4$	2_{II}^{-6}
$U(4)\oplus D_4$	$m=4$	6	$U(4)\oplus (U(4)\oplus D_4)^{\perp}_{U\oplus 2E_8}$	$2_{II}^{-2}, 4_{II}^{+4}$

Таблица 5

S-поляризованные $K3$-поверхности с автоморфным дискриминантом

S^{mir}	$T=U(m)\oplus S^{\mathrm{mir}}$	вес $\Phi(z)$	$S=(T)^{\perp}_{3U\oplus 2E_8}$	q_S
$U(4)\oplus A_1$	$m=4$	5	$U(4)\oplus (U(4))^{\perp}_{U\oplus E_8}\oplus E_7$	$2_1^{+1}, 4_{II}^{+4}$
$U(4)\oplus 2A_1$	$m=4$	4	$U(4)\oplus (U(4))^{\perp}_{U\oplus E_8}\oplus D_6$	$2_2^{+2}, 4_{II}^{+4}$
$U(4)\oplus 3A_1$	$m=4$	3	$U(4)\oplus (U(4))^{\perp}_{U\oplus E_8}\oplus D_4\oplus A_1$	$2_3^{+3}, 4_{II}^{+4}$
$U(4)\oplus 4A_1$	$m=4$	2	$U(4)\oplus (U(4))^{\perp}_{U\oplus E_8}\oplus 4A_1$	$2_4^{+4}, 4_{II}^{+4}$

Таблица 6

S-поляризованные $K3$-поверхности с автоморфным дискриминантом

S^{mir}	$T=U(m)\oplus S^{\mathrm{mir}}$	вес $\Phi(z)$	$S=(T)^{\perp}_{3U\oplus 2E_8}$	q_S
$U(3)\oplus A_2$	$m=3$	9	$U(3)\oplus (U(3))^{\perp}_{U\oplus E_8}\oplus E_6$	3^{-5}
$U(3)\oplus 2A_2$	$m=3$	6	$U(3)\oplus (U(3))^{\perp}_{U\oplus E_8}\oplus 2A_2$	3^{+6}
$U(3)\oplus 3A_2$	$m=3$	3	$U(3)\oplus (U(3)\oplus A_2)^{\perp}_{U\oplus E_8}\oplus 2A_2$	3^{-7}

кратности один. Вес дискриминантной автоморфной формы указан в таблицах. Если размерность n пространства модулей больше чем 2, применяем теорему 3.3. Если $n=1$ или 2, соответствующее модулярное многообразие является по крайней мере унирациональным.

Конструкция дискриминантных автоморфных форм таблицы 3 использует изоморфизмы

$$\mathrm{O}(U(2)\oplus(\langle 2\rangle\oplus(k+1)\langle -2\rangle))\cong \mathrm{O}(U\oplus(\langle 1\rangle\oplus(k+1)\langle -1\rangle))\cong \mathrm{O}(U\oplus U\oplus D_k)$$

(см. [13, лемма 6.1]). Кроме того, отражения относительно -2-элементов решётки $\langle 2\rangle \oplus (k+1)\langle -2\rangle$ соответствуют отражениям относительно -4-корней решётки $U\oplus D_k$ или -1-корней решётки $U\oplus D_k^*$. Если $k\neq 4$, то все -1-корни решётки $2U\oplus D_k^*$ принадлежат единственной $\widetilde{\mathrm{O}}^+(2U\oplus D_k)$-орбите, которая равна множеству -1-элементов решётки $2U\oplus k\langle -1\rangle$. Если $k=4$, то имеются три такие $\widetilde{\mathrm{O}}^+(2U\oplus D_4)$-орбиты и они совпадают с -1-элементами решётки $2U\oplus k\langle -1\rangle$.

Дискриминантные автоморфные формы таблицы 3 (см. [13, § 6]) являются модулярными относительно полной ортогональной группы $\mathrm{O}^+(2U\oplus D_k)$, если $k\neq 4$, и подгруппы $\widetilde{\mathrm{O}}^+(2U\oplus D_4)$, содержащей $\widetilde{\mathrm{O}}^+(U(2)\oplus(\langle 2\rangle\oplus(5\langle -2\rangle))$. Если $k\leqslant 5$, то вес дискриминантной автоморфной формы строго больше, чем размерность пространства модулей.

Аналогичные аргументы работают для остальных случаев модулярных форм, построенных в [13, § 6.3–6.5]. □

Замечание. В каждой таблице 3–6 имеется одна дискриминантная автоморфная форма веса, равного размерности однородной области. Отсюда следует, что размерность Кодаиры некоторого конечного фактора соответствующего пространства модулей равна 0. (См. критерии в [8] и [9, теорема 1.3].) Мы надеемся рассмотреть эти случаи в деталях в дальнейших публикациях.

Список литературы

[1] *Borcherds R. E.* Generalized Kac — Moody algebras // J. Algebra 1988. Vol. 115. P. 501–512.

[2] *Borcherds R. E.* Automorphic forms on $\mathrm{O}_{s+2,2}(\mathbf{R})$ and infinite products // Invent. Math. 1995. Vol. 120, № 1. P. 161–213.

[3] *Borcherds R. E.* The moduli space of Enriques surfaces and the fake Monster Lie superalgebra // Topology. 1996. Vol. 35. P. 699–710.

[4] *Burns D., Rapoport M.* On the Torelli problem for Kählerian K-3 surfaces // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1975. Vol. 8, № 2. P. 235–273.

[5] *Conway J. H., Sloane N. J. A.* Sphere packings, lattices and groups. New York: Springer-Verlag, 1988. (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften; Bd. 290).

[6] *Долгачев И. В.* Зеркальная симметрия для поляризованных $K3$-поверхностей // Алгебраическая геометрия — 4. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и её прил. Темат. обз. М.: ВИНИТИ, 2001. Т. 33. С. 20–71.

[7] *Долгачев И. В., Никулин В. В.* Исключительные особенности В. И. Арнольда и $K3$-поверхности // Всесоюзная топологическая конференция в Минске (тезисы). Минск: Минский гос. ун-т, 1977.

[8] *Gritsenko V.* Reflective modular forms in algebraic geometry. Preprint 2010, arxiv:math/1005.3753

[9] *Gritsenko V., Hulek K.* Uniruledness of orthogonal modular varieties // J. Algebraic Geom. 2014. Vol. 23. P. 711–725.

[10] *Gritsenko V., Hulek K., Sankaran G. K.* Abelianisation of orthogonal groups and the fundamental group of modular varieties // J. Algebra. 2009. Vol. 322. P. 463–478.

[11] *Gritsenko V. A., Nikulin V. V.* $K3$ surfaces, Lorentzian Kac — Moody algebras and mirror symmetry // Math. Res. Lett. 1996. Vol. 3, № 2. P. 211–229. arxiv:alg-geom/9510008

[12] *Gritsenko V. A., Nikulin V. V.* The arithmetic mirror symmetry and Calabi — Yau manifolds // Comm. Math. Phys. 2000. Vol. 210. P. 1–11. arxiv:alg-geom/9612002

[13] *Gritsenko V. A., Nikulin V. V.* Lorentzian Kac — Moody algebras with Weyl groups of 2-reflections. Preprint 2016, arxiv:1602.08359

[14] *Gritsenko V. A.*, *Nikulin V. V.* Examples of lattice-polarized $K3$ surfaces with automorphic discriminant, and Lorentzian Kac — Moody algebras. Preprint 2017, arxiv:1702.07551
[15] *Kac V.* Infinite dimensional Lie algebras. Cambridge Univ. Press, 1990.
[16] *Kac V.* Lie superalgebras // Adv. Math. 1977. Vol. 26. P. 8–96.
[17] *Куликов Вик. С.* Вырождения $K3$-поверхностей и поверхностей Энриквеса // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41, вып. 5. С. 1008–1042.
[18] *Looijenga E.* Compactifications defined by arrangements. II. Locally symmetric varieties of type IV // Duke Math. J. 2003. Vol. 119, № 3. P. 527–588. arxiv:math/0201218
[19] *Ma S.* On the Kodaira dimension of orthogonal modular varieties. arxiv:1701.03225
[20] *Никулин В. В.* Конечные группы автоморфизмов келеровых поверхностей типа $K3$ // Труды ММО. М.: Изд-во Московского ун-та, 1979. Т. 38. С. 75–137.
[21] *Никулин В. В.* Целочисленные симметрические билинейные формы и некоторые их геометрические приложения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43, вып. 1. С. 111–177.
[22] *Никулин В. В.* О факторгруппах групп автоморфизмов гиперболических форм по подгруппам, порождённым 2-отражениями. Алгебро-геометрические приложения // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. М.: ВИНИТИ, 1981. Т. 18. С. 3–114.
[23] *Никулин В. В.* Поверхности типа $K3$ с конечной группой автоморфизмов и группой Пикара ранга три // Алгебраическая геометрия и ее приложения. Сборник статей. Труды МИАН СССР. 1984. Т. 165. С. 119–142.
[24] *Никулин В. В.* Замечание о дискриминантах многообразий модулей поверхностей $K3$ как множеств нулей автоморфных форм // Алгебраическая геометрия — 4. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и её прил. Темат. обз. М.: ВИНИТИ, 2001. Т. 33. С. 242–250.
[25] *Пятецкий-Шапиро И. И.*, *Шафаревич И. Р.* Теорема Торелли для алгебраических поверхностей типа $K3$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 35, вып. 3. С. 530–572.
[26] *Siu Y.-T.* A simple proof of the surjectivity of the period map of $K3$ surfaces // Manuscripta Math. 1981. Vol. 35, № 3. P. 311–321.
[27] *Todorov A.* Applications of the Kähler — Einstein — Calabi — Yau metric to moduli of $K3$ surfaces // Invent. Math. 1981. Vol. 61, № 3. P. 251–265.
[28] *Винберг Э. Б.* Классификация 2-рефлективных гиперболических решеток ранга 4 // Труды ММО. 2007. Т. 68. С. 44–76. (English transl. in *Trans. Moscow Math. Soc.* 2007. P. 39–66.)

Представлено в редакцию 14.03.2017/13.04.2017

Валерий Алексеевич Гриценко
Laboratoire Paul Painlevé, IUF,
Université de Lille 1, France.
НИУ ВШЭ, Москва
E-mail: Valery.Gritsenko@math.univ-lille1.fr

Вячеслав Валентинович Никулин
Математический институт им. Стеклова РАН.
Department of Pure Mathematics,
the University of Liverpool, UK
E-mail: nikulin@mi.ras.ru
vvnikulin@list.ru
vnikulin@liv.ac.uk